

Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme.

Von

C. NEUMANN in Leipzig.

Der vorliegende Aufsatz repräsentirt, abgesehen von den beiden letzten Paragraphen (§ 11. und § 12.), einen Theil einer im vergangenen Sommersemester von mir gehaltenen Vorlesung.

Der Hauptsache nach handelt es sich hier um dieselben Probleme, welche Mehler in seiner höchst schätzbaren Arbeit (im gegenwärtigen Bande der Annalen, Seite 161) in Angriff genommen hat. Doch wird der Weg, den ich einschlagen werde, von dem Mehler'schen sich wesentlich unterscheiden, im Ganzen weniger Hilfsmittel erfordern (z. B. die Theorie der Gammafunctionen entbehrlich machen), und überhaupt wohl eine etwas grössere Einfachheit und Durchsichtigkeit besitzen*). Eine wesentliche Stütze meiner Betrachtungen besteht in gewissen *neuen Integraleigenschaften der Kreisfunctionen* (§ 7.), nach denen ich, obwohl sie eigentlich sehr nahe liegen, lange Jahre vergeblich gesucht hatte. Denn dieselben sind nicht nur für die hier behandelten Probleme, sondern auch für *viele andere*, z. B. für die der *conformen Abbildung*, von wesentlicher Bedeutung.

Der Kürze willen mag es mir erlaubt sein, diejenige Fläche, welche durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht, kurzweg ein *Conoid*, oder eine *Conoidfläche* zu nennen. Um nun die elektrostatischen Probleme für ein solches Conoid lösen zu können, entwickle ich zunächst (§ 2. bis § 6.) die *reciproke Entfernung zweier Punkte* in ein für diesen Zweck geeignetes nach gewissen Cosinus fortlaufendes Integral, unter Anwendung der von mir schon mehrfach benutzten (zuerst übrigens wohl von Thomson eingeführten) dipolaren Coordinaten. Sodann werde ich (in § 8. bis § 10.) die das Conoid betreffenden elektrostatischen Aufgaben behandeln, sowohl für den Fall, dass *keine* äusseren Kräfte influiren, als auch für den allgemeineren Fall, dass solche Kräfte *vorhanden* sind; wobei bemerkt sein mag, dass Mehler sich auf den ersten und einfachern Fall beschränkt hat.

*) Man möge entschuldigen, dass ich den Mehler'schen Index μ mit q bezeichnet habe; so dass also die Mehler'sche Function K^μ identisch ist mit derjenigen, die ich mit K_q bezeichne.

Endlich aber werde ich über die von Mehler behandelten Probleme wesentlich hinausgreifen, indem ich (in § 12.) auch solche Körper in Betracht ziehe, die theils von einer Conoidfläche, theils von Kugelflächen begrenzt sind.

§ 1.

Erinnerung an die dipolaren Coordinaten.

Wir wollen die $\xi\eta$ Ebene nur als eine *Halbebene* uns denken, welche von der ξ Axe begrenzt wird, und die positive η Axe in sich enthält. Auch mag die ξ Axe horizontal sein, und von Links nach Rechts laufen. Setzt man nun

$$(1) \quad \xi + i\eta = a \frac{1 + e^{\vartheta + i\omega}}{1 - e^{\vartheta + i\omega}},$$

wo a eine gegebene positive Constante vorstellt, und $i = \sqrt{-1}$ sein soll, so stehen die neuen Variablen ϑ, ω zu den rechtwinkligen Coordinaten ξ, η in einfacher Beziehung. Markirt man nämlich auf der ξ Axe links und rechts vom Anfangspunkte O zwei Punkte A und A' , beide in der Entfernung a vom Anfangspunkte, und bezeichnet man die Entfernungen des Punktes (ξ, η) von diesen festen Punkten A und A' , die hinfür die beiden *Pole* genannt werden sollen, resp. mit ϱ und ϱ' , so ergibt sich:

$$(2) \quad \frac{\varrho}{\varrho'} = e^{-\vartheta}, \quad \text{und:} \quad \text{Winkel}(\varrho, \varrho') = \omega,$$

und ferner:

$$(3) \quad \varrho\varrho' = \frac{4a^2}{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega} = \frac{4a^2}{\psi},$$

wo ψ als Abkürzung dienen soll für den angegebenen Nenner. Aus (2) folgt also z. B., dass ω bezeichnet werden kann als die *scheinbare Grösse* der Linie AA' für einen in (ξ, η) befindlichen Beobachter. Demgemäss wird das Curvensystem $\omega = \text{Const.}$ durch diejenigen *Kreisbogen* dargestellt sein, welche die Linie AA' zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (1) [nämlich daraus, dass $\xi + i\eta = f(\vartheta + i\omega)$ ist], sofort, dass die Curven $\vartheta = \text{Const.}$ durch das zu jenen Kreisbogen *orthogonale Kreissystem* dargestellt sind.

Lässt man die bisher betrachtete Figur um die ξ Axe rotiren, so beschreiben die Bogen $\omega = \text{Const.}$ gewisse Rotationsflächen, die fortan als *Conoide* bezeichnet werden mögen. Und gleichzeitig beschreiben alsdann die Kreise $\vartheta = \text{Const.}$ gewisse *Kugelflächen*, deren Mittelpunkte sämmtlich in der ξ Axe, und zwar ausserhalb der Strecke AA' liegen. Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, das elektrostatische Problem für eines jener Conoide zu lösen.

Zu diesem Zweck führen wir ein *räumliches* Coordinatensystem

x, y, z ein, dessen Anfangspunkt mit dem bisherigen Anfangspunkt O , und dessen x Axe mit der ξ Axe zusammenfallen soll. Dann wird offenbar: $x = \xi$, $y = \eta \cos \varphi$, und $z = \eta \sin \varphi$, wo φ das *Azimuth* der variablen Meridianebene $\xi \eta$ gegen die feste Meridianebene xy vorstellt. Hieraus folgt, falls man ξ und η , mittelst der Formel (1), durch ϑ, ω ausdrückt:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \xi &= a \frac{2i \sin(i\vartheta)}{\psi}, \\ y = \eta \cos \varphi &= a \frac{2 \sin \omega \cos \varphi}{\psi}, \\ z = \eta \sin \varphi &= a \frac{2 \sin \omega \sin \varphi}{\psi}, \end{cases}$$

wo ψ dieselbe Bedeutung hat, wie in (3).

Markirt man nun irgendwo im Raume zwei Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) , und bezeichnet man die *neuen* Coordinaten derselben mit $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, ferner das zugehörige ψ resp. mit ψ und ψ_1 , so erhält man, mittelst der Relationen (4), für den gegenseitigen Abstand E dieser Punkte den Werth:

$$(5) \quad E = \frac{2a \sqrt{2 \cos i(\vartheta - \vartheta_1) - 2 \cos \gamma}}{\psi \psi_1},$$

wo $\cos \gamma$ die Bedeutung hat:

$$(6) \quad \cos \gamma = \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Construirt man also über AA' , als gemeinschaftlicher Sehne, zwei resp. durch $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ gehende Kreisbogen, so wird γ derjenigen Winkel sein, unter welchem diese beiden Bogen in A oder (was dasselbe) in A' gegeneinander geneigt sind. — Als specieller Fall der Formel (5) ergibt sich der Werth des Linienelementes:

$$(7) \quad ds = \frac{2a \sqrt{(d\vartheta)^2 + (d\omega)^2 + (\sin \omega d\varphi)^2}}{\psi}.$$

Und hieraus ergibt sich für den Laplace'schen Differentialausdruck

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ folgende Transformation:

$$(8) \quad \frac{4a^2 \sin \omega}{\psi^3} \Delta U = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\sin \omega}{\psi} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\psi \sin \omega} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

wo U eine *willkürliche* Function von x, y, z , resp. von $\vartheta, \omega, \varphi$ vorstellt. Diese Formel kann man auch so darstellen:

$$(9) \quad \frac{4a^2 \sqrt{\sin \omega}}{\psi^2 \sqrt{\psi}} \Delta U = \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{V}{4} \right),$$

wo V als Abkürzung dient für $U \frac{\sqrt{\sin \omega}}{\sqrt{\psi}}$. — Endlich kann man diese Formel auch so schreiben:

$$(10) \quad \frac{4a^2}{\psi^2 \sqrt{\psi}} \Delta U = \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \omega^2} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial W}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{W}{4},$$

wo W als Abkürzung dient für $\frac{V}{V \sin \omega}$, d. i. für $\frac{U}{V \psi}$.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man *sämmtliche* Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ des ganzen unendlichen Raumes erhalten wird, falls man den drei Variablen folgende Grenzen zuertheilt:

$$(11) \quad \begin{aligned} \vartheta &= -\infty \dots + \infty, \\ \omega &= 0 \dots \pi, \\ \varphi &= 0 \dots 2\pi. \end{aligned}$$

Insbesondere repräsentirt $\vartheta = +\infty$ den Punkt A , und $\vartheta = -\infty$ den Punkt A' . Ferner repräsentirt $\omega = \pi$ das durch die Linie AA' repräsentirte unendlich dünne Conoid.

§ 2.

Darstellung der reciproken Entfernung zweier Punkte mittelst eines bestimmten Integrales. Einführung der Mehler'schen Kegelfunctionen.

Die Fourier'sche Integralformel kann für eine *gerade* Function $F(\vartheta)$ folgendermassen geschrieben werden:

$$F(\vartheta) = \int_0^\infty dq A_q \cos q \vartheta, \quad \text{wo} \quad A_q = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\vartheta) \cos q \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Bringt man diese Formel in Anwendung auf die Function:

$$F(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega}}, \quad \text{d. i.} \quad = \frac{1}{V \psi},$$

so erhält man:

$$(1) \quad \frac{1}{V \psi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega}} = \int_0^\infty dq C_q L_q(\cos \omega) \cos q \vartheta,$$

wo $C_q L_q(\cos \omega)$ die Bedeutung hat:

$$(2) \quad C_q L_q(\cos \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega}}.$$

Und die hier noch vorhandene disponible Constante C_q mag so gewählt werden, dass $L_q(\cos \omega) = 1$ wird für $\omega = \pi$, d. i. für $\cos \omega = -1$. Solches festgesetzt, ergibt sich also durch Anwendung der Formel (2) auf den Fall $\omega = \pi$:

$$(3) \quad C_q \cdot 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{e^{\frac{1}{2} \vartheta} + e^{-\frac{1}{2} \vartheta}}.$$

Nach der Theorie der Gammafunctionen würde hieraus bereits folgen, dass $C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}$ ist. Doch werden wir, auch *ohne* diese Theorie, im unmittelbaren Verlauf unserer weiteren Betrachtungen, zu diesem Werthe hingeleitet werden. [Man vergl. (22), Seite 205.]

Ohne Weiteres ist aus (3) ersichtlich, dass C_q einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Und ebenso folgt aus (2), dass die Function $L_q(\cos \omega)$ für das Intervall $\cos \omega = -1 \dots +1$, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\cos \omega = +1$, überall einen *endlichen* Werth hat. Oder ein wenig anders ausgedrückt (nämlich μ statt $\cos \omega$ gesetzt): *Die Function*

$$(4) \quad L_q(\mu) = \frac{2}{\pi C_q} \int_0^\infty \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{V 2 (\cos i \vartheta) - 2\mu}$$

hat im Intervall $\mu = -1 \dots +1$, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\mu = +1$, überall einen *endlichen* Werth. Auch hat sie (nach der für C_q gegebenen Definition) im Punkte $\mu = -1$ den Werth 1. Es ist also:

$$(5) \quad L_q(-1) = 1, \quad L_q(+1) = \infty.$$

Wir werden weiterhin sehen, dass diese Function von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ in *beständigem* Wachsen begriffen ist. [Vergl. Seite 203.]

Bezeichnet T den reciproken Werth der gegenseitigen Entfernung irgend zweier Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$, so ist nach (5) S. 197:

$$(6) \quad T = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a V 2 \cos i (\vartheta - \vartheta_1) - 2 \cos \gamma}.$$

Und hieraus folgt mittelst der Formel (1), falls man daselbst ϑ mit $(\vartheta - \vartheta_1)$ und ω mit γ vertauscht:

$$(7) \quad T = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a} \int_0^\infty dq C_q L_q(\cos \gamma) \cdot \cos q (\vartheta - \vartheta_1),$$

woraus z. B., weil $\cos \gamma = \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1)$ ist, für $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ und für $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = \pi$ sich die speciellern Formeln ergeben:

$$(7a) \text{ für } \begin{pmatrix} \vartheta_1 = 0 \\ \omega_1 = 0 \end{pmatrix}: T = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a V 2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega} = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a} \int_0^\infty dq C_q L_q(\cos \omega) \cdot \cos q \vartheta,$$

$$(7b) \text{ für } \begin{pmatrix} \vartheta_1 = 0 \\ \omega_1 = \pi \end{pmatrix}: T = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a V 2 \cos i \vartheta + 2 \cos \omega} = \frac{V\overline{\psi} V\overline{\psi_1}}{2a} \int_0^\infty dq C_q L_q(-\cos \omega) \cdot \cos q \vartheta,$$

wobei zu bemerken ist, dass der Punkt $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 0$ (in beliebiger Richtung) im Unendlichen liegt, und dass andererseits der Punkt

$\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = \pi$ identisch ist mit dem Anfangspunkt 0 unseres Coordinatensystems, also in der Mitte liegt zwischen den beiden Polen A und A' .

Die reciproke Entfernung T genügt der Laplace'schen partiellen Differentialgleichung $\Delta T = 0$; und hieraus wird sich, falls man z. B. für T den Werth (7b) substituirt, eine gewisse gewöhnliche Differentialgleichung ergeben für die Function L .

Um näher hierauf einzugehen, setzen wir $\cos \omega = \mu$, und

$$(8) \quad L_q(-\mu) = K_q(\mu);$$

wodurch die Formel (7b) die Gestalt annimmt:

$$(9) \quad T = \frac{V\psi V\psi_1}{2aV2(\cos i\vartheta) + 2\mu} = \frac{V\psi V\psi_1}{2a} \int_0^\vartheta dq C_q K_q(\mu) \cdot \cos q\vartheta = \frac{V\psi V\psi_1}{2a} f,$$

wo f als augenblickliche Abkürzung dienen soll für das angegebene Integral. Bildet man nun die Gleichung $\Delta T = 0$, so ergibt sich mit Rücksicht auf die in (10) S. 198 angegebene Transformation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) - \frac{f}{4} = 0,$$

oder, falls man $\cos \omega = \mu$ setzt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) - \frac{f}{4} = 0;$$

und hieraus folgt, falls man für f seine eigentliche Bedeutung substituirt:

$$\int_0^\vartheta dq C_q \left[-q^2 K + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial K}{\partial \mu} \right) - \frac{K}{4} \right] \cos q\vartheta = 0,$$

wo K zur Abkürzung steht für $K_q(\mu)$. Aus der letzten Formel ergibt sich, dass der daselbst in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck für sich $= 0$ sein muss. Demgemäss genügt also die Function $K_q(\mu)$ der Differentialgleichung:

$$(10) \quad -\left(q^2 + \frac{1}{4}\right) F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = 0,$$

welche auch so geschrieben werden kann:

$$(11) \quad \left(iq - \frac{1}{2}\right) \left(iq + \frac{1}{2}\right) F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = 0.$$

Und derselben Differentialgleichung genügt offenbar auch die Function $K_q(-\mu)$, d. i. die Function $L_q(\mu)$. Vergl. (8).

Vergleicht man diese Differentialgleichung mit der der Kugelfunctionen:

$$(12) \quad n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = 0,$$

deren particulare Integrale $P_n(\mu)$ und $Q_n(\mu)$ sind, so bemerkt man,

dass es nur der Substitution $n = iq - \frac{1}{2}$ bedarf, um völlige Uebereinstimmung herbeizuführen. Es sind also, können wir sagen, $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ gewisse Lösungen derjenigen Differentialgleichung, deren particulare Integrale $P_{iq-\frac{1}{2}}(\mu)$ und $Q_{iq-\frac{1}{2}}(\mu)$ sind. Somit folgt:

$$(13) \quad \begin{aligned} K_q(\mu) &= AP_{iq-\frac{1}{2}}(\mu) + BQ_{iq-\frac{1}{2}}(\mu), \\ L_q(\mu) &= CP_{iq-\frac{1}{2}}(\mu) + DQ_{iq-\frac{1}{2}}(\mu), \end{aligned}$$

wo A, B, C, D noch unbekannte Constanten (d. i. von μ unabhängige Grössen) vorstellen.

§ 3.

Entwicklung der Kegelfunctionen nach Potenzen, und ferner nach Kugelfunctionen.

Substituirt man in der Formel (4) Seite 199:

$$(1) \quad L_q(\mu) = \frac{2}{\pi C_q} \int_0^\pi \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{V^2(\cos i\vartheta) - 2\mu}$$

die nach Potenzen von μ fortschreitende Entwicklung:

$$\frac{1}{V(\cos i\vartheta) - \mu} = \frac{1}{V\cos i\vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{(\cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\mu^2}{(\cos i\vartheta)^{\frac{5}{2}}} + \dots,$$

so ergibt sich:

$$(2) \quad L_q(\mu) = (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \dots) + (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \dots);$$

und zwar erhält man für $\alpha, \beta, \dots a, b, \dots$ die Werthe:

$$(3) \quad \alpha = \frac{1}{C_q} \left(\frac{V^2}{\pi} \right) \int_0^\pi \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{V\cos i\vartheta}, \quad a = \frac{1}{C_q} \left(\frac{V^2}{\pi} \right) \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(4) \quad \beta = \frac{1}{C_q} \left(\frac{V^2}{\pi} \right) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_0^\pi \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{5}{2}}}, \quad b = \frac{1}{C_q} \left(\frac{V^2}{\pi} \right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \int_0^\pi \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{(\cos i\vartheta)^{\frac{7}{2}}},$$

etc. etc.

etc. etc.

Bequemer aber kann man diese Coefficienten, abgesehen von den beiden ersten (α und a) finden mittelst der für $L_q(\mu)$ geltenden Differentialgleichung (10) Seite 200:

$$(5) \quad \left(q^2 + \frac{1}{4} \right) F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = 0,$$

Substituirt man nämlich hier für $F = L_q(\mu)$ die Entwicklung (2), so erhält man auf der linken Seite eine nach Potenzen von μ fortschreitende

Reihe, deren Coefficienten einzeln $= 0$ sein müssen. U. s. w. In solcher Weise erhält man schliesslich:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{q_1}{1 \cdot 2} \alpha, & b &= \frac{q_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha, \\
 (6) \quad \gamma &= \frac{q_1 \cdot q_5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha, & c &= \frac{q_3 \cdot q_7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha, \\
 \delta &= \frac{q_1 \cdot q_5 \cdot q_9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \alpha, & d &= \frac{q_3 \cdot q_7 \cdot q_{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \alpha, \\
 &\text{etc.} & &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

wo $q_1, q_3, q_5, q_7, \dots$ folgende Bedeutungen haben:

$$(6a) \quad q_1 = q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad q_3 = q^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad q_5 = q^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2, \text{ etc. etc.}$$

Da übrigens $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$ ist, so folgt aus (2):

$$\begin{aligned}
 (7) \quad L_q(\mu) &= (\alpha + \beta \mu^2 + \gamma \mu^4 + \dots) + (a \mu + b \mu^3 + c \mu^5 + \dots), \\
 K_q(\mu) &= (\alpha + \beta \mu^2 + \gamma \mu^4 + \dots) - (a \mu + b \mu^3 + c \mu^5 + \dots);
 \end{aligned}$$

und es sind also $L_q(\mu)$ und $K_q(\mu)$ *wesentlich verschiedene Functionen*, mithin zu bezeichnen als *die beiden particularen Integrale der Differentialgleichung (5)*.

Eine zweite Entwicklung. — Wir können die Formel (1), falls wir $\mu = \cos \omega$ setzen, auch so schreiben:

$$L_q(\cos \omega) = \frac{2}{\pi C_q} \int_0^\omega \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{2(1 + \cos i\vartheta) - 2(1 + \cos \omega)}},$$

mithin auch so:

$$(8) \quad L_q(\cos \omega) = \frac{1}{\pi C_q} \int_0^\omega \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2}}.$$

Substituirt man aber hier die Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2}} &= \\
 &= \frac{1}{\cos \frac{i\vartheta}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^4}{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^5} + + \dots,
 \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$(9) \quad L_q(\cos \omega) = A + B \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2 + \Gamma \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^4 + \dots,$$

wo A, B, Γ, \dots die Werthe haben:

$$(10) \quad A = \frac{1}{\pi C_q} \int_0^\infty \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{\cos \frac{i\vartheta}{2}},$$

$$(11) \quad B = \frac{1}{\pi C_q} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos q \vartheta \cdot d\vartheta}{\left(\cos \frac{i\vartheta}{2}\right)^3},$$

etc. etc.

Uebrigens folgt aus (9) für $\omega = \pi$ sofort: $L_q(-1) = A$. Nach unseren früheren Festsetzungen [vgl. (5) Seite 199] ist aber $L_q(-1) = 1$. Folglich auch:

$$(12) \quad A = 1.$$

Auch die übrigen Coefficienten B, Γ, \dots lassen sich viel einfacher [als in (10), (11) angedeutet] ausdrücken, und zwar mittelst der Differentialgleichung (5).

Ohne auf die betreffenden einfachen Operationen hier näher einzugehen, wollen wir nur das Resultat derselben mittheilen, welches unter Rücksicht auf (9) und namentlich auf (12) sich folgendermassen darstellt:

$$(13) \quad L_q(\cos \omega) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^4 + \\ + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^6 + \dots,$$

wo q_1, q_3, q_5, \dots die Bedeutungen (6a) haben. Hieraus ergibt sich durch Vertauschung von ω mit $(\pi - \omega)$ sofort:

$$(14) \quad K_q(\cos \omega) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^4 + \\ + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^6 + \dots$$

Da die Grössen q_1, q_3, q_5, \dots durchweg positiv sind, so folgt aus (13), wenn man daselbst $\cos \omega = \mu$, mithin $\left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{1+\mu}{2}$ substituirt, sofort, dass $L_q(\mu)$ in beständigem Wachsen begriffen ist, während μ von -1 bis $+1$ geht; was mit unserer früheren Behauptung (Seite 199) in Einklang steht.

Vergleicht man übrigens die Formel (14) mit der bekannten für die Kugelfunction $P_n(\cos \omega)$ geltenden Formel:

$$P_n(\cos \omega) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^2 + \\ + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1 \cdot 2)^2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^4 - + \dots,$$

und beachtet, dass nach (6a)

$$q_1 = -\left(iq - \frac{1}{2}\right)\left(iq + \frac{1}{2}\right), \quad q_3 = -\left(iq - \frac{3}{2}\right)\left(iq + \frac{3}{2}\right), \quad q_5 = \text{etc. etc.}$$

ist, so ergibt sich sofort: $K_q(\cos \omega) = P_{iq - \frac{1}{2}}(\cos \omega)$, oder einfacher geschrieben:

$$(15) \quad K_q(\mu) = P_{iq - \frac{1}{2}}(\mu),$$

was in Einklang ist mit den Formeln (13) Seite 201.

Entwicklung nach Kugelfunctionen. — Es ist $\psi = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$, mithin:

$$(16) \quad \frac{1}{V\psi} = \frac{1}{V2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega} = \frac{e^{-\frac{\vartheta}{2}}}{V1 - 2e^{-\vartheta} \cos \omega + e^{-2\vartheta}};$$

und hieraus folgt, falls ϑ positiv ist:

$$(17) \quad \frac{1}{V\psi} = \frac{1}{V2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega} = e^{-\frac{\vartheta}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\vartheta} P_n(\cos \omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-N\vartheta} P_n(\cos \omega),$$

wo N zur Abkürzung steht für $(n + \frac{1}{2})$. Substituirt man aber diese Entwicklung (17) in die Formel (1):

$$(18) \quad C_q L_q(\cos \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos q\vartheta \cdot d\vartheta}{V2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega},$$

so folgt sofort:

$$C_q L_q(\cos \omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P_n(\cos \omega),$$

wo $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-N\vartheta} \cos q\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{2}{\pi} \frac{N}{N^2 + q^2}$ ist. Setzt man also $\cos \omega = \mu$, so ergibt sich schliesslich:

$$(19) \quad C_q L_q(\mu) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{N}{N^2 + q^2} P_n(\mu),$$

und folglich, falls man $-\mu$ statt μ setzt:

$$(20) \quad C_q K_q(\mu) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{N^2 + q^2} P_n(\mu);$$

ferner folgt aus (19), falls man $\mu = -1$ setzt, und Rücksicht nimmt auf (5) Seite (199):

$$(21) \quad C_q = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n N}{N^2 + q^2}, \quad \text{wo überall } N = n + \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Hält man fest an dieser Bedeutung von N , so gilt bekanntlich für jedwedes Argument z die Formel:

$$\frac{1}{\cos z} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n N}{(N\pi)^2 - z^2},$$

welche z. B. für $z = q\pi i$ die Gestalt annimmt:

$$\frac{1}{\cos(q\pi i)} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n N}{(N\pi)^2 + (q\pi)^2}.$$

Somit folgt aus (21):

$$(22) \quad C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}.$$

Aus den Formeln (19), (20) folgt durch Multiplication mit $P_n(\mu)$ und Integration sofort:

$$(23) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) L_q(\mu) d\mu = \frac{2}{\pi C_q} \frac{1}{N^2 + q^2}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$(24) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) K_q(\mu) d\mu = \frac{2}{\pi C_q} \frac{(-1)^n}{N^2 + q^2}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nimmt man ferner für q irgend zwei Werthe q und q , und multiplicirt man die aus (19), (20) für $L_q(\mu)$ und $K_q(\mu)$ sich ergebenden Entwicklungen *miteinander*, und integrirt hierauf nach μ , so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} L_q(\mu) K_q(\mu) d\mu &= \frac{4}{\pi^2 C_q C_q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n N}{(N^2 + q^2)(N^2 + q^2)} = \\ &= \frac{4}{\pi^2 C_q C_q} \frac{1}{q^2 - q^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{N}{N^2 + q^2} - \frac{N}{N^2 + q^2} \right), \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (21):

$$= \frac{2}{\pi C_q C_q} \frac{C_q - C_q}{q^2 - q^2},$$

also schliesslich:

$$\begin{aligned} (25) \quad \int_{-1}^{+1} L_q(\mu) K_q(\mu) d\mu &= \frac{2}{\pi(q^2 - q^2)} \left(\frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_q} \right) \\ &= \frac{2[\cos(q\pi i) - \cos(q\pi i)]}{\pi(q^2 - q^2)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere für $q = q$:

$$(26) \quad \int_{-1}^{+1} L_q(\mu) K_q(\mu) d\mu = \frac{-i \sin(q\pi i)}{q} = \frac{e^{q\pi} - e^{-q\pi}}{2q},$$

also z. B.:

$$(27) \quad \int_{-1}^{+1} L_0(\mu) K_0(\mu) d\mu = \pi.$$

Ferner ergibt sich aus den Formeln (19), (20) in analoger Weise:

$$(28) \quad \int_{-1}^{+1} L_q(\mu) L_q(\mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} K_q(\mu) K_q(\mu) d\mu = \\ = \frac{4}{\pi^2 C_q C_q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N}{(N^2 + q^2)(N^2 + q^2)},$$

$$\text{d. i.} \quad = \frac{4}{\pi^2 C_q C_q} \frac{1}{q^2 - q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{N}{N^2 + q^2} - \frac{N}{N^2 + q^2} \right).$$

Diese beiden Summen in der letzten Zeile (nämlich von $\frac{N}{N^2 + q^2}$ und $\frac{N}{N^2 + q^2}$) sind *jede für sich betrachtet* divergent. Doch hat die ursprüngliche Summe in der nächstvorhergehenden Zeile einen *bestimmten endlichen* Werth, den ich aber einstweilen nicht in Form eines geschlossenen Ausdrucks darzustellen vermag.

§ 4.

Ueber das Unendlichwerden der Kegelfunctionen.

Die Kegelfunction $L_q(\mu)$ ist $= 1$ für $\mu = -1$, und bleibt sodann, während μ das Intervall $-1 \dots +1$ durchläuft, in *beständigem Wachsen*, bis sie endlich für $\mu = +1$ ins Unendliche ansteigt (vgl. Seite 199 und 203). Das Verhalten der Function $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$ ist offenbar das Entgegengesetzte. In der That werden diese Functionen $L_q(\mu)$ und $K_q(\mu)$ durch zwei Curven dargestellt sein, welche zu einander Spiegelbilder sind in Bezug auf das im Anfangspunkt $\mu = 0$ auf der μ Axe errichtete Perpendikel. — Die Art und Weise nun, in welcher $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ resp. in den Punkten $\mu = -1$ und $\mu = +1$ ins Unendliche ansteigen, wollen wir näher untersuchen, und zwar mittelst der für dieselben geltenden Differentialgleichung (10) Seite 200:

$$(1) \quad -q_1 F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = 0, \quad \text{wo} \quad q_1 = q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Zuvor aber sei bemerkt, dass nach (13) Seite 203:

$$(2) \quad L_q(\mu) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\frac{1+\mu}{2}\right) + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^3 + \dots$$

ist; woraus sofort sich ergibt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_q(-1) = 1, \\ L_q'(-1) = \frac{q_1}{2}, \\ L_q''(-1) = \frac{q_1 q_3}{2 \cdot 4}, \\ L_q'''(-1) = \frac{q_1 q_3 q_5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ \text{etc.} \end{array} \right. \quad \text{mithin *)} : \quad \left\{ \begin{array}{l} K_q(1) = +1, \\ K_q'(1) = -\frac{q_1}{2}, \\ K_q''(1) = +\frac{q_1 q_3}{2 \cdot 4}, \\ K_q'''(1) = -\frac{q_1 q_3 q_5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Da nun $K = K_q(\mu)$ und $L = L_q(\mu)$ der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, so hat man:

$$(4) \quad \begin{aligned} & -q_1 K - 2\mu K' + (1 - \mu^2) K'' = 0, \\ & -q_1 L - 2\mu L' + (1 - \mu^2) L'' = 0; \quad \left[\text{wo } q_1 = q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit L und $(-1)K$, und addirt, so erhält man:

$$-2\mu(LK' - KL') + (1 - \mu^2)(LK'' - KL'') = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial[(1 - \mu^2)(LK' - KL')]}{\partial \mu} = 0,$$

mithin:

$$(1 - \mu^2)(LK' - KL') = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir diese Const. mit G , oder vielmehr, was für die weiteren Betrachtungen zweckmässiger ist, mit $\left(-\frac{2}{\pi G}\right)$, so erhalten wir:

$$(5) \quad LK' - KL' = -\frac{2}{\pi G(1 - \mu^2)}.$$

Mittelst dieser Gleichung aber muss es möglich sein, L durch K auszudrücken. Setzen wir zu diesem Zweck $L = Kf$, mithin $L' = Kf' + K'f$, so geht die Gleichung (5) über in:

$$-K^2 f' = -\frac{2}{\pi G(1 - \mu^2)};$$

woraus sich der Werth von f sofort bestimmt. Substituiren wir aber diesen Werth in die Relation $L = Kf$, so folgt sofort:

$$(6) \quad L = K \left(\frac{2}{\pi G} \int \frac{d\mu}{(1 - \mu^2) K^2} \right).$$

*) Es ist nämlich: $K_q(\mu) = L_q(-\mu)$, also, falls man nach μ differenzirt: $K_q'(\mu) = (-1)L_q'(-\mu)$, oder falls man im Ganzen n Male differenzirt:

$$K_q^{(n)}(\mu) = (-1)^n L_q^{(n)}(\mu).$$

Nun ist nach (2):

$$(7) \quad K = K_q(\mu) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^2 + \dots,$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(8) \quad K = 1 + \alpha(1-\mu) + \alpha'(1-\mu)^2 + \alpha''(1-\mu)^3 + \dots,$$

oder falls man $1 - \mu = \xi$ setzt:

$$(9) \quad K = 1 + \alpha\xi + \alpha'\xi^2 + \alpha''\xi^3 + \dots,$$

mithin:

$$\frac{1}{K^2} = 1 + \beta\xi + \beta'\xi^2 + \beta''\xi^3 + \dots,$$

wo die β constante Coefficienten sind, auf deren Werthe es für unsere Zwecke nicht weiter ankommt. Gleichzeitig wird, weil $1 - \mu = \xi$ sein soll:

$$\frac{1}{1-\mu^2} = \frac{1}{2\xi - \xi^2} = \frac{1}{2\xi} (1 + \gamma\xi + \gamma'\xi^2 + \gamma''\xi^3 + \dots),$$

Durch Multiplication dieser Formel mit der vorhergehenden ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-\mu^2)K^2} = \frac{1}{2\xi} (1 + \delta\xi + \delta'\xi^2 + \delta''\xi^3 + \dots),$$

und folglich:

$$\int \frac{d\mu}{(1-\mu^2)K^2} = \int \frac{(-1)d\xi}{(1-\mu^2)K^2} = -\frac{1}{2} (\log \xi + \delta\xi + \frac{\delta'}{2}\xi^2 + \dots + \kappa),$$

wo κ die Integrationsconstante repräsentirt. Substituiren wir endlich diesen Werth in (6), so folgt:

$$L = -\frac{K \log \xi}{\pi G} - \frac{K}{\pi G} \left(\kappa + \delta\xi + \frac{\delta'}{2}\xi^2 + \dots \right),$$

oder, falls wir im zweiten Gliede für K die Entwicklung (9) substituiren:

$$L = -\frac{K \log \xi}{\pi G} + (\Delta + \Delta'\xi + \Delta''\xi^2 + \dots),$$

wo die Δ (ebenso wie die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$) constante Coefficienten sind, auf deren Werthe es uns nicht weiter ankommt. Die letzte Formel endlich gewinnt, falls man für ξ seine eigentliche Bedeutung $(1 - \mu)$ restituiert, und die Ordnungszahl q hinzufügt, folgende Gestalt:

$$(10) \quad L_q(\mu) = -\frac{K_q(\mu) \cdot \log(1-\mu)}{\pi G_q} + \Delta_q + \Delta'_q(1-\mu) + \Delta''_q(1-\mu)^2 + \dots$$

Diese Formel (10) aber zeigt, dass $L_q(\mu)$ im Punkte $\mu = +1$ logarithmisch unendlich wird. Gleichzeitig ergeben sich aus derselben folgende Relationen:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_q(1) = \infty, & \lim_{\mu=1} (1-\mu) L_q(\mu) = 0, \\ L_q'(1) = \infty, & \lim_{\mu=1} (1-\mu) L_q'(\mu) = \frac{1}{\pi G_q}, \\ L_q''(1) = \infty, & \lim_{\mu=1} (1-\mu)^2 L_q''(\mu) = \frac{1}{\pi G_q}, \\ L_q'''(1) = \infty, & \lim_{\mu=1} (1-\mu)^3 L_q'''(\mu) = \frac{1 \cdot 2}{\pi G_q}, \\ \dots & \dots \\ L_q^{(j)}(1) = \infty, & \lim_{\mu=1} (1-\mu)^j L_q^{(j)}(\mu) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (j-1)}{\pi G_q}. \end{array} \right.$$

Es fehlt uns noch die Kenntniss der bei (5) hinzugetretenen Constanten G oder G_q . Um diese zu finden, greifen wir zurück zu der für $L = L_q(\mu)$ geltenden Differentialgleichung (4), und combiniren dieselbe mit der für die Kugelfunction $P = P_n(\mu)$ gültigen Gleichung. Aus diesen beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\left(q^2 + \frac{1}{4}\right) L - 2\mu L' + (1-\mu^2) L'' &= 0, \\ n(n+1) P - 2\mu P' + (1-\mu^2) P'' &= 0 \end{aligned}$$

folgt sofort:

$$-\left[n(n+1) + \left(q^2 + \frac{1}{4}\right)\right] PL - 2\mu(PL' - LP') + (1-\mu^2)(PL'' - LP'') = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$-\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + q^2\right] PL + \frac{\partial[(1-\mu^2)(PL' - LP')]}{\partial \mu} = 0;$$

woraus durch Integration sich ergibt:

$$\begin{aligned} (N^2 + q^2) \int_{-1}^{+1} PL d\mu &= + \left[(1-\mu^2)(PL' - LP')\right]_{\mu=1} \\ &\quad - \left[(1-\mu^2)(PL' - LP')\right]_{\mu=-1}; \end{aligned}$$

wo wiederum $N = n + \frac{1}{2}$ sein soll. Das *zweite* Glied der rechten Seite *verschwindet*, wie ein Blick auf die Formeln (3) Seite 207 sofort erkennen lässt. Das *erste* Glied hingegen bedarf, weil $L(\mu)$ und $L'(\mu)$ für $\mu = 1$ unendlich gross sind, einer genaueren Untersuchung. Zunächst können wir unsere Formel so schreiben:

$$(N^2 + q^2) \int_{-1}^{+1} P_n L_q d\mu = \left(\underbrace{(1+\mu) P_n(\mu)}_{\alpha} \cdot \underbrace{(1-\mu) L_q'(\mu)}_{\beta} - \underbrace{(1+\mu) P_n'(\mu)}_{\gamma} \cdot \underbrace{(1-\mu) L_q(\mu)}_{\delta} \right)_{\mu=1}$$

Von den hier auftretenden Producten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wird für $\mu = 1$ das $\beta = \frac{1}{\pi G_q}$, und das $\delta = 0$, nach (11). Ferner wird für $\mu = 1$ bekanntlich das $\alpha = 2$, und das γ jedenfalls *endlich* sein*). Somit folgt:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) L_q(\mu) d\mu = \frac{2}{\pi G_q} \frac{1}{N^2 + q^2}.$$

Vergleichen wir aber diese Formel mit der früher gefundenen (23) Seite 205, so ergibt sich sofort, dass

$$(12) \quad G_q = C_q, \quad \text{d. i.} = \frac{1}{\cos(q\pi i)}$$

ist. Dieser Werth von G_q wird also nachträglich in allen Formeln des gegenwärtigen Paragraphen zu substituiren sein.

Somit erhalten wir z. B. aus (5):

$$(13) \quad L_q(\mu) K_q'(\mu) - K_q(\mu) L_q'(\mu) = - \frac{2}{\pi C_q(1 - \mu^2)},$$

oder, falls wir $\mu = 0$ setzen, und beachten, dass $L_q(0) = K_q(0)$, hingegen $L_q'(0) = -K_q'(0)$ ist:

$$(14) \quad K_q(0) K_q'(0) = - \frac{1}{\pi C_q} = - \frac{\cos(q\pi i)}{\pi},$$

oder was dasselbe ist:

$$(15) \quad L_q(0) L_q'(0) = + \frac{1}{\pi C_q} = + \frac{\cos(q\pi i)}{\pi}.$$

Hieran knüpft sich eine wichtige Bemerkung hinsichtlich der früher gefundenen Entwicklung (2) Seite 201:

$$(16) \quad L_q(\mu) = (\alpha + \beta\mu^2 + \gamma\mu^4 + \dots) + (a\mu + b\mu^3 + c\mu^5 + \dots).$$

Offenbar sind nämlich hier α und a resp. identisch mit $L_q(0)$ und $L_q'(0)$; somit folgt aus (15):

$$(17) \quad \alpha a = \frac{1}{\pi C_q} = \frac{\cos(q\pi i)}{\pi};$$

wodurch a auf α reducirt ist. Man hat also für α das in (3) Seite 201 angegebene Integral zu nehmen. Sodann aber kann man alle übrigen Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \dots$ und a, b, c, d, \dots in einfacher Weise durch α ausdrücken, indem man theils die Relationen (6) Seite 202, theils die soeben gefundene neue Relation (17) in Anwendung bringt.

*) Beiläufig bemerkt $+n(n+1)$.

§ 5.

Die adjungirten Kegelfunctionen.

Differenzirt man die für $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ geltende Differentialgleichung (4) Seite 207:

$$(0) \quad -q_1 f - 2\mu f' + (1 - \mu^2) f'' = 0,$$

wiederholt noch μ , so erhält man:

$$(1) \quad -q_3 f'' - 4\mu f''' + (1 - \mu^2) f'''' = 0,$$

$$(2) \quad -q_5 f'''' - 6\mu f'''' + (1 - \mu^2) f'''''' = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(j) \quad -q_{2j+1} f^{(j)} - (2j+2) \mu f^{(j+1)} + (1 - \mu^2) f^{(j+2)} = 0,$$

wo q_1, q_3, q_5, \dots die früher [(6a) Seite 202] festgesetzten Bedeutungen haben. Aus diesen Gleichungen kann man, indem man $\mu = -1$ setzt, sofort die Werthe von $L_q(-1)$, $L_q'(-1)$, $L_q''(-1)$, \dots berechnen, und erhält alsdann *dieselben* Werthe, welche wir schon früher (Seite 207) auf andrem Wege gefunden haben.

Führt man in der Formel (j) statt f eine andere Function F ein mittelst der Relation:

$$(1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} f^{(j)} = F,$$

so gewinnt jene Formel folgende Gestalt:

$$(I) \quad -\left(q_1 + \frac{j^2}{1 - \mu^2}\right) F + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = 0, \quad \text{wo } q_1 = q^2 + \frac{1}{4}.$$

Diese Differentialgleichung wird demnach die beiden particularen Integrale besitzen:

$$(II) \quad F = \begin{cases} (1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(\mu) = K_{qj}(\mu), \\ (1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} L_q^{(j)}(\mu) = L_{qj}(\mu); \end{cases}$$

wo die Bezeichnungen $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$ zur Abkürzung dienen sollen. Die in dieser Weise definirten Functionen $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$ spielen bei unseren weiteren Betrachtungen eine wichtige Rolle, und mögen die *adjungirten Kegelfunctionen* heissen.

§ 6.

Fortsetzung zu § 2., betreffend die analytische Darstellung der reciproken Entfernung zweier Punkte.

In der schon gefundenen Formel (7) Seite 199:

$$(1) \quad T = \frac{V_{\psi} V_{\psi_1}}{2a} \int_0^{\infty} dq C_q L_q(\cos \gamma) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1)$$

ist $\cos \gamma = \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1)$, und ferner nach (13) Seite 203:

$$(2) \quad L_q(\cos \gamma) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^4 + \dots$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, dieses $L_q(\cos \gamma)$ nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi_1)$ zu entwickeln, also in eine Reihe von der Form:

$$(3) \quad L_q(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(\mu, \mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1)$$

wo $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 2$ sein soll, während μ und μ_1 zur Abkürzung stehen resp. für $\cos \omega$ und $\cos \omega_1$.

Eine solche Entwicklung muss immer möglich sein, sobald wir festsetzen, dass

$$(4) \quad \omega < \omega_1, \text{ d. i. } \mu > \mu_1$$

sein soll. Denn γ repräsentirt den Winkel, unter welchem die beiden über der Linie AA' , als gemeinschaftlicher Sehne stehenden, resp. durch $(\vartheta, \omega, \varphi)$ und $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ gehenden Kreisbogen im Punkte A gegen einander geneigt sind. Zufolge der Festsetzung (4) können aber diese Bogen niemals untereinander identisch sein, mithin der Winkel γ niemals verschwinden. Oder ein wenig anders ausgedrückt: Zufolge unserer Festsetzung (4) kann $\cos \gamma$ niemals $= 1$, mithin $L_q(\cos \gamma)$ niemals unendlich werden. Denken wir uns also für μ und μ_1 irgend zwei der Festsetzung (4) entsprechende Werthe gegeben, so wird $L_q(\cos \gamma)$ eine stets endlich bleibende Function des Argumentes $(\varphi - \varphi_1)$ sein, und folglich entwickelbar sein nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi_1)$. Die Siuus können nämlich nicht vorkommen, wie aus (2) ersichtlich ist, sobald man nur beachtet, dass $\cos \gamma = \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1)$ ist.

Setzt man $\omega = 0$, mithin $\mu = 1$, so folgt aus (3), (4):

$$L_q(\mu_1) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(1, \mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1), \text{ für } 1 > \mu_1.$$

Hieraus aber folgt, weil die linke Seite von $(\varphi - \varphi_1)$ unabhängig ist, sofort:

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{q0}(1, \mu_1) = L_q(\mu_1), \\ f_{qj}(1, \mu_1) = 0, \text{ für } j = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\} \text{ für } 1 > \mu_1.$$

Setzt man andererseits $\omega_1 = \pi$, mithin $\mu_1 = -1$, so folgt aus (3), (4)

$$L_q(-\mu) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j f_{qj}(\mu, -1) \cos j(\varphi - \varphi_1), \text{ für } \mu > -1;$$

und hieraus:

$$(4b) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{q0}(\mu, -1) = L_q(-\mu) = K_q(\mu) \\ f_{qj}(\mu, -1) = 0, \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\} \quad \text{für } \mu > -1.$$

Diese einfachen Bemerkungen vorangeschickt, wollen wir nun die allgemeinen Werthe der $f_{qj}(\mu, \mu_1)$ zu bestimmen suchen. Zu diesem Zweck werden wir Gebrauch machen von derjenigen Differentialgleichung, welche aus der Laplace'schen Gleichung $\Delta T = 0$ sich ergibt für den in $T(1)$ enthaltenen Ausdruck $L_q(\cos \gamma)$.

Bezeichnet man das in (1) auftretende Integral zur augenblicklichen Abkürzung mit J , so nimmt die Gleichung $\Delta T = 0$ mittelst der Transformation (10) Seite 198 folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \omega^2} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial J}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi^2} - \frac{J}{4} = 0,$$

oder, falls man $\cos \omega = \mu$ setzt, folgende:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial J}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 J}{\partial \varphi^2} - \frac{J}{4} = 0.$$

Substituirt man nun hier für J seine eigentliche Bedeutung:

$$J = \int_0^\pi dq C_q L_q(\cos \gamma) \cdot \cos q (\vartheta - \vartheta_1),$$

so findet man für die Function $L = L_q(\cos \gamma)$ folgende Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial L}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} - \left(q^2 + \frac{1}{4} \right) L = 0.$$

Und substituirt man hier für $L = L_q(\cos \gamma)$ die Entwicklung (3), so erhält man für die Function $f = f_{qj}(\mu, \mu_1)$ folgende Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) - \left(\left(q^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{j^2}{1 - \mu^2} \right) f = 0.$$

Und in ganz analoger Weise wird man andererseits, falls man den Punkt $(\vartheta, \omega, \varphi)$ festhält, hingegen $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ als variabel ansieht, für diese Function f auch folgende Differentialgleichung erhalten:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left((1 - \mu_1^2) \frac{\partial f}{\partial \mu_1} \right) - \left(\left(q^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{j^2}{1 - \mu_1^2} \right) f = 0.$$

Die Gleichung (6) ist identisch mit der Gleichung (I) des vorhergehenden Paragraphen, und hat also die particularen Integrale $K_{qj}(\mu)$ und $L_{qj}(\mu)$. Somit folgt aus derselben:

$$(8) \quad f = f_{qj}(\mu, \mu_1) = A K_{qj}(\mu) + B L_{qj}(\mu),$$

wo A, B Constante sind in Bezug auf μ , also nur noch abhängen können von μ_1 , und ausserdem von den Ordnungszahlen q, j . Lässt

man nun, was mit unserer Festsetzung (4) in Einklang steht, das $\mu = 1$ werden, so wird das in (8) vorhandene $L_{qj}(\mu)$ *unendlich gross* [vgl. Seite 209]. Und mit Rücksicht hierauf ergibt sich sofort, dass jenes $L_{qj}(\mu)$ in (8) gar nicht vorkommen darf, dass also der Factor B verschwinden muss. Denn wäre jenes $L_{qj}(\mu)$ in (8) wirklich vorhanden, so würde $f_{qj}(\mu, \mu_1)$ für $\mu = 1$ unendlich gross werden, was in Widerspruch ist mit den Formeln (4a). Demgemäss reducirt sich die Formel (8) auf:

$$(9) \quad f = f_{qj}(\mu, \mu_1) = AK_{qj}(\mu).$$

Substituirt man diesen Werth in die Differentialgleichung (7), so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} \left((1 - \mu_1^2) \frac{\partial A}{\partial \mu_1} \right) - \left(\left(q^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{j^2}{1 - \mu_1^2} \right) A = 0;$$

und hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf den Satz (I), (II) des vorhergehenden Paragraphen sofort, dass die nur von μ_1 abhängende Function A die Gestalt haben muss:

$$A = \Delta K_{qj}(\mu_1) + E L_{qj}(\mu_1),$$

wo Δ, E Constante sind, nämlich nur noch von den Ordnungszahlen q, j abhängen können. Dieser Werth von A in (9) substituirt, ergibt sich:

$$(10) \quad f_{qj}(\mu, \mu_1) = \Delta K_{qj}(\mu) K_{qj}(\mu_1) + E K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1).$$

Setzen wir nun hier, im Einklang mit unserer Festsetzung (4), das $\mu_1 = -1$; so wird $K_{qj}(\mu_1)$ *unendlich gross*; und hieraus folgt, dass dieses $K_{qj}(\mu_1)$ in (10) gar nicht vorkommen darf, dass mithin Δ verschwinden muss. Denn die Function $f_{qj}(\mu, \mu_1)$ besitzt zufolge (4b) für $\mu_1 = -1$ einen bestimmten endlichen Werth. Demgemäss reducirt sich die Formel (10) auf:

$$(11) \quad f_{qj}(\mu, \mu_1) = E K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1),$$

wo statt E eigentlich E_{qj} zu schreiben ist. Somit folgt aus (3):

$$(12) \quad L_q(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j E_{qj} K_{qj}(\mu) L_{qj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1), \text{ für } \mu > \mu_1.$$

Und es handelt sich jetzt nur noch um die Ermittlung der Constanten E_{qj} . Im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass

$$(13) \quad E_{qj} = \frac{1}{2^j \Pi(j) K_q^{(j)}(1)}$$

ist, wo Π die Gauss'sche Function bezeichnet. Hieraus ergibt sich dann mit Rücksicht auf die Formeln Seite 207 sofort:

$$(14) \quad \begin{cases} E_{q^0} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot K_q(1)} = 1, \\ E_{q^1} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot K_q'(1)} = \frac{(-1)^1}{q_1}, \\ E_{q^2} = \frac{1}{2^2 (1 \cdot 2) K_q''(1)} = \frac{(-1)^2}{q_1 q_3}, \\ E_{q^3} = \frac{1}{2^3 (1 \cdot 2 \cdot 3) K_q'''(1)} = \frac{(-1)^3}{q_1 q_3 q_5}, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

so dass also die Formel (12 folgende Gestalt erhält:

$$(15) \quad L_q(\cos \gamma) = K_q(\mu) L_q(\mu_1) + 2 \frac{(-1)}{q_1} K_{q^1}(\mu) L_{q^1}(\mu_1) \cos(\varphi - \varphi_1) \\ + 2 \frac{(-1)^2}{q_1 q_3} K_{q^2}(\mu) L_{q^2}(\mu_1) \cos 2(\varphi - \varphi_1) \\ + \dots \dots \dots$$

immer vorausgesetzt, dass $\mu > \mu_1$ sei. Dabei repräsentiren q_1, q_3, q_5, \dots die in (6a) Seite 202 eingeführten Grössen.

§ 6a.

Nachträgliche Bestimmung der im vorhergehenden Paragraphen noch unbekannt gebliebenen Constanten.

Setzt man in den Formeln (7b) Seite 199 den $\cos \omega = \mu$, so folgt:

$$(\alpha) \quad \frac{1}{\sqrt{2\mu + 2 \cos i\Theta}} = \int_0^\infty dq C_q K_q(\mu) \cos q\Theta; *)$$

und hieraus folgt weiter durch wiederholte Differentiation nach μ :

*) Aus (α) folgt z. B. für $\mu = 1$ und $\Theta = 0$:

$$\frac{1}{2} = \int_0^\infty dq C_q.$$

Nicht weniger einfach ist, wie beiläufig bemerkt sein mag, folgende Formel:

$$\frac{1}{\pi} = \int_0^\infty dq C_q C_q,$$

zu welcher man leicht gelangt, falls man nur beachtet, dass

$$C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)} = \frac{2}{e^{q\pi} + e^{-q\pi}}$$

ist.

$$(\beta) \quad \frac{(-1) \cdot 1}{(2\mu + 2 \cos i\Theta)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\infty} dq C_q K'_q(\mu) \cos q\Theta,$$

$$(\gamma) \quad \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 3}{(2\mu + 2 \cos i\Theta)^{\frac{5}{2}}} = \int_0^{\infty} dq C_q K''_q(\mu) \cos q\Theta,$$

u. s. w. u. s. w. — All' diese Formeln (α) , (β) , (γ) etc. kann man zusammenfassen in die *eine* Formel:

$$(16) \quad \left(\frac{1}{2\mu + 2 \cos i\Theta} \right)^{\frac{2j+1}{2}} = \frac{(-1)^j}{H_j} \int_0^{\infty} dq C_q K_q^{(j)}(\mu) \cos q\Theta, \text{ wo } j=0, 1, 2, \dots$$

Dabei haben alsdann die Zahlen H_j die Bedeutungen:

$$(17) \quad H_0 = 1, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = 1 \cdot 3, \quad H_3 = 1 \cdot 3 \cdot 5, \quad \text{etc. etc.}$$

Dies vorangeschickt, wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe. Zu diesem Zweck bringen wir die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Entwicklungen auf den *speciellen* Fall in Anwendung, dass μ sehr nahe an 1, andererseits μ_1 sehr nahe an -1 liegt, und dass die absoluten Werthe beider Grössen einander gleich sind. Dann ist

$$(18) \quad \mu_1 = -\mu$$

Auch wollen wir zur Abkürzung

$$(19) \quad \begin{cases} \vartheta - \vartheta_1 = \Theta, \\ \varphi - \varphi_1 = \Phi, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(\mu^2 + \cos i\Theta) = U, \\ 2(1 - \mu^2) = V, \end{cases}$$

setzen. Als dann folgt aus (12):

$$L_q(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j E_{qj} K_{qj}(\mu) L_{qj}(-\mu) \cos j\Phi,$$

oder weil $K_{qj}(\mu) L_{qj}(-\mu) = (1 - \mu^2)^j K_q^{(j)}(\mu) L_q^{(j)}(-\mu)$, ausserdem aber $L_q^{(j)}(-\mu) = (-1)^j K_q^{(j)}(\mu)$ ist*):

$$L_q(\cos \gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} (-1)^j (1 - \mu^2)^j \varepsilon_j E_{qj} (K_q^{(j)}(\mu))^2 \cos j\Phi.$$

Und dies in (1) substituirt, erhält man:

$$(20) \quad T = \frac{V\psi V\psi_1}{2a} \int_0^{\infty} dq \left[C_q \cos q\Theta \sum_{j=0}^{j=\infty} (-1)^j (1 - \mu^2)^j \varepsilon_j E_{qj} (K_q^{(j)}(\mu))^2 \cos j\Phi \right].$$

*) Vergl. (II) Seite 211, und andererseits auch die Note auf Seite 207.

Mit Rücksicht auf unsere gegenwärtigen Festsetzungen (18), (19) ergibt sich aber andererseits aus (6) Seite 199:

$$(21) \quad T = \frac{\sqrt{\psi} \sqrt{\psi_1}}{2a} \frac{1}{\sqrt{2(\cos i \Theta) + 2\mu^2 - 2(1-\mu^2)\cos\Phi}} = \frac{\sqrt{\psi} \sqrt{\psi_1}}{2a} \frac{1}{\sqrt{U - V \cos\Phi}}.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke (20) und (21) einander gleich, multiplicirt man ferner die so entstehende Gleichung mit $\frac{\cos j \Phi \cdot d\Phi}{2\pi}$, und integrirt nach Φ zwischen den Grenzen 0 und 2π , so ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j \Phi \cdot d\Phi}{\sqrt{U - V \cos\Phi}} = \int_0^\infty dq \left[C_q \cos q \Theta \cdot E_{qj} (-1)^j (1 - \mu^2)^j (K_q^{(j)}(\mu))^2 \right],$$

oder, falls man mit V^j d. i. $2^j(1 - \mu^2)^j$ dividirt:

$$(22) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j \Phi \cdot d\Phi}{V^j \sqrt{U - V \cos\Phi}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^j \int_0^\infty dq \left[C_q \cos q \Theta \cdot E_{qj} (K_q^{(j)}(\mu))^2 \right].$$

Da μ nahe an 1, mithin V (19) nahe an 0 liegen soll, so können wir die linke Seite nach Potenzen von V entwickeln. Diese linke Seite, sie mag \mathfrak{L} heissen, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j \Phi \cdot d\Phi}{V^j \sqrt{U}} \left[G_0 + G_1 \left(\frac{V}{U} \cos \Phi \right)^1 + G_2 \left(\frac{V}{U} \cos \Phi \right)^2 + \dots \right],$$

wo die G die Zahlen vorstellen:

$$(23) \quad G_0 = 1, \quad G_1 = \frac{1}{2}, \quad G_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad G_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{etc.}$$

Bei Ausführung der Integration fallen die mit $G_0, G_1, G_2, \dots, G_{j-1}$ behafteten Glieder fort, so dass man erhält:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j \Phi \cdot d\Phi}{V^j \sqrt{U}} \left[G_j \left(\frac{\cos \Phi}{U} \right)^j + G_{j+1} V \left(\frac{\cos \Phi}{U} \right)^{j+1} + \dots \right]$$

Substituirt man dies in (22) und lässt man gleichzeitig $\mu = 1$ mithin [vgl. (19)] $V = 0$, und $U = 2(1 + \cos i \Theta)$ werden, so folgt:

$$\frac{G_j}{2\pi} \left(\frac{1}{2 + 2 \cos i \Theta} \right)^{\frac{2j+1}{2}} \int_0^{2\pi} \cos j \Phi (\cos \Phi)^j d\Phi = \left(-\frac{1}{2}\right)^j \int_0^\infty dq \left[C_q \cos q \Theta \cdot E_{qj} (K_q^{(j)}(1))^2 \right],$$

oder weil das Integral linker Hand $= \frac{2\pi}{2^j}$ ist:

$$\left(\frac{1}{2 + 2 \cos i \Theta} \right)^{\frac{2j+1}{2}} = \frac{(-1)^j}{G_j} \int_0^\infty dq \left[C_q \cos q \Theta \cdot E_{qj} (K_q^{(j)}(1))^2 \right].$$

Vergleicht man aber diese Formel mit der aus (16) für $\mu = 1$ entspringenden Formel:

$$\left(\frac{1}{2 + 2 \cos i\Theta}\right)^{\frac{2j+1}{2}} = \frac{(-1)^j}{H_j} \int_0^\infty dq \left[C_q \cos q\Theta \cdot K_q^{(j)}(1) \right],$$

so ergibt sich sofort:

$$(24) \quad E_{qj} K_q^j(1) = \frac{G_j}{H_j}.$$

Nun folgt aber aus (17) und (23):

$$\frac{G_0}{H_0} = 1, \quad \frac{G_1}{H_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{G_2}{H_2} = \frac{1}{2 \cdot 4}, \quad \frac{G_3}{H_3} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{etc.},$$

mithin allgemein: $\frac{G_j}{H_j} = \frac{1}{2^j \Pi(j)}$; und folglich:

$$(25) \quad E_{qj} K_q^j(1) = \frac{1}{2^j \Pi(j)}.$$

W. z. z. w. [vergl. (13)].

§ 7.

Neue Integraleigenschaften der Kreisfunctionen.

Ist $G(\vartheta)$ eine gerade, und $U(\vartheta)$ eine ungerade Function von ϑ , so wird offenbar:

$$(\alpha) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} U(\vartheta) d\vartheta = 0,$$

$$(\beta) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vartheta) U(\vartheta) d\vartheta = 0;$$

vorausgesetzt, dass diese Integrale convergent sind. Hieraus ergeben sich, falls $f(q)$ und $F(q)$ willkürlich gegebene Functionen von q vorstellen, folgende Formeln:

$$(A) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty dq f(q) \sin q\vartheta \right) d\vartheta = 0;$$

$$(B) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^\infty dq f(q) \sin q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq F(q) \cos q\vartheta \right) \right\} d\vartheta = 0;$$

immer vorausgesetzt, dass die Integrale convergent sind.

Es fragt sich nun, welche Werthe diese Ausdrücke (A) und (B) annehmen werden, falls man daselbst statt Sinus und Cosinus *durchweg den Cosinus*, oder auch im zweiten Ausdruck *durchweg den Sinus* substituirt. Diese Frage nun findet ihre Antwort durch folgende Sätze: Es ist im Allgemeinen:

$$(A') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} dq f(q) \cos q \vartheta \right) d\vartheta = \pi f(0).$$

Und andererseits ist:

$$(B') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^{\infty} dq f(q) \cos q \vartheta \right) \left(\int_0^{\infty} dq F(q) \cos q \vartheta \right) \right\} d\vartheta = \pi \int_0^{\infty} dq f(q) F(q),$$

und ebenso auch:

$$(B'') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^{\infty} dq f(q) \sin q \vartheta \right) \left(\int_0^{\infty} dq F(q) \sin q \vartheta \right) \right\} d\vartheta = \pi \int_0^{\infty} dq f(q) F(q).$$

Die Ableitung dieser Sätze (A') und (B'), (B''), sowie eine genauere Untersuchung über diejenigen Bedingungen, unter denen sie mit Sicherheit anwendbar sind, habe ich an einem anderen Orte*) mitgetheilt.

§ 8.

Die elektr. Werthe auf dem Conoid, falls keine äusseren Kräfte einwirken.

Sind im Raume irgend zwei unendlich nahe Punkte $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und $(\vartheta + d\vartheta, \omega + d\omega, \varphi + d\varphi, \psi + d\psi)$ gegeben, und denkt man sich die beiden durch diese Punkte gehenden Individuen des Flächensystems $\vartheta = \text{Const.}$ construirt, ebenso die beiden Flächen $\omega = \text{Const.}$, und die beiden Flächen $\varphi = \text{Const.}$, und bezeichnet man endlich die Kanten des von diesen sechs Flächen gebildeten unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds mit $ds_{\vartheta}, ds_{\omega}, ds_{\varphi}$, so ergibt sich mittelst der Formel (7) Seite 197 sofort:

$$\begin{aligned} (k) \quad & \left\{ ds_{\vartheta} = \frac{2a d\vartheta}{\psi}, \quad (ds_{\vartheta} \text{ ist Normale einer Kugelfläche } \vartheta = \text{Const.}), \right. \\ (c) \quad & \left\{ ds_{\omega} = \frac{2a d\omega}{\psi}, \quad (\text{Normale einer Conoidfläche } \omega = \text{Const.}), \right. \\ (m) \quad & \left\{ ds_{\varphi} = \frac{2a \sin \omega \cdot d\varphi}{\psi}, \quad (\text{Normale einer Meridianebene } \varphi = \text{Const.}). \right. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Multiplication:

$$\begin{aligned} (K) \quad & \left\{ ds_{\omega} ds_{\varphi} = \frac{4a^2 \sin \omega \cdot d\omega d\varphi}{\psi^2}, \quad (\text{Element einer Kugelfläche}), \right. \\ (C) \quad & \left\{ ds_{\vartheta} ds_{\varphi} = \frac{4a^2 \sin \omega \cdot d\vartheta d\varphi}{\psi^2}, \quad (\text{Element einer Conoidfläche}), \right. \\ (M) \quad & \left\{ ds_{\vartheta} ds_{\omega} = \frac{4a^2 d\vartheta d\omega}{\psi^2}, \quad (\text{Element einer Meridianebene}). \right. \end{aligned}$$

*) In meiner Schrift: *Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwicklungen*, (Teubner 1881), Seite 8–11, und Seite 77–80.

Dies vorangeschickt, wollen wir uns ein metallisches und isolirtes Conoid vom Parameter ω gegeben denken, welches bis zu einer gegebenen Spannung C mit Elektrizität geladen ist. Es soll ermittelt werden die elektrische Dichtigkeit Δ an seiner Oberfläche, also in jedwedem Punkt $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ dieser Oberfläche.

Offenbar wird die in Rede stehende elektrische Belegung (weil keine äusseren Kräfte einwirken) symmetrisch sein in Bezug auf die Conoidaxe AA' , und ebenso auch symmetrisch sein in Bezug auf den Aequator des Conoids. Hieraus folgt sofort, dass die Dichtigkeit Δ dieser Belegung *nur* von ϑ abhängen kann und eine *gerade Function* von ϑ sein muss. Das Potential dieser noch unbekannten elektrischen Belegung auf irgend einen Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ besitzt die Form:

$$(1) \quad V = \iint T \Delta d\sigma,$$

wo $d\sigma$ ein Oberflächenelement des Conoids, mithin $\Delta d\sigma$ die auf demselben vorhandene elektrische Masse, und T die reciproke Entfernung des Elementes vom Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ vorstellt. Unsere Aufgabe wird nun darin bestehen, jenes Δ , welches eine *gerade Function* von ϑ ist, der Art zu bestimmen, dass dieses Potential V gleich der gegebenen Constanten C wird für alle Lagen, die der Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ innerhalb des Conoids annehmen kann. — Nach Formel (C) ist:

$$(2) \quad \Delta d\sigma = \left(\frac{\Delta \cdot 2a \sin \omega}{\psi V \psi} \right) \frac{2a d\vartheta d\varphi}{V \psi},$$

wo ω den gegebenen Parameter der Conoidoberfläche vorstellt, und $\psi = 2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega$ ist, während Δ eine *unbekannte gerade Function* von ϑ vorstellt. Demgemäss wird also der in (2) eingeklammerte Ausdruck ebenfalls eine gerade Function von ϑ sein, und (ausser von den gegebenen Constanten a und ω) nur von ϑ allein abhängen. Demgemäss machen wir für diesen Ausdruck den Ansatz:

$$(3) \quad \frac{\Delta \cdot 2a \sin \omega}{\psi V \psi} = \int_0^\infty dq A_q \cos q \vartheta,$$

wo die A_q unbekannte Functionen von q sind.

Ferner repräsentirt T die reciproke Entfernung zwischen dem Massenelement $\Delta d\sigma(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ und einem *innern* Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$. Demgemäss ist $\omega < \omega_1$, oder falls man die Cosinus dieser Winkel mit μ, μ_1 bezeichnet, $\mu > \mu_1$. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich:

$$(4) \quad T = \frac{V \psi V \psi_1}{2a} \int_0^\infty dq C_q L_q(\cos \gamma) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1), \quad [\text{nach (1) S. 211}]$$

und:

$$(5) \quad L_q(\cos \gamma) = K_q(\mu) L_q(\mu_1) + U \cos(\varphi - \varphi_1) + U' \cos 2(\varphi - \varphi_1) + \dots, \\ \text{[nach (15) S. 215]}$$

wo U, U', \dots von μ, μ_1 abhängende Functionen vorstellen, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Substituirt man nun die Werthe (2), (3), (4) in (1), so folgt:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\vartheta d\varphi \left\{ \sqrt{\psi_1} \left(\int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq C_q L_q(\cos \gamma) \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \right) \right\}.$$

In diesem ganzen Ausdruck kommt φ nur insofern vor, als es in $d\varphi$ und in $L_q(\cos \gamma)$, (5), enthalten ist. Demgemäss lässt sich die (von 0 bis 2π gehende) Integration nach φ sofort ausführen; wodurch sich ergibt:

$$V = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \left\{ \sqrt{\psi_1} \left(\int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq C_q K_q(\mu) L_q(\mu_1) \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \right) \right\},$$

wo übrigens der Factor $\sqrt{\psi_1}$ vor das Integral gezogen werden kann. Bewerkstelligt man nun die (von $-\infty$ bis $+\infty$ gehende) Integration nach ϑ mittelst der Sätze (B), (B') Seite 218, 219, so folgt:

$$V = 2\pi \sqrt{\psi_1} \cdot \pi \int_0^\infty dq A_q C_q K_q(\mu) L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1.$$

Und dieser Ausdruck soll also gleich der gegebenen Constante C sein für alle innern Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$. Mit andern Worten: Für all diese Punkte soll die Gleichung erfüllt sein:

$$(6) \quad 2\pi^2 \int_0^\infty dq A_q C_q K_q(\mu) L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1 = \frac{C}{\sqrt{\psi_1}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich aber (ebenso wie die linke) in ein nach den $\cos q\vartheta_1$ fortschreitendes Integral darstellen. Nach (1) Seite 198 ist nämlich:

$$(6a) \quad \frac{C}{\sqrt{\psi_1}} = C \int_0^\infty dq C_q L_q(\mu_1) \cos q\vartheta_1.$$

Substituirt man dies in die Formel (6), so sieht man sofort, dass jene Formel erfüllt sein wird, sobald man die noch unbekannten A_q der Bedingung unterwirft:

$$2\pi^2 A_q K_q(\mu) = C,$$

also setzt:

$$(7) \quad A_q = \frac{C}{2\pi^2 K_q(\mu)}.$$

Und substituirt man endlich diesen Werth von A_q in die Formel (3) so erhält man das gesuchte Δ , und gelangt also zu folgendem Satz:

Denkt man sich eine Conoid von der Axenlänge $2a$ und dem Parameter ω mit Elektrizität geladen bis zu einer gegebenen Spannung C so wird die Dichtigkeit Δ der elektrischen Vertheilung eine blosse Function von ϑ sein, und den Werth haben:

$$(8) \quad \Delta = C \frac{\psi \sqrt{V\psi}}{4\pi^2 a \sin \omega} \int_0^\infty \frac{dq \cdot \cos q\vartheta}{K_q(\mu)},$$

wo μ zur Abkürzung steht für $\cos \omega$, und $\psi = 2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$ ist

Auch die Gesamtmasse M der unter diesen Umständen auf den Conoid vorhandenen Elektrizität lässt sich leicht berechnen. Nach (2), (3) ist nämlich dieses

$$M = \iint \Delta d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\vartheta d\varphi \left\{ \frac{2a}{V\psi} \int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right\},$$

oder falls man hier für $\frac{1}{V\psi}$ den mit (6a) analogen Werth substituirt und zugleich die Integration nach φ ausführt:

$$M = 4\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \left\{ \left(\int_0^\infty dq C_q L_q(\mu) \cos q\vartheta \right) \left(\int_0^\infty dq A_q \cos q\vartheta \right) \right\},$$

oder falls man jetzt die Integration nach ϑ mittelst des Satzes (B', Seite 219) bewerkstelligt:

$$M = 4\pi a \cdot \pi \int_0^\infty dq C_q L_q(\mu) A_q.$$

Substituirt man endlich hier für A_q den gefundenen Werth (7), so ergibt sich für die Gesamtmasse der auf dem Conoid vorhandenen Elektrizität die Formel:

$$(9) \quad M = C \left\{ 2a \int_0^\infty \frac{dq C_q L_q(\mu)}{K_q(\mu)} \right\}.$$

Der hier in der geschweiften Klammer enthaltene Ausdruck kann bezeichnet werden als eine dem gegebenen Conoid eigenthümliche Constante, nämlich als seine elektrische Capacität.

Die Formeln (8), (9) lassen sich leicht prüfen durch Anwendung auf den Specialfall der Kugel, d. i. auf den Specialfall: $\omega = 90^\circ$. Alsdann wird

$$\omega = 90^\circ, \quad \mu = 0, \quad \psi = 2 \cos i\vartheta,$$

also nach (8) und (9):

$$\Delta = \frac{C}{4\pi^2 a} (2 \cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{dq \cos q\vartheta}{K_q(0)},$$

$$M = C \cdot 2a \int_0^\infty \frac{dq C_q L_q(0)}{K_q(0)},$$

oder weil [nach (14) Seite 210] $\frac{1}{K_q(0)} = -\pi C_q K'_q(0)$, ausserdem aber offenbar auch $K_q(0) = L_q(0)$ ist:

$$\Delta = \frac{C}{4\pi^2 a} (2 \cos i\vartheta)^{\frac{3}{2}} (-\pi) \int_0^\infty dq C_q K'_q(0) \cos q\vartheta,$$

$$M = C \cdot 2a \int_0^\infty dq C_q.$$

Diese Werthe aber nehmen mittelst der aus (β) Seite 216 und aus (α) Seite 215 entspringenden Formeln:

$$\left(\frac{1}{2 \cos i\vartheta} \right)^{\frac{3}{2}} = - \int_0^\infty dq C_q K'_q(0) \cdot \cos q\vartheta,$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^\infty dq C_q,$$

folgende Gestalt an:

$$(\alpha) \quad \Delta = \frac{C}{4\pi a},$$

$$(\beta) \quad M = Ca;$$

und dies sind in der That die bekannten Formeln für die Kugel. W. z. z. w.

Um endlich das Potential der elektrischen Belegung Δ (8) auf einen äussern Punkt ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) zu berechnen, dient die Formel:

$$V = \iint T \Delta d\sigma,$$

wo T die reciproke Entfernung jenes äussern Punktes ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) vom Elemente $\Delta d\sigma$ vorstellt; sodass also gegenwärtig $\omega > \omega_1$, mithin $\mu < \mu_1$ ist. Mit Rücksicht hierauf erhält man für dieses Potential V genau denselben Ausdruck wie vorhin (Seite 221), nur mit dem Unterschied, dass das Product $K_q(\mu) L_q(\mu_1)$ gegenwärtig durch $K_q(\mu_1) L_q(\mu)$ vertreten sein wird. Also:

$$V = 2\pi \sqrt{\psi_1} \cdot \pi \int_0^\infty dq A_q C_q K_q(\mu_1) L_q(\mu) \cdot \cos q\vartheta_1,$$

oder falls man für A_q den Werth (7) substituirt:

$$(10) \quad V = C \cdot \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \frac{dq C_q K_q(\mu_1) L_q(\mu) \cdot \cos q \vartheta_1}{K_q(\mu)}.$$

Dies also ist das Potential, welches die in (8) besprochene elektrische Belegung des Conoids auf irgend einen äussern Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ ausübt.

Um diese Formel wieder durch Anwendung auf den Specialfall der Kugel zu prüfen, setzen wir

$$\omega = 90^\circ, \text{ mithin } \mu = 0,$$

und erhalten alsdann, weil $K_q(0) = L_q(0)$ ist:

$$V = C \cdot \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty dq C_q K_q(\mu_1) \cos q \vartheta_1.$$

Nun ergibt sich aber mittelst der Formel (1) Seite 211 für den reciproken Abstand T des Punktes $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ vom Mittelpunkte des Conoids resp. der Kugel, d. i. vom Punkte $(\vartheta = 0, \omega = \pi)$ leicht folgender Werth:

$$T = \frac{\sqrt{\psi_1}}{a} \int_0^\infty dq C_q K_q(\mu_1) \cos q \vartheta_1.$$

Somit folgt: $V = CaT$, oder mit Rücksicht auf (β) :

$$(7) \quad V = MT,$$

was mit einem bekannten Satze über die Kugel in Einklang ist.

§ 9.

Anwendung auf den Fall eines unendlich dünnen Conoids.

Der *sehr kleine Winkel*, unter welchem der Meridianbogen des sehr dünnen Conoids im Pole A gegen die Conoidaxe geneigt ist, mag σ heissen. Dann wird offenbar der *Parameter* ω der Conoidfläche (d. i. die scheinbare Grösse der Axe AA' für einen in der Conoidfläche befindlichen Beobachter) den Werth haben:

$$(1) \quad \omega = \pi - \sigma;$$

woraus folgt:

$$(2) \quad \sin \omega = \sin \sigma = \sigma,$$

und weiter:

$$(3) \quad \mu = \cos \omega = -\cos \sigma = -1 + \frac{1}{2} \sigma^2 = -1 + \varepsilon,$$

falls man nämlich die höheren Potenzen von σ vernachlässigt, und zur Abkürzung ε für $\frac{1}{2} \sigma^2$ schreibt. Demgemäss nehmen die im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Formeln (8), (9), (10) die Gestalt an:

$$(4) \quad \Delta = C \frac{\psi \sqrt{\psi}}{4\pi^2 a \sigma} \int_0^\infty \frac{dq \cdot \cos q \vartheta}{L_q(1-\varepsilon)},$$

$$(5) \quad M = C \cdot 2a \int_0^\infty \frac{dq C_q K_q(1-\varepsilon)}{L_q(1-\varepsilon)},$$

$$(6) \quad V = C \sqrt{\psi_1} \int_0^\infty \frac{dq C_q K_q(\mu_1) K_q(1-\varepsilon) \cdot \cos q \vartheta_1}{L_q(1-\varepsilon)}.$$

Nun ist aber nach (14) Seite 203, und nach (10) Seite 208:

$$K_q(1-\varepsilon) = 1 + \frac{q_1}{1^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^1 + \frac{q_1 q_3}{(1 \cdot 2)^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{q_1 q_3 q_5}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 + \dots$$

$$L_q(1-\varepsilon) = -\frac{K_q(1-\varepsilon) \cdot \log \varepsilon}{\pi C_q} + \Delta_q + \Delta'_q \varepsilon + \Delta''_q \varepsilon^2 + \dots$$

[Denn die in der citirten Formel (10) Seite 208 enthaltene Constante G_q ist, wie in (12) Seite 210 gezeigt wurde, identisch mit C_q .] Hieraus folgt für ein äusserst kleines ε :

$$(7) \quad \begin{cases} K_q(1-\varepsilon) = 1, \\ L_q(1-\varepsilon) = -\frac{K_q(1-\varepsilon) \cdot \log \varepsilon}{\pi C_q} = -\frac{\log \varepsilon}{\pi C_q}; \end{cases}$$

so dass also die Formeln (4), (5), (6) übergehen in:

$$(8) \quad \Delta = C \frac{\psi \sqrt{\psi}}{4\pi^2 a \sigma} \left(\frac{-\pi}{\log \varepsilon}\right) \int_0^\infty dq C_q \cos q \vartheta,$$

$$(9) \quad M = C \cdot 2a \left(\frac{-\pi}{\log \varepsilon}\right) \int_0^\infty dq C_q C_q,$$

$$(10) \quad V = C \cdot \sqrt{\psi_1} \left(\frac{-\pi}{\log \varepsilon}\right) \int_0^\infty dq C_q C_q K_q(\mu_1) \cdot \cos q \vartheta_1.$$

Nun ist nach (1) Seite 198; falls man $L_q(\mu)$ durch $K_q(-\mu)$ ersetzt:

$$\frac{1}{V\psi} = \frac{1}{V2(\cos i\vartheta) - 2\mu} = \int_0^\infty dq C_q K_q(-\mu) \cdot \cos q \vartheta,$$

oder, falls man für μ seinen gegenwärtigen Werth (3): $\mu = (-1 + \varepsilon)$ substituirt, und Rücksicht nimmt auf (7):

$$\frac{1}{V\psi} = \int_0^\infty dq C_q \cos q \vartheta.$$

Ferner ist [vgl. die Note Seite 215]:

$$\frac{1}{\pi} = \int_0^{\infty} dq C_q C_q.$$

Somit gehen die Formeln (8), (9) über in:

$$(11) \quad \Delta = \frac{C\psi}{4\pi^2 a \sigma} \left(\frac{-\pi}{\log \varepsilon} \right),$$

$$(12) \quad M = \frac{C \cdot 2a}{\pi} \left(\frac{-\pi}{\log \varepsilon} \right).$$

Das in (11) enthaltene ψ bezieht sich auf irgend welchen Punkt $(\vartheta, \omega, \varphi)$ der Conoidoberfläche, und hat eine einfache geometrische Bedeutung, und zwar eine doppelte. Einerseits ist nämlich nach (3) Seite 196: $\psi = \frac{4a^2}{\varrho \varrho'}$, wo ϱ, ϱ' die Abstände des Punktes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ von den Polen A, A' vorstellen. Und andererseits ist nach (4) Seite 197: $\eta = \frac{2a \sin \omega}{\psi}$, also mit Rücksicht auf (2): $\eta = \frac{2a \sigma}{\psi}$, oder was dasselbe ist: $\psi = \frac{2a \sigma}{\eta}$, wo η den senkrechten Abstand des Punktes $(\vartheta, \omega, \varphi)$ von der Conoidaxe bezeichnet. Substituirt man aber diese Werthe $\frac{4a^2}{\varrho \varrho'}$ oder $\frac{2a \sigma}{\eta}$ an Stelle von ψ in (11), und substituirt man gleichzeitig daselbst für ε seine aus (3) ersichtliche Bedeutung: $\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma^2$, so erhält man:

$$(13) \quad \Delta = \frac{Ca}{2\pi \sigma (-\log \sigma)} \frac{1}{\varrho \varrho'} = \frac{C}{4\pi (-\log \sigma)} \frac{1}{\eta},$$

$$(14) \quad M = \frac{Ca}{(-\log \sigma)};$$

denn statt $\log \varepsilon = \log \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right) = \left(\log \frac{1}{2} \right) + 2 (\log \sigma)$, kann man (bei dem hier eingehaltenen Grade der Annäherung) unbedenklich $2 (\log \sigma)$ setzen. Der erste Ausdruck (13) liefert folgenden Satz: *Befindet sich die Elektrizität auf einem isolirten unendlich dünnen Conoid im Gleichgewicht, so ist die elektrische Flächendichtigkeit Δ an jeder Stelle umgekehrt proportional dem Product $\varrho \varrho'$, wo ϱ und ϱ' die Entfernungen der Stelle von den beiden Endpunkten des Conoids vorstellen.* Andererseits folgt aus dem zweiten der Ausdrücke (13) der vielleicht noch einfachere Satz, dass jene Dichtigkeit Δ an jeder Stelle der Conoidoberfläche umgekehrt proportional ist mit dem Abstände η dieser Stelle von der Conoidaxe.

Doch ist diese Form des Satzes immer noch nicht die einfachste. Vielmehr gelangt man zu einer noch einfacheren, wenn man statt der

Flächendichtigkeit Δ , die *lineare* Dichtigkeit einführt, indem man das unendlich dünne Conoid als eine gerade Linie ansieht. Bezeichnet ds ein Element dieser Linie, oder (genauer ausgedrückt) ein Element der Conoidaxe AA' , so wird die diesem Element ds entsprechende Zone der Conoidoberfläche $= 2\pi\eta ds$ sein, falls nämlich η den Radius der Zone vorstellt. Und demgemäss ist die auf dieser Zone vorhandene Elektricitätsmenge $= \Delta \cdot 2\pi\eta ds$. Bezeichnet man also diese Elektricitätsmenge kurzweg mit $\delta \cdot ds$:

$$\delta \cdot ds = \Delta \cdot 2\pi\eta ds,$$

so wird δ die *lineare Dichtigkeit* zu nennen sein. Wir erhalten also: $\delta = 2\pi\eta\Delta$, oder mit Rücksicht auf den *zweiten* Ausdruck in (13):

$$(15) \quad \delta = \frac{C}{2(-\log \sigma)}, \quad \text{d. i.} = \text{Const.};$$

und gelangen daher zu folgendem Satz: *Befindet sich die Elektricität auf einem isolirten unendlich dünnen Conoid im Gleichgewicht, so wird die lineare elektrische Dichtigkeit δ constant sein. Oder mit andern Worten: Befindet sich die Elektricität auf einer begrenzten geraden Linie im Gleichgewicht, so wird die (lineare) elektrische Dichtigkeit auf derselben constant sein.*

Bemerkung. — Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die *begrenzte gerade Linie* als den Grenzfall eines *Rotationsellipsoids* sich vorstellt; und zwar am Einfachsten durch folgende allgemeinen Ueberlegungen:

Construirt man irgend drei äquidistante die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ schneidende Parallelebenen, so sind bekanntlich die zwischen diesen Ebenen befindlichen beiden *Kugelzonen* unter einander *gleich*, d. i. von *gleichem Flächeninhalt*. Analoges wird daher, falls man unter ε eine unendlich kleine Grösse versteht, auch gelten vom Volumen der von den beiden Kugelflächen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \varepsilon)^2$$

begrenzten unendlich dünnen Kugelschaale. In der That werden diejenigen beiden Theile dieser Schaale, welche zwischen jenen drei äquidistanten Parallelebenen liegen, *gleiches Volumen* haben.

Versteht man nun unter A, B, C irgend drei (positive) Constanten, und unterwirft man die soeben dargelegten geometrischen Vorstellungen der durch die Gleichungen

$$x = A\xi, \quad y = B\eta, \quad z = C\xi$$

angedeuteten Transformation, so verwandeln sich die beiden Kugelflächen in zwei *einander ähnliche Ellipsoidflächen*, und jene drei Ebenen wiederum in *äquidistante Parallelebenen*. Und man gelangt daher zu folgendem Satz: *Ist eine unendlich dünne, von zwei einander ähnlichen Ellipsoidflächen begrenzte Schaale gegeben, und legt man durch dieselbe irgend drei äquidistante Parallelebenen (von ganz beliebiger Richtung), so werden diejenigen beiden Theile der Schaale, welche zwischen diesen Parallelebenen liegen, gleiches Volumen besitzen.* Dieser Satz aber kann, wie

man sofort übersieht, auf die elektrostatischen Verhältnisse an der Oberfläche eines gegebenen Ellipsoids übertragen werden, und lautet alsdann folgendermassen:

Befindet sich die Elektrizität auf der Oberfläche eines gegebenen Ellipsoids (ohne Einwirkung äusserer Kräfte) im Gleichgewicht, und construirt man irgend drei äquidistante und das Ellipsoid schneidende Parallelebenen E, F, G von ganz beliebiger Richtung, so wird die zwischen E und F vorhandene Elektrizitätsmenge stets ebenso gross sein, wie diejenige, welche zwischen F und G sich vorfindet.)*

Ueberträgt man aber diesen allgemeinen Satz auf den Specialfall eines unendlich dünnen Rotationsellipsoids, und denkt man sich die Ebenen E, F, G senkrecht zur Axe desselben, so gelangt man unmittelbar zu der Einsicht, dass die lineare elektrische Dichtigkeit für ein solches Ellipsoid constant ist. W. z. z. w.

§ 10.

Die elektrische Vertheilung auf dem Conoid unter Einfluss gegebener äusserer Kräfte.

Die hier anzuwendenden Methoden sind aus den vorhergehenden Paragraphen bereits so deutlich zu erkennen, dass ich mich beschränken kann auf die Mittheilung der resultirenden Formeln. Dabei mag wiederum der Parameter des Conoids mit ω , also ein Punkt auf der Conoidfläche mit $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ bezeichnet sein, während $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ und $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ irgend zwei Punkte *ausserhalb* vorstellen sollen. Auch soll wieder zur Abkürzung $\cos \omega = \mu$, $\cos \omega_1 = \mu_1$ und $\cos \omega_2 = \mu_2$ gesetzt werden. Es gilt folgender Satz:

Betrachtet man diejenige elektrische Belegung, welche auf dem Conoid inducirt wird, durch einen äusseren elektrischen Massenpunkt von der Masse (— 1) mit den Coordinaten $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ unter der Voraussetzung, dass das Conoid zur Erde abgeleitet ist, so wird die Dichtigkeit η dieser Belegung in irgend einem Oberflächenpunkt $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ den Werth haben:

$$(1) \quad \eta = \frac{\psi V \psi V \overline{\psi_1}}{8 \pi^2 a^2 \sin \omega} \int d\varrho \left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j \frac{K_{qj}(\mu_1) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \cdot \cos j(\varphi - \varphi_1)}{K_{qj}(\mu)} \right).$$

Gleichzeitig wird das Potential G dieser Belegung auf irgend einen äusseren Punkt $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ lauten:

$$(2) \quad G = \frac{V \psi_1 V \overline{\psi_2}}{2a} \int d\varrho \left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j E_{qj} \frac{L_{qj}(\mu)}{K_{qj}(\mu)} K_{qj}(\mu_1) K_{qj}(\mu_2) \cos q(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos j(\varphi_1 - \varphi_2) \right)$$

*) Eine Anzahl anderer einfacher Sätze über die elektrische Vertheilung auf einem Ellipsoid, namentlich auch auf einem Rotationsellipsoid, habe ich früher angegeben, in diesen Annalen, Bd. XIII, Seite 266.

Dabei stehen μ , μ_1 , μ_2 resp. zur Abkürzung für $\cos \omega$, $\cos \omega_1$, $\cos \omega_2$.

Man pflegt diese Belegung die dem Centralpunkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ entsprechende *Green'sche Belegung*, und das Potential G die *Green'sche Function* zu nennen. Nach einem bekannten allgemeinen Satz muss die Gesamtmasse dieser Belegung $= \frac{V}{C}$ sein, falls nämlich V und C dieselben Bedeutungen haben, wie in (8), (9), (10) Seite 222–224. Und dass solches wirklich der Fall ist, lässt sich auf Grund der Formel (1) ohne Mühe nachweisen.

Wir wollen uns nun ferner einen *schaalenförmigen Körper* vorstellen, der innerlich von der gegebenen Conoidfläche vom Parameter ω , äusserlich aber von einer ganz beliebigen Fläche begrenzt ist. Denkt man sich irgendwo im Hohlraum dieses schalenförmigen Körpers einen elektrischen Massenpunkt von der Masse (-1) mit den Coordinaten $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$, und betrachtet man diejenige elektrische Belegung, welche auf der innern Fläche, d. i. der Conoidfläche durch diesen Punkt inducirt wird, unter der Voraussetzung, dass der Körper selber zur Erde abgeleitet sei, so wird die Dichtigkeit η dieser Belegung an irgend einer Stelle $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$ der Conoidfläche den Werth haben:

$$(3) \quad \eta = \frac{\psi V \psi V \overline{\psi_1}}{8\pi^2 \alpha^2 \sin \omega} \int_0^\infty dq \left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j \frac{L_{qj}(\mu_1) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \cdot \cos j(\varphi - \varphi_1)}{L_{qj}(\mu)} \right).$$

Und gleichzeitig wird das Potential G dieser Belegung auf irgend einen Punkt $(\vartheta_2, \omega_2, \varphi_2, \psi_2)$ innerhalb des genannten Hohlraumes dargestellt sein durch:

$$(4) \quad G = \frac{V \psi_1 V \overline{\psi_2}}{2\alpha} \int_0^\infty dq \left(\sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j E_{qj} \cdot \frac{K_{qj}(\mu)}{L_{qj}(\mu)} L_{qj}(\mu_1) L_{qj}(\mu_2) \cos q(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos j(\varphi_1 - \varphi_2) \right),$$

wo μ , μ_1 , μ_2 wieder für $\cos \omega$, $\cos \omega_1$, $\cos \omega_2$ gesetzt sind.

Man pflegt diese Belegung die dem innern Centralpunkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1)$ entsprechende *Green'sche Belegung* der Conoidfläche, und G die *Green'sche Function* zu nennen. — Nach einem bekannten Satz ist die Gesamtmasse dieser Belegung stets $= 1$. Und dass solches der Fall, kann man auf Grund der Formel (3) leicht nachweisen.

§ 11.

Anschauliche Bedeutung der Kegelfunctionen. Darstellung derselben als Potentiale.

Wir wollen uns die Verbindungslinie AA' der beiden Pole, deren Linienelement ds (nach Seite 219) den Werth hat:

$$(1) \quad ds = \frac{2a d\vartheta}{\psi}$$

mit irgend welcher Masse von der *linearen Dichtigkeit* δ belegt denken, und das Potential V dieser Belegung auf einen beliebig gegebenen Punkt $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ zu berechnen suchen.

Bezeichnet man die Coordinaten des Elementes ds mit $(\vartheta, \omega, \varphi, \psi)$, so ist offenbar $\omega = \pi$; wodurch die für $\cos \gamma$ geltende Formel:

$$\cos \gamma = \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1)$$

übergeht in $\cos \gamma = -\cos \omega_1$, d. i. in $\cos \gamma = -\mu_1$. Somit ergibt sich für die reciproke Entfernung T des Elementes ds vom Punkte $(\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1)$ der Werth:

$$(2) \quad T = \frac{V\psi V\psi_1}{2a} \int_0^\infty dq C_q L_q(-\mu_1) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1), \quad (\text{vgl. Seite 199}).$$

Mit Rücksicht auf (1) und (2) erhält man nun für das zu berechnende Potential

$$(3) \quad V = \int T \delta ds$$

den Werth:

$$(4) \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \cdot \left\{ \frac{\delta V\psi_1}{V\psi} \int_0^\infty dq C_q L_q(-\mu_1) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \right\}.$$

Das δ ist eine willkürlich gegebene Function von ϑ ; und Gleiches gilt daher von dem Bruch $\frac{\delta}{V\psi} = \frac{\delta}{V^2(\cos i\vartheta) + 2} = \frac{\delta}{2 \cos\left(\frac{i\vartheta}{2}\right)}$. Denkt man

sich diesen Bruch dargestellt durch ein Integral von der Form:

$$(5) \quad \frac{\delta}{V\psi} = \int_0^\infty \frac{dq A_q \cos q\vartheta}{\pi C_q},$$

wo A_q eine willkürliche Function von q vorstellt, und substituirt man diesen Werth (5) in (4), so ergibt sich:

$$V = V\psi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \left\{ \left(\int_0^\infty \frac{dq A_q \cos q\vartheta}{\pi C_q} \right) \left(\int_0^\infty dq C_q L_q(-\mu_1) \cdot \cos q(\vartheta - \vartheta_1) \right) \right\},$$

also mittelst der allgemeinen Sätze (B), (B'), Seite 218, etc.:

$$(6) \quad V = \sqrt{\psi_1} \int_0^{\infty} dq A_q L_q(-\mu_1) \cos q \vartheta_1.$$

Denken wir uns jetzt die willkürliche Function A_q so gewählt, dass sie für ein gegebenes unendlich kleines Intervall

$$q \cdots (q + \gamma)$$

durchweg $= 1$, sonst aber überall $= 0$ ist, so nehmen die Formeln (5), (6) folgende Gestalt an:

$$(5a) \quad \frac{\delta}{\sqrt{\psi}} = \gamma \frac{\cos q \vartheta}{\pi C_q},$$

$$(6a) \quad V = \sqrt{\psi_1} \cdot \gamma L_q(-\mu_1) \cos q \vartheta_1, \text{ d. i. } = \gamma \cdot \sqrt{\psi_1} K_q(\mu_1) \cos q \vartheta_1;$$

und führen also (falls man noch mit γ dividirt) zu folgendem Satz:

*Bezeichnet q eine beliebig gegebene positive (ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) Zahl, und denkt man sich die Verbindungs-
linie AA' der beiden Pole mit einer Masse belegt, deren lineare Dicht-
igkeit*

$$(7) \quad = \frac{\sqrt{\psi} \cdot \cos(q \vartheta)}{\pi C_q}, \text{ d. i. } = \frac{2 \cdot \cos(q \pi i) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta i}{2}\right) \cdot \cos(q \vartheta)}{\pi}$$

ist, so wird das von dieser Belegung auf einen beliebigen Raumpunkt ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) ausgeübte Potential V den Werth haben:

$$(8) \quad V = \sqrt{\psi_1} \cdot K_q(\mu_1) \cdot \cos(q \vartheta_1),$$

wo μ_1 für $\cos \omega_1$ steht. — In analoger Weise ergibt sich (was weiter auszuführen überflüssig sein würde), dass der Ausdruck

$$(9) \quad W = \sqrt{\psi_1} \cdot L_q(\mu_1) \cdot \cos(q \vartheta_1)$$

ebenfalls angesehen werden kann als ein auf den Punkt ($\vartheta_1, \omega_1, \varphi_1, \psi_1$) ausgeübtes Potential, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Fall die das Potential hervorbringende Masse nicht längs der Linie AA' , sondern längs der zu dieser *supplementaren Linie**) hinerstreckt zu denken ist.

Desgleichen können auch die allgemeineren Ausdrücke

$$(10) \quad V = \sqrt{\psi_1} \cdot K_{qj}(\mu_1) \cdot \cos(q \vartheta_1) \cdot \cos(j \varphi_1),$$

$$(11) \quad W = \sqrt{\psi_1} \cdot L_{qj}(\mu_1) \cdot \cos(q \vartheta_1) \cdot \cos(j \varphi_1)$$

*) Liegen also die aufeinanderfolgenden Punkte U, A, A', U' in gerader Linie, und zwar U und U' im Unendlichen, so ist die das Potential W erzeugende Masse theils längs der Linie UA , theils längs $A'U'$ hinerstreckt zu denken.

als Potentiale von Massen interpretirt werden, die entweder auf der Linie AA' , oder auf der supplementären Linie ausgebreitet sind. Nur wird es in diesem Fall nicht mehr möglich sein, jene Linien schlechtweg als *Linien* anzusehen, sondern erforderlich sein, dieselben als *unendlich dünne Conoide* zu betrachten.

Analoges endlich wie von den Ausdrücken (8), (9), (10), (11) gilt endlich auch von

(12) denjenigen Ausdrücken,

die aus jenen entstehen, sobald man daselbst die Cosinus (resp. einen Theil dieser Cosinus) durch die entsprechenden Sinus ersetzt.

§ 13.

Die elektrische Vertheilung auf einem Conductor, welcher ungefähr die Gestalt einer Hantel besitzt, nämlich aus zwei Kugeln und einem dieselben verbindenden Conoid besteht.

Sind β , γ und c *gegebene*, den Bedingungen

$$(1) \quad \beta > 0 > \gamma, \quad -1 < c < +1$$

entsprechende *Constanten*, so repräsentirt $\vartheta = \beta$ eine den Pol A ($\vartheta = +\infty$) umschliessende Kugelfläche, ebenso $\vartheta = \gamma$ eine den *andern* Pol A' ($\vartheta = -\infty$) umschliessende Kugelfläche, und endlich $\mu = c$ eine von A nach A' laufende Conoidfläche. Sind nun ferner O_β und O_γ diejenigen Theile der beiden Kugelflächen, welche *ausserhalb* der Conoidfläche liegen, und bezeichnet O_c denjenigen Theil der Conoidfläche, der *ausserhalb* der beiden Kugelflächen sich befindet, so bilden offenbar O_β , O_γ und O_c die *vollständige Begrenzung* eines gewissen Körpers von hantelförmiger Gestalt. Ich werde im Folgenden zeigen, dass man für diesen Körper das elektrostatische Problem zu lösen im Stande ist, sowohl für den Fall, dass *keine* äusseren Kräfte influiren, als auch für den Fall, dass solche Kräfte *vorhanden* sind.

Um zunächst die elektrische Vertheilung für den Fall zu finden, dass *keine* äusseren Kräfte einwirken, haben wir diejenige Potentialfunction des äusseren Raumes zu finden, welche an der Oberfläche des gegebenen Conductors, d. i. auf O_β , O_γ und O_c *constant*, etwa $= C$ ist. Lassen wir zuerst die Conoidfläche O_c ausser Acht, so würde diese Function leicht angebar sein, nämlich in einem beliebigen Punkte ($\vartheta, \mu, \varphi, \psi$) jenes äussern Raumes den Werth besitzen:

$$(2) \quad F(\vartheta, \mu) = C \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(-e^{N(\vartheta-\beta)} \frac{e^{N\gamma} - e^{-N\gamma}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}} + e^{N(\gamma-\vartheta)} \frac{e^{N\beta} - e^{-N\beta}}{e^{N\delta} - e^{-N\delta}} \right),$$

wo $\delta = \beta - \gamma$ sein soll, und N zur Abkürzung steht für $(n + \frac{1}{2})$. Es folgt dies unmittelbar aus meinen früheren Untersuchungen über die elektrische Vertheilung auf zwei Kugelflächen.*)

Um die eigentlich gesuchte Potentialfunction zu finden, mag nun zu $F(\vartheta, \mu)$ noch eine Correction $f(\vartheta, \mu)$ hinzugefügt werden, jene gesuchte Potentialfunction also bezeichnet werden mit:

$$(3) \quad F(\vartheta, \mu) + f(\vartheta, \mu).$$

Dieses $f(\vartheta, \mu)$ muss alsdann

- (I) erstens eine Potentialfunction des äusseren Raumes sein,
- (II) zweitens auf den Flächen O_β und O_γ überall $= 0$ sein; und dies wird stattfinden, wenn $f(\vartheta, \mu)$ verschwindet sowohl für $\vartheta = \beta$, als auch für $\vartheta = \gamma$,
- (III) drittens endlich muss f mit F zusammengenommen auf der Fläche O_c den Werth C ergeben. D. h. sie muss für alle zwischen β und γ liegenden Werthe des Argumentes ϑ der Bedingung entsprechen: $F(\vartheta, c) + f(\vartheta, c) = C$.

Der Bedingung (I) wird [wie aus den Betrachtungen des vorhergehenden §. hervorgeht; vergl. daselbst (8) und (12)] entsprochen werden, wenn man für f die Function nimmt:

$$(4) \quad \sqrt{\psi} \cdot K_q(\mu) \cdot (A \sin q\vartheta + B \cos q\vartheta),$$

wo A, B, q willkürliche Constanten sind, von denen allerdings die letzte auf nur *positive* Werthe beschränkt worden ist. Wir können also z. B. $q = \frac{n\pi}{\beta - \gamma} = \frac{n\pi}{\delta}$ setzen, wo n eine *positive ganze Zahl* vorstellen mag. Setzen wir gleichzeitig

$$A = \cos \frac{n\gamma\pi}{\delta} \quad \text{und} \quad B = -\sin \frac{n\gamma\pi}{\delta},$$

so geht der Ausdruck (4) über in

$$\sqrt{\psi} \cdot K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \left(\cos \frac{n\gamma\pi}{\delta} \sin \frac{n\vartheta\pi}{\delta} - \sin \frac{n\gamma\pi}{\delta} \cos \frac{n\vartheta\pi}{\delta} \right)$$

d. i. in:

$$(5) \quad \sqrt{\psi} \cdot K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \cdot \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta}.$$

Und dieser Ausdruck hat, wie sofort ersichtlich, die Eigenschaft, nicht nur der Bedingung (I), sondern gleichzeitig auch der Bedingung (II) zu entsprechen. Denn der in ihm enthaltene Sinus geht für $\vartheta = \beta$ über in $\sin \frac{n(\beta - \gamma)\pi}{\delta}$ d. i. in $\sin n\pi$, d. i. in 0; während er andererseits für $\vartheta = \gamma$ direct in 0 sich verwandelt. — Jenen Bedingungen

*) C. Neumann: *Allgem. Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand etc.*, 1862 (Halle, bei Schmidt). Vgl. daselbst den Satz Seite 110.

(I), (II) wird also auch entsprochen werden, wenn wir für f eine Summe solcher Ausdrücke (5) nehmen, jeder noch multiplicirt mit einer willkürlichen Constanten A_n . Setzen wir demgemäss:

$$(6) \quad f(\vartheta, \mu) = \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \cdot \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta},$$

so bleibt nur noch übrig, diese constanten Coefficienten A_n der Art zu bestimmen, dass auch der Bedingung (III) Genüge geschieht.

Nun ist $\psi = 2(\cos i\vartheta) - 2\mu$. Somit folgt aus (6) für $\mu = c$:

$$(7) \quad f(\vartheta, c) = \sqrt{2(\cos i\vartheta) - 2\cos c} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c) \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta};$$

und die Bedingung (III) verlangt, dass dieser Ausdruck $f(\vartheta, c)$ für alle zwischen β und γ liegenden Argumente ϑ identisch sei mit $C - F(\vartheta, c)$, verlangt also, dass für die genannten Argumente folgende Gleichung statfinde:

$$(8) \quad \sqrt{2(\cos i\vartheta) - 2\cos c} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c) \cdot \sin n\Theta = C - F(\vartheta, c),$$

wo Θ zur Abkürzung gesetzt ist für $\frac{(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta}$.

Wandert aber ϑ von β bis γ , so wandert gleichzeitig dieses grosse Θ von π bis 0. Wir können uns in der Gleichung (8) überall das ϑ durch das grosse Θ ausgedrückt denken, und alsdann sagen, die Bedingung (III) verlange, dass diese Gleichung erfüllt sei für alle zwischen 0 und π liegenden Werthe von Θ . Demgemäss wird man den allgemeinen Coefficienten A_n dadurch erhalten können, dass man die Gleichung, nachdem sie zuvor durch die Wurzelgrösse dividirt worden ist, mit $\sin n\Theta \cdot d\Theta$ multiplicirt, und sodann nach Θ zwischen 0 und π integrirt. In der That ergibt sich in solcher Weise:

$$(9) \quad \pi A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(c) = 2 \int_0^\pi \frac{[C - F(\vartheta, c)] \sin n\Theta \cdot d\Theta}{\sqrt{2(\cos i\vartheta) - 2\cos c}},$$

wo auf der rechten Seite vor Ausführung der Integration ϑ durch Θ auszudrücken, also durch den Ausdruck $(\gamma + \frac{\delta\Theta}{\pi})$ zu ersetzen ist.

Die gesuchte Potentialfunction des äusseren Raumes, welche an der Oberfläche des gegebenen Conductors, d. i. auf den Flächen O_β , O_γ und O_c überall gleich der gegebenen Constanten C sein soll, wird also [vgl. (3) und (6)] für einen beliebigen Raumpunkt $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ den Werth haben:

$$(10) \quad F(\vartheta, \mu) + \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n K_{\frac{n\pi}{\delta}}(\mu) \cdot \sin \frac{n(\vartheta - \gamma)\pi}{\delta},$$

wo $F(\vartheta, \mu)$ die in (2) angegebene Bedeutung besitzt, während die constanten Coefficienten A_n sich bestimmen mittelst der Formel (9).

Offenbar kann diese Potentialfunction unmittelbar angesehen werden als dasjenige Potential, welches der mit Elektrizität geladene Conductor auf den äusseren Punkt $(\vartheta, \mu, \varphi, \psi)$ ausübt, vorausgesetzt, dass sein Potential auf innere Punkte den Werth C hat. Demgemäss ergibt sich die Dichtigkeit der elektrischen Vertheilung aus dem Potentiale (10) in bekannter Weise, mittelst einer Differentiation nach der Oberflächen-Normale.

In analoger Weise wird man endlich das Problem der elektrischen Vertheilung für den hier betrachteten Conductor auch dann zu lösen im Stande sein, wenn gegebene äussere Kräfte auf denselben einwirken. Ich beschränke mich hier auf diese wenigen Andeutungen, und hoffe in einer späteren Arbeit auf die in diesem Paragraphen nur flüchtig angedeuteten Untersuchungen näher eingehen zu können. Denn es knüpfen sich an dieselben gewisse Fragen, die nicht ohne Interesse sind, und deren Beantwortung bisher noch niemals versucht worden ist.

So ist man z. B. im Allgemeinen der Ansicht, dass bei Anwendung zweier Conductoren, die durch einen sehr dünnen Draht mit einander verbunden sind, die Wirkung auf äussere Punkte, sowie auch die Vertheilung auf jenen Conductoren nahezu dieselbe sei, als wäre jener Draht gar nicht vorhanden, dass also in den genannten Beziehungen durch eine plötzliche Vernichtung jenes Drahtes keine merkliche Aenderung eintreten könne. Die hier entwickelte oder vielmehr nur angedeutete Theorie wird voraussichtlich die Mittel gewähren zur Prüfung dieser Ansicht für den Fall, dass die beiden Conductoren Kugeln sind. Denn das im gegenwärtigen Paragraphen behandelte die beiden Kugeln verbindende Conoid kann äusserst dünn gedacht werden, und reducirt sich alsdann im Wesentlichen auf einen dünnen Verbindungsdraht.

Bemerkung. — Eine andere Methode zur Lösung der in diesem Paragraphen behandelten Aufgabe würde folgende sein. Man setzt die gesuchte Potentialfunction des äusseren Raumes wiederum

$$= F(\vartheta, \mu) + f(\vartheta, \mu),$$

und bestimmt die erstere Function $F(\vartheta, \mu)$ der Art, dass sie auf den Flächen O_β , O_γ überall $= C$, und auf der Fläche O_c überall $= 0$, andererseits aber die zweite Function $f(\vartheta, \mu)$ in der Weise, dass sie umgekehrt auf O_β , O_γ überall $= 0$, und auf O_c überall $= C$ wird.

Es unterliegt kaum einem Zweifel, dass auch diese Methode durchführbar ist, falls man nur Kugelfunctionen P_n in Anwendung bringt, deren Indices n die Wurzeln einer Gleichung von der Form $P_n(c) = 0$ sind. Doch habe ich auf diese (für die vorliegenden Zwecke vielleicht *nicht* besonders geeignete) Methode näher einzugehen, um so weniger Grund, als Professor F. Klein einige sehr interessante und speciell nach dieser Richtung vordringende Betrachtungen zu publiciren im Begriff ist.

Leipzig, Februar 1881.
