

**8. Die Schwingungsdauer
und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen;
von F. A. Schulze.**

Die Eigenschaften der asymmetrischen Schwingungen, welche entstehen, wenn die Kraft bez. das Drehungsmoment, welche das aus der Ruhelage abgelenkte System in diese zurückzuführen bestrebt ist, für entgegengesetzt gleiche Ablenkungen nicht denselben absoluten Wert hat, sind kürzlich von Franz Richarz und Paul Schulze¹⁾ untersucht worden. Sie haben hauptsächlich für mehrere Fälle asymmetrischer Schwingungen die Abhängigkeit der Asymmetrie der Schwingungen von den übrigen bestimmenden physikalischen Grössen, sowie den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Asymmetrie der Schwingungen und der Asymmetrie der Ablenkungen entwickelt und durch Versuche numerisch bestätigt.

Paul Schulze²⁾ hat sodann an dem speciellen Beispiel des Unifilarmagnetometers gezeigt, wie sehr man unter Umständen in praktisch wichtigen Fällen auf diese Asymmetrien Rücksicht nehmen muss.

Bei dieser Wichtigkeit der asymmetrischen Schwingungen und der Häufigkeit ihres Vorkommens dürfte es gelegentlich von Nutzen sein, Ausdrücke für die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen, wenigstens für kleine Amplituden, zu besitzen, die im Folgenden gegeben werden sollen.

1. Die Schwingungsdauer asymmetrischer Schwingungen.

Wie Franz Richarz u. Paul Schulze³⁾ gezeigt haben, ist die Differentialgleichung der asymmetrischen Schwingungen für kleine Amplituden von der Form

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \alpha f''(0) - \frac{\alpha^2}{2} f'''(0),$$

1) F. Richarz u. P. Schulze, Ann. d. Phys. 8. p. 348. 1902; die ausführlichen Rechnungen vergleiche in der Inaug.-Diss. von P. Schulze, Greifswald 1901.

2) P. Schulze, Ann. d. Phys. 8. p. 714. 1902.

3) F. Richarz u. P. Schulze, l. c. p. 362.

wo α die Ablenkung aus der Ruhelage, K das Trägheitsmoment ist; f ist eine Function von α , die noch die der jeweiligen Aufgabe eigenen Parameter enthält; sie zeigen ferner, dass, wenn $\alpha = +\vartheta$ der eine Umkehrpunkt ist, der andere

$$\alpha = -\vartheta - \frac{f''(0)}{3 f'(0)} \text{ ist.}$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{f'(0)}{K} = c_1, \quad \frac{f''(0)}{2K} = c_2$$

gesetzt; die beiden Umkehrpunkte sind dann

$$\alpha = +\vartheta \quad \text{und} \quad \alpha = -\vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2.$$

Die Integration der Bewegungsgleichung liefert:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = (\vartheta^2 - \alpha^2) c_1 + \frac{2}{3} c_2 (\vartheta^3 - \alpha^3).$$

Die Dauer der Schwingung von einem zum anderen Umkehrpunkt wird also:

$$T = \int_{-\vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2}^{\vartheta} \frac{d\alpha}{\sqrt{c_1 (\vartheta^2 - \alpha^2) + \frac{2}{3} c_2 (\vartheta^3 - \alpha^3)}},$$

also ein elliptisches Integral erster Gattung.

Auf die Normalform wird dieser Ausdruck gebracht durch die Substitution:

$$\frac{dx}{\sqrt{A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}} = + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(\alpha_1-\alpha_2)}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

$$\frac{1-k}{1+k} = + \sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_3}}, \quad \frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2} = - \sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}} \cdot \frac{1-z}{1+z}.$$

Hierbei sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$c_1 (\vartheta^2 - \alpha^2) + \frac{2}{3} c_2 (\vartheta^3 - \alpha^3) = 0.$$

Diese sind annähernd:

$$\alpha_1 = +\vartheta,$$

$$\alpha_2 = -\vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2,$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2,$$

ferner ist $A = -\frac{2}{3}c_2$, mithin

$$T = + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-\frac{2}{3}c_2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-\frac{2}{3}c_2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \pi \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right\}.$$

Est ist nun

$$k = \frac{1 - \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_3 + 2\sqrt{\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2}}.$$

Durch Einsetzen der Werte von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wird der Nenner, indem man wieder nur Glieder von der Grössenordnung ϑ^2 berücksichtigt:

$$-2\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 + 3\frac{c_1}{c_2} + 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 4\vartheta^2}.$$

Demnach wird:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}c_2\left\{3\frac{c_1}{c_2} - 2\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 + 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 4\vartheta^2}\right\}}} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \dots\right).$$

Hieraus folgt nach einigen Umformungen unter Benutzung bekannter Annäherungsformeln für $\sqrt{1+\delta}$ und $1/\sqrt{1+\delta}$, wo δ klein gegen 1,

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{7}{18} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^2 \right\} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right),$$

nun ist

$$k = \frac{-2\vartheta - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta^3}{-2\frac{c_2}{c_1}\vartheta^2 + 3\frac{c_1}{c_2} + 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 4\vartheta^2}},$$

also annähernd

$$k = -\frac{2\vartheta}{3\frac{c_1}{c_2} + 3\frac{c_1}{c_2}} = -\frac{1}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta, \quad k^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\vartheta^2,$$

mithin

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{7}{18} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{36} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^2 \right\},$$

oder schliesslich:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{5}{12} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^2 \right\}.$$

Wie es sein muss, geht der Ausdruck für $c_2 = 0$ in den bekannten Ausdruck für die Dauer der gewöhnlichen „elastischen“ Schwingungen über.

Beim gewöhnlichen Pendel gilt, falls man noch α^3 berücksichtigt, die Gleichung

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \vartheta^2 \right\};$$

sobald also c_2/c_1 nur etwa den Wert 0,4 übersteigt, ist die asymmetrische Schwingung schon bedeutend *weniger isochron*, als die symmetrische Pendelschwingung; mit Zunahme von c_2/c_1 nimmt die Abweichung vom Isochronismus sehr schnell zu.

Es hätte keine principielle Schwierigkeit, die Schwingungsdauer der asymmetrischen Schwingungen zu berechnen unter Berücksichtigung der Glieder mit α^3 , also allgemein eine Schwingung, die nach der Gleichung

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - c_3 \alpha^3$$

vor sich geht. Die Schwingungsdauer würde sich dann wieder als ein elliptisches Integral erster Gattung darstellen; die Umkehrpunkte müssten in analoger Weise berechnet werden wie in dem vorigen Fall; wobei aber nun eine cubische Gleichung aufzulösen wäre. Im ganzen würde die Rechnung erheblich complicirter werden, ohne die Einsicht in die Sache wesentlich zu erhöhen. Falls, wie in den meisten vorkommenden Fällen, c_3 dasselbe Vorzeichen hat wie c_1 , so würde in dem Ausdruck für T sich der Factor von ϑ^2 noch grösser, die Isochronie also sich noch geringer ergeben.

Für ganz kleine Elongationen wird also $T = \pi / \sqrt{c_1}$ und es hängt also die Aenderung der Schwingungsdauer gegen die normale symmetrische ab von der Art, mit der sich c_1 mit der die Asymmetrie bedingenden Ursache ändert, über die sich natürlich allgemein nichts aussagen lässt. In den beiden von F. Richarz und Paul Schulze näher betrachteten Fällen asymmetrischer Schwingungen wird, wie man leicht sieht, mit zunehmender Asymmetrie c_1 kleiner, also die Schwingungsdauer grösser.

Die abgeleitete Formel für die Schwingungsdauer wurde an den Schwingungen eines durch Torsion aus dem Meridian abgelenkten unifilar aufgehängten Magneten geprüft. Die Bezeichnungen sind dieselben wie die von F. Richarz und Paul Schulze benutzten. Der Magnet bilde also mit dem Meridian den Winkel γ , wenn der Torsionskopf um den Winkel ω gedreht ist; ϑ sei die maximale Elongation nach der tordierten Seite hin, T die Schwingungsdauer in Sekunden. Bezüglich der Versuche selbst sei nur bemerkt, dass hierzu eine Coulomb'sche Drehwaage mit cylindrischem Glasgehäuse benutzt wurde, an der sich eine Gradteilung befand, vor welcher das Magnetende vorbeistrich, sodass die Drehungswinkel bequem abgelesen werden konnten. Die Schwingungsdauern selbst wurden mit einer $\frac{1}{6}$ Sec. angehenden Arretiruhr gemessen. Die allgemeine Bewegungsgleichung ist hier ¹⁾

$$K \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D \sin(\gamma + \alpha) + D \frac{\omega - (\gamma + \alpha)}{\omega - \gamma} \sin \gamma.$$

Für Schwingungen, bei denen nur die quadratischen Glieder zu berücksichtigen sind, wird hieraus:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{D}{K} \left\{ \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \right\} \alpha + \frac{D}{2K} \alpha^2 \sin \gamma.$$

K ist das Trägheitsmoment des Magneten, D durch das vom Erdmagnetismus auf ihn ausgeübte Drehungsmoment gegeben. Es ist also

$$c_1 = \frac{D}{K} \left\{ \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} \right\},$$

$$c_2 = -\frac{D}{2K} \sin \gamma.$$

Ohne D und K zu messen, lässt sich die Formel für T so prüfen, dass man die beobachteten Quotienten der Schwingungsdauer für die betreffende asymmetrische und die symmetrische bei $\gamma = 0$ stattfindende Schwingung mit den berechneten vergleicht, worauf es ja auch nur ankommt. ϑ , ω und γ sind in Graden angegeben.

1) F. Richarz u. P. Schulze, l. c. p. 350.

Unter $T_{\text{ber.}}$ sind für $\vartheta = 0$ die aus dem Wert von c_1 sich berechnenden Werte

$$T_{\text{ber.}} = T_{\vartheta=0, \gamma=0} \cdot \sqrt{\frac{c_{1\gamma=0}}{c_{1\gamma}}}$$

angegeben; für $\vartheta > 0$ jedoch ist dann der für $\vartheta = 0$ beobachtete Wert zu Grunde gelegt,

$$T_{\vartheta \text{ber.}} = T_{\vartheta=0 \text{beob.}} \times \left\{ 1 + \left[\frac{5}{1^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 + \frac{1}{1^{\frac{1}{6}}} \right] \vartheta^2 \right\},$$

da es sich ja hierbei nur um den Einfluss von ϑ handelt. Es ist hierbei noch additiv zu ϑ^2 der für die gewöhnlichen symmetrischen Pendelschwingungen unter Berücksichtigung von α^3 hinzutretende Factor $\frac{1}{1^{\frac{1}{6}}}$ hinzugefügt, um diesen Einfluss mit einzuführen. Uebrigens ist $\frac{1}{1^{\frac{1}{6}}}$ bei den Versuchen nur bis etwa $\gamma = 30^\circ$ noch von gleicher Grössenordnung wie $\frac{5}{1^{\frac{5}{2}}} (c_2/c_1)^2$; für grössere Winkel tritt $\frac{1}{1^{\frac{1}{6}}}$ ganz zurück hinter $\frac{5}{1^{\frac{5}{2}}} (c_2/c_1)^2$. Unter $T_{\text{beob.}}$ sind für $\vartheta = 0$ diejenigen Werte angegeben, der sich T nach der graphischen Extrapolation mit abnehmendem ϑ asymptotisch nähert.

Die mitgeteilten Versuche sind beliebig aus dem Versuchsmaterial herausgegriffen.

1. $\omega = 0^\circ$, $\gamma = 0^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	11,84	—
6	11,84	—
12	11,88	11,87
18	11,91	11,92

2. $\omega = 360^\circ$, $\gamma = 34,4^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	12,94	12,92
6	12,95	12,95
12	12,96	12,98
18	12,99	13,02

3. $\omega = 540^\circ$, $\gamma = 57,3^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	15,48	15,50
6	15,52	15,52
12	15,64	15,63
18	15,80	15,85

4. $\omega = 620^\circ$, $\gamma = 70,3^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	18,70	18,80
6	18,78	18,80
12	19,20	19,10
18	19,68	19,80

5. $\omega = 650^\circ$, $\gamma = 78,05^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	22,28	22,49
6	22,53	22,53
12	23,50	23,28
18	24,20	24,26

6. $\omega = 660^\circ$, $\gamma = 82,8^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	25,84	26,30
6	26,40	26,30
12	28,30	28,08

7. $\omega = 670^\circ$, $\gamma = 87,0^\circ$.

ϑ	$T_{\text{beob.}}$	$T_{\text{ber.}}$
0°	32,00	32,04
—	—	—
—	—	—

Wie man sieht, wird die abgeleitete Formel gut bestätigt; es ist deutlich zu sehen, wie mit wachsender Asymmetrie mit steigenden Werten von γ die Schwingungen immer weniger isochron sind.

2. Verteilung der Schwingungsdauer auf die Elongationen rechts und links von der Nulllage.

Es möge noch auf eine eigentümliche Eigenschaft der asymmetrischen Schwingungen hingewiesen werden, die sich ergibt, wenn man berechnet, wie sich die Schwingungsdauer von der einen Elongation zur anderen verteilt auf die Strecken rechts und links von der Ruhelage.

Für die Ruhelage $x=0$ wird

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}} \cdot \frac{1 - z_0}{1 + z_0}; \quad \text{also} \quad z_0 = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}} &= \sqrt{\frac{\vartheta + \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2}{-\vartheta + \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta - \frac{4}{9} \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \vartheta^2\right)}{\frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta - \frac{8}{9} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \vartheta^2\right)}}. \end{aligned}$$

Daraus bei Anwendung bekannter Näherungsformeln:

$$\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}} = 1 + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta,$$

ferner ist

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\vartheta}{-\vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2} = - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta \right),$$

daraus wieder in erster Annäherung:

$$z_0 = \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & | & & & \\ -1 & & & & 0 & & +1 \\ & & & \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta & & & \end{array}$$

Die Viertelschwingungsdauern zu beiden Seiten dieser Ruhelage werden also ungleich; denn es ist

$$\int_0^{\frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

annähernd gleich

$$\int_0^{\frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta} dz \left(1 + \frac{z^2}{2} \right) \left(1 + \frac{k^2 z^2}{2} \right) = \int_0^{\frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta} dz \left(1 + \frac{k^2 + 1}{2} z^2 \right),$$

also annähernd gleich $\frac{2}{3} c_2 / c_1 \vartheta$.

Die beiden Schwingungsdauern rechts und links von der Ruhelage, die mit T_r und T_l bezeichnet werden mögen, sind demnach annähernd

$$T_l = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{5}{12} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \vartheta^2 \right\} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta \right),$$

$$T_r = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left\{ 1 + \frac{5}{12} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \vartheta^2 \right\} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta \right).$$

Im vorliegenden Beispiel, wo c_2/c_1 negativ ist, ist also stets $T_l > T_r$, und zwar ist

$$T_l - T_r = - \frac{4}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta \frac{1 + \frac{5}{12} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \vartheta^2}{\sqrt{c_1}},$$

oder

$$T_l - T_r = - \frac{4}{3\pi} \frac{c_2}{c_1} \vartheta \cdot T, \quad \frac{T_l - T_r}{T} = - \frac{4}{3\pi} \frac{c_2}{c_1} \vartheta.$$

Aus den Ausdrücken für T_l und T_r folgt nun ferner die eigentümliche Thatsache, dass zwar T_l mit abnehmender Elongation, wie zu erwarten, abnimmt, nicht aber T_r ; T_r wächst vielmehr mit abnehmender Elongation; für $\vartheta = 0$ nähern sich schliesslich T_l und T_r asymptotisch dem gleichen Wert.

Da $T_l - T_r$ von der Grössenordnung von ϑ ist, so sind die Unterschiede zwischen T_l und T_r recht beträchtlich.

Die gezogenen Folgerungen wurden durch die Versuche gut bestätigt, wie folgende Tabellen zeigen.

1. $\gamma = 33,3^\circ$.

ϑ	T_l	T_r	$\frac{T_l - T_r}{T}$ beob.	$\frac{T_l - T_r}{T}$ ber.
18°	6,8	6,4	0,033	0,042

Hier waren die Zeiten zu kurz und einander zu nahe gleich, um mit der Arretiruhr genügend genau gemessen werden zu können.

2. $\gamma = 50,1^\circ$.

ϑ	T_l	T_r	$\frac{T_l - T_r}{T}$ beob.	$\frac{T_l - T_r}{T}$ ber.
6°	7,5	7,2	0,020	0,022
12	7,8	7,0	0,053	0,044
19	8,0	6,8	0,081	0,071

3. $\gamma = 70,3^\circ$.

ϑ	T_l	T_r	$\frac{T_l - T_r}{T}$ beob.	$\frac{T_l - T_r}{T}$ ber.
6°	9,8	9,0	0,042	0,045
12	10,3	8,8	0,08	0,09
18	11,4	8,4	0,15	0,15

4. $\gamma = 78,25^\circ$.

ϑ	T_l	T_r	$\frac{T_l - T_r}{T}$ beob.	$\frac{T_l - T_r}{T}$ ber.
6°	12,2	10,6	0,074	0,068
12	13,0	10,0	0,131	0,136
18	14,6	9,6	0,212	0,227

Man erkennt deutlich wie T_1 mit ϑ zunimmt, T_r dagegen mit wachsendem ϑ abnimmt. Da die Rechnung nur angenähert, und die Zeitmessungen nur auf $\frac{1}{5}$ Sec. genau sind, so dürfte die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung befriedigend sein.

Im allgemeinen ist also bei sehr geringer Asymmetrie auch die Abweichung der Schwingungsdauer von derjenigen bei symmetrischer Anordnung ebenfalls nur gering. Immerhin wird auch bei geringer Asymmetrie auf die durch sie bedingte Aenderung der Schwingungsdauer Rücksicht zu nehmen sein, wo es sich um genaue Messungen handelt, z. B. bei Bestimmung von Trägheitsmomenten, bei der Gauss'schen Bestimmung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und dergleichen. Namentlich dürfte hier auf etwaige elastische Nachwirkung zu achten sein, die leicht Asymmetrie in die Schwingungen hineinbringen kann. Auch bei Messungen von Schwingungsdauern zur Bestimmung der Erdschwere mit dem Pendel könnte sich die Schwingungsdauer merkbar ändern, wenn etwa seitlich in der Erde grosse Metallmassen liegen.

3. Dämpfung der asymmetrischen Schwingungen.

Zum Schluss sei noch ein Ausdruck für die Elongationen asymmetrischer Schwingungen unter Berücksichtigung der Dämpfung gegeben. Bei Einführung einer der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungskraft bekommt die Differentialgleichung der Schwingung die Form:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -c_1 \alpha - c_2 \alpha^2 - 2b \frac{d\alpha}{dt}.$$

Multipliziert man beiderseits mit $d\alpha/dt$ und integriert zwischen den Grenzen t_0 und t_1 , so kommt:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_1}^2 - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_0}^2 = -c_1 \alpha_{t_1}^2 - \frac{2}{3} c_2 \alpha_{t_0}^3 + c_1 \alpha_{t_0}^2 + \frac{2}{3} c_2 \alpha_{t_0}^3 - 4b \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 dt.$$

t_0 und t_1 seien nun die Zeiten zweier aufeinander folgender Umkehrpunkte, die bei den Werten $\alpha = +\vartheta$ und $\alpha = -\vartheta$ liegen mögen. Die linke Seite wird dann Null. Die Berechnung des Integrales der rechten Seite, die streng durchzuführen sehr schwierig sein würde, wollen wir unter der Annahme führen, dass die Schwingung symmetrisch und ungedämpft sei. Diese

Annahme wird, wenn die Reibung und Asymmetrie nicht sehr gross ist, den Wert des Integrales nicht erheblich gegen den wahren ändern, da der Integrand $d\alpha/dt$ seine grössten Werte in der Nähe der Ruhelage $\alpha = 0$ hat, wo also der Einfluss des die Asymmetrie bedingenden Gliedes mit α^2 verschwindet, dagegen $d\alpha/dt$ klein wird für grössere α . Bezeichnet T wieder die Schwingungsdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrpunkten, so wird

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 dt = \frac{T}{2} c_1 \vartheta^2;$$

ϑ ist die maximale Elongation. Obige Gleichung wird dann

$$0 = + c_1 \vartheta^2 + \frac{2}{3} c_2 \vartheta^3 - c_1 \vartheta'^2 - \frac{2}{3} c_2 \vartheta'^3 + 4 b \frac{T}{2} \vartheta^2 c_1.$$

Für die ungedämpfte Schwingung ($b = 0$) ist

$$\vartheta'_{b=0} = - \vartheta - \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_1} \vartheta^2;$$

für die gedämpfte Schwingung sei $\vartheta' = \vartheta'_{b=0}(1 - \delta)$. δ sei so klein, dass die Glieder mit δ^2 etc. zu vernachlässigen sind. Bei Einführung dieses Wertes von ϑ' in die obige Gleichung ergibt sich nach einfacher Rechnung, wenn man berücksichtigt, dass $c_1 \vartheta^2 - \frac{2}{3} c_2 \vartheta^3 - c_1 \vartheta'^2_{b=0} - \frac{2}{3} c_2 \vartheta'^3_{b=0} = 0$ ist:

$$\delta = b T \frac{\vartheta^2}{\vartheta'^2_{b=0} + \frac{c_2}{c_1} \vartheta'^3_{b=0}},$$

oder, wenn man annähernd hierin $\vartheta = \vartheta'_{b=0}$ setzt,

$$\delta = b T \frac{1}{1 + \frac{c_2}{c_1} \vartheta};$$

ist $c_2/c_1 \vartheta$ klein gegen 1, so wird

$$\delta = b T \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \vartheta \right).$$

Für $c_2 = 0$ geht dieser Ausdruck bei nicht zu grosser Dämpfung über in denjenigen der „elastischen“ gedämpften Schwingungen; für diese ist ja bekanntlich

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = e^{-b T} = 1 - b T + \dots$$

Es wäre leicht, in dieser Berechnung von δ auch die Glieder mit δ^2 zu berücksichtigen; da es sich aber nur um angenäherte Berechnung handelt, sei davon Abstand genommen. Ist, wie beim Unifilarmagnetometer, c_2 negativ, so ist die Dämpfung bei der asymmetrischen Schwingung grösser als bei der symmetrischen „elastischen“ von gleicher Schwingungsdauer.

Der gefundene Ausdruck von δ giebt, um bei dem Beispiel des Unifilarmagnetometers der Anschaulichkeit halber zu bleiben, an, wie gross nach der Seite hin, nach welcher *nicht* tordirt ist, der Ausschlag bei Dämpfung wird, wenn man nach der Seite hin, nach welcher tordirt ist, den Magneten um den Winkel ϑ aus der Ruhelage gedreht hat. Entfernt man umgekehrt zunächst nach der nicht tordirten Seite hin den Magneten um $-\vartheta - \frac{2}{3} c_2/c_1 \vartheta^2$ aus der Gleichgewichtslage, so wird der Umkehrpunkt auf der tordirten Seite: $\vartheta(1 - \delta)$, wo δ denselben Wert wie oben hat, was sich durch eine der obigen ganz analoge Rechnung ergibt.

Man erkennt leicht, dass der reciproke Quotient je zweier nach derselben Seite aufeinander folgender Elongationen $(1 - \delta)^2$ wird. Da nun δ abhängig ist von ϑ , so sind diese Quotienten nicht wie bei der symmetrischen Schwingung constant, sondern abhängig von der Elongation ϑ , und zwar ist, wenn e_1 und e_2 zwei aufeinander folgende Elongationen nach derselben Seite sind:

$$(1) \quad \frac{e_2}{e_1} = (1 - \delta)^2 = (\text{annähernd}) 1 - 2bT \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \vartheta\right).$$

Für $c_2 = 0$ entsteht wieder der Ausdruck für die symmetrische Schwingung $e_2/e_1 = 1 - 2bT$, dem sich für abnehmende ϑ auch bei asymmetrischen Schwingungen e_2/e_1 asymptotisch nähert.

Aus (1) folgt noch

$$\frac{e_2 - e_1}{e_1} = -2bT \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \vartheta\right).$$

Diese Formel wurde wieder an demselben Unifilarmagnetometer geprüft. Da hier c_2 negativ ist, so wächst das Dämpfungsverhältnis mit zunehmender Amplitude. Der Wert von b wurde aus Versuchen bei untordirter Aufhängung ($\gamma = 0$) ermittelt, und unter Benutzung der experimentell ermittelten Werte

von T die Werte von $\frac{e_2 - e_1}{e_1}$ berechnet. Es fand sich für $E = \frac{e_1 - e_2}{e_1}$:

1. $\gamma = 0^\circ$.

ϑ	$E_{\text{beob.}}$
0°	0,020
5	0,020
10	0,020
15	0,020
20	0,022

2. $\gamma = 61,9^\circ$.

ϑ	$E_{\text{beob.}}$	$E_{\text{ber.}}$
0°	0,027	0,028
5	0,028	0,029
10	0,029	0,030
15	0,031	0,032
20	0,033	0,034

3. $\gamma = 73,0^\circ$.

ϑ	$E_{\text{beob.}}$	$E_{\text{ber.}}$
0°	0,033	0,033
5	0,036	0,037
10	0,038	0,040
15	0,041	0,044
20	0,045	0,047

4. $\gamma = 82,2^\circ$.

ϑ	$E_{\text{beob.}}$	$E_{\text{ber.}}$
0°	0,042	0,042
5	0,047	0,049
10	0,051	0,053
15	0,062	0,065

5. $\gamma = 84,3^\circ$.

ϑ	$E_{\text{beob.}}$	$E_{\text{ber.}}$
0°	0,044	0,045
5	0,054	0,054
10	0,062	0,064

Die beobachteten Werte sind durchweg etwas kleiner als die berechneten; das Anwachsen von E mit ϑ bei zunehmender Asymmetrie ist deutlich erkennbar.

Marburg i. H., Physik. Inst. d. Univ., September 1902.

(Eingegangen 1. October 1902.)