

Bemerkung über den Malus'schen Satz.

Von Prof. H. Bruns.

Bei der Behandlung einer optischen Aufgabe bin ich auf eine Consequenz des Malus'schen Satzes gestossen, von der ich nicht weiss, ob sie bereits bekannt ist, und die ich deshalb in Kürze mittheilen will.

Gegeben sind zwei Räume r und R , die strahlenweise auf einander abgebildet sind, d. h. jedem geradlinigen Strahl s in r soll ein Strahl S in R entsprechen und umgekehrt. Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns in r und R je ein rechtwinkliges Axensystem (xyz) und (XYZ) festgesetzt, bezeichnen die Richtungscosinus von s mit m, p, q , die von S mit M, P, Q und schreiben die Gleichungen der beiden Strahlen in der Form

$$\frac{x}{m} = \frac{y-h}{p} = \frac{z-k}{q},$$

$$\frac{X}{M} = \frac{Y-H}{P} = \frac{Z-K}{Q}.$$

Die Durchschnitte von s und S mit den zugehörigen yz - und YZ -Ebenen sind dann durch

$$x = 0, \quad y = h, \quad z = k$$

$$X = 0, \quad Y = H, \quad Z = K$$

gegeben, und die gemachte Voraussetzung besagt, dass die H, K, P, Q bestimmte Functionen von h, k, p, q sind und umgekehrt. Man kann also ansetzen

$$H = A(h, k, p, q),$$

$$K = B(h, k, p, q),$$

$$P = C(h, k, p, q),$$

$$Q = D(h, k, p, q),$$

wo die Functionaldeterminante der A, B, C, D , gebildet nach den h, k, p, q , nicht identisch verschwindet.

Weiter denken wir uns in r eine beliebige Fläche

gegeben und sehen die Schaar der Normalen dieser Fläche als ein Strahlenbüschel an. Dann ist das Büschel der entsprechenden Strahlen S im Allgemeinen nicht wieder Normalenschaar, vielmehr müssen, damit dies der Fall sei, die Functionen A, B, C, D gewissen Bedingungen genügen. Wir wollen nun annehmen — und dies ist die zweite Voraussetzung, die wir machen — dass jedesmal, wenn ein Büschel in r zugleich Normalenschaar einer Fläche ist, diese Eigenschaft auch dem zugehörigen Büschel in R zukomme.

Dies vorausgeschickt gelten folgende Sätze. Die Functionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial h} & \frac{\partial A}{\partial k} & \frac{\partial A}{\partial p} & \frac{\partial A}{\partial q} \\ \frac{\partial B}{\partial h} & \frac{\partial B}{\partial k} & \frac{\partial B}{\partial p} & \frac{\partial B}{\partial q} \\ \frac{\partial C}{\partial h} & \frac{\partial C}{\partial k} & \frac{\partial C}{\partial p} & \frac{\partial C}{\partial q} \\ \frac{\partial D}{\partial h} & \frac{\partial D}{\partial k} & \frac{\partial D}{\partial p} & \frac{\partial D}{\partial q} \end{vmatrix}$$

ist von der Wahl der Coordinatenachsen unabhängig, im Falle einer reellen Abbildung wesentlich positiv, und unabhängig von den h, k, p, q , also eine für die Abbildung charakteristische Constante. Setzt man

$$\sqrt{\Delta} = n : N,$$

wo n und N ebenfalls constant sind, so existiren vier Functionen

$$T(h, k, H, K), \quad U(h, k, P, Q)$$

$$V(p, q, H, K), \quad W(p, q, P, Q)$$

deren jede die Abbildung vollständig bestimmt und zwar durch die vier folgenden Gleichungssysteme.

Aus T :

$$-p = \frac{\partial T}{\partial(nh)}, \quad -q = \frac{\partial T}{\partial(nk)}, \quad P = \frac{\partial T}{\partial(NH)}, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial(NK)}$$

Aus U :

$$p = \frac{\partial U}{\partial(nh)}, \quad q = \frac{\partial U}{\partial(nk)}, \quad NH = \frac{\partial U}{\partial P}, \quad NK = \frac{\partial U}{\partial Q}.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Aus } V: \quad n h = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad n k = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad P = \frac{\partial V}{\partial (NH)}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial (NK)}. \\
 & \text{Aus } W: \quad -n h = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad -n k = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad NK = \frac{\partial W}{\partial P}, \quad NK = \frac{\partial W}{\partial Q}.
 \end{aligned}$$

Diese vier einander äquivalenten Gleichungssysteme besagen, dass zwischen den Grössen

$$n h, n k, p, q \text{ und } NH, NK, P, Q$$

eine Berührungstransformation besteht.

Wir übertragen diese Sätze jetzt auf den Fall eines optischen Systems, d. h. einer Folge von optischen Medien, die durch irgend welche Flächen gegen einander abgegrenzt sind. Die erste der beiden oben genannten Voraussetzungen besagt, dass erstes und letztes Medium homogen sein sollen, also z. B. Luft und Luft für irgend ein optisches Instrument, wie Mikroskop, Prismensystem und dergleichen. Die zweite Voraussetzung trifft zu, wenn der Strahlengang durch die einzelnen Medien hindurch nach den bekannten Gesetzen der regelmässigen Brechung und Spiegelung erfolgt. Die Aussage, dass die Voraussetzung in diesem Falle gelte, bildet eben den Inhalt des bekannten Satzes von Malus. Bei einem solchen optischen System wird also die Beziehung zwischen den Strahlen im ersten und letzten Medium vollständig beherrscht durch eine einzige bestimmte Function von vier Variablen, wofür man z. B. T nehmen kann, da die drei andern, U, V, W in einfacher Weise aus T abzuleiten sind. Allen Besonderheiten der Abbildung entsprechen bestimmte Besonderheiten der Abbildungsfuction T und umgekehrt.

Theilt man die Theorie der optischen Instrumente

(Linsen- und Prismensysteme) in zwei grosse Abschnitte, je nachdem der Astigmatismus der Strahlenbüschel vernachlässigt oder berücksichtigt wird (erste resp. zweite Annäherung), so gilt Folgendes. Bei der ersten Annäherung entspricht jedem leuchtenden Punkt im ersten Medium ein homocentrisches Strahlenbüschel im letzten Medium, nebst dem dazu gehörigen, reellen oder virtuellen Bildpunkt. Alle Beziehungen zwischen Object und Bild sind dann in dem einen Satz enthalten, dass Object und Bild zu einander collinear sind.*) Die besondere Beschaffenheit des optischen Systems ist dabei vollkommen gleichgültig, wesentlich ist nur, dass der Astigmatismus vernachlässigt wird. Bei der zweiten Annäherung wird der Astigmatismus nicht mehr vernachlässigt; an die Stelle des Satzes von der collinearen Beziehung tritt dann der obige Satz von der Berührungstransformation. Die besondere Beschaffenheit des optischen Systems ist dabei wieder gleichgültig; n und N werden die Brechungsindices des ersten und des letzten Mediums.

Durch die Einführung der Abbildungsfuctionen T, U, V, W wird für die geometrische Optik offenbar dasselbe geleistet, was man in andern Theilen der Physik durch die Einführung des Potentials erreicht, nämlich eine Reduction der zu untersuchenden Beziehungen auf ihre mathematisch einfachste Form.

Eine weitere Ausführung hierzu werde ich an anderer Stelle geben.

Leipzig 1894 Juni 2.

H. Bruns.

*) Vergleiche die Darstellung in dem Buche von Czapski »Theorie der optischen Instrumente nach Abbe«, Breslau, E. Trewendt, 1893.

Döllens's Methode der Breitenbestimmung in der Nähe des ersten Verticals.

Von B. Wanach.

Der Aufsatz von Dr. R. Schumann in Nr. 3208 der A. N. veranlasst mich, im Einverständniss mit Herrn Geheimrath Döllen, die Methode des letzteren zur Breitenbestimmung in der Nähe des ersten Verticals allgemeiner bekannt zu machen, als es durch eine in russischer Sprache*) erschienene Abhandlung von Witkowsky geschehen konnte. Die von Dr. Schumann besprochene Methode hat zwar die beiden Vorzüge, dass die Beobachtungen noch weniger Zeit beanspruchen, und dass die Declinationsgrenzen für brauchbare Zenithsterne weitere sind; dagegen zeichnet sich die Döllens'sche Methode durch grosse Eleganz und viel vollständigere Elimination der Instrumentalfehler aus, während die Reductions- und Vorbereitungsrechnungen mir noch weniger Zeit zu beanspruchen scheinen; über letzteren Punkt

kann ich zwar kein bestimmtes Urtheil fällen, da mir bisher die Zeit fehlt, mich praktisch mit der von Schumann empfohlenen Methode ebenso vertraut zu machen, wie mit der Döllens'schen.

Döllens's Grundidee ist folgende. Ein Stern mit kleiner nördlicher Meridianzenithdistanz ($\delta - \varphi = 2'$ bis $100'$) erreicht für ein Passageninstrument mit grossem Collimationsfehler vier scheinbare Elongationen statt der zwei bei $c = 0$ eintretenden, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist. Der erforderliche grosse Collimationsfehler wird durch den beweglichen Verticalfaden erhalten, und man misst die Elongationen durch wiederholte Einstellungen des Sterns in der Umgebung jeder Elongation, während das jeweilige Azimuth entweder, wenn das Instrument einen feingetheilten

*) In den Schriften der topographischen Abtheilung des russischen Generalstabs, Theil XL, 1885.