

Die Eigenfrequenzen einlagiger Spulen.

Einige Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn K. W. Wagner.

Von

J. Kruithof, Rotterdam.

In seinem Aufsatz im Archiv für Elektrotechnik, Band VI, S. 301—325, berechnet Wagner mit Hilfe eines vereinfachten Schemas die Spannungsverteilung und die Eigenfrequenzen einer einlagigen Drahtspule. Das Merkwürdige der Ergebnisse, die er erhält, ist, wie schon früher von Rogowski in einem Absatz (A. f. E. Bd. VII, S. 240) bemerkt wurde, daß Wagner nur Frequenzen der sogenannten ersten Art findet, und nicht, wie Rogowski bei seiner Behandlung der Spule aus wenigen Windungen, Frequenzen erster und zweiter Art.

Auch andere Autoren, wie z. B. Lenz (Annalen der Physik, 43, S. 749 ff.) finden die beiden Arten von Eigenschwingungen, während Wagner auch noch eine sogenannte „Kritische Frequenz“ findet, eine Grenzfrequenz für die Eigenfrequenzen einer Spule.

Auf den folgenden Seiten findet man die Berechnung von neuem ausgeführt an der Hand von Wagners Kettenschema, wobei wir auch dessen Notationen behalten haben; nennen wir nur den Anfangs- und Endstrom J_0 und J_{e+1} .

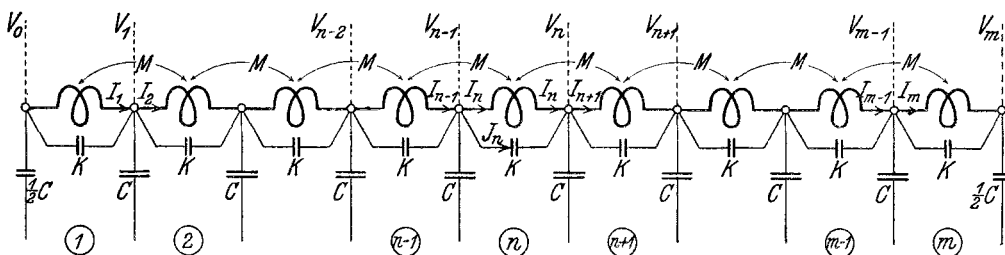


Bild 1.

Es wird sich zeigen, daß die Eigentümlichkeiten von Wagners Berechnung ihren Ursprung finden in einigen beschränkenden Annahmen.

Für jede Windung kann man schreiben:

$$V_{n-1} - V_n = j\omega L J_n + j\omega M (J_{n-1} - J_n) + j\omega M (J_{n+1} - J_n). \quad (1)$$

Man erhält ebensoviele Gleichungen, wie es Windungen gibt, also m. Jedoch ändert diese Gleichung sich für den Anfang und das Ende, dann wird sie:

$$\left. \begin{aligned} V_0 - V_1 &= j\omega L J_1 + j\omega M (J_2 - J_1) \\ V_{m-1} - V_m &= j\omega L J_m + j\omega M (J_{m-1} - J_m) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für jeden Knotenpunkt findet man:

$$J_n - J_{e+1} = j\omega C V_n - j\omega K (V_{n-1} - V_n) - j\omega K (V_{n+1} - V_n), \quad (3)$$

für die beiden Enden:

$$\left. \begin{aligned} J_0 - J_1 &= \frac{1}{2} j\omega C V_0 - j\omega K (V_1 - V_0) \\ J_m - J_{m+1} &= \frac{1}{2} j\omega C V_m - j\omega K (V_{m-1} - V_m) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir haben also zwei Reihen von Gleichungen, (1) und (3), jede mit einer besonderen Anfangs- und Endgleichung; da es m -Windungen und $m + 1$ -Knotenpunkte gibt, haben wir total $2m + 1$ -Gleichungen.

Zur Lösung dieser substituiert man in (1) und (3)

$$V_n = A e^{\mu n} \quad \text{und} \quad J_n = B e^{\mu n}, \quad (5)$$

und findet zwei Gleichungen in A und B :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{-j \omega e^{\frac{\mu}{2}}}{2 \sinh \frac{\mu}{2}} \left(L + 4 M \sinh^2 \frac{\mu}{2} \right) \\ \frac{B}{A} &= \frac{-j \omega e^{-\frac{\mu}{2}}}{2 \sinh \frac{\mu}{2}} \left(C - 4 K \sinh^2 \frac{\mu}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

welche zusammen:

$$4 \sinh^2 \frac{\mu}{2} = -\omega^2 \left(L + 4 M \sinh^2 \frac{\mu}{2} \right) \left(C - 4 K \sinh^2 \frac{\mu}{2} \right). \quad (7)$$

Hieraus wird $\sinh^2 \frac{\mu}{2}$ gelöst, wobei man vier Werte findet, übereinstimmend mit μ_1 , $-\mu_1$, $j\mu_2$ und $-j\mu_2$.

(5) wird also:

$$\left. \begin{aligned} V_n &= A_1 e^{\mu_1 n} + A_2 e^{-\mu_1 n} + A_3 e^{j\mu_2 n} + A_4 e^{-j\mu_2 n} \\ J_n &= B_1 e^{\mu_1 n} + B_2 e^{-\mu_1 n} + B_3 e^{j\mu_2 n} + B_4 e^{-j\mu_2 n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zur Bestimmung dieser acht Koeffizienten A_1 , B_1 , A_2 , B_2 usw. genügen vier Gleichungen, weil zwischen jedem A und B die Beziehung (6) besteht. Sie müssen so gestaltet werden, daß die allgemeine Lösung (8) von (1) und (3) auch genügt für (2) und (4).

Wagner wählt für diese Bedingungen:

Der Anfang der Spule wird an eine EMK. E gelegt, das Ende wird geerdet.

Für die zwei übrigen werden die Anfangs- und Endgleichung der ersten Serie, also die beiden unter (2) gewählt.

Hierin liegt etwas Willkürliches. Erstens: Wird Wagners Lösung den beiden anderen Gleichungen (4) genügen? Zweitens: Die Eigenschwingung muß durch das Erden des Endes der Spule sich ändern. Die Ladung der Spule, die Menge der schwingenden Elektrizität ist nicht konstant. Durch das Erden kann jetzt ein Ladestrom auf die Spule fließen, und die Bedingung, daß die Ladung konstant bleiben soll — wie Lenz annimmt — ist nicht erfüllt.

Geiß bestätigte experimentell den Satz, daß die Eigenschwingung einer langen Spule bei Erdung des Endes doppelt so groß ist, als wenn man sie nicht erdet (Annalen der Physik 1921, S. 375 ff.).

Deshalb habe ich die Koeffizienten A und B von neuem berechnet und dazu als vier Bedingungen die Gleichungen (2) und (4) angenommen.

Wie schon gesagt wurde, haben wir $2m + 1$ -Gleichungen. Die Anzahl der unbekannten Größen ist $2m + 3$; nämlich pro Windung ein Strom, der Anfangs- und Endstrom und pro Knotenpunkt eine Spannung.

Zwei von diesen dürfen wir als bekannt annehmen. Wir wählen dazu J_0 und J_{m+1} .

Die Lösung (8) substituiert in (2) und (4) ergibt, wenn sie in ihrer einfachsten Gestalt geschrieben wird:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 D_3 + A_4 D_4 \\ \frac{2 J_0}{j \omega C} &= A_1 E_1 + A_2 E_2 + A_3 E_3 + A_4 E_4 \\ 0 &= A_1 D_1 e^{\mu_1 m} + A_2 D_2 e^{-\mu_1 m} + A_3 D_3 e^{j \mu_2 m} + A_4 D_4 e^{-j \mu_2 m} \\ \frac{2 J_{m+1}}{j \omega C} &= A_1 E_1 e^{\mu_1 m} + A_2 E_2 e^{-\mu_1 m} + A_3 E_3 e^{j \mu_2 m} + A_4 E_4 e^{-j \mu_2 m} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= j \omega \left(C - 4 K \sin^2 h \frac{\mu_1}{2} \right) \\ E_1 &= -\cot h \frac{\mu_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Bedeutung von D_2 , E_2 usw. findet man durch das Zersetzen von μ_1 durch $-\mu_1$, $j \mu_2$ und $-j \mu_2$. Aus (9) sollen nun die vier Koeffizienten gelöst werden. Man würde fünf Determinanten zu berechnen haben, und weil D_1 , E_1 usw. nur Abkürzungen sind, würde die Lösung unüberwindliche Schwierigkeiten bieten.

Weil aber zwischen den Abkürzungen die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ D_3 &= D_4 \\ E_1 &= -E_2 \\ E_3 &= -E_4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

bestehen, suchte ich eine einfachere Lösung dieser fünf Determinanten.

Das folgende allgemeingültige Gesetz wurde gefunden:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ o & p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ o & p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ o & p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ o & p & q & r \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix}$ bedeutet dabei:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix} \quad \text{das Produkt von zwei Unterdeterminanten.}$$

Die Rechnung wird jetzt ziemlich einfach. Die Nennerdeterminante N wird:

$$N = -4 [2 D_1 D_3 E_1 E_3 - 2 D_1 D_3 E_1 E_3 \cos h \mu_1 m \cos h j \mu_2 m + (D_1^2 E_3^2 + D_3^2 E_1^2) \sin h \mu_1 m \sin h j \mu_2 m] \quad (12)$$

und die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4 D_3}{j \omega C \cdot N} [J_0 \{ (D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m + D_1 E_3 \cosh j \mu_2 m) e^{-\mu_1 m} - D_1 E_3 \} + \\
 &\quad + J_{m+1} \{ - (D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m - D_1 E_3 \cosh j \mu_2 m) - D_1 E_3 e^{-\mu_1 m} \}] \\
 A_2 &= \frac{4 D_3}{j \omega C \cdot N} [J_0 \{ (D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m - D_1 E_3 \cosh j \mu_2 m) e^{\mu_1 m} + D_1 E_3 \} + \\
 &\quad + J_{m+1} \{ - (D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m + D_1 E_3 \cosh j \mu_2 m) + D_1 E_3 e^{\mu_1 m} \}] \\
 A_3 &= \frac{4 D_1}{j \omega C \cdot N} [J_0 \{ D_1 E_3 \sinh \mu_1 m + D_3 E_1 \cosh \mu_1 m \} e^{-j \mu_2 m} - D_3 E_1 \} + \\
 &\quad + J_{m+1} \{ - (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \cosh \mu_1 m) - D_3 E_1 e^{-j \mu_2 m} \}] \\
 A_4 &= \frac{4 D_1}{j \omega C \cdot N} [J_0 \{ D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \cosh \mu_1 m \} e^{j \mu_2 m} + D_3 E_1 \} + \\
 &\quad + J_{m+1} \{ - (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m + D_3 E_1 \cosh \mu_1 m) + D_3 E_1 e^{j \mu_2 m} \}].
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Koeffizienten A sind jetzt bekannt und nach Substitution in die allgemeine Lösung (8) können wir V_n schreiben als $f(J_0, J_{m+1})$. Zum besseren Vergleich mit Wagners Lösung und weil meistens die Anfangsspannungen und nicht die Anfangsströme gegeben sind, wollen wir jetzt die Lösung umarbeiten zu $V_n = f(V_0, V_m)$.

Zu diesem Zwecke setzen wir in $V_n = f(J_0, J_{m+1})$, die gefundene Lösung, $m = 0$ und $n = m$; wir finden:

$$\left. \begin{aligned}
 V_0 &= \frac{8(D_3 - D_1)}{j \omega C \cdot N} \{ -J_0 (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m \cosh j \mu_2 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m \cosh \mu_1 m) \\
 &\quad + J_{m+1} (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m) \} \\
 V_m &= \frac{8(D_3 - D_1)}{j \omega C \cdot N} \{ -J_0 (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m) + \\
 &\quad + J_{m+1} (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m \cosh j \mu_2 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m \cosh \mu_1 m) \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen können wir J_0 und J_{m+1} als $f(V_0, V_m)$ schreiben:

$$\left. \begin{aligned}
 J_0 &= \frac{j \omega C}{2 \sinh \mu_1 m \cdot \sinh j \mu_2 m} \frac{1}{D_3 - D_1} \{ V_0 (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m \cosh j \mu_2 m - \\
 &\quad - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m \cosh \mu_1 m) - V_m (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m) \} \\
 J_{m+1} &= \frac{j \omega C}{2 \sinh \mu_1 m \cdot \sinh j \mu_2 m} \frac{1}{(D_3 - D_1)} \{ V_0 (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m) \\
 &\quad - V_m (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m \cosh j \mu_2 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m \cosh \mu_1 m) \},
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei sich zeigt daß:

$$\left. \begin{aligned}
 N &= - \frac{4}{\sinh \mu_1 m \sinh j \mu_2 m} \{ (D_1 E_3 \sinh \mu_1 m \cosh j \mu_2 m - \\
 &\quad - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m \cosh \mu_1 m)^2 - (D_1 D_3 \sinh \mu_1 m - D_3 E_1 \sinh j \mu_2 m)^2 \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Substituieren wir jetzt (15) in (13) und die so gefundenen Koeffizienten A in (8), so bekommen wir die Lösung $V_n = f(V_0, V_m)$:

$$\left. \begin{aligned}
 V_n &= \frac{1}{(D_3 - D_1)} \left\{ V_0 \left\{ D_3 \frac{\sinh \mu_1 (m-n)}{\sinh \mu_1 m} - D_1 \frac{\sinh \mu_2 (m-n)}{\sinh \mu_2 m} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + V_m \left\{ D_3 \frac{\sinh \mu_1 n}{\sinh \mu_1 m} - D_1 \frac{\sinh \mu_2 n}{\sinh \mu_2 m} \right\} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Koeffizienten B sind aus (13) und (6) bekannt als $f(J_0, J_{m+1})$; mit Hilfe von (15) als $f(V_0, V_{m+1})$.

Die Lösung $J_n = f(V_0, V_m)$ wird:

$$J_n = \frac{D_1 D_3}{2(D_1 - D_3)} \left[V_0 \left\{ \frac{\cos h \mu_1 \left(m - n + \frac{1}{2} \right)}{\sin h \mu_1 m \sin h \frac{\mu_1}{2}} + \frac{\cos \mu_2 \left(m - n + \frac{1}{2} \right)}{\sin \mu_2 m \sin \frac{\mu_2}{2}} \right\} - V_m \left\{ \frac{\cos h \mu_1 \left(n - \frac{1}{2} \right)}{\sin h \mu_1 m \sin h \frac{\mu_1}{2}} + \frac{\cos \mu_2 \left(n - \frac{1}{2} \right)}{\sin \mu_2 m \sin \frac{\mu_2}{2}} \right\} \right] \quad (18)$$

Es muß bemerkt werden, daß diese allgemeine Lösung übergeht in die von Wagner, wenn man

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = E \\ V_m = 0 \end{array} \right\}$$

setzt.

Folglich sehen wir, daß Wagners Lösung den beiden Bedingungen (4) nicht widerspricht. Die Ursache hiervon ist, daß mit diesen zwei Gleichungen (4) auch zwei unbekannte Größen, J_0 und J_{m+1} eingeführt werden.

Wenn wir die beiden Reihen von Gleichungen (1) und (3) ohne die beiden unter (4) lösen wollen, dürfen wir also wieder zwei Größen, z. B. V_0 und V_m wählen. Die Beziehungen zwischen J_0 , J_{m+1} und V_0 , V_m werden von den zwei nicht gebrauchten Gleichungen (4) geliefert.

Eigenfrequenzen.

Aus meiner allgemeinen Lösung von Wagners Kettenspule läßt sich auf einfacher Weise beweisen:

1. Es gibt Eigenfrequenzen der 1. Art;
2. Es gibt Eigenfrequenzen der 2. Art;
3. Die Eigenfrequenzen der 2. Art liegen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Frequenzen der 1. Art;
4. Auf Grund der Experimente von Geiß (Erden des Endes der Spule) sollen unsere Eigenfrequenzen der 1. Art etwa die Hälfte von denen sein, die Wagner fand.

Bei den Frequenzen 1. Art hat die Spannung des Spulenansangs das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Spannung des Spulenendes. Wir dürfen also schreiben $V_0 = E$ und $V_m = -E$.

Die Spannungsverteilung wird jetzt [siehe (17)]:

$$V_n = \frac{E}{D_3 - D_1} \left[D_3 \frac{\sin h \mu_1 \left(\frac{m}{2} - n \right)}{\sin h \mu_1 \frac{m}{2}} - D_1 \frac{\sin \mu_2 \left(\frac{m}{2} - n \right)}{\sin \frac{\mu_2 m}{2}} \right] \quad (19)$$

$V_n = \infty$, die Bedingung für Eigenfrequenzen, wenn

$$\sin \frac{\mu_2 m}{2} = 0. \quad (20)$$

($D_3 - D_1 = 0$ gibt imaginäre Frequenzen)

oder:
$$\frac{\mu_2 m}{2} = K \pi,$$

k eine ganze Zahl.

$$\frac{\mu_2}{2} = \frac{k \pi}{m}.$$

Mit Hilfe von (7):

$$\omega_{K1} = \frac{2 \sin \frac{k \pi}{m}}{\sqrt{\left(L - 4 M \sin^2 \frac{k \pi}{m}\right) \left(C + 4 K \sin^2 \frac{k \pi}{m}\right)}}. \quad (21)$$

Diese Formel gibt eine Serie von Eigenfrequenzen, die der 1. Art; es zeigt sich, daß den beiden Prämissen 1⁰ und 4⁰ genügt ist. Solange es sich um kleine Werte der $\sin \frac{k \pi}{m}$ handelt, sind diese Frequenzen etwa die Hälfte von denen, die Wagner fand, d. h.:

$$\omega_K = \frac{2 \sin \frac{k \pi}{2m}}{\sqrt{\left(L - 4 M \sin^2 \frac{k \pi}{2m}\right) \left(C + 4 K \sin^2 \frac{k \pi}{2m}\right)}}.$$

Um die Eigenfrequenzen der 2. Art zu finden, dürfen wir $V_0 = V_m = E$ setzen, wodurch diese charakterisiert sind. Die Spannungsverteilung wird jetzt [siehe (17)]:

$$V_n = \frac{E}{D_3 - D_1} \left[D_3 \frac{\cosh \mu_1 \left(\frac{m}{2} - n\right)}{\cosh \frac{\mu_1 m}{2}} - D_1 \frac{\cosh \mu_2 \left(\frac{m}{2} - n\right)}{\cosh \frac{\mu_2 m}{2}} \right].$$

Und wieder wird $V_n = \infty$, wenn

$$\cosh \frac{\mu_2 m}{2} = 0,$$

oder

$$\frac{\mu_2 m}{2} = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad \frac{\mu_2}{2} = \pi \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)}{m}.$$

Ebenso mit Hilfe von (7):

$$\omega_{K2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\{L - 4 M \sin^2 \frac{\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right\} \left\{C + 4 K \sin^2 \frac{\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right\}}}.$$

Diese Formel gibt die Eigenfrequenzen zweiter Art; der Prämisse 2 ist also genügt, und weil

$$k < k + \frac{1}{2} < k + 1$$

auch der unter 3⁰. Die Eigenfrequenzen der zweiten Art befinden sich immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden der ersten Art.

Hiermit ist gezeigt, daß es zwischen den Lösungen von Lenz, Rogowski und Wagner keinen wesentlichen Unterschied gibt. Die drei untereinander so sehr verschiedenen Rechnungsweisen zeigen alle dasselbe Verhalten der Spule.

Kritische Frequenz.

Nur in diesem Punkte gibt Wagners Lösung noch einen wesentlichen Unterschied. Bisher hat sich experimentell das Vorhandensein einer Maximum-Eigenfrequenz noch nicht gezeigt. (Geiß und A. Gothe, A. f. E., IX., 1920, S. 1.)

Wagner betont diese Eigenschaft der Spule besonders; er schreibt (A. f. E., VI., S. 325, 7. Abs.):

„Das wichtigste Kennzeichen einer Spule ist das Vorhandensein einer sogenannten kritischen Frequenz. Wellen von niedriger Frequenz läßt die Spule im wesentlichen ungeschwächt durch, während sie Wellen, deren Frequenz oberhalb der kritischen liegt, kaum eindringen läßt.“

Wie Wagner diese kritische Frequenz aus seiner Rechnung findet, ist ganz richtig; auf dieselbe Weise findet man sie aus unserer Lösung. Die Tatsache aber, daß der Spule dieses wichtige Kennzeichen fehlt, hat ihren Grund darin, daß Wagner sie mit seinem Kettenschema einführt, daß er die Spule in einzelne Windungen unterteilt. Mit diesem Schema muß man notwendig eine solche Grenzfrequenz finden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Denken wir uns die Spule schwingend mit einer ihrer Eigenfrequenzen, so findet man auf ihr z. B. in verschiedenen Punkten keinen Strom. Links und rechts von solch einem Knotenpunkte bewegen die beiden Ströme sich dahin oder davon.

Daraus, daß Wagner den Strom auf verschiedenen Stellen einer Windung als denselben annimmt, geht hervor, daß der Stromknotenpunkt nur auf der Verbindungsstelle zweier Windungen sich befinden kann. Damit ist aber die maximale Anzahl dieser Knotenpunkte bestimmt. Ihre kleinste Entfernung voneinander ist die Windungslänge, weil sie nicht weiter aneinander rücken können.

In diesem Falle besteht Stromresonanz zwischen der Kapazität K und Induktivität L einer Windung; der Strom, der durch die Erdkapazität C fließt, wird dabei vernachlässigt, weil er außerordentlich klein ist. Im Beispiel von Wagner ist C etwa $\frac{1}{4000}$ von K .

Das Finden einer kritischen Frequenz hat also seine Ursache in der Verteilung der Spule in einzelne Windungen und in der Annahme konstanten Stromes innerhalb dieser.

Für niedrige Frequenzen darf dieses gestattet werden, aber nicht für die hohen, bei denen eine Grenzfrequenz auftreten soll.

Bei einer wirklichen Spule kann die Entfernung von zwei Stromknotenpunkten kleiner werden als die Windungslänge, und je näher sie aneinander liegen, desto größer wird der Unterschied sein zwischen Strömen in verschiedenen Punkten einer Windung.

Dennoch wird es eine besondere Frequenz in der Nähe von Wagners kritische Frequenz geben. Nehmen wir dazu die Spule, wie Lenz sie vereinfacht hat. Dieser denkt die Windungen vereint zu einem kontinuierlichen Zylinder, auf dem die Elektrizität bei der ersten Eigenfrequenz zwischen den beiden Enden hin- und herschwingt. Es läßt sich dann beweisen, daß die höheren Eigenfrequenzen harmonisch liegen. (O. Scàsz, A. d. P. 43.)

Aber auch in diesem Falle hat die Berechnung wenig Wert. Für solche hohe Frequenzen darf man die Windungen sich nicht mehr verschmelzen lassen, weil der Strom auf einer Windung nicht konstant ist.

Am besten sieht man dieses ein, wenn man sich auf jeder Windung zwei Stromknotenpunkte denkt, einen auf der linken Seite, wo sich also eine z. B. positive Ladung befindet, und einen auf der rechten Seite mit einer negativen Ladung.

Sind alle Windungen in derselben Lage, so befindet sich jetzt auf der ganzen linken Seite der Spule positive Ladung, während die rechte negative trägt.

Die Elektrizität schwingt also zwischen der linken und rechten Seite hin und her. Das Bild des elektrischen Feldes hat sich ganz geändert; die Schwingung findet von dieser Frequenz ab in der Querrichtung der Spule statt, und nicht mehr, wie Lenz auch für seine höheren Frequenzen annimmt, in der Längsrichtung.

Die Methode, befolgt von Rogowski für Spulen von wenig Windungen muß bei hohen Frequenzen in dieser Hinsicht richtige Ergebnisse geben.
