

Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi.

di

LUIGI BIANCHI in Pisa.

In tre successivi lavori, pubblicati nei Volumi 38^o, 40^o e 41^o di questi Annali, ho studiato i gruppi di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono tutti i numeri interi di un corpo quadratico immaginario che rendono il determinante della sostituzione eguale ad un' unità, e seguendo l'interpretazione geometrica del Sig^r Poincaré ho determinato, nei casi più semplici, il poliedro fondamentale del gruppo.

Nella prima parte del presente lavoro studio una classe di sottogruppi congruenziali dei gruppi ora ricordati. Una seconda parte viene poi dedicata alla ricerca di una classe di gruppi affatto distinta dalla precedente. Questi gruppi si presentano, nel campo dei numeri complessi, come naturale estensione dei gruppi studiati dal Sig^r Fricke nei Voli 38^o e 39^o di questi Annali e d'altra parte provengono dal gruppo aritmetico riproduttivo di una classe di forme quaternarie reali nel modo esaminato nell' ultimo dei miei lavori citati.*)

Delle corrispondenti applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite è sembrato qui sufficiente dare un cenno soltanto, poichè le considerazioni stesse sviluppate nei precedenti lavori valgono ancora, appena fissato il poliedro generatore del gruppo, a stabilirne i principii fondamentali.

*) La memorie dei Voli 40^o, 41^o saranno citate in seguito, per brevità, rispettivamente con (B), (C).

Parte prima.

Sottogruppi congruenziali di $\Gamma^{(\omega)}$.

§ 1.

Definizione del gruppo $\overline{G}_{(D, \nu)}$.

Le sostituzioni della forma

$$(S) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\nu \gamma z + \delta},$$

dove ν è un numero fisso che supporremo *razionale, intero e positivo* e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono tutti i numeri interi di un corpo quadratico immaginario Ω , che rendono il determinante della S eguale ad un' unità, formano un sottogruppo *congruenziale* di $\Gamma^{(\omega)}$.*) Il poliedro fondamentale di un tale sottogruppo, il cui indice è necessariamente *finito*, si potrebbe dedurre dal poliedro generatore di $\Gamma^{(\omega)}$, affatto similmente come dal triangolo fondamentale del gruppo modulare deducesi il poligono fondamentale di un suo sottogruppo. Però il necessario passaggio nell' interpretazione geometrica dal piano allo spazio complicherebbe singolarmente la ricerca; ma un' altra importante circostanza rende pereferribile la ricerca diretta. Il gruppo delle S è contenuto infatti quale sottogruppo eccezionale d'indice 2 in un gruppo più ampio, le cui nuove sostituzioni non appartengono più a $\Gamma^{(\omega)}$. E invero se alle S associamo le sostituzioni T della forma:

$$(T) \quad z' = \frac{\alpha \sqrt{\nu} z + \frac{\beta}{\sqrt{\nu}}}{\gamma \sqrt{\nu} z + \delta \sqrt{\nu}},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono nuovamente gli interi di Ω , che rendono il determinante della T eguale ad un' unità, vediamo che il prodotto di una S per una T è una T , mentre il prodotto di due T è una S . Pertanto le S, T formano complessivamente un gruppo, pel quale adotteremo la notazione $G_{(D, \nu)}$; il gruppo delle S è evidentemente contenuto in $G_{(D, \nu)}$ come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

Inoltre, essendo ν reale e positivo, il gruppo $G_{(D, \nu)}$ è permutabile colla riflessione

$$z' = z_0$$

e associando alle S, T le sostituzioni di 2^a specie

*) Per le notazioni cf. memoria (B).

$$(S_0) \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad (T_0) \quad z' = \frac{\alpha \sqrt{v} z_0 + \frac{\beta}{\sqrt{v}}}{\gamma \sqrt{v} z_0 + \delta \sqrt{v}}$$

abbiamo un ulteriore gruppo che indicheremo con $\bar{G}_{(D, v)}$ in cui $G_{(D, v)}$ è alla sua volta contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

§ 2.

Le riflessioni in $\bar{G}_{(D, v)}$.

Per la determinazione del poliedro fondamentale di $\bar{G}_{(D, v)}$ la prima e più importante ricerca è quella delle riflessioni contenute nel gruppo (B) §§ 6, 7). Riferendoci alle particolareggiate discussioni dei lavori precedenti, possiamo qui limitarci a dare i risultati effettivi. E così osserveremo in primo luogo che: *il gruppo attuale ammette gli stessi piani di riflessione di $\bar{\Gamma}^{(w)}$* . Le sfere di riflessione si classificano poi in quattro tipi, due dei quali provengono dalle sostituzioni della forma S_0 e due da quelle della forma T_0 . Distinguendo i casi

1° $D = 1$, 2° $D \equiv 1, 2 \pmod{4}$, 3° $D \equiv 3 \pmod{4}$,
otteniamo i risultati che si riassumono nei quadri seguenti.

1° caso. $D = 1$

Tipo I)	{	Sostituzione:	$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{v c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)},$
		(A)	$a_1^2 + a_2^2 + v b_1 c_1 = 1.$
		Sfera di riflessione:	$\left(\xi - \frac{a_1}{v c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{v c_1}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v^2 c_1^2}.$
Tipo II)	{	Sostituzione:	$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1 - i) b_1}{(1 - i) v c_1 z_0 + a_2 + i a_1},$
		(B)	$a_1^2 + a_2^2 + 2 v b_1 c_1 = 0.$
		Sfera di riflessione:	$\left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2 v c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2 v c_1}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{2 v^2 c_1^2}.$
Tipo III)	{	Sostituzione:	$z' = \frac{V v (a_1 + i a_2) z_0 + \frac{b_1}{V v}}{c_1 V v z_0 - V v (a_1 - i a_2)},$
		(C)	$v(a_1^2 + a_2^2) + b_1 c_1 = 1.$
		Sfera di riflessione:	$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v c_1^2}.$

$$\text{Tipo IV) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\sqrt{v} (a_1 + i a_2) z_0 + (1-i) \frac{b_1}{\sqrt{v}}}{(1-i) c_1 \sqrt{v} z_0 + \sqrt{v} (a_2 + i a_1)}, \\ \text{(D) } v(a_1^2 + c_1^2) + 2b_1 c_1 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2c_1} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{2v c_1^2}. \end{array} \right.$$

In questo, come nei quadri seguenti, a_1, a_2, b_1, c_1 indicano numeri razionali interi assoggettati soltanto alle rispettive equazioni segnate (A), (B), (C), (D).

2° caso. $D \equiv 1$ o $D \equiv 2 \pmod{4}$.

$$\text{Tipo I) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{D}) z_0 + b_1}{v c_1 z_0 - (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \\ \text{(A) } a_1^2 + D a_2^2 + v b_1 c_1 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_1}{v c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{v c_1} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v^2 c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo II) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{D}) z_0 + i b_1 \sqrt{D}}{i v c_1 \sqrt{D} z_0 + (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \\ \text{(B) } a_1^2 + D a_2^2 + D v b_1 c_1 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_2}{v c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{v c_1 \sqrt{D}} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D v^2 c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo III) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\sqrt{v} (a_1 + i a_2 \sqrt{D}) z_0 + \frac{b_1}{\sqrt{v}}}{c_1 \sqrt{v} z_0 - \sqrt{v} (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \\ \text{(C) } v(a_1^2 + D a_2^2) + b_1 c_1 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_1}{c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo IV) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\sqrt{v} (a_1 + i a_2 \sqrt{D}) z_0 + \frac{i b_1 \sqrt{D}}{\sqrt{v}}}{i c_1 \sqrt{D} v z_0 + \sqrt{v} (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \\ (D) \quad v (a_1^2 + D a_2^2) + D b_1 c_1 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_2}{c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1 \sqrt{D}} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D v c_1^2}. \end{array} \right.$$

Le riflessioni di quest' ultimo tipo esistono naturalmente soltanto quando v è primo con D e ne è residuo quadratico.

3^o caso. $D \equiv 3 \pmod{4}$.

Posto $\omega = \frac{1 + i \sqrt{D}}{2}$, avremo in $\overline{G}_{(D,v)}$ le riflessioni seguenti:

$$\text{Tipo I) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{(a_1 + a_2 \omega) z_0 + b_1}{v c_1 z_0 - (a_1 + a_2 \omega_0)}, \\ (A) \quad (2 a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 v b_1 c_1 = 4. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{2 a_1 + a_2}{2 v c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{2 v c_1} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v^2 c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo II) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{(a_1 + a_2 \omega) z_0 + i b_1 \sqrt{D}}{i v c_1 \sqrt{D} z_0 + (a_1 + a_2 \omega_0)}, \\ (B) \quad (2 a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 D v b_1 c_1 = 4. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_2}{2 v c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{2 a_1 + a_2}{2 v c_1 \sqrt{D}} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D v^2 c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo III) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\sqrt{v} (a_1 + a_2 \omega) z_0 + \frac{b_1}{\sqrt{v}}}{c_1 \sqrt{v} z_0 - \sqrt{v} (a_1 + a_2 \omega_0)}, \\ (C) \quad v \{ (2 a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 \} + 4 b_1 c_1 = 4. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{2 a_1 + a_2}{2 c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{2 c_1} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{v c_1^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo IV) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{V\sqrt{a_1 + a_2 \omega} z_0 + \frac{ib_1 V \bar{D}}{V\sqrt{a_1 + a_2 \omega}}}{ic_1 V \bar{D} \sqrt{a_1 + a_2 \omega} + V\sqrt{a_1 + a_2 \omega}}, \\ (D) \quad \nu \{ (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 \} + 4 D b_1 c_1 = 4. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{2a_1 + a_2}{2c_1 V \bar{D}} \right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D \nu c_1^2}. \end{array} \right.$$

§ 3.

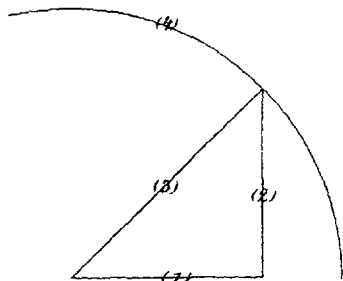
I poliedri fondamentali dei gruppi $\bar{G}_{(1,2)}$, $\bar{G}_{(1,3)}$, $\bar{G}_{(1,5)}$.

1° Nel caso $D = 1$, $\nu = 2$, dal prisma triangolare racchiuso fra i tre piani di riflessione

$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \quad \xi - \eta = 0$$

superiormente al piano $\xi = 0$ togliamo la porzione interna alla sfera di riflessione

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{Fig}^a 1^a)^*$$

Fig^a 1^a

Il poliedro P così definito coi quattro vertici

$$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \\ V_\infty \equiv (0, 0, \infty),$$

dei quali due singolari V_3 , V_∞ , non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè esiste in $\bar{G}_{(1,2)}$ alcuna sostituzione che lo trasformi in sè medesimo; esso è adunque il poliedro fondamentale del gruppo.

*) In questa come nelle figure seguenti si osservano le traccie sul piano $\xi\eta$ delle faccie del poliedro.

Fuori di $\overline{G}_{(1,2)}$ esiste un' unica sostituzione, che cangia P in sè stesso, e cioè la ellittica (a periodo 2)

$$z' = \frac{\alpha z + \frac{i-1}{2} \alpha}{\alpha(1-i)z - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{\frac{3\pi i}{8}},$$

con essa è pertanto permutabile il nostro gruppo.

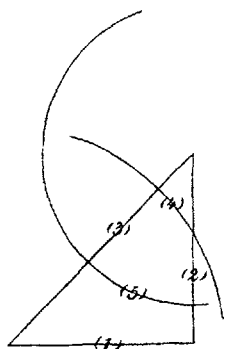
2° Il gruppo $\overline{G}_{(1,3)}$. Dal prisma triangolare racchiuso, come sopra dai piani

$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \quad \xi - \eta = 0$$

togliamo le porzioni interne alle due sfere di riflessione

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{3},$$

$$(5) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{6} \quad (\text{Fig}^a 2^a).$$



Fig^a 2^a

Definiamo così un poliedro P coi vertici

$$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{intersezione delle faccie (1) (3) (4),}$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (1) (2) (4),}$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (4) (5),}$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (3) (5),}$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{,, ,, ,, (3) (4) (5),}$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{,, ,, ,, (1) (2) (3);}$$

esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè esiste alcuna sostituzione nel gruppo o fuori del gruppo, che lo cangi in sè medesimo.

Questo è adunque il poliedro fondamentale di $\overline{G}_{(1,3)}$; un ampliamento del gruppo attuale è impossibile.

3° Il gruppo $\overline{G}_{(1,5)}$. Dal solito prisma racchiuso fra i piani

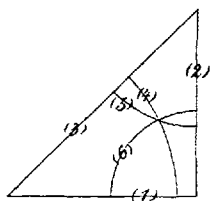
$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \quad \xi - \eta = 0$$

togliamo le porzioni interne alle tre sfere

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{5},$$

$$(5) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{10},$$

$$(6) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{20} \quad (\text{Fig}^a 3^a).$$



Fig^a 3^a

Il poliedro P così definito coi vertici

$$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{intersezione delle faccie (1) (3) (5),}$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right) \quad \text{,, ,, ,, (1) (4) (6),}$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (1) (2) (6),}$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (5) (6),}$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (3) (5),}$$

$$V_6 \equiv \left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (3) (4) (5),}$$

$$V_7 \equiv \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \quad \text{,, ,, ,, (4) (5) (6),}$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{,, ,, ,, (1) (2) (3)}$$

non è attraversato da alcuna sfera si riflessione. Osservando che vi sono i due vertici singolari V_7 , V_∞ e fra gli angoli diedri quattro soltanto sono di 45° , cioè quelli agli spigoli

$$V_4 V_7, V_6 V_7, V_1 V_\infty, V_5 V_\infty,$$

mentre i rimanenti sono retti, troviamo facilmente che esiste una sola sostituzione riproduttrice di P e cioè la ellittica (periodo 2):

$$z' = \frac{\frac{2+i}{5} \gamma z - \frac{1+i}{5} \gamma}{\gamma z - \frac{2+i}{5} \gamma}, \quad \gamma = \sqrt{5} \sqrt{2-i}.$$

Questa sostituzione è per altro fuori del gruppo $\bar{G}_{(1,5)}$, il cui poliedro fondamentale è adunque quello sopra definito.

§ 4.

I gruppi $\bar{G}_{(2,2)}$, $\bar{G}_{(2,3)}$.

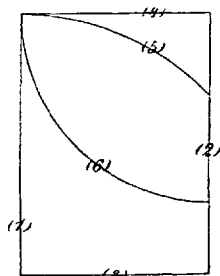
1° Il gruppo $\bar{G}_{(2,2)}$. — Dal prisma rettangolo compreso al di sopra del piano $\xi = 0$ entro i quattro piani di riflessione

$$(1) \xi = 0, \quad (2) \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \eta = 0, \quad (4) \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tolgansi le porzioni interne alle due sfere di riflessione

$$(5) \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6) \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}. \quad (\text{Fig}^a 4^a).$$



Fig^a 4^a

Abbiamo così un poliedro P coi vertici

$$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{intersezione delle faccie (1) (3) (5),}$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (3) (5),}$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (5) (6),}$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{,, ,, ,, (2) (4) (6),}$$

$$V_5 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{,, ,, ,, (1) (4) (5) (6),}$$

$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty) \quad \text{,, ,, ,, (1) (2) (3) (4),}$$

che non è attraversato da alcuna sfera di riflessione ed è trasformato in sè stesso dalla sola sostituzione

$$z' = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma z + \frac{1 - i\sqrt{2}}{2} \gamma}{\gamma z - \frac{i\gamma}{\sqrt{2}}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Il gruppo $\bar{G}_{(2,2)}$ ammette dunque per poliedro fondamentale questo poliedro P ed è suscettibile di ampliamento.

2° Il gruppo $\bar{G}_{(2,3)}$. Dallo stesso prisma racchiuso fra i piani

$$(1) \xi = 0, \quad (2) \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \eta = 0, \quad (4) \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

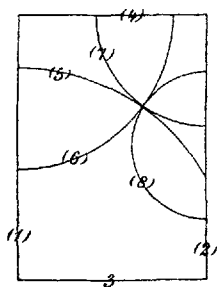
consideriamo la regione esterna alle quattro sfere di riflessione

$$(5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

$$(6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{6},$$

$$(7) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{12},$$

$$(8) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{24}; \quad (\text{Fig}^a 5^a)$$



Fig^a 5^a

essa ci darà il poliedro fondamentale P di $\bar{G}_{(2,3)}$. E infatti P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione ed è trasformato in sè medesimo dalla sola sostituzione

$$z' = \frac{\frac{1 + i\sqrt{2}}{3} \gamma z - \frac{i\sqrt{2}}{3} \gamma}{\gamma z - \frac{1 + i\sqrt{2}}{3} \gamma}, \quad \gamma = \sqrt[3]{3} \sqrt{1 - i\sqrt{2}},$$

la quale è fuori del gruppo.

§ 5.

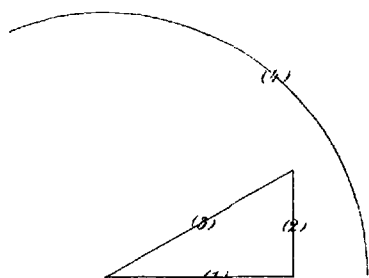
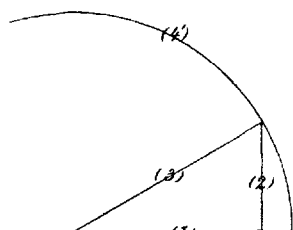
I gruppi $\bar{G}_{(3,2)}$, $\bar{G}_{(3,3)}$, $\bar{G}_{(3,5)}$.

Si consideri il prisma triangolare compreso al di sopra del piano $\xi = 0$ dai tre piani di riflessione

$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \quad \xi = \eta\sqrt{3}$$

e se ne tolga *nel caso* $\nu = 2$ la porzione interna alla sfera di riflessione

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{Fig}^a 6^a),$$

Fig^a 6^aFig^a 7^a

nel caso $\nu = 3$ quella interna alla sfera

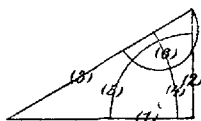
$$(4') \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{3} \quad (\text{Fig}^a 7^a)$$

e in fine *nel caso* $\nu = 5$ le porzioni interne alle tre sfere

$$(4'') \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{5},$$

$$(5) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{1}{20},$$

$$(6) \quad \left(\xi - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{5\sqrt{3}}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{75}. \quad (\text{Fig}^a 8^a).$$

Fig^a 8^a

I poliedri così definiti sono i rispettivi poliedri fondamentali di $\bar{G}_{(3,2)}$, $\bar{G}_{(3,3)}$, $\bar{G}_{(3,5)}$. E invero si verifica, calcolandone le coordinate dei vertici, che nessuna sfera di riflessione li attraversa e nessuna sostituzione del gruppo corrispondente li trasforma in sè medesimi.

§ 6.

I gruppi $\overline{G}_{(5,2)}$ $\overline{G}_{(7,2)}$.

1° Il gruppo $\overline{G}_{(5,2)}$. Dal prisma compreso fra i quattro piani di riflessione

$$(1) \xi = 0, \quad (2) \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \eta = 0, \quad (4) \eta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

si tolgano le regioni interne alle cinque sfere di riflessione

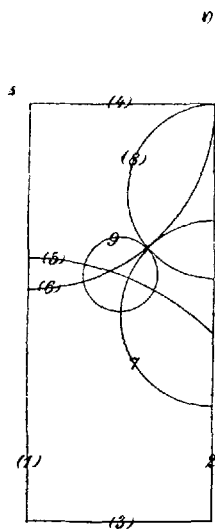
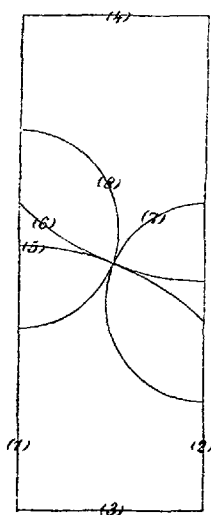
$$(5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16},$$

$$(8) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{20},$$

$$(9) \quad \left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{80}. \quad (\text{Fig}^a 9^a).$$

Fig^a 9^aFig^a 10^a

Il poliedro P così definito, coi tre vertici singolari

$$\frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{5}}{3}, \quad \infty,$$

è il poliedro fondamentale di $\overline{G}_{(5,2)}$.

2° Il gruppo $\overline{G}_{(7,2)}$. Del prisma contenuto fra i quattro piani di riflessione

$$(1) \xi = 0, \quad (2) \xi = \frac{1}{2}, \quad (3) \eta = 0, \quad (4) \eta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

consideriamo la regione esterna alle quattro sfere

$$(5) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(7) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3\sqrt{7}}{14}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14},$$

$$(8) \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14} \quad (\text{Fig}^a 10^a).$$

Il poliedro P risultante non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e fra le sostituzioni del gruppo vi ha soltanto la sostituzione

$$z' = -z + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

che lo cangi in sè stesso. Dividendo adunque P in due parti equivalenti col piano

$$\xi\sqrt{7} - \eta = 0;$$

una ad arbitrio di esse potrà assumersi a poliedro generatore di $\overline{G}_{(7,2)}$.

Come si vede, di tutti i gruppi fin qui considerati $\overline{G}_{(7,2)}$ è l'unico che non si generi con pure riflessioni.

§ 7.

Le forme di Dirichlet e di Hermite associate ai gruppi $\overline{G}_{(D,v)}$.

Consideriamo una forma quadratica (di Dirichlet) del tipo

$$F = vax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dove a, b, c sono interi qualunque del corpo Ω e sulle variabili x, y , corrispondentemente alle sostituzioni S, T del gruppo $G_{(D,v)}$ eseguiamo la sostituzione

$$s) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

o l'altra

$$t) \quad \begin{cases} x = \alpha\sqrt{v}x' + \frac{\beta}{\sqrt{v}}y', \\ y = \gamma\sqrt{v}x' + \delta\sqrt{v}y'. \end{cases}$$

La F si trasformerà in una forma F'

$$F' = va'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

della stessa natura nella quale sarà inoltre

$$b' \equiv b \quad \text{o} \quad b' \equiv -b \pmod{\nu}$$

secondo che la sostituzione eseguita appartiene al tipo s) o al tipo t).

Possiamo così stabilire il concetto di *equivalenza* di due tali forme f, f' rispetto al gruppo $G_{(D, \nu)}$ e colla determinazione del poliedro generatore del gruppo risolvere i problemi della teoria dell' equivalenza (cf. (B)).

Più importante è la considerazione delle forme di Hermite a indeterminate coniugate

$$F = \nu A x x_0 + B x y_0 + B_0 x_0 y + C y y_0,$$

dove A, C sono razionali interi e B un intero del corpo Ω . Per le sostituzioni s) o t), ove contemporaneamente sulle variabili coniugate si eseguisca la sostituzione coniugata, le forme F si cangiano in forme della medesima specie. Di queste forme F possiamo adunque costruire una teoria aritmetica dell' equivalenza, i cui problemi fondamentali si risolvono colla rappresentazione geometrica del gruppo $G_{(D, \nu)}$.

Parte seconda.

Gruppi poliedrici provenienti dalle forme reali quaternarie

$$\nu(x_1^2 + x_2^2) + D x_3^2 - x_4^2.$$

§ 8.

Definizione dei gruppi $K_{(D, \nu)}$

I gruppi di cui ci occuperemo in questa seconda parte possono definirsi aritmeticamente, e in modo diretto, come estensione al campo complesso dei gruppi studiati dal Sig^r Fricke nel Vol^e XXXVIII di questi Annali.

Essendo ν un numero fisso razionale, intero e positivo, consideriamo tutte le sostituzioni della forma

$$S) \quad z' = \frac{(a + b\sqrt{\nu})z + (c + d\sqrt{\nu})}{(-c + d\sqrt{\nu})z + (a - b\sqrt{\nu})},$$

dove a, b, c, d percorrono tutti i numeri interi del corpo quadratico $\Omega = (1, i\sqrt{D})$, che rendono

$$a^2 + c^2 - \nu(b^2 + d^2) = \pm 1.$$

Le sostituzioni S formano, come subito si vede, un gruppo.

Alle S associamo poi le sostituzioni T della forma

$$T) \quad z' = \frac{(a + b\sqrt{\nu})z + (c + d\sqrt{\nu})}{(c - d\sqrt{\nu})z + (-a + b\sqrt{\nu})},$$

il cui determinante

$$-(a^2 + c^2) + v(b^2 + d^2)$$

è nuovamente l'unità positiva o negativa. Si verifica che il prodotto di una S per una T è una T mentre il prodotto di due T è una S . Per ciò le S, T formano complessivamente un gruppo, che indicheremo con $K_{(D, v)}$, nel quale il gruppo delle S è eccezionale d'indice 2.*)

Ai gruppi $K_{(D, v)}$ possiamo subito coordinare una classe di forme quadratiche di Hermite. E infatti essendo $z_1 z_2 z_3 z_4$ quattro quantità reali, che dapprima supponiamo costanti, consideriamo le forme di Hermite a variabili $x, y; x_0, y_0$ coniugate:

$$F = (z_4 + z_1 \sqrt{v}) x x_0 + (z_2 \sqrt{v} + i z_3 \sqrt{D}) x y_0 + (z_2 \sqrt{v} - i z_3 \sqrt{D}) x_0 y + (z_4 - z_1 \sqrt{v}) y y_0$$

ed applichiamo la sostituzione

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y', \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \alpha_0 x'_0 + \beta_0 y'_0, \\ y_0 = \gamma_0 x'_0 + \delta_0 y'_0, \end{cases}$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i coefficienti di una sostituzione qualunque S o T del gruppo $K_{(D, v)}$. Otteniamo così una forma F' della stessa specie

$$F' = (z'_4 + z'_1 \sqrt{v}) x' x'_0 + (z'_2 \sqrt{v} + i z'_3 \sqrt{D}) x' y'_0 + (z'_2 \sqrt{v} - i z'_3 \sqrt{D}) x'_0 y' + (z'_4 - z'_1 \sqrt{v}) y' y'_0,$$

e i nuovi valori delle z' risultano legati agli antichi da una sostituzione lineare a coefficienti razionali interi. E inverso se la sostituzione eseguita appartiene alle S troviamo:

$$s) \quad \begin{cases} z'_1 = \{a a_0 + v b b_0 - c c_0 - v d d_0\} z_1 \\ + \{v(b d_0 + b_0 d) - (a c_0 + a_0 c)\} z_2 \\ + i \sqrt{D} \{a d_0 - a_0 d + b_0 c - b c_0\} z_3 \\ + \{a b_0 + a_0 b - c d_0 - c_0 d\} z_4, \end{cases}$$

*) Una immediata generalizzazione di questi gruppi si ottiene considerando le sostituzioni della forma

$$S') \quad z' = \frac{(a + b \sqrt{v})z + (c + d \sqrt{v})}{\mu(-c + d \sqrt{v})z + (a - b \sqrt{v})},$$

$$T') \quad z' = \frac{(a + b \sqrt{v})z + (c + d \sqrt{v})}{\mu(c - d \sqrt{v})z + (-a + b \sqrt{v})},$$

dove μ è un intero fisso nel corpo quadratico Ω . In particolare se μ è reale le considerazioni, che seguono nel testo, relative al caso $\mu = 1$, rimangono ancora applicabili.

$$\begin{aligned}
 s) \quad \left\{ \begin{aligned}
 z_2' &= \{ac_0 + a_0c + vbd_0 + vb_0d\}z_1 \\
 &+ \{aa_0 - vbb_0 - cc_0 + vdd_0\}z_2 \\
 &+ i\sqrt{D}\{a_0b - ab_0 + cd_0 - c_0d\}z_3 \\
 &+ \{ad_0 + a_0d + bc_0 + b_0c\}z_4, \\
 z_3' &= \frac{v}{i\sqrt{D}}\{bc_0 - b_0c + ad_0 - a_0d\}z_1 \\
 &+ \frac{v}{i\sqrt{D}}\{a_0b - ab_0 + c_0d - cd_0\}z_2 \\
 &+ \{aa_0 - vbb_0 + cc_0 - vdd_0\}z_3 \\
 &+ \frac{1}{i\sqrt{D}}\{ac_0 - a_0c + vbd_0 - vb_0d\}z_4, \\
 z_4' &= v\{ab_0 + a_0b + cd_0 + c_0d\}z_1 \\
 &+ v\{ad_0 + a_0d - bc_0 - b_0c\}z_2 \\
 &+ i\sqrt{D}\{a_0c - ac_0 + bd_0 - b_0d\}z_3 \\
 &+ \{aa_0 + vbb_0 + cc_0 + vdd_0\}z_4;
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

se appartiene in vece alle T si ottiene per la formola corrispondente:

$$\begin{aligned}
 t) \quad \left\{ \begin{aligned}
 z_1' &= \{aa_0 + vbb_0 - cc_0 - vdd_0\}z_1 \\
 &+ \{ac_0 + a_0c - vbd_0 - vb_0d\}z_2 \\
 &+ i\sqrt{D}\{bc_0 - b_0c + a_0d - ad_0\}z_3 \\
 &+ \{ab_0 + a_0b - cd_0 - c_0d\}z_4, \\
 z_2' &= \{ac_0 + a_0c + vbd_0 + vb_0d\}z_1 \\
 &+ \{-aa_0 + vbb_0 + cc_0 - vdd_0\}z_2 \\
 &+ i\sqrt{D}\{ab_0 - a_0b + c_0d - cd_0\}z_3 \\
 &+ \{ad_0 + a_0d + bc_0 + b_0c\}z_4, \\
 z_3' &= \frac{v}{i\sqrt{D}}\{ad_0 - a_0d + bc_0 - b_0c\}z_1 \\
 &+ \frac{v}{i\sqrt{D}}\{ab_0 - a_0b + cd_0 - c_0d\}z_2 \\
 &+ \{-aa_0 + vbb_0 - cc_0 + vdd_0\}z_3 \\
 &+ \frac{1}{i\sqrt{D}}\{ac_0 - a_0c + vbd_0 - vb_0d\}z_4, \\
 z_4' &= v\{ab_0 + a_0b + cd_0 + c_0d\}z_1 \\
 &+ v\{bc_0 + b_0c - ad_0 - a_0d\}z_2 \\
 &+ i\sqrt{D}\{ac_0 - a_0c + vb_0d - vb_0d\}z_3 \\
 &+ \{aa_0 + vbb_0 + cc_0 + vdd_0\}z_4.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Facilmente si vede che tanto le sostituzioni quaternarie $s)$ quanto le $t)$ sono a determinante $+1$ e del resto le $t)$ si ottengono semplicemente dalle $s)$ cangiando i segni dei coefficienti di z_2, z_3 . Inoltre in ambedue le specie di sostituzioni i coefficienti della diagonale principale sono dispari e gli altri tutti pari, ossia, per usare una nota locuzione, le $s), t)$ sono congrue coll' identità (mod. 2).

I determinanti delle due forme F, F' sono eguali; si ha cioè:

$$v(z_1^2 + z_2^2) + Dz_3^2 + z_4^2 = v(z_1'^2 + z_2'^2) + Dz_3'^2 - z_4'^2.$$

Ora se riguardiamo z_1, z_2, z_3, z_4 non più come costanti ma come variabili reali, vediamo che le $s) t)$ formano un gruppo di sostituzioni quaternarie a coefficienti razionali interi, isomorfo con $K_{(D,v)}$, che trasforma in sè medesima la forma reale quaternaria (Cf. (C) P^e 2^a)

$$\Phi = v(z_1^2 + z_2^2) + Dz_3^2 - z_4^2.$$

I gruppi $K_{(D,v)}$ differiscono in generale essenzialmente dai gruppi $\Gamma^{(\omega)}$ studiati nei precedenti lavori e dai loro sottogruppi. Per accertarsene basta considerare il caso in cui, D essendo primo con v , siano contemporaneamente -1 e D non residui quadratici di v . Allora la forma Φ non può rappresentare lo zero (non può annullarsi per valori razionali interi delle z) e, come facilmente si vede: il gruppo corrispondente $K_{(D,v)}$ non contiene sostituzioni paraboliche. I gruppi che si ottengono trasformando $K_{(D,v)}$ con sostituzioni arbitrarie sono quindi sempre incommensurabili coi gruppi $\Gamma^{(\omega)}$ e coi loro sottogruppi.

§ 9.

I gruppi $\overline{H}_{(D,v)}$.

Le sostituzioni $s), t)$ corrispondenti alle S, T non esauriscono il gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria Φ . Riserbando per un altro lavoro l'esame della questione come dal sottogruppo delle $s), t)$ si possa risalire al gruppo totale ora citato, ci limiteremo qui alla osservazione seguente, molto importante per il seguito. Fra le sostituzioni che riproducono la forma Φ vi è evidentemente la seguente

$$z_1' = -z_2, \quad z_2' = z_1, \quad z_3' = z_3, \quad z_4' = z_4,$$

che si otterrebbe dalla $s)$ facendovi

$$a = c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = d = 0.$$

La corrispondente sostituzione

$$z) \quad z' = \frac{\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

non appartiene al gruppo $\bar{K}_{(D, \nu)}$, ma il risultato precedente conduce naturalmente ad ampliare quest'ultimo gruppo coll'aggiunta della sostituzione τ . E invero si constata subito che la τ è permutabile col gruppo $\bar{K}_{(D, \nu)}$ e precisamente trasforma una S in un'altra S , una T di nuovo in una T .

Nel gruppo così ampliato, che si indicherà con $H_{(D, \nu)}$, il sottogruppo $\bar{K}_{(D, \nu)}$ è eccezionale d'indice 2. Le nuove sostituzioni di $H_{(D, \nu)}$ sono delle due forme seguenti

$$U) \quad z' = \frac{\frac{a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}z + \frac{c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{-c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}z + \frac{a-b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$

$$V) \quad z' = \frac{\frac{a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}z + \frac{c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{c-d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}z + \frac{-a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$

i numeri a, b, c, d del corpo quadratico Ω soddisfacendo alla equazione

$$a^2 + c^2 - \nu(b^2 + d^2) = \pm 2$$

e inoltre alle congruenze

$$a \equiv c, \quad b \equiv d \pmod{2}.$$

Viceversa ogni sostituzione U, V in cui le condizioni precedenti siano soddisfatte appartiene al gruppo ampliato $H_{(D, \nu)}$.

Osserviamo ora che tanto il gruppo $\bar{K}_{(D, \nu)}$ come il gruppo più ampio $H_{(D, \nu)}$ sono permutabili colla riflessione $z' = z_0$ poichè, insieme ad ogni loro sostituzione, contengono anche quella che si ottiene cangiandone i coefficienti nei coniugati. Ampliando $\bar{K}_{(D, \nu)}, H_{(D, \nu)}$ colla riflessione $z' = z_0$, avremo due nuovi gruppi, che si indicheranno rispettivamente con $\bar{K}_{(D, \nu)}, \bar{H}_{(D, \nu)}$, nei quali i primitivi sono rispettivamente contenuti come sottogruppi eccezionali d'indice 2.

La nuove sostituzioni di $\bar{K}_{(D, \nu)}, \bar{H}_{(D, \nu)}$ si ottengono da quelle di $K_{(D, \nu)}, H_{(D, \nu)}$ mutandovi la variabile z nella coniugata z_0 . Facilmente si vedrebbe poi che a queste sostituzioni (di 2^a specie) corrispondono ancora, per la forma quaternaria $\Phi = \nu(z_1^2 + z_2^2) + Dz_3^2 - z_4^2$, delle sostituzioni del suo gruppo aritmetico riproduttivo; soltanto il determinante della sostituzione quaternaria è in questo caso eguale all'unità negativa.

È importante osservare i periodi che presentano le sostituzioni ellittiche dei nostri gruppi. Qui supporremo senz'altro $D > 1$, perchè nel caso $D = 1$ i gruppi $K_{(1, \nu)}, H_{(1, \nu)}$ risultano *commensurabili* con sottogruppi del gruppo $\Gamma^{(4)}$ e il loro studio offre un interesse minore.

Fra le S sono ellittiche quelle a determinante $+1$ con $a=0$ e quelle a determinante -1 con $b=0$; fra le T quelle a determinante $+1$ con $b=0$ e quelle a determinante -1 con $a=0$, onde risulta: Nel gruppo $\overline{K}_{(D,v)}$ figurano soltanto sostituzioni ellittiche a periodo 2.

Pel gruppo $\overline{H}_{(D,v)}$ si presentano sostituzioni ellittiche di periodo diverso da 2 solo fra le U a determinante $+1$ con $a=\pm 1$; il loro periodo è eguale a 4.

§ 10.

Le riflessioni dei gruppi $\overline{K}_{(D,v)}$, $\overline{H}_{(D,v)}$.

Per la ricerca dei poliedri fondamentali dei nostri gruppi è utile innanzi tutto conoscere le riflessioni in essi contenute. Con metodi ben noti ((B) § 6) troviamo che le riflessioni di $\overline{K}_{(D,v)}$ si ripartiscono nei quattro tipi del quadro seguente

Tipo I)	{	<p>Sostituzione:</p> $z' = \frac{(ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{v})z_0 + (c_1 + d_1\sqrt{v})}{(-c_1 + d_1\sqrt{v})z_0 + (ia_2\sqrt{D} - b_1\sqrt{v})},$ <p>(A) $Da_2^2 + v(b_1^2 + d_1^2) - c_1^2 = 1.$</p> <p>Sfera di riflessione:</p> $\left(\xi - \frac{b_1\sqrt{v}}{d_1\sqrt{v} - c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{d_1\sqrt{v} - c_1}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{(d_1\sqrt{v} - c_1)^2}.$
Tipo II)	{	<p>Sostituzione:</p> $z' = \frac{(a_1 + ib_2\sqrt{Dv})z_0 + i\sqrt{D}(c_2 + d_2\sqrt{v})}{i\sqrt{D}(-c_2 + d_2\sqrt{v})z_0 + (a_1 - ib_2\sqrt{Dv})},$ <p>(B) $a_1^2 + Dvb_2^2 - Dc_2^2 + Dvd_2^2 = 1.$</p> <p>Sfera di riflessione:</p> $\left(\xi - \frac{b_2\sqrt{v}}{d_2\sqrt{v} - c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{\sqrt{D}(d_2\sqrt{v} - c_2)}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D(d_2\sqrt{v} - c_2)^2}.$
Tipo III)	{	<p>Sostituzione:</p> $z' = \frac{(a_1 + ib_2\sqrt{Dv})z_0 + (c_1 + d_1\sqrt{v})}{(c_1 - d_1\sqrt{v})z_0 + (-a_1 + ib_2\sqrt{Dv})},$ <p>(C) $a_1^2 + Dvb_2^2 + c_1^2 - vd_1^2 = 1.$</p> <p>Sfera di riflessione:</p> $\left(\xi - \frac{a_1}{c_1 - d_1\sqrt{v}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2\sqrt{Dv}}{c_1 - d_1\sqrt{v}}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{(c_1 - d_1\sqrt{v})^2}.$

$$\text{Tipo VI) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{(ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{v})z_0 + i\sqrt{D}(c_2 + d_2\sqrt{v})}{i\sqrt{D}(c_2 - d_2\sqrt{v})z_0 + (b_1\sqrt{v} - ia_2\sqrt{D})}, \\ \text{(D) } Da_2^2 + vb_1^2 + Dc_2^2 - Dvd_2^2 = 1. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{a_2}{c_2 - d_2\sqrt{v}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{b_1\sqrt{v}}{\sqrt{D}(c_2 - d_2\sqrt{v})}\right)^2 + \xi^2 = \frac{1}{D(c_2 - d_2\sqrt{v})^2}. \end{array} \right.$$

In queste formole $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ indicano numeri razionali interi che soddisfano alle rispettive equazione (A), (B), (C), (D). Si osserverà che le riflessioni del tipo IV esistono soltanto quando v sia primo con D e ne sia residuo quadratico.

Quanto al gruppo più ampio $\overline{H}_{(D,v)}$, oltre alle riflessioni sopra indicate già contenute nel sottogruppo $\overline{K}_{(D,v)}$, esso conterra le nuove riflessioni dei quattro tipi seguenti:

$$\text{Tipo V) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\frac{2ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}z_0 + \frac{2c_1 + d_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}}{\frac{-2c_1 + d_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}z_0 + \frac{2ia_2\sqrt{D} - b_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}}, \\ \text{(E) } 4Da_2^2 + vb_1^2 - 4c_1^2 + vd_1^2 = 2, \quad (e) \quad b_1 \equiv d_1 \pmod{2}. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi - \frac{b_1\sqrt{v}}{d_1\sqrt{v} - 2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2a_2\sqrt{D}}{d_1\sqrt{v} - 2c_1}\right)^2 + \xi^2 \\ = \frac{2}{(d_1\sqrt{v} - 2c_1)^2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Tipo VI) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Sostituzione:} \\ z' = \frac{\frac{2a_2 + ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}z_0 + i\frac{2c_2\sqrt{D} + d_2\sqrt{Dv}}{\sqrt{2}}}{i\frac{-2c_2\sqrt{D} + d_2\sqrt{Dv}}{\sqrt{2}}z_0 + \frac{2a_2 - ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}}, \\ \text{(F) } 4a_2^2 + Dvb_2^2 - 4Dc_2^2 + Dvd_2^2 = 2, \quad (f) \quad b_2 \equiv d_2 \pmod{2}. \\ \text{Sfera di riflessione:} \\ \left(\xi + \frac{b_2\sqrt{v}}{2c_2 - d_2\sqrt{v}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2a_2}{\sqrt{D}(2c_2 - d_2\sqrt{v})}\right)^2 + \xi^2 \\ = \frac{2}{D(2c_2 - d_2\sqrt{v})^2}. \end{array} \right.$$

Tipo VII) {

Sostituzione:

$$z' = \frac{\frac{a_1 + 2ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}} z_0 + \frac{c_1 + 2d_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}}{\frac{c_1 - 2d_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}} s_0 + \frac{-a_1 + 2ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}},$$

(G) $a_1^2 + 4Db_2^2 + c_1^2 - 4vd_1^2 = 2.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1 - 2d_1\sqrt{v}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2b_2\sqrt{D}}{c_1 - 2d_1\sqrt{v}}\right)^2 + \xi^2 = \frac{2}{(c_1 - 2d_1\sqrt{v})^2}.$$

Tipo VIII) {

Sostituzione:

$$z' = \frac{\frac{ia_2\sqrt{D} + 2b_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}} z_0 + i\sqrt{D} \frac{c_2 + 2d_2\sqrt{v}}{\sqrt{2}}}{i\sqrt{D} \frac{-c_2 + 2d_2\sqrt{v}}{\sqrt{2}} z_0 + \frac{-ia_2\sqrt{D} + 2b_1\sqrt{v}}{\sqrt{2}}},$$

(H) $Da_2^2 + 4vb_1^2 + Dc_2^2 - 4Dvd_2^2 = 2,$ (h) $a_2 \equiv c_2 \pmod{2}.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi + \frac{a_2}{2d_2\sqrt{2} - c_2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2b_1\sqrt{v}}{\sqrt{D}(2d_2\sqrt{v} - c_2)}\right)^2 + \xi^2 = \frac{2}{D(2d_2\sqrt{v} - c_2)^2}.$$

I numeri razionali interi $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ debbono qui soddisfare le equazioni rispettive (E), (F), (G), (H) e insieme le corrispondenti congruenze (e), (f), (h)*.

È importante osservare che: due sfere di riflessione del gruppo $\overline{K}_{(D,v)}$, ove abbiano qualche punto comune, saranno ortogonali fra loro, ovvero si toccheranno in un punto. Ciò dipende dalla circostanza osservata che tutte le sostituzioni ellittiche di $\overline{K}_{(D,v)}$ sono a periodo 2. Il caso del contatto fra due sfere di riflessione resta per altro escluso per quei gruppi $\overline{K}_{(D,v)}$ che sono privi di sostituzioni paraboliche (§ 8).

Osserviamo inoltre che nei gruppi $\overline{K}_{(D,v)}$, come nei più ampi $\overline{H}_{(D,v)}$ si presentano due soli piani di riflessione e cioè i piani:

- 1) $\eta = 0$, Tipo II) $a_1 = 1, b_2 = c_2 = d_2 = 0$,
- 2) $\xi = 0$, Tipo III) $a_1 = 1, b_2 = c_1 = d_1 = 0$.

*) La congruenza (g) $a_1 \equiv c_1 \pmod{2}$ viene omessa perchè discende dall'equazione stessa (G).

Esiste poi in ogni caso una serie di sfere di riflessione col centro nell' origine; esse hanno per equazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (c_1 + d_1 \sqrt{\nu})^2$$

ed appartengono al tipo III) o al tipo I) secondo che i numeri c_1, d_1 soddisfano l'equazione di Pell $c_1^2 - \nu d_1^2 = +1$ o l'altra $c_1^2 - \nu d_1^2 = -1$. Fra queste quelle del tipo I) mancano naturalmente se l'equazione $c_1^2 - \nu d_1^2 = -1$ è insolubile in numeri interi. In ogni caso i raggi delle sfere della serie formano una progressione geometrica.

§ 11.

Definizione del poliedro P pel gruppo $\bar{K}_{(2,2)}$.

Considerando il caso $D = 2, \nu = 2$, osserviamo che l'equazione $c_1^2 - 2d_1^2 = -1$ ammette la soluzione intera $c_1 = 1, d_1 = 1$ e però i raggi delle sfere di riflessione col centro nell' origine formano una progressione geometrica colla ragione $q = \sqrt{2} - 1$. Ciò posto consideriamo lo spazio compreso al di sopra del piano $\xi = 0$ fra i due piani di riflessione

$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere consecutive di riflessione

$$(3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \text{Tipo III) } a_1 = b_2 = d_2 = 0, \quad c_1 = 1$$

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{Tipo I) } a_2 = d_1 = 0, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 1.$$

Da questo spazio togliamo le porzioni interne alle cinque ulteriori sfere di riflessione:

$$(5) \quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 0.$$

$$(6) \quad (\xi - \sqrt{2})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad d_1 = 0, \quad c_1 = -1.$$

$$(7) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + (\eta - (\sqrt{2}-1))^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,$$

$$\text{Tipo III) } a_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad c_1 = 2, \quad d_1 = -2.$$

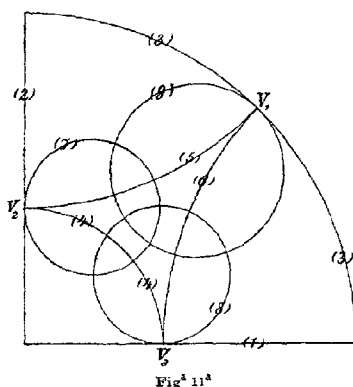
$$(8) \quad \left\{\xi - (\sqrt{2}-1)\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,$$

$$\text{Tipo II) } a_1 = 1, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 2, \quad d_2 = -1.$$

$$(9) \quad \left(\xi - \frac{2}{2\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{2\sqrt{2}+1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(2\sqrt{2}+1)^2},$$

$$\text{Tipo III) } a_1 = -2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 2. \quad (\text{Fig. 11a})$$

Così abbiamo definito un poliedro, che indicheremo con P^* , tutto racchiuso da sfere (e piani) di riflessione del gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ con 9 faccie e 11 vertici, cioè:

Fig.^a 11^a

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione delle faccie (1) (2) (3),
$V_2 \equiv (0, 0, \sqrt{2}-1)$	" " " (1) (2) (4),
$V_3 \equiv (\sqrt{2}-1, 0, 0)$	" " " (1) (4) (6) (8),
$V_4 \equiv (0, \sqrt{2}-1, 0)$	" " " (2) (4) (5) (7),
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" " " (1) (3) (6),
$V_6 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	" " " (2) (3) (5),
$V_7 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	" " " (3) (5) (6) (9),
$V_8 \equiv \left(\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}, \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}, \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$	" " " (4) (7) (8),
$V_9 \equiv \left(\frac{3(3\sqrt{2}-2)}{14}, \frac{3\sqrt{2}-2}{7}, \frac{3\sqrt{2}-2}{14}\right)$	" " " (6) (8) (9),
$V_{10} \equiv \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{7}, \frac{3(3\sqrt{2}-2)}{14}, \frac{3\sqrt{2}-2}{14}\right)$	" " " (5) (7) (9),
$V_{11} \equiv \left(\frac{10\sqrt{2}-8}{17}, \frac{10\sqrt{2}-8}{17}, \frac{5-2\sqrt{2}}{17}\right)$	" " " (7) (8) (9).

*) Fig.^a 11^a

Questo poliedro P è tutto al di sopra del piano $\xi = 0$ salvo ai tre vertici singolari V_3, V_4, V_7 , ove scende fino a questo piano*). Si osserverà inoltre che gli angoli diedri di P sono tutti retti, ciò che risulta anche a priori dalle considerazioni alla fine del § prec^{te}.

Dimostreremo nei prossimi §§ che P è appunto il poliedro fondamentale di $\overline{K}_{(2,2)}$ per il che occorre provare: 1° che P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione del gruppo, 2°: che nessuna sostituzione di $\overline{K}_{(2,2)}$ trasforma P in sè medesimo (Cf. (B) § 10).

§ 12.

P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$.

Per provare l'asserzione superiore cominciamo dal dimostrare che se una sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$ attraversasse P , essa lascierebbe all' esterno ambedue i vertici V_1, V_2 sull' asse ξ . E infatti se una sfera del tipo I) contenesse nell' interno o alla superficie il vertice $V_1 \equiv (0, 0, 1)$, dovremmo avere

$$2b_1^2 + 2a_2^2 + (d_1\sqrt{2} - c_1)^2 \leq 1$$

onde $a_2 = b_1 = 0$ e la sfera, avendo il centro nell' origine, conterrebbe totalmente nel suo interno il poliedro P . Similmente pel vertice $V_2 \equiv (0, 0, \sqrt{2} - 1)$ risulterebbe

$$2b_1^2 + 2a_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 (d_1\sqrt{2} - c_1)^2 \leq 1,$$

onde nuovamente $a_2 = b_1 = 0$. Per una sfera del tipo II) avremmo

$$4b_2^2 + a_1^2 + 2(d_2\sqrt{2} - c_2)^2 \leq 1 \quad \text{per } V_1,$$

$$4b_2^2 + a_1^2 + 2(\sqrt{2} - 1)^2 (d_2\sqrt{2} - c_2)^2 \leq 1 \quad \text{per } V_2,$$

onde $b_2 = 0$ e poichè inoltre deve sussistere la (B) § 10 cioè

$$a_1^2 - 2c_2^2 + 4d_2^2 = 1,$$

ne seguirebbe

$$a_1 = \pm 1, \quad c_2 = d_2 = 0$$

e la sfera supposta si ridurrebbe alla faccia piana $\eta = 0$ di P . In fine per una sfera del tipo III) avremmo le rispettive disequaglianze

$$a_1^2 + 4b_2^2 + (c_1 - d_1\sqrt{2})^2 \leq 1 \quad \text{per } V_1,$$

$$a_1^2 + 4b_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 (c_1 - d_1\sqrt{2})^2 \leq 1 \quad \text{per } V_2,$$

*) Basta già questa circostanza per dimostrare che nell' interno di ogni punto del piano complesso il nostro gruppo è impropriamente discontinuo (Poincaré, Acta Math. Bd. 3).

insieme alla (C) § 10

$$a_1^2 + 4b_2^2 + c_1^2 - 2d_1^2 = 1,$$

il che dà la sfera (3) o il piano (2).*)

Dimostriamo ora che la sfera di riflessione supposta, attraversando P , dovrebbe necessariamente lasciare all'esterno i vertici singolari V_3, V_4 . Se consideriamo per esempio il vertice V_3 , vediamo in primo luogo che esso non può giacere su questa sfera, poichè le sfere di riflessione per V_3 formano due serie rispettivamente tangenti fra loro ed ortogonali a quelle dell'altra serie e fra di esse abbiamo già scelto, a limitare P , quelle dei massimi raggi. Se V_3 fosse interno alla detta sfera, questa dovrebbe tagliare ortogonalmente il piano (1) e inoltre, lo spigolo $V_3 V_2$ passando dall'interno all'esterno, intersecherebbe anche la sfera (4) ortogonalmente. Per una sfera del tipo I) avremmo dunque

$$a_2 = 0, \quad \frac{2b_1^2}{(d_1\sqrt{2} - c_1)^2} = (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{1}{(d_1\sqrt{2} - c_1)^2},$$

cioè

$$2b_1^2 = 1 + \{(2d_1 + c_1) - (c_1 + d_1)\sqrt{2}\}^2$$

e, non potendo essere $c_1 = -2d_1$, perchè ne seguirebbe l'equazione assurda $2b_1^2 = 2d_1^2 + 1$, sarà $d_1 = -c_1$ e però $2b_1^2 = c_1^2 + 1$ che è in contraddizione coll'equazione (A) § 10

$$2b_1^2 + c_1^2 = 1.$$

Nel tipo II) non esistono d'altronde sfere normali al piano (1) perchè l'equazione (B) § 10 è incompatibile colla condizione $a_1 = 0$.

In fine per una sfera del tipo III) avremmo $b_2 = 0$; la (C) § 10 diventa:

$$a_1^2 + c_1^2 - 2d_1^2 = 1,$$

mentre la condizione d'ortogonalità colla sfera (4) dà:

$$a_1^2 = 1 + \{(c_1 + d_1)\sqrt{2} - (c_1 + 2d_1)\}^2.$$

Sarebbe quindi necessariamente $c_1 = d_1 = 0$, $a_1 = \pm 1$ e la sfera si ridurrebbe al piano (2).

Una dimostrazione del tutto simile vale pel vertice V_4 .

Da quanto superiormente si è detto, risulta che una sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$, che attraversi P , deve lasciare all'esterno i vertici V_1, V_2, V_3, V_4 e contenere nel suo interno almeno uno dei rimanenti. La semplice ispezione della figura dimostrerà che ciò è impossibile.**)

*) Nel caso attuale non esistono evidentemente sfere di riflessione del tipo IV).

**) Le considerazioni geometriche del testo sono tutte fondate sulla proprietà dimostrata al § 10 che l'incontro fra due sfere di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$ deve aver luogo ortogonalmente. Volendo ricercare direttamente il poliedro del gruppo più ampio $\overline{H}_{(2,2)}$ la proprietà qui utilizzata andrebbe perduta.

E infatti se V_5 fosse interno alla sfera supposta, gli spigoli $V_5 V_3$, $V_5 V_1$ traverserebbero questa sfera, la quale dovrebbe dunque tagliare ad angolo retto le faccie (1) (3) (6). Il circolo massimo traccia della sfera sul piano $\xi\eta$ avrebbe dunque il centro sull'asse ξ e taglierebbe ortogonalmente i circoli (3) (6); ma un tale circolo, come la figura dimostra, è immaginario. Ripetendo successivamente la supposizione per gli altri vertici, si avrebbe per V_6 un circolo ortogonale ai circoli (3) (5) e alla retta 2); per V_7 un circolo ortogonale a (3) (5) (6); per V_8 un circolo ortogonale a (4) (7) (8); per V_9 un circolo ortogonale a (6) (8) (9); per V_{10} un circolo ortogonale a (5) (7) (9); in fine per V_{11} un circolo ortogonale a (7) (8) (9). Tutti questi circoli sono visibilmente immaginari. Concludiamo adunque: *Il poliedro P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione.*

§ 13.

Trasformazioni di P in sè medesimo.

Ricerchiamo ora tutte le sostituzioni di 1^a e di 2^a specie, appartenenti o no al gruppo $\bar{K}_{(2,2)}$, che trasformano P in sè medesimo. Per tal modo risolveremo anche la questione di risalire al gruppo più ampio in cui $\bar{K}_{(2,2)}$ è contenuto eccezionalmente. In questa ricerca si tenga presente che per ciascuna delle cercate sostituzioni i tre vertici singolari V_3 , V_4 , V_7 debbono permutarsi fra loro. Ora cerchiamo in primo luogo se esiste una sostituzione che lasci fermi tutti tre i vertici singolari. Essa è necessariamente una riflessione sulla sfera la cui traccia sul piano $\xi\eta$ (circolo massimo) è circoscritta al triangolo $V_3 V_4 V_7$ dei vertici singolari. Effettivamente la riflessione su questa sfera

$$\{\xi - (\sqrt{2} - 1)\}^2 + \{\eta - (\sqrt{2} - 1)\}^2 + \xi^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$

cambia P in sè stesso, permutando (3) con (9), (1) con (8), (2) con (7) e lasciando ferme le faccie (4) (5) (6). L'espressione analitica della trasformazione è la seguente

$$(a) \quad z' = \frac{(1+i)z_0 - (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)z_0 - (1-i)}.$$

Un'altra trasformazione di P in sè stesso si osserva subito nella riflessione sul piano $\xi - \eta = 0$, giacchè P è simmetrico rispetto a questo piano; essa scambia V_3 con V_4 e lascia fermo V_7 . Questa seconda trasformazione si traduce nella sostituzione

$$(b) \quad z' = -\frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}z_0}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}.$$

La (a) e la (b) sono fuori del gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ ed anche fuori del gruppo più ampio $\overline{H}_{(2,2)}$. Consideriamo ora la riflessione di $\overline{H}_{(2,2)}$

$$(c) \quad z' = \frac{-z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Tipo VII) } a_2 = 0, \quad b_1 = -1, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 1$$

sulla sfera

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \xi^2 = 2.$$

Essa cangia P in sè medesimo scambiando (2) con (3), (4) con (6), (7) con (9) e lasciando ferme le faccie (1) (5) (8); in questa trasformazione V_3 resta fisso e V_4 si scambia con V_7 .

Combinando fra loro le sostituzioni trovate (a) (b) (c) ne risultano, come si vede da considerazioni elementari, 12 sostituzioni distinte che cangiano P in sè medesimo, nè possono esserne di diverse da queste. Scrivendone le espressioni effettive, vediamo che nessuna di esse appartiene a $\overline{K}_{(2,2)}$ e però: *Il poliedro P definito al § 11 è il poliedro fondamentale di $\overline{K}_{(2,2)}$.* Inoltre risulta dalla discussione fatta che, ampliando $\overline{K}_{(2,2)}$ colle sostituzioni (a) (b) (c), otteniamo il gruppo L più ampio possibile nel quale $\overline{K}_{(2,2)}$ è contenuto eccezionalmente; l'indice di $\overline{K}_{(2,2)}$ in L è eguale a 12. Se poi colle formole del § 8 calcoliamo le sostituzioni quaternarie corrispondenti alle nuove sostituzioni di L , troviamo che esse sono ancora a coefficienti razionali interi ed appartengono al gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_4^2.$$

Per accertarsene basta calcolare le sostituzioni quaternarie corrispondenti ad (a) (b); troviamo per queste rispettivamente lo schema

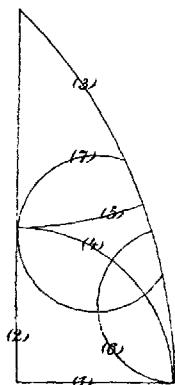
$$(a) \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volendo ora il poliedro fondamentale di $\overline{H}_{(2,2)}$, si osservi che la sfera di riflessione

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \xi^2 = 2$$

appartenente a $\overline{H}_{(2,2)}$ divide il poliedro fondamentale P di $\overline{K}_{(2,2)}$ in due parti equivalenti e poichè l'indice di $\overline{K}_{(2,2)}$ entro $\overline{H}_{(2,2)}$ è appunto eguale a 2, ne risulta subito che una qualunque di queste due parti può assumersi a poliedro fondamentale Π di $\overline{H}_{(2,2)}$. Così: Il poliedro fondamentale Π di $\overline{H}_{(2,2)}$ può definirsi come quello racchiuso al di sopra del piano $\xi = 0$ dalle 7 faccie

- (1) $\eta = 0$, (2) $\xi = 0$, (3) $(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \xi^2 = 2$,
 (4) $\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$, (5) $\xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \xi^2 = 1$,
 (6) $\{\xi - (\sqrt{2} - 1)\}^2 + \{\eta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\}^2 + \xi^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$,
 (7) $\{\xi - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\}^2 + \{\eta - (\sqrt{2} - 1)\}^2 + \xi^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$. (Fig^a 12^a).

Fig^a 12^a

In fine per conoscere le trasformazioni di Π in sè stesso, basta osservare che la faccia (3) è l'unica pentagona e in conseguenza nella trasformazione supposta deve cangiarsi in sè stessa e però anche l'intero poliedro P si cangierà in sè stesso. Ma fra le 12 sostituzioni sopra trovate, che riproducono P , l'unica che lasci fissa la sfera (3) è la sostituzione (a); il gruppo più ampio in cui $\bar{H}_{(2,2)}$ è eccezionale lo contiene adunque come sottogruppo d'indice 2.

§ 14.

Le riflessioni di $K_{(2,3)}$ e il poliedro P' .

Nel caso che ora consideriamo $D = 2$, $\nu = 3$ le sfere di riflessione col centro nell'origine appartengono tutte al tipo III, l'equazione $c_1^2 - 3d_1^2 = -1$ essendo *insolubile* in numeri interi; i loro raggi formano una progressione geometrica di ragione $q = 2 - \sqrt{3}$. Ciò posto consideriamo la regione di spazio, al di sopra del piano $\xi = 0$, compresa fra i due piani di riflessione

$$(1) \quad \eta = 0, \quad (2) \quad \xi = 0$$

e le due sfere consecutive di riflessione col centro nell'origine

$$(3) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$(4) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$\text{Tipo III) } c_1 = 2, \quad d_1 = -1, \quad a_1 = b_2 = 0$$

e togliamone le porzioni interne alle *dieci* sfere di riflessione seguenti:

$$(5) \quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 0,$$

$$(6) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = -1, \quad b_1 = -1, \quad c_1 = 2, \quad d_1 = 0,$$

$$(7) \quad \xi^2 + \{\eta - \sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\}^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -2, \quad d_1 = 1,$$

$$(8) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$\text{Tipo IV) } a_2 = 1, \quad b_1 = -1, \quad c_2 = 1, \quad d_2 = -1,$$

$$(9) \quad \left\{\xi - \frac{3}{2(\sqrt{3}+1)}\right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left\{\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}\right\}^2,$$

$$\text{Tipo III) } a_1 = 3, \quad b_2 = 0, \quad c_1 = 2, \quad d_1 = -2,$$

$$(10) \quad \left\{\xi - \frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{3}}\right\}^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(4+\sqrt{3})^2},$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = -4, \quad d_1 = 1,$$

$$(11) \quad \left\{\xi - \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}\right\}^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(4+2\sqrt{3})^2},$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -4, \quad d_1 = 2,$$

$$(12) \quad \left\{\xi - \frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right\}^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(3+2\sqrt{3})^2},$$

$$\text{Tipo III) } a_1 = 2, \quad b_2 = 0, \quad c_1 = 3, \quad d_1 = -2,$$

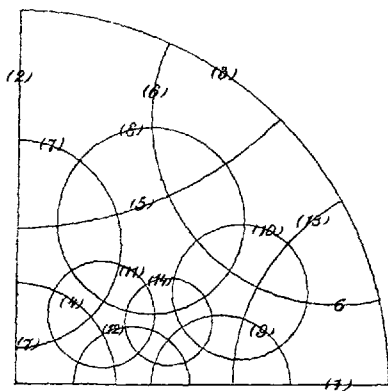
$$(13) \quad \left(\xi - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{Tipo III) } a_1 = 2, \quad b_2 = c_1 = 0, \quad d_1 = -1,$$

$$(14) \quad \left(\xi - \frac{2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}\right)^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}}{5+2\sqrt{3}}\right\}^2 + \zeta^2 + \frac{1}{(5+2\sqrt{3})^2},$$

$$\text{Tipo I) } a_2 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_2 = -5, \quad d_1 = 2.$$

Il poliedro P' che così definiamo (Fig^a 13^a), ha i suoi angoli diedri retti e le faccie pentagonali, eccetto le faccie (1) (8) che sono esagonali. I 24 suoi vertici sono tutti a distanza finita al di sopra del piano $\xi = 0$; cioè: *Il poliedro P' non presenta alcun vertice*

Fig^a 13^a

singolare. Questa importante circostanza, che per la prima volta incontriamo in questi studi, è dovuta all'essere il gruppo $\overline{K}_{(2,3)}$ privo di sostituzioni paraboliche (§ 8).

Mediante considerazioni geometriche in parte ed in parte aritmetiche, del tutto simili a quelle del § 12, stabiliamo che: *Il poliedro P' non è attraversato da alcuna sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,3)}$.*

§ 15.

Sostituzioni che trasformano P' in sè medesimo.

Resta che cerchiamo le sostituzioni di $\overline{K}_{(2,3)}$ che cangiano P' in sè medesimo. Ma anche qui converrà fare più in generale la ricerca di tutte le sostituzioni lineari di 1^a e 2^a specie, che producono questo effetto, senza esigere che appartengano a $\overline{K}_{(2,3)}$; così, oltre a determinare i poliedri fondamentali di $\overline{K}_{(2,3)}$ e di $\overline{H}_{(2,3)}$ troveremo anche il gruppo più ampio in cui $\overline{K}_{(2,3)}$ è contenuto eccezionalmente.

Siccome nel poliedro P' , come sopra si è avvertito, abbiamo due sole faccie esagonali (1) (8), in ogni trasformazione di P' in sè medesimo dovranno queste due faccie restare singolarmente invariate o scambiarsi fra loro.*) Cerchiamo dapprima se esistono sostituzioni di 1^a specie

*) Nella discussione seguente si tenga presente la figura 13^a.

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

che riproducano P' lasciando fissi nel piano $\xi = 0$ la retta (1) ed il circolo (8). Da note proprietà delle sostituzioni lineari*) risulta che tale sostituzione deve essere ellittica coi due punti fissi

$$(1 + i) \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad (1 - i) \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

e però essa avrà la forma

$$\frac{z' - \frac{1+i}{2}(\sqrt{3}-1)}{z' - \frac{1-i}{2}(\sqrt{3}-1)} = \varepsilon \frac{z - \frac{1+i}{2}(\sqrt{3}-1)}{z - \frac{1-i}{2}(\sqrt{3}-1)},$$

essendo ε una radice dell'unità. Le faccie (1) (8) che debbono cangiarsi in sè medesime essendo esagonali, ε sarà una radice quadrata, cubica o sesta dell'unità. Esaminando subito l'ultimo caso, nel quale gli altri due sono compresi, facciamo

$$\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

e per la corrispondente sostituzione A (ellittica a periodo 6) troviamo

$$A) \quad z' = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}z + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}z + \frac{\sqrt{3}+1}{2}}.$$

Essa cangia effettivamente il poliedro P' in sè medesimo, lasciando fisse le faccie (1) (8) e producendo sulle 12 rimanenti le sostituzioni cicliche di 6° ordine

$$(2, 4, 12, 9, 13, 3) (5, 7, 11, 14, 10, 6).$$

Segue poi di qui, come notiamo di passaggio: *Le faccie (1) (8) del poliedro P' sono esagoni regolari (nel senso non euclideo) con angoli retti.*

Troviamo inoltre subito una sostituzione di 2ª specie che cangia P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie esagonali (1) (8). E invero, se consideriamo la riflessione B del gruppo $\bar{H}_{(2,3)}$:

$$B) \quad z' = \frac{\frac{-z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \text{Tipo VII) } a_2 = c_1 = 0, \quad b_1 = -1, \quad d_1 = 1$$

colla sfera di riflessione

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

*) Cf. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunktionen 1^{er} Bd. p^a 163 s. s.

vediamo che essa lascia ferme le faccie (1) (5) (8) (14) producendo fra le rimanenti gli scambi

$$(2, 3), (4, 13), (6, 7), (9, 12), (10, 11).$$

La riflessione B trasforma la sostituzione A nella sua inversa e combinata con A dà luogo al gruppo di 12 sostituzioni

$$\Gamma_{12} = \begin{cases} 1, A, A^2, A^3, A^4, A^5, \\ B, BA, BA^2, BA^3, BA^4, BA^5, \end{cases}$$

che cangia P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie (1) (8).

Dimostriamo facilmente che Γ_{12} è il gruppo completo di sostituzioni lineari riproduttrici di P' . Dalla discussione fatta risulta intanto che fuori di Γ_{12} non esiste alcuna sostituzione che cangi P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie (1) (8)*. Una sostituzione U riproduttrice di P' fuori di Γ_{12} dovrebbe adunque scambiare (1) con (8) e trasformare in sè medesimo il gruppo ciclico formato dalle potenze di A; in particolare essa trasformerebbe A^3 in sè medesima. Ora, scambiando A^3 la faccia (2) con (9) dovrebbe U stessa scambiare queste due faccie o lasciarle singolarmente invariate. Ambedue le ipotesi sono inamissibili; invero le due faccie (1) (2) ortogonali fra loro si trasporterebbero per U nel primo caso in (8) (9) e nel 2° in (8) (2), mentre le faccie di ciascuna coppia (8) (9) o (8) (2) non si tagliano.

Come pel gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ (§ 13) abbiamo dunque il risultato: Il gruppo L più ampio in cui $\overline{K}_{(2,3)}$ è eccezionale lo contiene come sottogruppo d'indice 12. Si osservi poi che fra le 12 sostituzioni riproduttrici di P' soltanto le quattro

$$1, A^3, B, BA^3$$

appartengono ad $\overline{H}_{(2,3)}$ e fra queste soltanto la A^3 al sottogruppo $\overline{K}_{(2,3)}$. In fine è da osservarsi che se colle formole del § 8 si calcola la sostituzione quaternaria corrispondente alla A si trova la seguente

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

che ha coefficienti razionali interi e riproduce la forma quaternaria

$$\Phi = 3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2.$$

Lo stesso vale quindi per tutte le sostituzioni del gruppo ampliato L .

*) Se di 1ª specie una tale sostituzione sarebbe una potenza di A, se di 2ª, combinata con B, darebbe ancora una potenza di A.

§ 16.

I poliedri fondamentali di $\bar{K}_{(2,3)}$, $\bar{H}_{(2,3)}$.

Fra le sostituzioni di $\bar{K}_{(2,3)}$ la sola sostituzione ellittica A^3 (a periodo 2) cangia P' in sè medesimo. Ogni sfera che passi pel circolo fisso di A^3 divide P' in due parti equivalenti; una qualunque di queste parti può assumersi a poliedro fondamentale di $\bar{K}_{(2,3)}$. Converrà qui assumere per questa sfera la sfera di riflessione della sostituzione B:

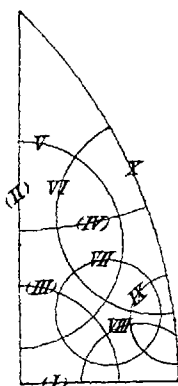
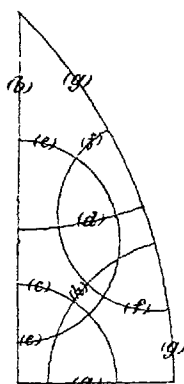
$$B) (\xi + 1)^2 + \eta^2 + \xi^2 = 2$$

e il poliedro fondamentale di Π di $\bar{K}_{(2,3)}$ sarà quello racchiuso dalle antiche faccie

$$(1) (2) (4) (5) (7) (8) (11) (12) (14)$$

e dalla faccia B) aggiunta che numereremo successivamente con

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X (Fig^a 14^a).

Fig^a 14^aFig^a 15^a

Se vogliamo il poliedro fondamentale di $\bar{H}_{(2,3)}$, basterà utilizzare l'altra riflessione BA^3 di $\bar{H}_{(2,3)}$ che trasforma l'antico poliedro P' ed anche l'attuale Π in sè medesimo, lasciando fisse le faccie *I, III, VI, X* e scambiando *II* con *VIII*, *IV* con *IX*, *V* con *VII*. L'espressione analitica di BA^3 è:

$$z' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} z_0 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}, \quad \text{Tipo V) } a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 1$$

e la sua sfera di riflessione

$$\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^2 + \eta^2 + \xi^2 = \frac{2}{(2 + \sqrt{3})^2}$$

divide Π in due parti equivalenti; una di esse ad arbitrio, p. e. quella Π' racchiusa dalle faccie

$$I, II, III, IV, V, VI, X$$

e dalla faccia aggiunta può assumersi a poliedro fondamentale di $\bar{H}_{(2,3)}$. Adunque il poliedro Π' di $\bar{H}_{(2,3)}$ è racchiuso dalle 8 faccie

$$a) \quad \eta = 0, \quad b) \quad \xi = 0, \quad c) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$d) \quad \xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$e) \quad \xi^2 + \{\eta - \sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\}^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$f) \quad \left\{\xi - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$g) \quad (\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

$$h) \quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(2+\sqrt{3})^2}; \quad (\text{Fig}^a 15^a);$$

che sono sfere (e piani) di riflessione del gruppo stesso.

Π' ha i 12 vertici

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv (a, b, c), & V_2 &\equiv (a, c, h), & V_3 &\equiv (a, g, h), & V_4 &\equiv (a, b, g), \\ V_5 &\equiv (b, c, e), & V_6 &\equiv (b, d, e), & V_7 &\equiv (b, d, g), & V_8 &\equiv (c, e, h), \\ V_9 &\equiv (d, e, f), & V_{10} &\equiv (d, f, g), & V_{11} &\equiv (e, f, h), & V_{12} &\equiv (f, g, h); \end{aligned}$$

quattro delle sue faccie b), e), g), h) sono pentagonali, le altre quattro quadrangolari. Dei suoi angoli diedri due soltanto sono di 45° e cioè quelli agli spigoli (bg) , (eh) , i rimanenti sono retti.

Dopo queste osservazioni è facile determinare tutte le sostituzioni lineari che cangiano Π' in sè medesimo. Esse formano un *Vierergruppe* che contiene, oltre l'identità, tre sostituzioni ellittiche a periodo 2:

$$A, B, C = AB = BA.$$

Basterà dare le effettive espressioni di A, B che sono le seguenti

$$A) \quad z' = \frac{\{1+i(\sqrt{2}+1)^2\}kz + (\sqrt{2}+1)(1-i)h}{(\sqrt{2}+1)(1-i)kz - \{1+i(\sqrt{2}+1)^2\}}, \quad h = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{2\sqrt{2}},$$

$$B) \quad z' = \frac{\{1-i(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}kz - (2-\sqrt{3})\{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-i\}k}{(2+\sqrt{3})\{\sqrt{3}-\sqrt{2}-i\}kz - \{1-i(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}k}, \quad k = \frac{\sqrt{2+\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}.*$$

Sulle faccie di Π' le A, B producono le rispettive trasposizioni

$$A) \quad (ad) (bg) (cf) (eh),$$

$$B) \quad (ac) (bh) (df) (eg)$$

*) L'aggiunta dei fattori h, k al numeratore e denominatore delle formole ha per iscopo di rendere il determinante delle sostituzioni eguale all' unità.

e la 3^a C conseguentemente le altre

$$C) (af) (cd) (be) (gh).$$

Il gruppo $\bar{H}_{(2,3)}$ è adunque nuovamente suscettibile d'ampliamento e il gruppo più ampio a cui si perviene lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 4.

Ai due esempî sopra trattati $D = 2$, $\nu = 2$; $D = 3$, $\nu = 3$ ci sarebbe facile aggiungerne altri nei quali la determinazione dei poliedri fondamentali dei gruppi K, H riesce coi medesimi mezzi.

Fra questi gruppi i più notevoli sono certamente quelli che non contengono sostituzioni paraboliche; i loro poliedri generatori, come quelli superiormente determinati per $\bar{K}_{(2,3)}$, $\bar{H}_{(2,3)}$, non presenteranno vertici singolari.

È da osservarsi per altro che per quanto importanti siano questi metodi, essi riescono soltanto per un numero di gruppi relativamente ristretto, essendo per loro natura limitati al caso in cui le riflessioni del gruppo generano un suo sottogruppo d'indice finito. Essi non costituiscono insomma che un primo passo nella soluzione del problema generale: *Definito aritmeticamente un gruppo di sostituzioni lineari determinarne il poliedro o il poligono fondamentale.*

Pisa, Gennaio 1893.
