

**11. Symbolische Integrale der elektromagnetischen Gleichungen, aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet, nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren;  
von Ludwig Silberstein.**

Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in einem vollkommen isolirenden Medium, von der Dielektricitätsconstanten  $K$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$ , können in der Form

$$(I) \quad \begin{cases} A K \frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl } M, \\ A \mu \frac{\partial M}{\partial t} = - \text{curl } E \end{cases}$$

geschrieben werden, falls man unter  $A$  das bekannte Verhältnis der Einheiten, unter  $t$  die Zeit, unter  $E$  und  $M$  die resultierende elektrische, bez. magnetische Kraft (als Vektoren) versteht, die zur Zeit  $t$  in einem beliebigen Punkte des Feldes herrscht. Ist das Medium isotrop, so sind  $K$  und  $\mu$  einfache Multiplikatoren; ist es hingegen krystallinisch, so haben  $K$  und  $\mu$  die Bedeutung von linearen Vectoroperatoren. Im übrigen kann das betrachtete Dielektricum homogen oder heterogen sein und die Zahlenwerte von  $K$  und  $\mu$  können im allgemeinen an gewissen Flächen discontinuirlich werden, sofern es sich um Körper handelt, die in einem gemeinsamen Medium tauchen oder aber um Körper von verschiedener Beschaffenheit, die sich miteinander im Contact befinden. Es sei jedoch vorausgesetzt, dass sämtliche Körper, sowie auch das dieselben umgebende Medium selbst, wenigstens in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Gebietes, unbeweglich sind und gar keine elektrische Leitfähigkeit besitzen.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, dass für irgend einen Zeitpunkt  $t_0$  und für alle Punkte des betrachteten Raumbgebietes die elektrische Kraft  $E_0$  und die magnetische  $M_0$  gegeben sind, und es werden diese Vektoren für alle Punkte dieses Gebietes für irgend einen anderen Zeitpunkt  $t$  gesucht,

welcher dem Augenblicke  $t_0$  vorangeht oder auf denselben folgt; in anderen Worten: man kennt den gegenwärtigen Zustand eines elektromagnetischen Feldes und wolle daraus seine Vergangenheit und Zukunft herleiten.

Sind die Kräfte  $E, M$  (immer als Vektoren aufgefasst) und deren Ableitungen nach der Zeit  $E', E'', \dots E^{(n)}$  etc.,  $M', M'', \dots M^{(n)}$  sämtlich endliche und stetige Functionen der Zeit<sup>1)</sup>, wenigstens innerhalb des betrachteten Raumgebietes und für das ganze Zeitintervall  $t_0 - t$  (die Grenzen  $t_0, t$  mitbegriffen), so können wir den Taylor'schen Lehrsatz anwenden, und indem wir (ohne Schaden für die Allgemeinheit der Untersuchung)  $t_0 = 0$  setzen, erhalten wir

$$(1) \quad E_t = E_0 + \frac{t}{1!} E'_0 + \frac{t^2}{2!} E''_0 + \frac{t^3}{3!} E'''_0 + \dots,$$

$$(2) \quad M_t = M_0 + \frac{t}{1!} M'_0 + \frac{t^2}{2!} M''_0 + \frac{t^3}{3!} M'''_0 + \dots$$

Von den Grössen, welche in diesen unendlichen Reihen auftreten, sind direct, ausser der Zeit  $t$ , nur die anfänglichen Vektoren  $E_0, M_0$  selbst bekannt; setzt man jedoch voraus, dass wenigstens in dem betrachteten Gebiete und während der ganzen Zeitepoche  $0 - t$  die elektromagnetischen Gleichungen (I) gültig sind, so kann man ohne weiteres sämtliche Derivirten  $E^{(i)}_0, M^{(i)}_0$  durch die Kräfte  $E_0, M_0$  selbst ausdrücken.

In der That, leitet man diese Gleichungen nach der Zeit ab und berücksichtigt man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{curl} = \text{curl} \frac{\partial}{\partial t},$$

so ergeben sich leicht die nötigen Grössen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E'_0 = + \frac{1}{A K} \text{curl} M_0, & M'_0 = - \frac{1}{A \mu} \text{curl} E_0, \\ E''_0 = - \frac{1}{A K \cdot A \mu} \text{curl}^2 E_0, & M''_0 = - \frac{1}{A \mu \cdot A K} \text{curl}^2 M_0, \\ E'''_0 = - \frac{1}{(A K)^2 \cdot A \mu} \text{curl}^3 M_0, & M'''_0 = + \frac{1}{(A \mu)^2 \cdot A K} \text{curl}^3 E_0, \\ E^{(4)}_0 = + \frac{1}{(A K)^2 \cdot (A \mu)^2} \text{curl}^4 E_0, & M^{(4)}_0 = + \frac{1}{(A \mu)^2 \cdot (A K)^2} \text{curl}^4 M_0, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array} \right.$$

1) welche auch den sonstigen Bedingungen der Entwickelbarkeit in ganze Potenzen genügen.

die Regel zur Bildung eines  $E_0^{(i)}$ ,  $M_0^{(i)}$  von beliebiger Ordnung ist aus dieser Zusammenstellung ohne weiteres zu ersehen. (Unter  $\text{curl}^i R$  ist das Resultat der an  $R$   $i$  mal nacheinander ausgeführten Operation „curl“ zu verstehen.)

Setzt man nun die Ausdrücke (3) etc. in die betreffenden Reihenentwicklungen (1), (2) ein und bezeichnet das Product  $A^2 \mu K$  mit  $1/v^2$ , d. h. setzt man den absoluten Wert von  $v$  gleich

$$(4) \quad v = \frac{1}{+ \sqrt{A^2 \mu K}},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} E_t &= \left[ E_0 - \frac{(v t)^2}{2!} \text{curl}^2 E_0 + \frac{(v t)^4}{4!} \text{curl}^4 E_0 - \frac{(v t)^6}{6!} \text{curl}^6 E_0 + \dots \right] \\ &\quad + \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{v t}{1!} \text{curl} M_0 - \frac{(v t)^3}{3!} \text{curl}^3 M_0 + \frac{(v t)^5}{5!} \text{curl}^5 M_0 - \dots \right], \\ M_t &= \left[ M_0 - \frac{(v t)^2}{2!} \text{curl}^2 M_0 + \frac{(v t)^4}{4!} \text{curl}^4 M_0 - \dots \right] \\ &\quad - \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \left[ \frac{v t}{1!} \text{curl} E_0 - \frac{(v t)^3}{3!} \text{curl}^3 E_0 + \frac{(v t)^5}{5!} \text{curl}^5 E_0 - \dots \right], \end{aligned}$$

oder — symbolisch —:

$$(5) \quad \begin{cases} E_t = \left\{ 1 - \frac{(v t \cdot \text{curl})^2}{2!} + \frac{(v t \cdot \text{curl})^4}{4!} - \dots \right\} E_0 \\ \quad + \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{(v t \cdot \text{curl})}{1!} - \frac{(v t \cdot \text{curl})^3}{3!} + \dots \right\} M_0, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} M_t = \left\{ 1 - \frac{(v t \cdot \text{curl})^2}{2!} + \frac{(v t \cdot \text{curl})^4}{4!} - \dots \right\} M_0 \\ \quad - \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{(v t \cdot \text{curl})}{1!} - \frac{(v t \cdot \text{curl})^3}{3!} + \dots \right\} E_0, \end{cases}$$

worin (wie kaum zu bemerken nötig) die  $\{ \}$  die Bedeutung zusammengesetzter Operatoren besitzen, welche auf die bezüglichen Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  zu appliciren sind. Diese Operatoren enthalten die in Betracht kommende Zeit  $t$ , dann  $v$ , welches die Dimensionen einer Geschwindigkeit hat (und als „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ bekannt ist) und eine Grösse (Quantität) im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist (unabhängig davon, dass allgemein, d. h. für ein anisotropes Medium,  $\mu$  und  $K$  keine Quantitäten oder Multiplicatoren, sondern Vectoroperatoren sind) und schliesslich den „curl“, welcher bereits ein ziemlich complicirter Operator ist und deren

Dimensionen (symbolisch gesprochen) die eines Linienintegrals dividirt durch einen Flächeninhalt, d. h. also die einer reciproken Länge sind:  $[\text{curl}] = [l^{-1}]$ ; dies alles ist in den zusammengesetzten Operatoren  $\{ \}$  in (5) und (6) in der Combination  $\varphi = v t \text{curl}$  enthalten, welche die Dimension Null hat, von der Wahl der Einheiten der Zeit und der Länge also sicher unabhängig ist und insofern einer *reinen* (unbenannten) Zahl verglichen werden kann, trotzdem sie — allgemein zu reden — nicht eine Grösse, sondern ein Operator ist.

Dessen ungeachtet möchte ich vorschlagen (mit der grösstmöglichen Vorsicht) zwei Operatoren einzuführen, die noch complicirter als  $\varphi = v t \text{curl}$ , und zwar *aus* demselben (oder — wenn man will — aus einem *beliebigen* Operator  $\varphi$ , dem jedoch die „Dimensionen“ einer *reinen* Zahl zukommen) zusammengesetzt sind, nämlich die Operatoren:  $\{\cos(\varphi)\}$  und  $\{\sin(\varphi)\}$ , welche aus  $\varphi$  so gebildet seien, als wäre  $\varphi$  ein gewisser Winkel, welche wir aber — unabhängig von jedem geometrischen Begriffe — durch die beiden wohlbekannten unendlichen Reihen

$$(7) \quad \{\cos(\varphi)\} = \left\{ 1 - \frac{(\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} - \dots \right\},$$

$$(8) \quad \{\sin(\varphi)\} = \left\{ \frac{(\varphi)}{1!} - \frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^5}{5!} - \dots \right\},$$

definirt haben wollen, zu denen man dann Zuflucht nehmen wird, so oft man befürchten sollte, den Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  Eigenschaften zuzuschreiben, welche den Eigenschaften der entsprechenden trigonometrischen Functionen analog wären.

Führt man nun diese beiden Operatoren ein, so kann man den Gleichungen (5) und (6) eine ziemlich elegante Form verleihen, indem man nämlich schreibt:

$$(A) \quad E_t = \{\cos(v t. \text{curl})\} E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(v t. \text{curl})\} M_0,$$

$$(B) \quad M_t = \{\cos(v t. \text{curl})\} M_0 - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(v t. \text{curl})\} E_0.$$

Die so gefundenen Formeln liefern uns den elektrischen Vector  $E_t$  und den magnetischen  $M_t$ , für den Augenblick  $t$  und für einen beliebigen Punkt des betrachteten Gebietes, und zwar ausgedrückt (wiewohl auch in symbolischer Weise) durch

die Vektoren  $E_0, M_0$ , — die für den Augenblick  $t=0$  und für den betrachteten Punkt mit seiner nächsten Umgebung bekannt sind, — und durch die Länge des Zeitintervalles  $t$ . In gewissen Fällen kann der Operator „curl“ zu einem gewöhnlichen Multiplicator desjenigen Vectors werden, an dem die Operation auszuführen ist; alsdann erhalten die Operatoren  $\{\}$  der Formeln (A), (B) die Bedeutung gewöhnlicher trigonometrischer Functionen von einem Argument, welches proportional mit der Zeit  $t$  ist. Ist aber dies nicht der Fall, so müssen sie, wie oben gesagt, als zusammengesetzte Operatoren behandelt werden. Oft ist zwar „curl“ kein Multiplicator, hingegen ist es aber  $curl^2$ , sagen wir  $curl^2 = n^2$ ; alsdann wird der symbolische Cosinus einfach gleich  $\cos(nvt)$ , — da er nur die geraden Potenzen von  $curl$  enthält, — während man wegen der Bedeutung von  $\{\sin(vt \cdot curl)\}$  auch in diesem Falle zu der unendlichen Reihe (8) recurriren muss. Jedenfalls aber (wenn bloß die anfänglichen Vektoren  $E_0, M_0$  als Functionen des Ortes gegeben sind) wird man die entsprechenden Operationen immer ausführen können, indem man, im schlimmsten Falle, auf ihre ursprüngliche, in (7) und (8) gegebene Bedeutung zurückkommen wird.

Die Fundamentealeigenschaften der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}, \{\sin(\varphi)\}$ , wo — in unserem Falle —  $\varphi$  eine Abkürzung für  $v t \cdot curl$  ist, kann man ohne weiteres finden, indem man sich die entsprechenden Eigenschaften der ihnen in einem gewissen Sinne correspondirenden trigonometrischen Functionen erinnert, oder (um sicherer vorzugehen) indem man sie aus den Reihen (7) und (8) ableitet. So sieht man z. B. sofort, dass

$$(9) \quad \{\cos(-\varphi)\} = \{\cos(\varphi)\},$$

$$(10) \quad \{\sin(-\varphi)\} = -\{\sin(\varphi)\}$$

ist, wenn  $\varphi$  entweder deshalb das Vorzeichen wechselt, dass man  $-t$  (anstatt  $+t$ ) nimmt, oder weil die anfängliche Verteilung der Vektoren sich dahin änderte, dass man anstatt  $+curl$  zu setzen hat  $-curl$ . — Quadriert man die Reihen (7) und (8), summirt die Resultate und sammelt man die Coefficienten einer jeden Potenz von  $\varphi$ , so findet man, dass die Factoren einer jeden Potenz von  $\varphi$  identisch Null sind und

dass nur der Factor 1 der nullten Potenz stehen bleibt, und damit wird dann die Eigenschaft

$$(11) \quad \{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2 = 1$$

bewiesen, die in unserem Falle den folgenden Sinn hat: Führt man an irgend einem Vector  $R$  zweimal hintereinander die Operation  $\{\cos(\varphi)\}$  und dann — an demselben Vector  $R$  — zweimal hintereinander die Operation  $\{\sin(\varphi)\}$  aus, so erhält man zwei Vektoren  $R_1$  und  $R_2$ , deren geometrische Summe (Resultante) mit dem ursprünglichen Vector  $R$  identisch ist (d. h.:  $R_1 = \{\cos(\varphi)\}^2 R$  und  $R_2 = \{\sin(\varphi)\}^2 R$  sind die Seiten eines Parallelogrammes, wovon  $R$  die Diagonale ist). In dieser Weise könnte man auch, aus den Reihen (7) und (8), sämtliche anderen Fundamentealeigenschaften der in Rede stehenden Operatoren und ihre gegenseitigen Beziehungen herleiten.

Es wird aber vielleicht nicht ohne Interesse sein, wenn wir hier bemerken, dass gewisse (wenn nicht alle) Eigenschaften dieser Operatoren in einer viel einfacheren und lehrreichen Weise aus ihrem wahren physikalischen Sinne selbst abgeleitet werden können, d. h. aus dem Umstande, dass, wenn man sie in einer gewissen (in den Formeln (A), (B) angegebenen) Weise auf dasjenige applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand des elektromagnetischen Feldes bezieht und denselben definiert ( $E_0, M_0$ ), sie uns dessen Vergangenheit oder Zukunft ( $E_t, M_t, t \geq 0$ ) liefern. Um z. B. die Beziehung (11) zu erhalten, können wir folgende Betrachtung anstellen: wenn unsere Operationen, auf dasjenige ( $E_0, M_0$ ) applicirt, was sich auf den gegenwärtigen Zustand bezieht ( $t=0$ ), uns den Zustand ( $E_t, M_t$ ) des Systems in irgend einem anderen (früheren oder späteren) Augenblick ( $t$ ) liefern, so muss man, wenn man an diesem letzteren Zustand dieselben Operationen mit geändertem Vorzeichen von  $t$  ausführt, wieder auf den ursprünglichen Zustand zurückkommen. Uebersetzt man dieses Raisonnement in die Sprache der Formeln und wendet die Beziehungen (9) und (10) an, so erhält man in der That:

$$E_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} E_t - \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_t,$$

$$M_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_t + \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} E_t,$$

und wenn man nun hierin  $E_t$ ,  $M_t$  [wie in (A), (B)] durch  $E_0$ ,  $M_0$  ausdrückt:

$$E_0 = \{\cos(vt \cdot \text{curl})\}^2 E_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_0 \\ - \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_0 + \{\sin(vt \cdot \text{curl})\}^2 E_0, \\ \text{und analog für } M_0;$$

man ersieht ohne weiteres, dass

$$\{\cos(\ )\} \{\sin(\ )\} = \{\sin(\ )\} \{\cos(\ )\}$$

ist, sodass das zweite und dritte Glied rechts sich gegenseitig aufheben und man das Resultat

$$[\{\cos(\varphi)\}^2 + \{\sin(\varphi)\}^2] E_0 = E_0$$

erhält; das analoge Ergebnis folgt, wenn man die auf  $M_0$  bezügliche Formel in eben derselben Weise entwickelt.

In ähnlicher Weise könnte man für die in Frage stehenden Operatoren z. B. auch die Correlative der bekannten trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1,$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

beweisen, indem man nämlich einmal von  $t=0$  direct zu  $t=t_1+t_2$ , das andere Mal aber von  $t=0$  zu  $t=t_1$  und dann von  $t_1$  zu  $t_1+t_2$  übergehen und die beiden so gewonnenen Resultate einander gleichsetzen würde; so könnte man auch andere, mehr oder weniger complicirte Processe ausfindig machen, um viele andere Eigenschaften der besagten Operatoren zu erhalten, analog den Beziehungen, die für die trigonometrischen Functionen, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, gültig sind.

Aus den Definitionen (7) und (8) folgt für irgend einen Vector  $R$ , der eine Function des Ortes, von der Zeit jedoch unabhängig ist (wie z. B.  $E_0$  oder  $M_0$ ), und für  $\varphi = vt \cdot \text{curl}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\cos(\varphi)\} R = -v \cdot \{\sin(\varphi)\} \text{curl } R,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\sin(\varphi)\} R = v \cdot \{\cos(\varphi)\} \text{curl } R;$$

wendet man diese Derivationsregeln auf die in (A), (B) gegebenen Ausdrücke von  $E_t$ ,  $M_t$  an und substituirt  $v^2 = 1/A^2 \mu K$ ,

so findet man ohne weiteres die elektromagnetischen Differentialgleichungen (I) verificirt.

Da  $\{\cos(0)\} = 1$  und  $\{\sin(0)\} = 0$  ist, so schliesst man aus (A), (B) unmittelbar, dass, wenn  $\text{curl } E_0 = 0$  und  $\text{curl } M_0 = 0$ , für jedes positive oder negative  $t$ :  $E_t = E_0$ ,  $M_t = M_0$  ist, d. h.: ist die Verteilung der elektrischen und der magnetischen Kraft in irgend einem Teile des betrachteten Gebietes auch nur in einem einzigen Augenblicke irrotational, so war und wird *dieser* Teil des Feldes immer unveränderlich, d. h. für alle Zeiten, welche zusammen mit jenem Augenblicke zu derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I) gehören; oder in anderen Worten: die Irrotationalität (von  $E$ ,  $M$ ), sei es auch nur für einen einzigen Zeitmoment einer Epoche von besagtem Charakter, bildet die *hinreichende* Bedingung für die Unveränderlichkeit eines beliebigen Teiles des Feldes für die ganze Dauer der Epoche und unabhängig von dem Sachverhalt in anderen (nicht angrenzenden) Gebieten des Feldes. Das dies auch die *notwendige* Bedingung ist, folgt ohne weiteres aus den Gleichungen (I) selbst.

Im Besonderen (wenn nämlich überall  $E_0 = M_0 = 0$  ist) folgt aus dem oben Gesagten, dass weder ein elektrisches, noch ein magnetisches, noch auch ein elektromagnetisches (rotationales oder irrotationales) Feld in irgend einem Augenblicke einer Epoche von besagtem Charakter geschaffen werden können, und dass also die Schöpfung (Erzeugung) eines jeden dieser Felder notwendigerweise eine Verletzung der elektromagnetischen Gleichungen (I) oder der Stetigkeitsbedingungen (wenn nicht der ersteren und der letzteren zugleich) involvirt, und auf diese Weise das Ende *einer* und den Anfang einer anderen, neuen „Epoche“ markirt.

Aber auch wenn  $E_0$  und  $M_0$  nur in einem gewissen, beliebig grossen oder beliebig kleinen Gebiete des betrachteten Raumes gleich Null sind, folgt aus (A), (B), dass  $E_t$ ,  $M_t$  beständig gleich Null sein müssen, sodass ohne Verletzung der genannten Bedingungen nicht einmal eine „Fortpflanzung“ der elektrischen und magnetischen Kräfte von Gebieten, wo sie bereits existiren, zu solchen, wo sie noch gar nicht vorhanden sind, vor sich gehen kann. In der That hat man auch in



diesem Falle beim Uebergang von den ersteren zu den letzteren Regionen eine Discontinuitätsfläche (oder ein System solcher Flächen); es werden also hier, nach Gleichung (I), die Derivierten von  $E$  oder von  $M$  oder von allen beiden Kräften, in Bezug auf die Zeit genommen, unendlich werden können, so dass es für diejenigen Punkte, die in oder unendlich nahe an diesen Flächen liegen, nicht erlaubt ist, den Taylor'schen Satz anzuwenden und unsere Formeln (A), (B) an diesen Stellen also ihre Gültigkeit verlieren; die Fortpflanzung elektromagnetischer Zustände implicirt in *diesem Falle* die Existenz einer solchen Unstetigkeitsfläche auch in den nachfolgenden Zeitmomenten und also eine Verletzung der Stetigkeitsbedingungen in den aufeinanderfolgenden Stellen auch derjenigen Region, wo ursprünglich keine elektrischen und magnetischen Kräfte wirken, d. h. eine Fortbewegung der ursprünglichen Discontinuitätsfläche selbst, mit oder ohne Deformation derselben. (Aehnliche Bemerkungen über die „Fortpflanzung“ könnte man übrigens auch in Bezug auf die Theorien der Deformationen und Oscillationen in elastischen Körpern und vieler anderen Erscheinungsklassen machen.)

Diese Schwierigkeiten<sup>1)</sup> bleiben wohl aus, sobald die Bedingungen der Stetigkeit in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Raumgebietes erfüllt sind; aber auch in diesem Falle kann man die „Fortpflanzung“ der elektromagnetischen Zustände aus unseren Formeln (A), (B) nicht direct herauslesen; dies geschieht jedoch aus einem Grunde, welcher eben eine charakteristische Eigenschaft dieser Lösungen [(A), (B)] bildet; in der That sehen wir in ihnen die (elektromagnetische)

1) In den diesbezüglichen Fällen kann man die Unstetigkeitsfläche als Grenzfall einer sogenannten (continuirlichen) Uebergangsschicht betrachten, was auch z. B. dann geschieht, wenn man (für ebene oder sphärische Wellen) die Function einer (einzigen) geometrischen Variablen, welche eine discontinuirliche Anfangsvertheilung ausdrückt, in eine Fourier'sche Reihe:

$$f_{(n)}(x) = \sum_k^n [a_k \sin(k p x) + b_k \cos(p k x)]$$

entwickelt und die actuelle discontinuirliche Function  $f(x)$  als den *Limes* der stetigen Function  $f_{(n)}(x)$  betrachtet

$$\left( f(x) = \lim_{n=\infty} f_{(n)}(x) \right).$$

Vergangenheit und Zukunft in einem jeden individuellen Punkte durch den gegenwärtigen Zustand ausgedrückt, welchen wir in eben demselben Punkte und in seiner nächsten Umgebung (was zur Ausführung der Operation „curl“ nötig ist) vorfinden, ganz unabhängig aber davon, was in anderen Stellen des Raumes geschieht oder früher geschehen ist. Um die Fortpflanzung elektromagnetischer Zustände in Evidenz zu bringen und die Geschwindigkeit der Fortpflanzung<sup>1)</sup> numerisch zu finden, müsste man die Lösungen (A), (B) in gehöriger Weise umformen, was in gewissen Fällen eine leichte Aufgabe ist; es wäre übrigens vielleicht überflüssig, hier daran zu erinnern, dass es im allgemeinen, d. h. in einem beliebigen elektromagnetischen Felde, nicht erlaubt ist, ohne weiteres *davon* zu sprechen, was in den allereinfachsten Fällen, z. B. für ebene oder kugelförmige Wellen, den Namen und den Charakter einer Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Kräfte annimmt. —

Die Formeln (A), (B) eignen sich gut für die beinahe unmittelbare Herleitung gewisser allgemeiner Theoreme, die mir neu zu sein scheinen, und deren Herleitung auf anderem Wege nicht leicht sein dürfte, mir aber jedenfalls unbekannt ist.

Betrachtet man nämlich zwei vom gegenwärtigen gleich abstehende Augenblicke, d. h. also: einen  $(-t)$  in der Vergangenheit, den zweiten  $(+t)$  in der Zukunft, und alle beide in ein und derselben Epoche der Continuität und der Gültigkeit der Gleichungen (I), so erhält man — auf Grund von (9) und (10) —:

$$(12) \quad \begin{cases} E_{+t} + E_{-t} = 2 \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} E_0, \\ E_{+t} - E_{-t} = 2 \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} M_0, \end{cases}$$

und analog

$$(13) \quad \begin{cases} M_{+t} + M_{-t} = 2 \{\cos(vt \cdot \text{curl})\} M_0, \\ M_{+t} - M_{-t} = 2 \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \{\sin(vt \cdot \text{curl})\} E_0, \end{cases}$$

d. h.: die (geometrische) *Summe* der <sup>elektrischen</sup> <sub>magnetischen</sub> Kräfte, die in einem Punkte des Feldes zu zwei verschiedenen und beliebig

---

1) Welche bekanntlich in denjenigen Fällen, in welchen man von einer solchen sprechen darf, gleich  $v = 1/A\sqrt{K\mu}$  wird.

gewählten Zeiten vorgefunden werden, hängt nur ab von der Verteilung der <sup>elektrischen</sup> ~~magnetischen~~ Kraft im mittleren Zeitpunkt, während die (geometrische) *Differenz* der <sup>elektrischen</sup> ~~magnetischen~~ Kräfte, die in zwei beliebigen Augenblicken wirken, nur von der Verteilung der <sup>magnetischen</sup> ~~elektrischen~~ Kraft im mittleren Augenblick in der Umgebung des betrachteten Punktes abhängt.

Als Specialfall dieses Theorems erhalten wir (indem wir nämlich  $\text{curl } E_0 = 0$  oder  $\text{curl } M_0 = 0$  setzen) den folgenden Satz: Ist in einem Augenblick  $t_0$  die Verteilung der elektrischen Kraft (um einen Punkt herum oder in irgend einem Gebiete von endlicher Ausdehnung) irrotational, so ist die Summe der elektrischen Kräfte (Vectoren) für zwei andere von  $t_0$  gleich abstehende Zeitmomente, — einem früheren und einem späteren, — der Grösse und Richtung nach gleich der doppelten elektrischen Kraft, die im Augenblicke  $t_0$  herrscht:

$$E_{t_0+t} + E_{t_0-t} = 2 E_{t_0} \text{ (falls } \text{curl } E_0 = 0 \text{);}$$

in *demsellen* Falle sind die magnetischen Kräfte in zwei von  $t_0$  gleich abstehenden Zeitmomenten, einem früheren und einem späteren, der Richtung und Grösse nach einander gleich:

$$M_{t_0+t} = M_{t_0-t} \text{ (falls } \text{curl } E_0 = 0 \text{).}$$

Einen ganz analogen Satz erhalten wir, wenn anstatt der elektrischen die magnetische Kraft irrotational verteilt ist. — Ist aber, in irgend einem Gebiete, zu gleicher Zeit sowohl die Verteilung der elektrischen als auch die der magnetischen Kraft irrotational, so kommen wir auf den schon oben erwähnten Fall zurück, in welchem der betreffende Teil des Feldes, in einer ganzen „Epoche“ von besagtem Charakter, überhaupt unveränderlich bleibt. —

(*Specialfall.*) Ist die anfängliche Verteilung der Kräfte dadurch gekennzeichnet, dass die Beziehungen

$$(14) \quad \text{curl } E_0 = f \cdot E_0, \quad \text{curl } M_0 = g \cdot M_0$$

bestehen, wo  $f$  und  $g$  *scalare Grössen* sind und — allgemein zu reden — Functionen des Ortes sein können, so wird der Operator „curl“ einfach zu einem scalaren Multiplicator desjenigen Vectors, an welchem die Operation auszuführen ist,

d. h. also gleich  $f$ , sofern man die Operation an  $E_0$ , und gleich  $g$ , insofern man sie an dem Vector  $M_0$  auszuführen hat, sodass unsere zusammengesetzten Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  sich in diesem Falle auf einfache trigonometrische Functionen reduciren, mit denen man die Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  scalar zu multipliciren hat, und die allgemeinen Formeln (A), (B) übergehen in:

$$(15) \quad E_t = E_0 \cdot \cos(f v t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \cdot \sin(g v t),$$

$$(16) \quad M_t = M_0 \cdot \cos(g v t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \cdot \sin(f v t);$$

für ein isotropes Medium sind  $\mu$  und  $K$  scalare Coefficienten, sodass sowohl  $E_0$  als auch  $M_0$  (welche Vektoren sind) in (15) und (16) mit einfachen Scalaren multiplicirt auftreten, die vom Ort abhängen und periodische Functionen der Zeit sind; die betreffenden Perioden sind

$$(17) \quad T_e = \frac{2\pi}{v \cdot f}, \quad T_m = \frac{2\pi}{v \cdot g}$$

und können also für verschiedene Punkte des Feldes verschiedene Werte haben; die betreffenden Schwingungszahlen sind

$$(18) \quad n_e = \frac{v}{2\pi} f, \quad n_m = \frac{v}{2\pi} g;$$

führt man diese letzteren in (15), (16) ein, so hat man:

$$(19) \quad E_t = E_0 \cdot \cos(2\pi n_e t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot M_0 \cdot \sin(2\pi n_m t),$$

$$(20) \quad M_t = M_0 \cdot \cos(2\pi n_m t) - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \cdot E_0 \cdot \sin(2\pi n_e t).$$

In dem betrachteten Falle sind also die Kräfte  $E_t$  und  $M_t$  zu jeder Zeit Resultanten je zweier Vektoren, von welchen ein jeder einfach harmonische Schwingungen von der Frequenz  $n_e$  bez.  $n_m$  ausführt; ein jeder dieser Teilvectoren behält seine Richtung ungeändert (nicht aber seinen Sinn); die resultirenden Kräfte  $E_t$ ,  $M_t$  erfahren aber nicht nur Intensitätsänderungen, sondern im allgemeinen (d. h. wenn die anfänglichen Vektoren  $E_0$ ,  $M_0$  nicht zufällig einander parallel sind) auch *Richtungsänderungen*.

Die Frequenzen  $n_e$ ,  $n_m$  können zwar Functionen des Ortes sein, jedoch nicht ganz willkürliche; da nämlich

$$\text{div. curl } R = 0$$

ist (für irgend einen Vector  $R$ ), so müssen als Consequenz von (14) überall die Bedingungen  $\text{div}(f E_0) = 0$ ,  $\text{div}(g M_0) = 0$ , d. h.

$$(21) \quad \text{div}(n_e \cdot E_0) = 0, \quad \text{div}(n_m \cdot M_0) = 0$$

erfüllt sein; führt man z. B. die orthogonalen Coordinaten  $x, y, z$  ein und bezeichnet mit  $X, Y, Z$  die rechtwinkligen Componenten der elektrischen, mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die der magnetischen Kraft, so kann man die letzteren Bedingungen schreiben:

$$(21a) \quad \begin{cases} 0 = n_e \cdot \text{div} E_0 + \left( X_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial n_e}{\partial z} \right), \\ 0 = n_m \cdot \text{div} M_0 + \left( \alpha_0 \frac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial n_m}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Ist die anfängliche Verteilung sowohl der elektrischen als auch der magnetischen Kraft *solenoidal*, d. h.

$$\text{div} E_0 = \text{div} M_0 = 0,$$

so reducirt sich (21a) auf:

$$(22) \quad \begin{cases} 0 = X_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial n_e}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial n_e}{\partial z}, \\ 0 = \alpha_0 \frac{\partial n_m}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial n_m}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial n_m}{\partial z}, \end{cases}$$

d. h.: im *Anfangszustand* liegen sowohl die elektrischen wie die magnetischen Kräfte in den *Flächen constanter Frequenz* der Schwingungen der entsprechenden Teilvectors, d. h. in den Flächen

$$n_e = \text{const. bez. } n_m = \text{const.}$$

Für *beliebige Zeiten*  $t$  folgt nun aus (19) und (20):

$$(23) \quad \begin{cases} \text{div} E_t = \text{div} E_0 \cdot \cos(f v t) + \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \text{div} M_0 \cdot \sin(g v t) \\ \quad - v t \cdot \sin(f v t) \cdot \left[ X_0 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + Z_0 \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \quad + v t \cdot \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \cos(g v t) \cdot \left[ \alpha_0 \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial g}{\partial z} \right] \\ \text{und eine analoge Gleichung für } \text{div} M_t; \end{cases}$$

wenn also  $\text{div} E_0 = \text{div} M_0 = 0$  ist und die anfänglichen Vectors  $E, M$  in den betreffenden Flächen  $f = \text{const.}$ ,  $g = \text{const.}$  liegen, so hat man auch für ein beliebiges  $t$ :  $\text{div} E_t = 0$ ,

$\operatorname{div} M_t = 0$ , d. h. eine solenoidale Verteilung der beiden Kräftearten; die Ausdrücke

$$\begin{aligned} X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Y_t \frac{\partial f}{\partial y} + Z_t \frac{\partial f}{\partial z} \\ = \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \cdot \sin(g v t) \cdot \left[ \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_0 \frac{\partial f}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

und der analoge für

$$\alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_t \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma_t \frac{\partial g}{\partial z}$$

sind aber im allgemeinen *von Null verschieden*, sodass die elektrischen und magnetischen Kräfte *nicht immer* in den Flächen constanter Frequenz:  $f = \text{const.}$ ,  $g = \text{const.}$  liegen, sondern dieselben periodisch verlassen und zu ihnen periodisch wiederkehren. Nur wenn  $f = g$  oder — allgemeiner — wenn  $f$  eine Function von  $g$  allein ist, sodass die beiden Flächenschaaren in eine einzige Schaar zusammenfallen, hat man auch für jedes  $t$ :

$$X_t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \dots = 0, \quad \alpha_t \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \dots = 0,$$

d. h. es liegen in *diesem* Falle die Kräfte  $E_t$ ,  $M_t$  *dauernd* in den Flächen constanter Schwingungsfrequenz. —

Die Dichte der elektrischen, bez. der magnetischen Energie ist für ein isotropes Medium durch  $\frac{1}{2} K E^2$ , bez.  $\frac{1}{2} \mu M^2$  gegeben; bezeichnet man mit  $E_t$  die Dichte der elektromagnetischen Energie, die in irgend einem Punkte des Feldes zur Zeit  $t$  herrscht:

$$(24) \quad E_t = \frac{1}{2} (K E_t^2 + \mu M_t^2),$$

so erhält man für den betrachteten Fall (in welchem die Bedingungen (14) für die anfängliche Verteilung erfüllt sind), indem man die Gleichungen (15) und (16) quadriert und mit  $||$  ein scalares Product bezeichnet:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} K E_0^2 \cdot \cos^2(f v t) + \frac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \sin^2(g v t) \\ &\quad + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(g v t) \cdot \cos(f v t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu M_0^2 \cdot \cos^2(g v t) + \frac{1}{2} K E_0^2 \cdot \sin^2(f v t) \\ &\quad - (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \sin(f v t) \cdot \cos(g v t), \end{aligned}$$

oder

$$(25) \quad E_t = E_0 + (\mu K)^{1/2} \cdot |E_0 M_0| \cdot \sin[(g - f) v t],$$

wo  $E_0$  den anfänglichen Wert der elektromagnetischen Energiedichte bedeutet. Aus dieser bemerkenswerten Formel ersehen

wir ohne weiteres, dass in dem betrachteten Specialfalle die Energiedichte  $E_t$  überall *periodische* Aenderungen erfährt, deren Periode  $T = 2\pi/\nu(g-f)$  in verschiedenen Punkten des Feldes verschieden sein kann; die Amplitude des in der Zeit veränderlichen Theiles von  $E_t$  ist proportional

$$|E_0 M_0| \text{ oder } E_0 \cdot M_0 \cdot \cos(E_0, M_0);$$

bilden in irgend einem Punkte die Kräfte  $E_0, M_0$  miteinander einen rechten Winkel, so bleibt ebendasselbst die Energiedichte unveränderlich:  $E_t = E_0$ ; dasselbe findet auch statt, falls  $f = g$  ist, in welchem Falle auch die resultirenden elektrischen und magnetischen Kräfte [vgl. (15), (16)] zu einfachen periodischen Functionen der Zeit werden. —

Einen einfachen Ausdruck findet man in diesem Falle auch für den sogenannten (Poynting'schen) „elektromagnetischen Energiefluss“, dessen Dichte (Intensität pro Flächeneinheit) durch das mit  $A$  dividirte *Vectorproduct* von  $E$  und  $M$  gegeben ist:

$$(26) \quad F_t = \frac{1}{A} V E_t M_t;$$

erinnert man sich der Regeln für die Vectorproducte:

$$V \mathfrak{A} \mathfrak{B} = - V \mathfrak{B} \mathfrak{A}, \quad V \mathfrak{A} \mathfrak{A} = 0,$$

$$V(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = V \mathfrak{A} \mathfrak{C} + V \mathfrak{A} \mathfrak{D} + V \mathfrak{B} \mathfrak{C} + V \mathfrak{B} \mathfrak{D},$$

so erhält man aus (15) und (16) ohne Schwierigkeit:

$$F_t = [\cos(f\nu t) \cdot \cos(g\nu t) + \sin(f\nu t) \cdot \sin(g\nu t)] \frac{V E_0 M_0}{A},$$

oder

$$(27) \quad F_t = F_0 \cdot \cos[(f-g)\nu t];$$

es ist also auch der Vector  $F_t$ , der die Dichte des Energieflusses darstellt, eine periodische Function der Zeit, von derselben Periode wie  $E_t$ , die elektromagnetische Energiedichte; ist  $f = g$ , so hat man dauernd  $F_t = F_0$ , d. h. einen unveränderlichen Energiefluss.

Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Fall, in welchem die anfängliche Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte in *irgend einer* Weise gegeben ist, wieder zurück. Eliminirt man aus dem Gleichungssystem (I) den Vector  $M$ ,

bez. den Vector  $E$ , und bezeichnet mit dem Symbol  $D$  die Derivation nach der Zeit  $t$ , so erhält man

$$(1a) \quad \frac{1}{v^2} D^2 E = -\text{curl}^2 E, \quad \frac{1}{v^2} D^2 M = -\text{curl}^2 M,$$

oder aber die Aequivalenz der beiden Operatoren

$$(28) \quad v^2 \cdot \text{curl}^2 = -D^2,$$

insofern die betreffenden Operationen an  $E$  oder an  $M$  auszuführen sind. Der Operator  $D$  implicirt die *Zeit* und kann folglich nicht ausgeführt werden an etwas, was sich nur auf einen einzigen Zeitmoment bezieht, wie z. B.  $E_0$  oder  $M_0$ ; dank der Beziehung (28) wird dieser Operator einem anderen äquivalent, welcher nur den Begriff des *Raumes* (der räumlichen Verteilung) implicirt (und den man deshalb vielleicht einen rein „geometrischen“ Operator nennen könnte), und *kann* sehr wohl an einem Vector ausgeführt werden, von dem man bloss die augenblickliche Verteilung kennt; bezeichnet man das in *diesem Sinne aufgefasste*  $D$  mit  $D_{(s)}$ , so kann man [nach (28)] symbolisch schreiben:

$$(29) \quad i D_{(s)} = \pm v \cdot \text{curl}, \text{ wo } i = +\sqrt{-1} \text{ ist}$$

Führt man nun dieses Symbol in die zusammengesetzten Operatoren  $\{ \}$  der Formeln (A), (B) ein, so kann man sie schreiben:

$$(30) \quad \begin{cases} E_t = \{ \cos(i t D_{(s)}) \} E_0 \pm \left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot \{ \sin(i t D_{(s)}) \} M_0, \\ M_t = \{ \cos(i t D_{(s)}) \} M_0 \mp \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} \cdot \{ \sin(i t D_{(s)}) \} E_0; \end{cases}$$

aus den Gleichungen (I) folgt aber, in symbolischer Schreibweise:

$$(31) \quad \begin{cases} M_0 = A K \frac{D_{(s)}}{\text{curl}} E_0 = \mp i \cdot A K v \cdot E_0, \\ E_0 = -A \mu \cdot \frac{D_{(s)}}{\text{curl}} M_0 = \pm i A \mu v \cdot M_0, \end{cases}$$

und da

$$\left( \frac{\mu}{K} \right)^{1/2} \cdot A K v = \left( \frac{K}{\mu} \right)^{1/2} A \mu v = 1$$

ist, so können wir die Formeln (30) schreiben:

$$\begin{aligned} E_t &= \{ \cos(i t D_{(s)}) \} E_0 + i \{ \sin(i t D_{(s)}) \} E_0, \\ M_t &= \{ \cos(i t D_{(s)}) \} M_0 + i \{ \sin(i t D_{(s)}) \} M_0, \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(32) \quad \begin{matrix} E_t \\ M_t \end{matrix} = \left\{ \cos(-i t D_{(s)}) + i \sin(-i t D_{(s)}) \right\} \begin{matrix} E_0 \\ M_0 \end{matrix};$$



d. h.: führt man die zusammengesetzte Operation  $\{ \}$  an  $E_0$ , bez. an  $M_0$  aus, so erhält man  $E_t$  bez.  $M_t$ , — wohlverstanden — mit einer Zweideutigkeit, die dem Umstande zuzuschreiben ist, dass der Operator  $D_\omega$ , nach (29), *zwei* verschiedene Bedeutungen hat; um die Wahl zwischen den möglichen Eventualitäten zu entscheiden, genügt also die Kenntnis von  $E_0$  (bez.  $M_0$ ) *allein* nicht, vielmehr muss man ausserdem noch ein Datum haben, z. B.  $M_0$  oder den Anfangswert der Ableitung  $E'$ , oder den Wert von  $E$  für einen anderen Zeitmoment, ausser demjenigen für  $t = 0$  etc., d. h. im ganzen *zwei* Data, in Uebereinstimmung mit dem Umstande, dass die Gleichung (1a) für  $E$  (und ähnlich die für  $M$ ), als Differentialgleichung aufgefasst, in Bezug auf die Zeit von der *zweiten* Ordnung ist. Hält man diese Bemerkung fest, so kann man sich auch der Form (32) der Lösungen bedienen.

Die Definition der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$ ,  $\{\sin(\varphi)\}$  — wo  $\varphi$  in unserem Falle eine Abkürzung für  $-itD_\omega$  ist — ist schon oben gegeben worden; da nun diese definiert sind, können wir jetzt einen Schritt weiter machen und einen anderen aus ihnen zusammengesetzten Operator mittels der Definition

$$(33) \quad \{e^i\varphi\} = \{\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\}$$

eingeführen, indem wir uns nämlich von der analogen Formel leiten lassen, welche für eine Exponentialfunction gilt, deren Exponent  $\varphi$  eine Quantität im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. (Vgl. sämtliche analogen Bemerkungen, die oben bei Gelegenheit der Einführung der Operatoren  $\{\cos(\varphi)\}$  und  $\{\sin(\varphi)\}$  gemacht wurden.)

Wendet man nun diesen neuen Operator auf Gleichung (32) an und setzt also  $\varphi = -itD_\omega$ , so erhält man

$$(C) \quad E_t = \{e^{tD_\omega}\} E_0, \quad M_t = \{e^{tD_\omega}\} M_0;$$

eine jede dieser Formeln ist nun nichts anderes, als ein symbolischer Ausdruck des Taylor'schen (oder Mac-Laurin'schen) Satzes, insofern man nämlich symbolisch schreiben kann:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_t &= \psi_0 + \frac{t}{1!} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_0 + \frac{t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_0 + \dots \\ &= \left\{ 1 + \frac{(tD)}{1!} + \frac{(tD)^2}{2!} + \dots \right\} \psi_0 = \{e^{tD}\} \psi_0; \end{aligned} \right.$$

wir wiederholen aber, dass ähnliche Ausdrücke nur dann einen gewissen Sinn haben, wenn der Operator (Derivator)  $D$  in *terminis* von anderen Operationen und zwar *solchen* („geometrischen“) bekannt ist, die sich *ausführen lassen*, wenn nur die *anfängliche Verteilung* ( $\psi_0$ ) der Quantität  $\psi$  selbst gegeben ist, d. h. wenn  $D$  den Charakter eines  $D_{(0)}$  bekommt (vgl. oben).

Umgekehrt könnte man aus dem symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes offenbar die früher gegebenen Formeln für  $E_t$ ,  $M_t$  ableiten; in der That, setzt man hierin für  $D$  den Operator  $D_{(0)} = \mp i \text{ v. curl}$  [vgl. (29)], so erhält man  $E_t$  durch  $E_0$  und  $M_t$  durch  $M_0$  ausgedrückt, und zwar mit einer Zweideutigkeit des Vorzeichens bei den Gliedern  $\{\sin(\ )\}$ , die jedoch aufgehoben wird, sobald man die Beziehungen (31) einführt, wobei dann auch zugleich die Formeln (A), (B) sich ergeben, in denen  $E_t$ ,  $M_t$  — nunmehr ohne Zweideutigkeit — sowohl durch  $E_0$  wie auch — gleichzeitig — durch  $M_0$  ausgedrückt erscheinen.

Jener exponentielle Charakter der symbolischen Formeln, wie z. B. der oben betrachteten und mit Hülfe des Taylor'schen Satzes abgeleiteten, scheint mir von einer viel allgemeineren Natur als dieser Satz selbst und zwar dem Begriffe eines jeden Operators inherent zu sein, mit dessen Hülfe man zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft gelangt, wenn man die bezüglichlichen Operationen daran ausführt, was sich auf den gegenwärtigen Sachverhalt bezieht.

Es sei  $\psi$  eine Function der Zeit und des Ortes, welche den Zustand der Dinge in jedem Augenblicke und in jedem Punkte eines gewissen Raumgebietes beschreibt oder definirt, und  $H$  sei ein Operator, mit dessen Hülfe man den Wert  $\psi_{(t_2-t_1)}$  von  $\psi$  (für irgend einen dieser Punkte) für den Zeitpunkt  $t_2$  aus seinem Werte für den Zeitpunkt  $t_1$  erhält, d. h.:

$$(35) \quad \psi_{t_2} = H_{(t_2-t_1)} \psi_{t_1},$$

oder, indem man  $t_1$  als Anfang der Zeit betrachtet und den anderen in Rede stehenden Augenblick mit  $t$  ( $t \geq 0$ ) bezeichnet:

$$(36) \quad \psi_t = H_t \psi_0.$$

Dann wird der Operator  $H$  für die entsprechende Klasse von Erscheinungen charakteristisch sein. Nehmen wir nun an, dass er diese seine Eigenschaft für sämtliche Augenblicke der Zeit oder wenigstens für diejenigen, welche zu einer gewissen Epoche gehören, und für sämtliche Punkte des betrachteten Gebietes beibehält, so wird der Operator  $H$  auf Grund dieser seiner physikalischen Bedeutung die beiden folgenden Fundamenteigenschaften haben:

1. Führt man die Operation  $H$  an  $\psi_0$  und dann an dem auf diese Weise erhaltenen  $\psi_t$  die Operation  $H$  aus, so muss man auf den ursprünglichen Zustand der Dinge, d. h. auf  $\psi_0$  wieder zurückkommen, und man hat also:

$$\left\{ \begin{matrix} H \\ -t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ +t \end{matrix} \right\} \psi_0 = \psi_0,$$

was in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$(37) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ -t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ +t \end{matrix} \right\}^{-1}.$$

2. Geht man von  $t = 0$  aus einmal unmittelbar zum Zeitmoment  $t$  über, das andere Mal aber von  $t = 0$  zu  $t = \tau_1$ , dann von  $t = \tau_1$  zu  $t = \tau_1 + \tau_2$  etc., und endlich von

$t = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}$  zu  $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1} + \tau_n = t$  über, so muss man in den beiden Fällen zu ein und demselben Zustand, d. h. zu dem für den Zeitmoment  $t$  geltenden gelangen, und man hat folglich:

$$(38) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_n \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ \tau_1 \end{matrix} \right\},$$

und im Besonderen, für  $n$  gleiche Zeitintervalle  $t$ :

$$(39) \quad \left\{ \begin{matrix} H \\ nt \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\}^n.$$

Dies sind nun aber eben die Eigenschaften der exponentiellen Functionen (mit einem zu  $t$  proportionalen Exponenten), und wiewohl es sich in unserem Falle (allgemein zu reden) nicht um eine Quantität, d. h. nicht um einen Multiplicator der Grösse  $\psi$ , sondern um eine beliebige Operation  $H$  handelt, die an  $\psi$  auszuführen ist und die Zeit  $t$  als eine Art Parameter enthält, so können wir dennoch, auf Grund der charak-

teristischen Eigenschaften (37) bis (39) dem Operator  $H$  die Exponentialform verleihen:

$$(40) \quad \left\{ \frac{H}{t} \right\} = \{ e^{tF} \},$$

wo  $F$  ein anderer Operator ist, der in einer bestimmten Weise mit  $H$  zusammenhängt, der aber nun *nicht* mehr die Zeit enthält.

In dieser letzteren Aequivalenz haben wir nicht einen blossen rein formalen Ausdruck, sondern eine Form, welche eben die wesentlichste physikalische Eigenschaft und Bedeutung aller derjenigen Operatoren abspiegelt, die von der Gegenwart uns zur Kenntnis der Vergangenheit und der Zukunft führen.

Der Taylor'sche Satz kann, von diesem Gesichtspunkte aus, als ein sehr specieller Fall derjenigen Wahrheit betrachtet („betrachtet“ *nicht* etwa bewiesen) werden, die in Formel (40) enthalten ist, und in der That, wenn die Grösse  $\psi$ , an der man die bezüglichen Operationen auszuführen hat, sämtlichen Bedingungen, die für die Gültigkeit des Taylor'schen Satzes erfordert werden, Genüge leistet, erlangt der Operator  $F$  die Eigenschaft

$$(1 + \tau F) \psi_0 = \lim_{\tau=0} [\psi_\tau],$$

oder

$$F = \lim_{\tau=0} \left[ \frac{\psi_\tau - \psi_0}{\tau} \right],$$

und er wird also zu einem Derivator  $D$  (oder  $D_{(s)}$ , vgl. oben).

Analog können wir uns einen Operator  $K$  vorstellen, welcher an dem Werte  $\psi_0$  von  $\psi$  in einem beliebig gegebenen Punkte  $O$  ausgeführt (für welchen Punkt man  $\psi$  für alle Augenblicke kennt, die zu einem gewissen Zeitintervall gehören) uns den Wert von  $\psi$  für einen beliebigen anderen Punkt ( $P$ ) eines gewissen Raumgebietes liefert; drückt man diese Voraussetzung durch die Schreibweise

$$(41) \quad \psi_P = \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} \psi_0$$

aus, so kann man aus dem physikalischen Sinne des Operators  $K$  seine, denen von  $H$  analoge Eigenschaften herleiten, und zwar:

$$(42) \quad \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} = \left\{ \frac{K}{P, O} \right\}^{-1},$$

$$(43) \quad \left\{ \frac{K}{O, P} \right\} = \left\{ \frac{K}{O, P_1} \right\} \left\{ \frac{K}{P_1, P_2} \right\} \cdots \left\{ \frac{K}{P_n, P} \right\},$$

wo  $P_1, P_2, \dots P_n$  eine Gruppe beliebiger Punkte (die im Grenzfall auch ein Continuum oder eine Linie werden kann) bedeuten, die zusammen mit den Punkten  $O$  und  $P$  in demselben Gültigkeitsgebiete der Eigenschaften von  $K$  situiert, sonst aber ganz willkürlich angeordnet sind.

Ist, im Besonderen, der Operator  $K$  unter der Form

$$(44) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ O P \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\}$$

bekannt und gegeben, wo  $R$  den „Schritt“ oder den Vector  $\overline{OP}$  bedeutet, so können die obigen Eigenschaften [(42), (43)] dadurch ausgedrückt werden, dass man schreibt:

$$(45) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ + R \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} K \\ - R \end{matrix} \right\}^{-1}$$

und, wenn  $R$  die Resultante von  $n$  Vektoren  $R_1, R_2, \dots R_n$  ist:

$$(46) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ R_1 + R_2 + \dots + R_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} K \\ R_2 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} K \\ R_n \end{matrix} \right\},$$

was im besonderen Falle von  $n$  der Richtung und Grösse nach untereinander gleichen Vektoren in

$$(47) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ n R \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\}^n$$

übergeht; diese Aequivalenz, welche in erster Linie für ein ganzzahliges  $n$  gilt, kann (mit einem leichten Raisonement) auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden, d. h. auf den Fall, wo  $n$  gleich einer beliebigen, jedoch scalaren Grösse ist. — Auch hier können wir also eine exponentielle Form aufstellen:

$$(48) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} = \{e^{R G}\},$$

wo  $G$  ein anderer Operator ist, der dem  $K$  in einer gewissen Weise entspricht, der aber weder den Vector  $R$  noch auch irgend etwas anderes enthält, was sich auf die relative Lage der beiden Punkte  $O, P$  und die Kennzeichnung deren Differenz beziehen würde. — Führt man z. B. die drei Einheitsvectoren  $i, j, k$  (in üblicher Bezeichnung) und drei entsprechende Scalargrößen  $x, y, z$  (rechtwinklige Coordinaten), sodass  $R$  die Form

$$(49) \quad R = ix + jy + kz$$

annimmt, so kann man anstatt (48) schreiben:

$$(50) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} = \{e^{x \cdot G_x}\} \{e^{y \cdot G_y}\} \{e^{z \cdot G_z}\},$$

wo  $G_x, G_y, G_z$  für  $iG, jG, kG$  gesetzt worden sind.

In einem ganz speciellen Falle, wenn nämlich die Grösse  $\psi$ , an welcher die betrachteten Operatoren auszuführen sind, den bekannten Bedingungen der Stetigkeit etc. Genüge leistet, erhalten die Operatoren  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$  die Bedeutung *partieller Derivatoren* (der Function  $\psi$ ) in Bezug auf  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und die obige Formel (50) geht in einen symbolischen Ausdruck des Taylor'schen Satzes für eine Function von drei Variablen über:

$$(51) \quad \psi_{x,y,z} = \{e^{x \cdot D_x}\} \{e^{y \cdot D_y}\} \{e^{z \cdot D_z}\} \psi_{0,0,0}.$$

Anstatt des Vectors  $R$  könnte man übrigens eine andere Grösse einführen, um — in dem Operator  $K$  — ein Correlativ für den Uebergang von einem Punkte des betrachteten Gebietes zu einem anderen Punkte zu haben.

Durch gleichzeitige Anwendung eines Operators von der Art  $H$  und eines Operators von der Art  $K$  (wenn nämlich zwei solche Operatoren für die Erscheinungen gelten, die sich in einem gewissen Raumgebiete innerhalb eines gewissen Zeitintervalls abspielen) kann man von dem Zustande  $\psi_{0,t_0}$ , der im Punkte  $O$  zur Zeit  $t_0$  (die wir z. B. als  $t=0$  ansehen können) herrscht, zu dem Zustande  $\psi_{P,t}$  übergehen, den man in einem anderen Punkte  $P$  und zu einer anderen (früheren oder späteren) Zeit  $t$  finden würde. Man erhält nämlich zuerst

$$(52) \quad \psi_{O,t} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \psi_{O,t_0} = \{e^{tF}\} \psi_{O,t_0}$$

und dann

$$(53) \quad \psi_{P,t} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \psi_{O,t} = \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \psi_{O,t_0} = \{e^{RG}\} \{e^{tF}\} \psi_{O,t_0},$$

oder auch zuerst  $\psi_{P,t_0}$  aus  $\psi_{O,t_0}$  und dann  $\psi_{P,t}$  aus  $\psi_{P,t_0}$ ; sollen die beiden Resultate identisch sein, so muss sich die Reihenfolge der auszuführenden Operationen ändern lassen, ohne eine Aenderung des Endresultates herbeizuführen, d. h. es muss sein:

$$(54) \quad \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H \\ t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} K \\ R \end{matrix} \right\}.$$

Benutzt man für die beiden Operatoren die Formen (40), (48), so kann man die symbolischen Exponentialausdrücke nach der analogen für gewöhnliche Exponentialfunctionen geltenden Regel zusammenziehen und also (53) schreiben:

$$(54') \quad \psi_{P,t} = \{e^{R \cdot G + t \cdot F}\} \psi_{O,t_0}.$$

Diese Form eignet sich direct zur Auffassung der sogenannten „Fortpflanzung“ von Zuständen. Wenn nämlich im Punkte  $P$  zur Zeit  $t$  derselbe Zustand herrscht, der in einem anderen Punkte  $O$  zu einer früheren Zeit  $t_0$  (z. B.  $t_0 = 0$ ) herrschte, so sagt man, dass der Zustand sich von  $O$  bis  $P$  in der Zeit  $t$  „fortgepflanzt“ hat; im allgemeinen kann man dabei die Frage nach dem *Wege* der Fortpflanzung ganz unberührt lassen. Das Obige können wir ausdrücken, indem wir schreiben:

$$\psi_{P,t} = \psi_{O,t_0},$$

oder:

$$(55) \quad \{e^{R \cdot G + t \cdot F}\} = 1,$$

oder auch (was aber ebenfalls bloss als symbolische Aequivalenz angesehen werden muss)

$$(56) \quad R G + t F = 0,$$

wo  $R$  einen ganz bestimmten Vector und  $t$  eine ganz bestimmte Zeitdauer bedeutet, die miteinander in der oben angenommenen Beziehung stehen.

Wenn sich der Zustand von  $O$  nach  $P$  auch wirklich nach der Länge des Vectors  $R = OP$  fortpflanzt, so folgt dann aus (56), dass das Symbol

$$(57) \quad \{v\} = - \left\{ \frac{F}{G} \right\} = - \{F\} \{G\}^{-1}$$

demjenigen entspricht, was man gewöhnlich *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* zu nennen pflegt. Es ist aber klar, dass dies nur dann auch eine wirkliche *Geschwindigkeit* der Fortpflanzung von Zuständen sein wird, wenn der symbolische Operator  $\{F/G\}$ , indem er an der die betreffenden Zustände definirenden Grösse  $\psi$  ausgeführt wird, sich so verhält, als wäre er ein einfacher Multiplicator dieser Grösse selbst. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man höchstens von einer Fortpflanzung mit gleichzeitiger Deformation (wie es z. B. die Dämpfung der Wellen ist), nicht aber von einer *reinen* Fortpflanzung der unversehrten Zustände sprechen.

Die Anwendung der Formel (48) für den Operator  $K$  (analog der Gleichung (40) für  $H$ ) und der Formel (54) für die Combination dieser beiden Operatoren auf die Lösungen

vieler specieller Probleme ist so naheliegend und die Durchführung der betreffenden Lösungsmethode so einfach, dass ich es für überflüssig halte, mich hierüber an dieser Stelle zu verbreiten; und was die Anwendung der Formel (40) (für  $H$ ) anbelangt, will ich mich (ausser dem oben behandelten Falle eines vollkommen isolirenden Mediums) auf die Andeutung beschränken, dass man für einen *Halbleiter*, von der Leitfähigkeit  $\lambda$ , anstatt der Gleichung (Ia) eine etwas complicirtere Beziehung, und zwar (wie wohl bekannt):

$$\mu A^2 \{K D^2 + \lambda D\} E = - \operatorname{curl}^2 E,$$

oder die Aequivalenz

$$(58) \quad D^2 + \frac{1}{\mathfrak{D}} D = - v^2 \cdot \operatorname{curl}^2$$

hat, wo  $\mathfrak{D}$  die sogenannte „Relaxationszeit“ ( $\mathfrak{D} = K/\lambda$ ) ist, eine neben der Geschwindigkeit  $v$ , für die gegebene Substanz charakteristische Grösse; man hat also in diesem Falle für den Operator  $D$ , welcher in  $E_t = \{e^{tD}\} E_0$  vorkommt, den symbolischen Ausdruck:

$$(59) \quad D = - \frac{1}{2\mathfrak{D}} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mathfrak{D}^2} - v^2 \cdot \operatorname{curl}^2},$$

sodass die betreffende Formel für  $E_t$  die Gestalt bekommt:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} E_t &= e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot \left\{ e^{\pm i t \sqrt{v^2 \cdot \operatorname{curl}^2 - \frac{1}{4\mathfrak{D}^2}}} \right\} E_0 \\ &= e^{-\frac{t}{2\mathfrak{D}}} \cdot [\{\cos(t\sqrt{\phantom{x}})\} E_0 \pm i\{\sin(t\sqrt{\phantom{x}})\} E_0]; \end{aligned} \right.$$

um über die Wahl des Vorzeichens zu entscheiden, muss man ausser  $E_0$  noch etwas, z. B.  $M_0$  oder  $E_0'$ , etc., kennen; in einem ganz speciellen Falle, in welchem nämlich die anfängliche Verteilung der Kräfte eine solche ist, dass der Operator *curl* einem Multiplicator der Kräfte, mit welchen man operirt, äquivalent wird, drückt die Formel (60) *gedämpfte* elektromagnetische Wellen oder Schwingungen aus, die nämlich um so schneller gedämpft werden, je kürzer die Relaxationszeit  $\mathfrak{D}$  ist.

Man erhält einen noch allgemeineren Fall, als ihn das Problem der Halbleiter bietet, wenn man annimmt, dass der



Operator  $\mathfrak{D}$  durch eine symbolische Gleichung von einem beliebigen Grade  $n$  gegeben ist:

$$(61) \quad a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_2 D^2 + a_1 D = F',$$

wo  $F'$  ein „geometrischer“ Operator ist, wie z. B. *curl* oder *curl*<sup>2</sup> etc., und wo die Coefficienten  $a$  entweder Constanten oder Functionen des Ortes sind.

Man könnte sich übrigens noch viel allgemeinere und complicirtere Fälle vorstellen, als es der letztere ist, nämlich solche, in welchen man zwischen dem Operator  $D$  und einem „geometrischen“ Operator, wie der oben mit  $F'$  bezeichnete, *irgend eine* Beziehung gegeben hat.

Die Operatoren  $\{H\}_t$  und  $\{K\}_{O,P}$ , deren Definition in (36) und (41) gegeben ist, erschöpfen natürlich den allgemeinen Begriff eines „Operators“ nicht, und man könnte sich leicht andere Operatoren vorstellen, die sich der fundamentalen Eigenschaften [(37) und (38) bez. (42) und (43)] von  $\{H\}$  und  $\{K\}$ , deren physikalische Bedeutung durch die Exponentialform ausgedrückt ist, nicht erfreuen. Für das Studium der Naturerscheinungen scheinen mir aber von fundamentaler Wichtigkeit eben diese beiden Klassen von Operatoren ( $H, K$ ) zu sein, die ich „*physikalische Operatoren*“ zu nennen vorschlagen möchte, indem ich mir in ihrer Definition ihre oben entwickelten Eigenschaften bereits involvirt denke. Eine jede Klasse von natürlichen Erscheinungen, oder wenigstens von solchen, die überhaupt eine quantitative Behandlung zulassen, würde hiernach durch die bezüglichen physikalischen Operatoren charakterisirt sein und das wissenschaftliche Studium der Naturerscheinungen würde in ausgedehnten Untersuchungen über die Eigenschaften dieser Operatoren bestehen, in Untersuchungen, welche auf Beobachtung basiren und vom Experiment genährt werden.

Bologna, Juni 1901.

(Eingegangen 30. Juli 1901.)