

Ueber die Entwicklung abgekürzter convergirender Potenzreihen.

Die *Taylor'sche* Reihe in der Gestalt

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots$$

lässt folgende Anwendung zu:

$$f(x+h) = f\left[\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}\right] = f\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \dots$$

$$f(x) = f\left[\left(x+\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}\right] = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) - \dots$$

woraus:

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left(x+\frac{h}{2}\right) + h^3 \dots \quad (1)$$

$$\frac{f(x+h) + f(x)}{2} = f\left(x+\frac{h}{2}\right) + h^2 \dots \quad (2)$$

Denkt man sich unter $y=f(x)$ die Gleichung einer Curve, so zeigen diese 2 Gleichungen einfache geometrische Bedeutungen.

Anwendungen von Gl. (1)

$$\sin u - \sin v = (u-v) \cos \frac{u+v}{2} + (u-v)^3 \dots$$

$$\log B - \log b = (B-b) \frac{M}{\frac{B+b}{2}} = 2M \frac{B-b}{B+b} + (B-b)^3 \dots$$

letztere Formel ist die Grundlage der sogenannten *Babinet'schen* Näherungsformel für Barometermessung.

Die Gleichung (2) wird häufiger in anderer Gestalt gebraucht, wie folgendes zeigt:

Wenn $f(x, x')$ eine Function von x und x' ist, welche nach Potenzen von $(x'-x)$ entwickelt werden kann, so ist

$$f(x, x') = f(x, x) + (x'-x) f_1(x) + (x'-x)^2 \dots$$

oder

$$f(x, x') = f(x', x') + (x-x') f_1(x') + (x-x')^2 \dots$$

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x'-x) \frac{f_1(x) - f_1(x')}{2} \quad (3)$$

Es unterscheiden sich aber $f_1(x)$ und $f_1(x')$ selbst nur um Glieder von der Ordnung $(x'-x)$ also

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x'-x)^2 \dots$$

Dabei sind $f(x, x)$ und $f(x', x')$ diejenigen 2 Werthe von $f(x, x')$, welche entstehen, wenn bzw. $x'=x$ und $x=x'$ gesetzt wird.

Beispiele:

$$\sqrt{xx'} = \frac{x+x'}{2} + (x'-x)^2 \dots$$

$$\sqrt{\frac{x^2+x'^2}{2}} = \frac{x+x'}{2} + (x'-x)^2 \dots$$

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x'}} = \frac{x+x'}{2} + (x'-x)^2 \dots$$

$$\frac{(x'-x)^3}{3(x'-x)} = \frac{x^2+xx'+x'^2}{3} = \frac{x^2+x'^2}{2} + (x'-x)^2 \dots$$

oder nach der 2ten der vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{(x'-x)^3}{3(x'-x)} = \left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + (x'-x)^2 \dots$$

oder in Worten: das geometrische und harmonische Mittel, das Mittel der Methode der kleinen Quadrate und viele andere Mittel zweier Zahlen xx' sind dem arithmetischen Mittel gleich, auf Glieder von der Ordnung $x'-x$ einschliesslich genau.

Das Vorstehende lässt sich auch auf bestimmte Integrale anwenden und giebt hier:

$$\int_x^{x'} f(x) dx = (x'-x) \frac{f(x) + f(x')}{2} + (x'-x)^3 \dots$$

was ebenfalls eine einfache geometrische Bedeutung hat; man kann dafür auch noch schreiben:

$$\int_x^{x'} f(x) dx = (x'-x) f\left(\frac{x+x'}{2}\right) + (x'-x)^3 \dots$$

Auch für zwei und mehr Veränderliche erhält man Gleichungen, welche (1) und (2) entsprechen:

$$f(x+h, y+i) = f(x, y) + h \frac{df\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{i}{2}\right)}{dx} + i \frac{df\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{i}{2}\right)}{dy} + h^3 \dots + i^3 \dots$$

$$\frac{f(x+h, y+i) + f(x, y)}{2} = f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{i}{2}\right) + h^2 \dots + i^2 \dots$$

Wir bezeichnen $x+h=x'$, $y+i=y'$ und finden wie früher

$$M = \frac{f(x', y') + f(x, y)}{2} = \sqrt{f(x', y') f(x, y)} + (x'-x)^2 \dots + (y'-y)^2 \dots$$

$$M = f\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) + (x'-x)^2 \dots + (y'-y)^2 \dots$$

$$M = f\left(\sqrt{xx'}, \sqrt{yy'}\right) + (x'-x)^2 + (y'-y)^2 \dots$$

Es lassen sich noch folgende Schlüsse ziehen:

Wenn u und v Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z sind, und u', v' dieselben Functionen von x', y', z' , so erhält man auf Grössen von der Ordnung $x'-x, y'-y, z'-z$ einschliesslich genau:

$$M = \frac{f(u, v) + f(u', v')}{2} = \sqrt{f(u, v) f(u', v')}$$

$$M = f\left(\frac{u+u'}{2}, \frac{v+v'}{2}\right) = f(\sqrt{uu'}, \sqrt{vv'})$$

und ausserdem

$$M = f(u_0, v_0)$$

wenn u_0 und v_0 die Werthe der Functionen u und v sind, welche entstehen, wenn für x, y, z die arithmetischen, geometrischen, harmonischen etc. Mittel von x und x', y und y', z und z' etc. gesetzt werden.

Die Anwendungen des im Vorstehenden behandelten Principis in der Geodäsie und Astronomie sind sehr zahlreich; ohne Zweifel wird dasselbe oft angewendet, ohne dass man sich bewusst ist, dass man in aller Strenge eine Potenz der Entwicklung erspart.

Wenn man z. B. bei der Berechnung der sogenannten Mittagsverbesserung für Zeitbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen die Declinationsänderung der Sonne proportional setzt der Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen und der Declinationsänderung von gestern auf morgen, so hat man damit dieselbe Genauigkeit, welche eine Interpolationsformel zweiten Grades für die Declination geben würde.

Von *Eckhardt* wird das Princip auf die Reduction von Mondsdistanzen angewendet (Astr. Nachr. 39. Band (1855) Seite 350) und auf *Legendre* zurückgeführt.

Die elegante Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie, welche *Gauss* in der zweiten Abhandlung seiner „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ gegeben hat, beruht ebenfalls auf dem Princip, in den Reihenentwickelungen das arithmetische Mittel einer gegebenen und einer zu bestimmenden Grösse als Argument einzuführen.

Eine sehr nützliche Anwendung des Principis zeigt folgendes Beispiel, durch welches Einsender auf die im Vorstehenden mitgetheilten Betrachtungen geführt worden ist:

Im 14. Band der Astr. Nachr. (1837) S. 310 giebt *Bessel* eine Formel zur Berechnung des Abstandes zweier Parallelkreise des Erdellipsoides, jedoch ohne Herleitung, und man sucht eine solche vergeblich auch in einem Werke, das die *Bessel'schen* Theorien verdeutlichen soll.

Eine schwerfällige Herleitung giebt *Fischer's* Lehrbuch der höheren Geodäsie B. III S. 258–264; kürzer kommt man so zum Ziel:

Die fragliche Formel heisst:

$$\frac{S}{s} = \frac{u-u'}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \sin u' \sin u \sin \alpha' \sin \alpha + e^4 \sigma^4 \dots \right\} \quad (I)$$

Dabei sind u und u' die „reducirten“ Breiten zweier Ellipsoidpunkte, s die Länge der sie verbindenden kürzesten Linie, α und α' deren Azimuthe in den Endpunkten, S der gesuchte Abstand der Parallelkreise der Endpunkte (längs des Meridians gemessen), ρ die Excentricität der Meridianellipse. σ ist eine Hilfsgrösse, welche bestimmt wird durch die Gleichung

$$\sin u = \sin u' \cos \sigma + \cos u' \sin \sigma \cos \alpha' \quad (II)$$

ferner hat man

$$s = a \int_0^\sigma \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \, d\sigma \quad (III)$$

Nachdem u aus (II) in (III) substituirt und die Integration ausgeführt ist, hat man $\alpha' = 0$ zu setzen und erhält damit den speciellen Werth von s , welcher $= S$ ist. Man findet nun leicht durch algebraische Entwicklung:

$$\frac{S}{s} = \frac{u-u'}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \sin^2 u \sin^2 \alpha + \sigma^3 \dots \right\}$$

Auf ähnlichem Wege hätte man aber auch ebenso leicht finden können:

$$\frac{S}{s} = \frac{u-u'}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \sin^2 u' \sin^2 \alpha' + \sigma^3 \dots \right\}$$

und jetzt berechtigen die verschiedenen Schlüsse, welche oben gemacht worden sind, zu schreiben:

$$\frac{S}{s} = \frac{u-u'}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \sin u' \sin u \sin \alpha' \sin \alpha + \sigma^4 \dots \right\}$$

Im Laufe der Entwicklung konnte man sich auch leicht überzeugen, dass Glieder mit e^3 überhaupt nicht vorkommen, es ist also die *Bessel'sche* Formel bis $e^4 \sigma^4$ ausschliesslich entwickelt. Zugleich ist gezeigt, dass man auch z. B. schreiben dürfte

$$\frac{S}{s} = \frac{u-u'}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \sin^2 \frac{u+u'}{2} \sin^2 \frac{\alpha+\alpha'}{2} + e^4 \sigma^4 \dots \right\}$$

oder verschiedene andere Formen.

Carlsruhe, Januar 1874.

W. Jordan.