

Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale.

VON CARL NEUMANN IN LEIPZIG.

Zur Untersuchung sei zunächst vorgelegt das trigonometrische Integral

$$(1) \quad W = \int_{z_0}^z \Omega dz,$$

wo

$$(2) \quad \Omega = \frac{1}{V(z-p)(z-q)},$$

und wo p, q und z_0 gegebene *complexe* Constanten bezeichnen. Jede dieser Constanten werde dargestellt durch einen festen Punkt in der Ebene, und ebenso z als ein beweglicher Punkt in derselben. Ferner werde gesetzt:

$$(3) \quad z - p = D'e^{D'i}, \quad z - q = D''e^{D''i}, \quad i = \sqrt{-1};$$

so dass also D', Δ' die Polarcoordinaten von z in Bezug auf p , und D'', Δ'' diejenigen von z in Bezug auf q repräsentiren. Alsdann ergibt sich für Ω der Ausdruck:

$$(4) \quad \Omega = \frac{1}{VD'D''} e^{-\frac{1}{2}(D'+D'')i},$$

Setzt man, um Reelles und Imaginäres zu sondern:

$$(5) \quad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ \Omega &= \Phi + i\Psi, \\ W &= U + iV, \end{aligned}$$

wo alsdann Φ, Ψ die Bedeutungen haben:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{VD'D''} \cos\left(-\frac{\Delta'+\Delta''}{2}\right), \\ \Psi &= \frac{1}{VD'D''} \sin\left(-\frac{\Delta'+\Delta''}{2}\right), \end{aligned}$$

so nimmt die aus (1) folgende Differentialgleichung

$$(7) \quad dW = \Omega dz$$

die Gestalt an:

$$(8) \quad dU + i dV = (\Phi + i\Psi)(dx + i dy).$$

Hieraus folgt:

$$(9) \quad \begin{aligned} dU &= \Phi dx - \Psi dy, \\ dV &= \Psi dx + \Phi dy. \end{aligned}$$

Die z Ebene mag aufgefasst werden als eine um den Anfangspunkt ($z = 0$) mit äusserst grossem Radius beschriebene Kreisfläche \mathfrak{Z} . In dieser Fläche werde eine Curve gezogen von p über q nach irgend einer Stelle p^* ihres sehr fernen Randes. Die beiden Strecken

$$pq \text{ und } qp^*,$$

aus denen die Curve besteht, mögen benannt werden mit

$$\alpha \text{ und } \beta;$$

und die ganze Curve ($\alpha + \beta$) mag, um ihre Seiten oder Ufer in bequemer Weise unterscheiden zu können, aufgefasst werden als ein von p über q nach p^* hinfließender *Strom*. Endlich mag \mathfrak{Z}' diejenige Fläche genannt werden, in welche die Kreisfläche \mathfrak{Z} sich verwandelt durch einen längs jener Curve ($\alpha + \beta$) ausgeführten *Schnitt*.

Um die in Ω , nämlich in (2), (4), (6), dem Wurzelzeichen anhaftende Unbestimmtheit zu beseitigen, setzen wir fest, es solle die Function Ω innerhalb \mathfrak{Z}' eindeutig und stetig sein, und es solle ihr Werth für $z = \infty$ convergiren gegen $-\frac{1}{z}$. Diese Function Ω wird alsdann *entgegengesetzte* Werthe besitzen zu beiden Ufern der Strecke α , *gleiche* Werthe aber haben zu beiden Ufern von β , und für weit entfernte Punkte z darstellbar sein durch eine Reihe von der Form:

$$(10) \quad \Omega^* = -\frac{1}{z} - \frac{\Gamma'}{z^2} - \frac{2\Gamma''}{z^3} - \frac{3\Gamma'''}{z^4} - \dots,$$

wo $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \dots$ Constante sind*).

Um ferner die in dem Integrale W , (1), enthaltene Unbestimmtheit zu beseitigen, setzen wir fest, die Integrationscurve $z_0 \dots z$ solle in ihrer Bewegung beschränkt sein auf die (einfach zusammenhängende) Fläche \mathfrak{Z}' . Als dann wird W innerhalb dieser Fläche \mathfrak{Z}' eindeutig und stetig sein, und für weit entfernte Punkte derselben darstellbar sein durch die Reihe:

$$(11) \quad W^* = U^* + iV^* = \log \frac{1}{z} + K + \frac{\Gamma'}{z} + \frac{\Gamma''}{z^2} + \frac{\Gamma'''}{z^3} + \dots,$$

wo zu den früheren Constanten $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ noch eine weitere Constante K hinzugetreten ist. Setzt man $z = re^{i\varphi}$, so ergibt sich hieraus sofort die Formel:

) Durch den in (10) dem Ω beigefügten Stern () soll angedeutet sein, dass diese Entwicklung nur für weit entfernte Punkte z gültig ist; wie Aehnliches auch weiterhin geschehen wird. Uebrigens wird, wie man sofort erkennt, zur Gültigkeit jener Entwicklung nur erforderlich sein, dass der Punkt z vom Anfangspunkt weiter entfernt ist als die gegebenen festen Punkte p und q .

$$(12) \quad U^* = \log \frac{1}{r} + \left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta}{r^n} \right),$$

wo die A , A_n , B_n , reelle Constanten bezeichnen.

Die Werthe von Ω , W in einem gegebenen Punkt z mögen bezeichnet werden mit $\Omega(z)$, $W(z)$. Liegt z auf dem Strome ($\alpha + \beta$), so bedarf es einer genaueren Bezeichnung; es mögen in solchem Falle die in z am *linken* Ufer vorhandenen Werthe durch $\Omega^l(z)$, $W^l(z)$, die am *rechten* Ufer vorhandenen durch $\Omega^e(z)$, $W^e(z)$ angedeutet werden.

Bezeichnet die Constante E den Werth von W im Punkte p ,

$$(13) \quad W(p) = E,$$

und ist ferner z irgend ein Punkt auf α , so wird

$$(14) \quad W^l(z) = E + \int_p^z \Omega^l(z) dz,$$

$$W^e(z) = E - \int_p^z \Omega^e(z) dz,$$

die Integration hinstreckt längs α . Denn es ist zu beachten, dass längs α die Werthe von $\Omega^l(z)$ und $\Omega^e(z)$ entgegengesetzt sind. Hieraus folgt:

$$(15) \quad W^l(z) + W^e(z) = 2E.$$

Lässt man nun den Punkt z längs α bis q fortrücken, so nehmen die Formeln (14) die Gestalt an:

$$(16) \quad \begin{aligned} W^l(q) &= E + A, \\ W^e(q) &= E - A, \quad \text{wo } A = \int_p^q \Omega^l(z) dz. \end{aligned}$$

Lässt man endlich den Punkt z noch weiter fortrücken nach irgend einer auf der Strecke β befindlichen Stelle, so erhält man:

$$(17) \quad \begin{aligned} W^l(z) &= E + A + \int_q^z \Omega^l(z) dz, \\ W^e(z) &= E - A + \int_q^z \Omega^e(z) dz; \end{aligned}$$

denn es ist zu beachten, dass längs β die Werthe $\Omega^l(z)$ und $\Omega^e(z)$ einander gleich sind. Hieraus folgt:

$$(18) \quad W^l(z) - W^e(z) = 2A.$$

Aus (15) und (18) ersehen wir, dass die *Summe* der beiden Grössen W^l und W^e längs α constant, nämlich $= 2E$ ist, und andererseits, dass die *Differenz* jener Grössen constant ist längs β , nämlich $= 2A$. Solches mag angedeutet werden durch die Formeln:

$$(19) \quad \alpha). \quad W^2 + W^e = 2E, \quad \beta). \quad W^2 - W^e = 2A.$$

Die Constante $2A$ lässt sich leicht bestimmen. Denn bildet man z. B. die Differenz $W^2 - W^e$ für den Endpunkt von β , d. i. für den am fernen Kreisrande befindlichen Punkt p^* , so findet man dieselbe, durch Anwendung der Entwicklung (11), gleich $2\pi i$. Folglich ist $2A = 2\pi i$; jene Formeln lauten mithin:

$$(20) \quad \alpha). \quad W^2 + W^e = 2E, \quad \beta). \quad W^2 - W^e = 2\pi i.$$

Setzt man nun, um Reelles und Imaginäres zu sondern, die complexe Constante $E = E^0 + iE^{00}$, so erhält man:

$$(21) \quad \alpha). \quad \begin{aligned} U^2 + U^e &= 2E^0, & U^2 - U^e &= 0, \\ V^2 + V^e &= 2E^{00}, & V^2 - V^e &= 2\pi. \end{aligned}$$

Für irgend einen auf dem Strome ($\alpha + \beta$) befindlichen Punkt z repräsentire σ die Stromrichtung, und ν die auf dem linken Ufer errichtete Normale; so dass also σ zu ν ebenso liegt, wie die x -Achse zur y -Achse. Dann ist nach allgemeinem Satz:

$$(22) \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus den Formeln (21) durch Differentiation nach σ sofort:

$$(23) \quad \alpha). \quad \begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial \sigma} + \frac{\partial U^e}{\partial \sigma} &= 0, & \frac{\partial U^2}{\partial \sigma} - \frac{\partial U^e}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^2}{\partial \nu} + \frac{\partial U^e}{\partial \nu} &= 0, & \frac{\partial U^2}{\partial \nu} - \frac{\partial U^e}{\partial \nu} &= 0. \end{aligned} \quad \beta).$$

Um nun zu einer näheren Einsicht in die Beschaffenheit der Function U zu gelangen, betrachten wir zunächst die Curven $U = \text{Const.}$ oder $dU = 0$. Diese Curven $dU = 0$ sind, nach (9), darstellbar durch

$$\Phi dx - \Psi dy = 0,$$

also nach (6) darstellbar durch

$$\cos \frac{\Delta' + \Delta''}{2} \cdot dx + \sin \frac{\Delta' + \Delta''}{2} \cdot dy = 0$$

Folglich sind $\cos \frac{\Delta' + \Delta''}{2}$ und $\sin \frac{\Delta' + \Delta''}{2}$ die Cosinus derjenigen Winkel, unter denen die im Punkte z oder $(x + iy)$ auf der Curve $U = \text{Const.}$ errichtete Normale geneigt ist gegen die x -Achse und y -Achse. Construiert man also die früher eingeführten Radien $pz = D'$ und $qz = D''$ mit ihren Azimuten Δ' und Δ'' , so erkennt man sofort, dass jene im Punkte z errichtete Normale identisch ist mit der Halbierungslinie des von D' und D'' gebildeten Winkels. Die Curven $U = \text{Const.}$ sind daher *confocale Ellipsen mit den Brennpunkten p, q .*

Fortan mag nun supponirt werden, dass zur Curve u die Brennpunktlinie pq gewählt worden ist. Alsdann wird U längs des linken Ufers

von a constant, etwa $= C$, und längs des rechten Ufers von a ebenfalls constant, etwa $= C'$ sein. Diese Constanten C und C' müssen aber unter einander identisch sein, weil U im Anfangspunkt p der Linie a nur einen Werth hat. Also $C = C'$. Ausserdem aber ist nach (21): $C + C' = 2E^0$. Folglich muss $C = C' = E^0$ sein. Die Formeln (21), (23) gewinnen daher folgende Gestalt:

$$(24) \quad \alpha). \quad \begin{aligned} U^2 &= U^e = E^0, \\ \frac{\partial U^2}{\partial v} &= -\frac{\partial U^e}{\partial v}, \end{aligned} \quad \beta). \quad \begin{aligned} U^2 &= U^e, \\ \frac{\partial U^2}{\partial v} &= \frac{\partial U^e}{\partial v}. \end{aligned}$$

Die Function U ist innerhalb der Fläche \mathfrak{J}' überall eindeutig und stetig. Daraus folgt, dass ihr Werth in irgend einem innerhalb \mathfrak{J}' befindlichen Punkt z_1 dargestellt werden kann durch das Integral

$$(25) \quad U(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{J}'} \left(U \frac{\partial L}{\partial N} - L \frac{\partial U}{\partial N} \right) d\sigma,$$

die Integration hinstreckt über alle zum Rande von \mathfrak{J}' gehörigen Linienelemente $d\sigma$. Für jedes Element $d\sigma$ repräsentirt N die *innere* Normale der Fläche \mathfrak{J}' ; andererseits repräsentirt L den Logarithmus der reciproken Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Punkte z_1 ; so dass also $L = \log \left(\frac{1}{R} \right) = -\log R$ ist, falls jene Entfernung selber mit R bezeichnet wird. — Entsprechend den Ufern von a , denen von β und dem *Kreisrande* x der Fläche \mathfrak{J}' , zerfällt das Integral (25) in drei Integrale:

$$(26) \quad U(z_1) = J_a + J_\beta + J_x.$$

Das erste dieser Integrale lautet:

$$J_a = \frac{1}{2\pi} \int_a \left(\left[U^2 \frac{\partial L}{\partial N} + U^e \frac{\partial L}{\partial N'} \right] - L \left[\frac{\partial U^2}{\partial N} + \frac{\partial U^e}{\partial N'} \right] \right) d\sigma,$$

wo N , N' entgegengesetzte Richtungen haben, nämlich N gelegen ist auf dem linken, N' auf dem rechten Ufer von a , wo also N identisch ist mit der früher eingeführten Normale v , und N' entgegengesetzt zu v . Somit folgt:

$$J_a = \frac{1}{2\pi} \int_a \left(\left[U^2 - U^e \right] \frac{\partial L}{\partial v} - L \left[\frac{\partial U^2}{\partial v} - \frac{\partial U^e}{\partial v} \right] \right) d\sigma;$$

und hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Relationen (24):

$$(27) \quad J_a = \frac{1}{2\pi} \int_a \left(-L \cdot 2 \frac{\partial U^2}{\partial v} \right) d\sigma,$$

In ähnlicher Weise erhält man, ebenfalls mit Benutzung der Relationen (24):

$$(28) \quad J_\beta = 0.$$

Was endlich das dritte Integral J_z betrifft, so ist es nöthig zurückzugehen auf die für die Punkte der Peripherie κ gültige, in (12) angegebene Entwicklung:

$$U^* = \log \frac{1}{r} + \left(A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta}{r^n} \right),$$

und zu Hülfe zu nehmen die bekannte Entwicklung von L ; es ist nämlich

$$\begin{aligned} L &= -\log R = -\log \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\vartheta - \vartheta_1)}, \\ &= \log \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^n \cos n(\vartheta - \vartheta_1)}{nr^n}, \end{aligned}$$

wo r, ϑ die Polarcoordinaten eines auf $d\sigma$ gelegenen Punktes z , und r_1, ϑ_1 die Polarcoordinaten des Punktes z_1 bezeichnen. Mit Hülfe dieser Formeln für U^* und L findet man sofort:

$$(29) \quad J_z = A,$$

wo A die in der Entwicklung von U^* auftretende Constante bezeichnet. Aus (26), (27), (28), (29) folgt:

$$(30) \quad U(z_1) = A + \int_a FL d\sigma = A - \int_a F \log R d\sigma,$$

falls man nämlich mit F den Ausdruck bezeichnet:

$$(31) \quad F = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial U^2}{\partial \nu}.$$

Diese Formel (30) zeigt, dass $U(z_1)$, abgesehen von der additiven Constanten A , *angesehen werden kann als das Logarithmische Potential*) der Brenmlinie a auf den Punkt z_1 , jene Linie mit einer Masse belegt gedacht, deren Dichtigkeit = F ist.* Gleichzeitig ergibt sich aus jener Formel für den Werth von $W = U + iV$ im Punkte z_1 , folgende Darstellung:

$$(32) \quad W(z_1) = (A + iB) - \int_a F \log(z - z_1) d\sigma,$$

wo B eine neu hinzutretende Constante bezeichnet, und wo in $\log(z - z_1)$ unter z ein zum Elemente $d\sigma$ gehöriger Punkt, unter z_1 der gegebene Punkt zu verstehen ist.

Um eine deutlichere Vorstellung von der *Dichtigkeit* F zu erhalten, sei zunächst bemerkt, dass die Formel (31) so dargestellt werden kann:

*) Unter dem Logarithmischen Potential eines Massensystems auf einen Punkt soll nämlich verstanden werden die Summe sämtlicher Massenelemente, jedes multiplicirt mit dem Logarithmus seiner *reciproken* Entfernung von dem gegebenen Punkt.

$$(33) \quad \begin{aligned} F &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial U^2}{\partial v} = +\frac{1}{\pi} \frac{\partial V^2}{\partial \sigma}, \\ &= +\frac{1}{\pi} \left(\Psi \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \Phi \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right), \end{aligned}$$

[vergl. (22) und (9)]. Nun findet längs α die Gleichung statt $dU = 0$ oder $\Phi \frac{\partial x}{\partial \sigma} - \Psi \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0$, [vergl. (9)]. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\Psi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}.$$

Somit ergibt sich:

$$(34) \quad F = \frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2},$$

oder nach (6):

$$(35) \quad F = \frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{D'D''},$$

wo ε noch unbestimmt, nämlich $= \pm 1$ ist.

Um ε zu bestimmen, betrachten wir die durch $\int_a F d\sigma$ dargestellte *Gesamtmasse* der Linie α . Aus (33) folgt:

$$(36) \quad \int_a F d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_a \frac{\partial V^2}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi} \left(V^2(q) - V^2(p) \right).$$

Nun war die Constante A [vergl. (16)] definiert worden durch

$$A = \int_a \Omega^2 dz.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} A &= W^2(q) - W^2(p), \\ &= (U^2(q) + iV^2(q)) - (U^2(p) + iV^2(p)), \end{aligned}$$

oder, weil U längs α constant ist:

$$A = iV^2(q) - iV^2(p).$$

Für A war aber der Werth πi gefunden worden, [vergl. (19), (20)].

Es ist daher:

$$\pi i = iV^2(q) - iV^2(p);$$

und hierdurch geht die Formel (36) über in:

$$(37) \quad \int_a F d\sigma = +1.$$

Hieraus folgt, dass die Gesamtmasse der Linie α gleich $+1$ ist, und ferner, dass jenes in F enthaltene ε positiv ist, dass mithin die Dichtigkeit F den Werth besitzt:

$$(38) \quad F = +\frac{1}{\pi} \sqrt{D'D''},$$

vorausgesetzt, dass man $\sqrt{D'D''}$ als positive Grösse betrachtet.

Es repräsentirt also F die Dichtigkeit einer über die Linie α vertheilten Masse 1; das Potential dieser Masse auf irgend einen Punkt z ist $U(z) - A$, (30), und ist also längs der Linie α von constantem Werth. Hieraus folgt, dass die durch jene Dichtigkeit F determinirte materielle Vertheilung identisch ist mit derjenigen Gleichgewichtslage, welche ein auf der Linie α befindliches und längs α (wie in einem zu beiden Enden geschlossenen Canal) bewegliches Fluidum von der Masse 1 annehmen wird unter der gegenseitigen Einwirkung seiner Theilchen. Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Denkt man sich ein Fluidum) von der Masse 1 beweglich längs einer beliebig gegebenen begrenzten geraden Linie α , so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes in jedem Punkt der Linie eine Dichtigkeit F vorhanden sein, deren Quadrat umgekehrt proportional ist mit dem Product der beiden Segmente D' , D'' , welche durch den Punkt auf der Linie markirt sind. Erstarrt dieses Fluidum in seiner Gleichgewichtslage, so wird das von ihm auf einen beliebigen Punkt z ausgeübte Potential, abgesehen von einer additiven Constanten, dargestellt sein durch den reellen Theil des Integrales*

$$(39) \quad \int_0^2 \frac{dz}{V(z-p)(z-q)},$$

vorausgesetzt, dass p und q die beiden Endpunkte der Linie α bezeichnen. Gleichzeitig werden die Niveaucurven dieses Potentials confocale Ellipsen sein mit den Brennpunkten p und q .

Die Betrachtung, welche zur Darstellung von U als Potential führt, kann übrigens noch ein wenig anders eingerichtet werden. — Es sei α' irgend eine unter jenen confocalen Ellipsen; ferner β' derjenige Theil von β , welcher von α' hinführt zum Kreisrande κ der Fläche \mathfrak{J}' ; und endlich sei \mathfrak{Z} derjenige Theil, welcher von der Fläche \mathfrak{J}' noch übrig bleibt nach Absonderung der von α' umschlossenen Ellipsenfläche. Alsdann kann, vorausgesetzt dass der Punkt z , innerhalb der Fläche \mathfrak{Z} liegt, statt der Formel (25) auch folgende benutzt werden:

$$(40) \quad U(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{Z}} \left(U \frac{\partial L}{\partial N} - L \frac{\partial U}{\partial N} \right) d\sigma,$$

welche von jener nur dadurch sich unterscheidet, dass die Integration nicht über den Rand von \mathfrak{J}' , sondern über den von \mathfrak{Z} hinerstreckt ist. Auch kann man in dieser Formel statt der Function U die Function

*) Es ist wohl nicht nöthig hinzuzufügen, dass hier von einem *fingirten* Fluidum die Rede ist, bei dem die Anziehung oder Abstossung zwischen zwei Theilchen umgekehrt proportional ist mit der Entfernung selber.

$U - K$ nehmen, unter K eine beliebige Constante verstanden. Als-
dann ergibt sich:

$$(41) \quad U(z_1) - K = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{Z}} \left((U - K) \frac{\partial L}{\partial \mathbf{N}} - L \frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} \right) d\sigma, \\ = J_u + J_f + J_s.$$

Wählt man für K denjenigen constanten Werth, welchen U längs
der Ellipse α' besitzt, so ergeben sich für diese Integrale J leicht
folgende Werthe:

$$J_u = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} \left(-L \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma, \\ J_f = 0, \\ J_s = A - K,$$

wo ν die auf α' errichtete Normale, und zwar die *innere* Normale der
Fläche \mathfrak{Z} repräsentirt. Folglich wird:

$$(42) \quad U(z_1) - K = A - K + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} \left(-L \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

d. i.

$$(43) \quad U(z_1) = A + \int_{\alpha'} f L d\sigma,$$

wo f die Bedeutung hat:

$$(44) \quad f = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \nu} = +\frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Dabei repräsentirt ν die eben genannte Richtung; während σ zu ν
ebenso liegt, wie die x -Achse zur y -Achse. Demnach ist σ die positive
Richtung der Curve α' , dieselbe angesehen als Randcurve der Fläche \mathfrak{Z} .
Hieraus folgt:

$$\int_{\alpha'} f d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha'} dV,$$

das Integral rechter Hand hinstreckt in der eben genannten positiven
Richtung von α' . Mit Rücksicht auf (21) ergibt sich daher:

$$(45) \quad \int_{\alpha'} f d\sigma = +1.$$

Ferner lässt sich f selber in ähnlicher Weise, wie früher F , ermitteln.
Man findet:

$$(46) \quad f = +\frac{1}{2\pi \sqrt{D'D''}}.$$

Die Formeln (43) und (45), (46), in gehöriger Weise interpretirt,
führen zu folgendem Resultat:

*Denkt man sich ein Fluidum von der Masse 1 beweglich längs
einer beliebig gegebenen Ellipse α' , so wird nach Eintritt des Gleichge-
wichtszustandes in jedem Punkt der Ellipse eine Dichtigkeit vorhanden*

sein, deren Quadrat umgekehrt proportional ist mit dem Product der beiden (nach dem Punkt hinlaufenden) Brennstrahlen D' und D'' . Erstarzt das Fluidum in seiner Gleichgewichtslage, so wird das von ihm auf irgend einen Punkt z ausgeübte Potential, abgesehen von einer additiven Constante, wiederum identisch sein mit dem reellen Theil des Integrales (39), vorausgesetzt, dass in diesem Integrale für p und q die Brennpunkte der gegebenen Ellipse genommen werden. Auch werden die Niveaucurven des Potentials wiederum dargestellt sein durch das System der confocalen Ellipsen*).

Aehnliche Betrachtungen lassen sich nun auch durchführen mit Bezug auf die hyperelliptischen Integrale. Es sei

*) Das Gesetz für die Gleichgewichtsvertheilung eines Fluidums (Anziehungsgesetz: $\frac{1}{r}$), welches beweglich ist, längs einer gegebenen Ellipse, lässt sich nicht nur in dieser, sondern im Ganzen in drei verschiedenen Formen aussprechen. Nämlich:

I. Nach Eintritt des Gleichgewichtes ist die Dichtigkeit in jedem Punkt proportional mit dem Abstände des Punktes von einer zweiten Ellipse, welche der gegebenen ähnlich, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

II. Die Dichtigkeit ist in jedem Punkte umgekehrt proportional mit der Länge desjenigen Durchmessers der Ellipse, welcher parallel läuft zu der in dem Punkte construirten Tangente.

III. Die hier gefundene Form: Das Quadrat der Dichtigkeit ist umgekehrt proportional mit dem Product der beiden Brennstrahlen.

Das Gesetz für die Vertheilung des elektrischen Fluidums (Anziehungsgesetz: $\frac{1}{r^2}$) auf einer Ellipsoidoberfläche kann, wie hier beiläufig bemerkt sein mag, ebenfalls in verschiedenen Formen dargestellt werden, die zum Theil mit den Formen des die Ellipse betreffenden Gesetzes in Analogie stehen. Nämlich:

I. Nach Eintritt des Gleichgewichtes ist die Dichtigkeit in jedem Punkt der Ellipsoidfläche proportional mit dem Abstände des Punktes von einer zweiten Ellipsoidfläche, welche der gegebenen ähnlich, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

II. Jene Dichtigkeit ist in jedem Punkt umgekehrt proportional mit dem Quadratinhalt desjenigen Diametralschnittes, welcher parallel läuft zu der im Punkte construirten Tangentialebene. (Auf diese Form des Gesetzes ist bereits vor langer Zeit von mir aufmerksam gemacht worden, in Poggendorf's Annalen, Band 113.)

III. Bei einem gestreckten Rotationsellipsoid ist das Quadrat der Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional mit dem Product der beiden Brennstrahlen. Bei einem abgeplatteten Rotationsellipsoid ist das Quadrat der Dichtigkeit in jedem Punkt umgekehrt proportional mit dem Product des längsten und kürzesten Brennstrahles; wobei vorausgesetzt wird, dass in diesem Falle unter dem Namen Brennstrahlen sämtliche Linien verstanden sind, welche von dem betrachteten Punkte hinlaufen nach der Peripherie der (kreisförmigen) Brennebene.

$$(1) \quad W = \int_{z_0}^z \Omega dz,$$

wo

$$(2) \quad \Omega = \frac{G(z - H_1)(z - H_2) \cdots (z - H_{s-1})}{\sqrt{(z - p_1)(z - q_1) \cdots (z - p_{s+1})(z - q_{s+1})}},$$

und wo z_0 , G , ebenso wie die H , p , q gegebene complexe Constante sind. Jede der Constanten H , p , q mag dargestellt sein als ein fester Punkt in der Ebene, und z selber als ein beweglicher Punkt. Führt man mit Bezug auf jeden festen Punkt c die Bezeichnung ein

$$z - c = D(c) \cdot e^{i\Delta(c)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

so dass also $D(c)$, $\Delta(c)$ die Polarcoordinaten des beweglichen Punktes z in Bezug auf den festen Punkt c darstellen; setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} D(H_1) \cdot D(H_2) \cdots D(H_{s-1}) &= D^H, \\ \Delta(H_1) + \Delta(H_2) \cdots + \Delta(H_{s-1}) &= \Delta^H, \\ D(p_1) \cdot D(q_1) \cdots D(p_{s+1}) \cdot D(q_{s+1}) &= D^{pq}, \\ \Delta(p_1) + \Delta(q_1) \cdots + \Delta(p_{s+1}) + \Delta(q_{s+1}) &= \Delta^{pq}, \end{aligned}$$

und setzt man ausserdem

$$G = g e^{i\gamma};$$

so erhält man für Ω folgende Darstellung:

$$(3) \quad \Omega = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} e^{i(\gamma + \Delta^H - \frac{1}{2} \Delta^{pq})}.$$

Setzt man also

$$\begin{aligned} (4) \quad z &= x + iy, \\ \Omega &= \Phi + i\Psi, \\ W &= U + iV, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} (5) \quad \Phi &= \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \cos(\gamma + \Delta^H - \frac{1}{2} \Delta^{pq}), \\ \Psi &= \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \sin(\gamma + \Delta^H - \frac{1}{2} \Delta^{pq}); \end{aligned}$$

und gleichzeitig erhält man alsdann aus

$$(6) \quad dW = \Omega dz$$

die Formeln:

$$\begin{aligned} (7) \quad dU &= \Phi dx - \Psi dy, \\ dV &= \Psi dx + \Phi dy, \end{aligned}$$

In der z Ebene möge nun, ebenso wie bei der früheren Betrachtung, um den Anfangspunkt ($z = 0$) eine Kreisfläche \mathfrak{B} beschrieben gedacht werden mit äusserst grossem Radius; und in dieser Fläche

werde eine Curve gezogen, welche in p_1 beginnt, sämmtliche Punkte $q_1, p_2, q_2, \dots p_{s+1}, q_{s+1}$ der Reihe nach berührt, und schliesslich ihr Ende erreicht in irgend einem Punkte p^* des kreisförmigen Randes. Die einzelnen Strecken dieser Curve:

$p_1 q_1, q_1 p_2, p_2 q_2, \dots q_s p_{s+1}, p_{s+1} q_{s+1}, q_{s+1} p^*$
mögen benannt werden mit

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots \beta_s, \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}.$$

Endlich heisse \mathcal{Z}' diejenige Fläche, in welche \mathcal{Z} sich verwandelt durch einen längs der ganzen Curve von p_1 bis p^* fortlaufenden Schnitt.

Die Function Ω setzen wir in solcher Weise fest, dass sie innerhalb \mathcal{Z}' überall eindeutig und stetig ist. Sie wird alsdann zu beiden Ufern einer jeden Strecke α entgegengesetzte Werthe, zu beiden Ufern einer jeden Strecke β aber gleiche Werthe besitzen, und für sehr weit entfernte Punkte z darstellbar sein durch die Reihe:

$$(8) \quad \Omega^* = -\frac{\Gamma'}{z^2} - \frac{2\Gamma''}{z^3} - \frac{3\Gamma'''}{z^4} - \dots,$$

wo $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''' \dots$ complexe Constanten sind.

Mit Bezug auf das Integral W , (1), setzen wir ferner fest, dass die Integrationscurve $z_0 \dots z$ in ihrer Bewegung auf die Fläche \mathcal{Z}' beschränkt sein soll, und verwandeln solcher Art W in eine Function von z , welche innerhalb \mathcal{Z}' überall eindeutig und stetig ist, und deren Werthe für weit entfernte Punkte z darstellbar sind durch

$$(9) \quad W^* = U^* + iV^* = K + \frac{\Gamma'}{z} + \frac{\Gamma''}{z^2} + \frac{\Gamma'''}{z^3} + \dots,$$

wo K eine complexe Constante bezeichnet. Hieraus folgt, wenn $z = re^{i\phi}$ gesetzt wird, sofort:

$$(10) \quad U^* = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi}{r^n}.$$

wo A, A_n, B_n reelle Constante sind.

Bezeichnet man das längs der Strecke α_n von p_n nach q_n hinerstreckte Integral $\int \Omega^2 dz$ mit A_n , andererseits dasselbe Integral, längs β_n von q_n bis p_{n+1} erstreckt gedacht, mit B_n , und bezeichnet man ferner den Werth von W im Punkte p_1 mit E , so lassen sich die Werthe von W in sämmtlichen Punkten p, q folgendermassen ausdrücken:

$$(11) \quad \begin{aligned} W(p_1) &= E, \\ W(q_1) &= E \pm A_1, \\ W(p_2) &= E \pm A_1 \pm B_1, \\ W(q_2) &= E \pm A_1 \pm B_1 \pm A_2, \\ &\dots \dots \dots \\ W(p_{s+1}) &= E \pm A_1 \pm B_1 \pm A_2 \dots + B_s, \\ W(q_{s+1}) &= E \pm A_1 \pm B_1 \pm A_2 \dots + B_s \pm A_{s+1}, \end{aligned}$$

wo die *obern* oder *untern* Zeichen zu nehmen sind*, je nachdem man die Werthe am *linken* oder *rechten* Ufer haben will. Dabei mag, was diese Uferbezeichnung betrifft, die Curve $(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \dots + \beta_{s+1})$ wiederum angesehen werden als ein von p_1 nach p^* hinfließender Strom. — Leicht übersieht man nun, dass die Summe $W^2 + W^e$ constant ist längs jeder Strecke α , dass andererseits die Differenz $W^2 - W^e$ constant ist längs einer jeden Strecke β , und dass diese constanten Werthe in einfacher Weise sich ausdrücken lassen durch die E, A, B . Man gelangt so zu den Formeln:

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha_1). \quad W^2 + W^e &= 2E, \\ \alpha_2). \quad W^2 + W^e &= 2E + 2B_1, \\ \alpha_3). \quad W^2 + W^e &= 2E + 2B_1 + 2B_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_s). \quad W^2 + W^e &= 2E + 2B_1 + 2B_2 + \dots\dots\dots + 2B_{s-1}, \\ \alpha_{s+1}). \quad W^2 + W^e &= 2E + 2B_1 + 2B_2 + \dots\dots\dots + 2B_{s-1} + 2B_s, \end{aligned}$$

und andererseits zu folgenden Formeln:

$$(13) \quad \begin{aligned} \beta_1). \quad W^2 - W^e &= 2A_1, \\ \beta_2). \quad W^2 - W^e &= 2A_1 + 2A_2, \\ \beta_3). \quad W^2 - W^e &= 2A_1 + 2A_2 + 2A_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_s). \quad W^2 - W^e &= 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + \dots\dots\dots + 2A_s, \\ \beta_{s+1}). \quad W^2 - W^e &= 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + \dots\dots\dots + 2A_s + 2A_{s+1}, \end{aligned}$$

Aus (9) folgt, dass W zu beiden Ufern der Strecke β_{s+1} gleiche Werthe hat, dass also $W^2 - W^e$ längs dieser Strecke $= 0$ ist. Somit zeigt sich aus der letzten der Formeln (13), dass zwischen den Constanten A folgende Relation stattfinden muss:

$$(14) \quad A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_s + A_{s+1} = 0.$$

Die bisherigen Grundlagen der Untersuchung mögen nun ein wenig geändert werden. Während nämlich die in dem hyperelliptischen Integral W enthaltenen $(2s + 2)$ complexen Constanten p, q nach wie vor als *völlig beliebig* gegeben betrachtet werden sollen, mögen die *dasselbst vorhandenen* s complexen Constanten G, H *fortan in solcher Weise berechnet gedacht werden*, dass $A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$ *vorgeschriebene rein imaginäre Werthe erhalten*; wobei alsdann die Constante A_{s+1} [zufolge (14)] ebenfalls einen rein imaginären Werth erhalten wird. Solches festgesetzt, haben wir:

$$(15) \quad A_1 = M_1 \pi i, \quad A_2 = M_2 \pi i, \quad \dots\dots\dots A_s = M_s \pi i, \quad A_{s+1} = M_{s+1} \pi i,$$

wo die M *reelle*, der Relation

$$(16) \quad M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_s + M_{s+1} = 0$$

unterworfenen Constanten sind, von denen die s ersten *beliebig* gegeben sind.

Bezeichnet man also die Formeln (12) und (13) im Allgemeinen mit

$$(17) \quad \alpha_n). \quad W^i + W^e = 2\Gamma_n, \quad \beta_n). \quad W^i - W^e = 2\Delta_n,$$

so wird Γ_n eine complexe Constante, $= \Gamma_n^0 + i\Gamma_n^{\infty}$, hingegen Δ_n eine rein imaginäre Constante, $= i\Delta_n^{\infty}$ sein. Somit ergibt sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$(18) \quad \alpha_n). \quad \begin{aligned} U^i + U^e &= 2\Gamma_n^0, \\ V^i + V^e &= 2\Gamma_n^{\infty}, \end{aligned} \quad \beta_n). \quad \begin{aligned} U^i - U^e &= 0, \\ V^i - V^e &= 2\Delta_n^{\infty}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach der Stromrichtung σ :

$$(19) \quad \alpha_n). \quad \begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial \sigma} + \frac{\partial U^e}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^i}{\partial \nu} + \frac{\partial U^e}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned} \quad \beta_n). \quad \begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial U^e}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^i}{\partial \nu} - \frac{\partial U^e}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned}$$

wo ν die Normale des Stromes repräsentirt, und wo sogleich festgesetzt werden mag, dass σ zu ν ebenso liegen solle, wie die x -Achse zur y -Achse.

Längs jeder Strecke β ist nach (18): $U^i = U^e$. Mithin ist U *einwerthig* längs einer jeden Strecke β , und also auch *einwerthig* in den Endpunkten einer solchen Strecke, also *einwerthig in jedem der Punkte* p, q . Oder anders ausgedrückt: die Function U besitzt im Punkte p_n zwei Werthe P_n, P_n , welche einander *gleich* sind, und im Punkte q_n ebenfalls zwei einander *gleiche* Werthe Q_n, Q_n . Zuzufolge (18) ist nun $U^i + U^e$ längs der von p_n nach q_n gehenden Strecke α_n constant, $= 2\Gamma_n^0$. Bringt man diese Gleichung in Anwendung auf den Anfangspunkt und Endpunkt der Strecke α_n , so erhält man:

$$P_n + P_n = 2\Gamma_n^0, \quad Q_n + Q_n = 2\Gamma_n^0,$$

folglich:

$$P_n = Q_n = \Gamma_n^0.$$

Die Function U besitzt also *gleiche* Werthe in p_1 und q_1 , ebenso in p_2 und q_2 , u. s. w., endlich *gleiche* Werthe in p_{s+1} und q_{s+1} . Denkt man sich daher die Curven $U = \text{Const.}$ construirt, so wird eine dieser Curven von p_1 nach q_1 gehen, eine andere derselben von p_2 nach q_2 , u. s. w. Die in solcher Weise durch die Beschaffenheit der Function U vorgezeichneten Curven $p_1 q_1, p_2 q_2, \dots p_{s+1} q_{s+1}$ mögen nun festgehalten werden; und die vorhin in willkürlicher Weise construirten Stromstrecken $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{s+1}$ mögen fortan hinlaufend gedacht werden längs dieser Curven. Alsdann wird die Function U constant sein längs jeder Strecke α_n , und zu beiden Ufern derselben gleiche Werthe haben;

sodass die Formeln (18) und (19), insoweit sie auf U sich beziehen, folgende speciellere Gestalt erhalten:

$$(20) \quad \begin{array}{ll} \alpha_n). & U^2 = U^e = \Gamma_n^0, \\ & \frac{\partial U^2}{\partial v} = - \frac{\partial U^e}{\partial v}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} & U^2 = U^e, \\ \beta_n). & \frac{\partial U^2}{\partial v} = \frac{\partial U^e}{\partial v}. \end{array}$$

Innerhalb der durch die beiden Ufer des Stromes

$$(a_1 + \beta_1 + a_2 + \dots + \beta_{s+1})$$

und durch eine sehr ferne Kreislinie α begrenzten Fläche \mathcal{S}' ist die Function U überall eindeutig und stetig. Demgemäss wird sich der Werth von U in irgend einem innerhalb \mathcal{S}' befindlichen Punkt z_1 darstellen lassen durch ein Integral

$$(21) \quad U(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}'} \left(U \frac{\partial L}{\partial N} - L \frac{\partial U}{\partial N} \right) d\sigma,$$

welches (durch eine Behandlung, die der auf Seite 615 ausgeführten völlig analog ist) schliesslich zu dem Ausdruck führt:

$$(22) \quad U(z_1) = A + \Sigma \int_a F L d\sigma = A - \Sigma \int_a F \cdot \log R \cdot d\sigma,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$(23) \quad F = - \frac{1}{\pi} \frac{\partial U^2}{\partial v} = + \frac{1}{\pi} \frac{\partial V^2}{\partial \sigma}.$$

In (22) ist durch Σ eine Summe von $(s+1)$ Integralen angedeutet, jedes hinstreckt über die Linienelemente $d\sigma$ einer Strecke a ; ferner ist $L = \log \frac{1}{R}$, und R die Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Punkte z_1 ; endlich ist A eine reelle Constante, identisch mit derjenigen, welche auftritt in der Entwicklung (10). Die Richtungen σ und v , nach denen in (23) differenzirt ist, haben die schon genannten Bedeutungen; es repräsentirt nämlich σ die Stromrichtung, und liegt zu v ebenso wie die x -Achse zur y -Achse.

Die Formel (22) zeigt, dass $U(z_1)$, abgesehen von der additiven Constanten A , aufgefasst werden kann als das Potential der Curven a auf den Punkt z_1 , jene Curven mit einer Masse belegt gedacht, deren Dichtigkeit $= F$ ist. Gleichzeitig ergibt sich aus jener Formel für den Werth von $W = U + iV$ im Punkte z_1 der Ausdruck:

$$(24) \quad W(z_1) = (A + iB) - \Sigma \int_a F \cdot \log(z - z_1) \cdot d\sigma,$$

wo B eine neu hinzutretende Constante, und z den Ort des Linienelementes $d\sigma$ bezeichnet. Dabei ist unter Σ wiederum eine Summe von $(s+1)$ Integralen zu verstehen, von denen jedes hinläuft über eine der Strecken a .

Es bleibt noch übrig, die Curven α , oder überhaupt die Curven $U = \text{Const.}$, und andererseits die Dichtigkeit F näher zu untersuchen.

Eine Curve $U = \text{Const.}$ oder $dU = 0$ kann nach (7) dargestellt werden durch:

$$\Phi dx - \Psi dy = 0,$$

also nach (5) durch:

$$(25) \quad \cos(\tfrac{1}{2} \Delta^{pq} - \Delta^H - \gamma) \cdot dx + \sin(\tfrac{1}{2} \Delta^{pq} - \Delta^H - \gamma) \cdot dy = 0.$$

Somit bestimmt sich also die Richtung der Normale der Curve $U = \text{Const.}$ in irgend einem Punkte z nach einem einfachen Gesetz aus denjenigen Winkeln $\Delta(p)$, $\Delta(q)$, $\Delta(H)$, unter welchen die Strahlen pz , qz , Hx gegen die x -Axe geneigt sind. Und dasselbe Gesetz gilt natürlich auch für die Curven α .

Die Dichtigkeit F einer jeden Curve α ist nach (23) ausgedrückt durch

$$F = + \frac{1}{\pi} \frac{\partial V^2}{\partial \sigma}.$$

Folglich wird die ganze Masse einer solchen Curve α dargestellt sein durch das längs α hinerstreckte Integral:

$$\int_{\alpha} F d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha} \frac{\partial V^2}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha} dV^2.$$

Hieraus folgt, falls man den Anfangspunkt der betrachteten Curve α mit p , ihren Endpunkt mit q bezeichnet (wo dann α , p , q als Abkürzungen anzusehen sind für α_n , p_n , q_n):

$$(26) \quad \int_{\alpha} F d\sigma = \frac{1}{\pi} (V^2(q) - V^2(p)).$$

Nach der Definition von A (d. i. A_n) ist aber:

$$A = \int_{\alpha} \Omega^2(z) \cdot dz,$$

(vergl. Seite 622). Hieraus folgt:

$$A = W^2(q) - W^2(p),$$

oder weil U^2 längs α constant ist:

$$A = i V^2(q) - i V^2(p),$$

oder weil $A = M\pi i$ (nämlich $A_n = M_n \pi i$) gemacht worden war (Seite 623):

$$M\pi = V^2(q) - V^2(p).$$

Somit folgt aus (26):

$$(27) \quad \int_{\alpha} F d\sigma = M,$$

mithin mit Rücksicht auf (16):

$$(28) \quad \Sigma \int_a F d\sigma = \Sigma M = 0,$$

die Summation Σ wieder ausgedehnt gedacht über sämtliche $(s+1)$ Curven α .

Ferner ergibt sich aus (23) mit Rücksicht auf (7):

$$F = \frac{1}{\pi} \frac{\partial V^2}{\partial \sigma} = \frac{1}{\pi} \left(\Psi \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \Phi \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right).$$

Längs α ist aber nach (7): $\Phi \frac{\partial x}{\partial \sigma} - \Psi \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0$, mithin:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\Psi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}.$$

Somit folgt:

$$F = \frac{1}{\pi} \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2},$$

d. i. mit Rücksicht auf (5):

$$(29) \quad F = \frac{\varepsilon g D''}{\pi \sqrt{D^{2p_1}}},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Die auf einer Curve α in jedem Punkte z vorhandene Dichtigkeit F bestimmt sich also, wie diese Formel zeigt, nach einem einfachen Gesetz aus den Längen $D(p)$, $D(q)$, $D(H)$ derjenigen Strahlen, welche von den festen Punkten p , q , H aus nach z hinlaufen.

Blicken wir zurück auf die Formeln (20), so sehen wir, dass U längs jeder Curve α constant ist, und dass ferner der Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ zu beiden Ufern einer solchen Curve entgegengesetzte Werthe hat. Dabei ist unter ν die auf dem linken Ufer von α errichtete Normale zu verstehen. Construiren wir ausser ν noch die entgegengesetzte Richtung, nämlich die auf dem rechten Ufer liegende Normale ν' , so lassen sich jene Formeln (20) mit Bezug auf irgend eine Curve α so darstellen:

$$(30) \quad \alpha). \quad U^2 = U^2 = \text{Const.},$$

$$(31) \quad \alpha). \quad \frac{\partial U^2}{\partial \nu} = - \frac{\partial U^2}{\partial \nu'}.$$

Denkt man sich also die Function U geometrisch dargestellt durch auf der z -Ebene errichtete Perpendikel, so wird die von den Endpunkten dieser Perpendikel gebildete krumme Fläche über jeder Curve α einen Grat von constanter Höhe besitzen, welcher [zufolge (31)] nach beiden Seiten einen gleich starken Abfall darbietet.

Fasst man nach dieser augenblicklichen Abschweifung nun U wiederum auf als ein von den Curven $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1}$ auf den beweglichen Punkt z ausgeübtes Potential, so sind die auf jenen Curven anzunehmenden Massen [nach (27)] ausgedrückt durch die reellen Constanten M_1, M_2, \dots, M_{s+1} . Denkt man sich diese Massen als Fluida,

die längs der Curven α (wie in Canälen) frei beweglich sind, so wird die durch die Dichtigkeitsfunction F (29) indicirte Vertheilung dieser Fluida denjenigen *Gleichgewichtszustand* repräsentiren, in welchem die Fluida unter gegenseitiger Einwirkung ihrer einzelnen Theilchen in jenen Curven (oder Canälen) schliesslich zur Ruhe gelangen; wie solches augenblicklich folgt aus den Relationen (30). — Denkt man sich ferner die mit den Fluidis beladenen Curven α mit unendlicher Leichtigkeit biegsam und dehnbar, überhaupt ihrer ganzen Form nach, abgesehen von den *festen* Endpunkten p, q , vollständig frei beweglich, so wird die hier in Betracht gezogene Form dieser Curven wiederum diejenige sein, welche dem Zustande des *Gleichgewichts* entspricht; wie solches hervorgeht aus den Relationen (31). Ob das Gleichgewicht labil oder stabil ist, bleibt dabei allerdings völlig dahingestellt.

Schliesslich noch eine Bemerkung. Aus (7) und (5) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \Phi = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \cos \left(\frac{1}{2} \Delta^{pq} - \Delta^H - \gamma \right), \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\Psi = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \sin \left(\frac{1}{2} \Delta^{pq} - \Delta^H - \gamma \right).\end{aligned}$$

Diese Differentialquotienten repräsentiren (abgesehen vom Vorzeichen) die rechtwinkligen Componenten der von den materiellen Curven α auf einen beweglichen Punkt z oder $x + iy$ ausgeübten Kraft. Bezeichnet man die Kraft selber also mit R , so wird:

$$(32) \quad R^2 = g^2 \frac{D^H D^H}{D^{pq}}.$$

Folglich kann diese Kraft nur für solche Punkte z verschwinden, in denen D^H verschwindet, oder in denen D^{pq} unendlich wird. Im Endlichen der z -Ebene giebt es also nur $(s-1)$ Punkte, in denen die Kraft verschwindet, nämlich die Punkte H_1, H_2, \dots, H_{s-1} .

Als Resultat der angestellten Untersuchungen dürfte etwa Folgendes hervorzuheben sein:

Sind in der Ebene $(s+1)$ Curven α gegeben, jede versehen mit zwei festen Endpunkten p, q , sonst aber unbeschränkt veränderlich ihrer Lage und Form nach, ferner jede beladen mit einer beliebig gegebenen (reellen) Quantität M des fingirten Fluidums, so wird, falls die Summe dieser Quantitäten M gleich Null ist, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes ein Potential vorhanden sein, welches, abgesehen von einer additiven Constanten, identisch ist mit dem reellen Theile eines gewissen hyperelliptischen Integrales.

Um dieses Integral näher angeben zu können, ist zu bemerken, dass bei der eintretenden Gleichgewichtslage jedesmal $(s-1)$ im Endlichen liegende indifferente Orte vorhanden sein werden, nämlich $(s-1)$ Orte, in denen ein beweglicher Massenpunkt unter der Einwir-

lung jener materiellen Curven in Ruhe bleiben würde. Denkt man sich diese Orte aufgesucht, bezeichnet mit $H_1, H_2, \dots H_{s-1}$; und denkt man sich ferner die gegebenen Endpunkte p, q der $(s+1)$ materiellen Curven der Reihe nach bezeichnet mit $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots p_{s+1}, q_{s+1}$; so lautet jenes hyperelliptische Integral:

$$\int \frac{G(z - H_1)(z - H_2) \dots (z - H_{s-1}) dz}{V(z - p_1)(z - q_1) \dots (z - p_{s+1})(z - q_{s+1})},$$

wo G eine passend zu wählende (complexe) Constante bedeutet. Der reelle Theil dieses Integrales wird also, abgesehen von einer additiven Constanten, dasjenige Potential repräsentiren, welches von jenen materiellen Curven α , nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, ausgeübt wird auf einen beliebigen Punkt z .

Für die Gestalt der Niveaucurven, zu denen auch die Gleichgewichtsformen der Curven α gehören, und für die im Zustande des Gleichgewichts auf den Curven α vorhandene Dichtigkeit F ergeben sich einfache geometrische Gesetze, welche ausgedrückt sind durch die Formeln (25) und (29).

Nimmt man für die willkürlich zu wählenden, jedoch der Relation

$$M_1 + M_2 + \dots + M_s + M_{s+1} = 0$$

unterworfenen reellen Constanten M der Reihe nach folgende s Werthsysteme:

	M_1	M_2	M_3	\dots	M_s	M_{s+1}
1)	1	0	0	\dots	0	-1,
2)	0	1	0	\dots	0	-1,
3)	0	0	1	\dots	0	-1,
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
s)	0	0	0	\dots	1	-1,

so ergeben sich der Reihe nach s hyperelliptische Integrale, alle mit denselben Punkten p, q . Diese s Integrale sind identisch mit denjenigen, welche von Riemann (seine allgemeineren Untersuchungen auf hyperelliptische Integrale übertragen gedacht) beim Umkehrproblem behandelt worden sind.

In ähnlicher Weise wie vorhin bei dem trigonometrischen Integral (Seite 618—620), lassen sich auch hier bei dem hyperelliptischen Integral die Niveaucurven, d. i. die Curven $U = \text{Const.}$, in Untersuchung ziehen; wodurch man zu Resultaten gelangt, die ihrem allgemeinen Charakter nach aus den schon durchgeführten Untersuchungen bereits hinlänglich erkennbar sind. Besonders einfach gestalten sich diese Resultate für den Fall $s = 1$, d. i. für den Fall des elliptischen Integrales:

$$W = U + iV = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}.$$

Nimmt man den Modul κ *reell* an, so gelangt man, was die *Form* der Niveaucurven $U = \text{Const.}$ betrifft, zu einem bereits von Siebeck (Borchardt's Journal, Bd. 57, Seite 368) angegebenen Satz. Gleichzeitig aber ergibt sich auch ein einfaches Gesetz für die Dichtigkeit, welche ein längs jener Curve frei bewegliches Fluidum nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes an jeder Stelle der Curve besitzen wird, ein Gesetz, welches in voller Analogie steht zu dem früher (Seite 618) mit Bezug auf die Ellipse erhaltenen Resultat.

Leipzig, Februar 1870.