

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XIII.

I. Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte; von H. Helmholtz.

(Aus den Berl. Monatsber. vom 17. Febr. 1881 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Weiches Eisen, in die Nähe eines Magnets gebracht, zeigt selbst Abstossungen und Anziehungen kleiner magnetischer oder magnetisirbarer Körper, die es vorher nicht zeigte. Um diese zu erklären, nimmt man eine gewisse Vertheilung des Magnetismus in den Moleculen des Eisens an. Faraday zeigte später, dass Wirkungen dieser Art nicht blos im Eisen, sondern in fast allen bekannten Körpern in sehr viel geringerer Stärke und zum Theil auch in entgegengesetztem Sinne nachzuweisen sind, und dass genau ähnliche Erscheinungen, die auf eine Vertheilung entgegengesetzter Electricitäten in den Moleculen electrischer Isolatoren hindeuten, durch electrische Anziehungskräfte hervorgerufen werden. Mathematisch wurden diese Erscheinungen von Poisson zuerst für das Gebiet des Magnetismus unter verhältnissmässig einfache Gesetze zusammengefasst, die wenigstens für mässige Stärken der Magnetisirung, und soweit sich nicht Wirkungen der reibungsähnlichen Coërcitivkraft einmischen, den Gang der Erscheinungen gut darstellen. Dieselben allgemeinen Gesetze lassen sich auch auf die schwächeren magnetischen Wirkungen in den paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen anwenden, und ebenso auf die electrische Polarisirung der Dielectrica, soweit in letzteren nicht Leitung und die der Leitung verwandt erscheinende Rückstandsbildung Zeit haben, sich zu entwickeln.

Die Erscheinungen, an denen Poisson seine Theorie ausbildete, waren Bewegungen starrer Magnete und magne-

tisirbaren Eisens im Luftraume. Später ist die Theorie von Sir W. Thomson auch auf die Bewegungen starrer Körper in magnetisirbaren Flüssigkeiten ausgedehnt worden mit Beziehung auf Faraday's diamagnetische Versuche. Sobald sich die Molecüle magnetisch oder electricisch polarisirter Medien gegeneinander verschieben können, wie in Flüssigkeiten oder in biegsamen elastischen Körpern, so kommen neben den ursprünglich angenommenen Fernkräften noch nothwendig moleculare Wirkungen in Betracht. Die in Richtung der Kraftlinien hintereinander liegenden Molecüle kehren einander befreundete Pole zu und müssen sich gegenseitig anziehen, die seitlich nebeneinander liegenden werden sich gegenseitig abstossen. Die bekannte Theorie der magnetischen Fernwirkung zeigt, dass parallel gerichtete kleine Magnete sich anziehen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen spitzen Winkel mit der magnetischen Axe beider macht, der kleiner ist als $54^{\circ}44'$ ($\text{arc cos } 1/\sqrt{3}$), sich abstossen, wenn der spitze Winkel grösser ist. Damit in Uebereinstimmung ist Faraday's Voraussetzung, dass in den magnetisch oder dielectricisch polarisirten Medien ein Zustand von Spannung bestehe in Richtung der Kraftlinien, infolge dessen sich diese zu verkürzen streben, während quer gegen die genannten Linien ein Druck wirke, der die Substanz in dieser Richtung auseinander treibe. Sir W. Thomson¹⁾ hat schon 1843 den Beweis geführt, dass Kräfte dieser Art dieselben Wirkungen hervorbringen können, wie die directen Fernwirkungen nach der Theorie von Coulomb, und Cl. Maxwell hat diese Annahme von Faraday zur Grundlage seiner ganzen Theorie der Electricität und des Magnetismus gemacht. Die jüngst veröffentlichten Versuche von Hrn. Quincke zeigen in sehr auffallender Weise das Bestreben electricischer Isolatoren, sich quer gegen die Richtung der electricischen Kraftlinien zu dehnen, wenn auch diese Versuche über das Verhalten in Richtung der Kraftlinien noch Zweifel bestehen lassen.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, dass, wenn

1) Thomson, Cambridge Mathem. Journ. May 1843. — Reprint. Art. VII. § 147.

die Consequenzen von Poisson's Theorie auch nur in der angegebenen Ausdehnung, d. h. in ihrer Anwendung auf die Bewegungen starrer Körper im Luftraume als thatsächlich richtige Beschreibung der beobachtbaren Erscheinungen angesehen werden, und das Gesetz von der Constanz der Energie für dieses Gebiet von Erscheinungen als gültig betrachtet wird, dieses Gesetz allein ohne alle Zuziehung von Hypothesen über die innere Constitution der electricisch oder magnetisch polarisirten Körper es möglich macht auch die ponderomotorischen Kräfte zu finden, welche auf die inneren Theile solcher Körper einwirken und bei Formänderungen derselben sich geltend machen. Es ergibt sich dabei in der That, dass das von Faraday angenommene System von Spannungen längs der Kraftlinien und Drucken quer dagegen im Inneren solcher Körper wirksam sein muss. Die einzige Abweichung, welche meine Analyse gegen die von den Herren W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten Formeln zeigt, ist, dass sie noch eine zweite Constante eintreten macht, durch welche das Verhältniss zwischen den Grössen jener Drucke und Spannungen von der Art der Substanz abhängig gemacht wird.¹⁾

§ 1. Die Arbeit bei Bewegungen starrer polarisirter Körper im Luftraum.

Da die hierher gehörigen Probleme bei ihrer Anwendung auf Electricität etwas andere Form erhalten als bei Poisson's ursprünglicher Anwendung derselben auf Magnetisirung, so will ich im Folgenden zunächst die Benennungen der Electricitätslehre anwenden. Die Uebertragung auf Magnete erfordert nachher nur unerhebliche Aenderungen. Es mögen λ , μ , ν die Componenten der dielectricischen Momente eines polarisirten Isolators sein, berechnet für die Volumeneinheit seiner Substanz, parallel den Axen der x , y , z genommen; ausserdem möge ε die Raumdichtigkeit, e die Flächendichtigkeit von aussen zugeleiteter Elec-

1) Meine in Bd. 72 von Borchardt's Journ. für r. u. a. Mathematik gegebene Darstellung passt, dem dortigen Zwecke entsprechend, nur auf die innerhalb eines ponderablen Trägers fortgleitende Electricität.

tricität in seinem Inneren oder an seiner Oberfläche bedeuten, und φ die Potentialfunction aller freien, d. h. nicht durch die Polarisirung der Substanz neutralisirten Electricität sein, so wären die nach Poisson's Vorgang zu bildenden Gleichungen, welche die Abhängigkeit der genannten Grössen voneinander ausdrücken:

$$(1) \quad \lambda = -\mathcal{J} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\mathcal{J} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\mathcal{J} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die Raumdichtigkeit der freien Electricität wird sein:

$$(1^a) \quad \epsilon = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi = \epsilon - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z},$$

und die Flächendichtigkeit, wenn N_1 und N_2 die auf der Fläche nach beiden Seiten hin errichteten Normalen sind, und N_1 mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel a_1 , b_1 , c_1 macht:

$$(1^b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \right] \\ = \epsilon - (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \cos a_1 - (\mu_1 - \mu_2) \cdot \cos b_1 - (\nu_1 - \nu_2) \cdot \cos c_1. \end{array} \right.$$

Die ponderomotorischen Kräfte, welche wirksam werden, wenn einer der electrisirten Körper, den wir mit A bezeichnen wollen, bewegt wird, sind nach Poisson's Annahme gleich den Fernkräften, welche die gesammte vorhandene freie Electricität der übrigen Körper auf die jedes einzelnen ausübt. Das virtuelle Moment dieser Kräfte bei wirklich eintretenden Verschiebungen oder die Arbeit, welche die genannten Kräfte bei solcher Verschiebung verrichten, wird infolge dessen gegeben durch die Aenderung, die durch die Verschiebung im Werthe des Potentials P aller freier Electricität gegeneinander eintritt, während diese selbst in jedem Punkte des bewegten Körpers als unverändert betrachtet wird. Dieses Potential ist:

$$(1^c) \quad P = \frac{1}{2} \iiint \varphi \cdot \epsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \int \varphi \cdot \mathfrak{E} \cdot d\omega,$$

und seine Aenderung bei eintretender Bewegung wird sein:

$$(1^d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta P = \frac{1}{2} \iiint \epsilon \cdot \delta \varphi \cdot dx \cdot dz + \frac{1}{2} \int \mathfrak{E} \cdot \delta \varphi \cdot d\omega, \\ = -\frac{1}{8\pi} \iiint \Delta \varphi \cdot d\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \right) \delta \varphi \cdot d\omega. \end{array} \right.$$

Hierin bedeutet $\delta \varphi$ die Aenderung, welche in dem betreffenden Punkte des bewegten Körpers sowohl durch seine eigene

Bewegung wie durch die aller anderen Punkte eintritt, in deren jedem die freie Electricität als unveränderlich betrachtet wird. Würde unter $\delta\varphi$ nur die durch die eigene Bewegung des betreffenden Punktes erzeugte Aenderung verstanden, so wäre der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen.

Poisson's Theorie hat, wie schon bemerkt, als Grundlage nur die Erfahrungen, welche bei der Bewegung starrer magnetisirter Körper im Luftraume gemacht waren. Um nun auch in allgemeineren Fällen die Grösse der bei der Bewegung electrisirter Körper aufzuwendenden Arbeit berechnen zu können, habe ich den Integralen, welche den Werth der Energie ausdrücken, eine besondere Form gegeben. Im allgemeinen kommt darin eine ganze Reihe verschiedener Grössen vor, Potentialfunctionen, Momente, Dichtigkeiten, die durch die Gleichgewichtsbedingungen voneinander abhängig sind, und man kann mittels der letzteren Bedingungen bald die eine, bald die andere der genannten Grössen aus dem Werthe der Energie eliminiren oder auch in ihn einführen. Unter allen diesen Formen gibt es nun eine, welche ich die Normalform nennen möchte, bei der die Variation ersten Grades des betreffenden Integrals, welche einer willkürlichen Variation der abhängigen und bei Herstellung des Gleichgewichts sich verändernden Grössen entspricht, gleich Null wird. Bei der Anwendung einer solchen Form hat man den Vortheil, dass bei Berechnung der Aenderung des Arbeitswerthes infolge irgend einer anderen Einwirkung die dabei eintretenden Aenderungen jener erstgenannten Grössen ausser Betracht gelassen werden können, eben weil die durch ihre Aenderung bewirkte Arbeit gleich Null ist.

In unserem Falle bilden wir das über den unendlichen Raum zu erstreckende Integral:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \iiint \left\{ \varphi \cdot \varepsilon + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2\varphi} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot e \cdot d\omega, \end{aligned} \right.$$

mit den Bedingungen, dass $\delta\mathfrak{B} = 0$, im Falle λ , μ , ν oder φ variirt werden. Ich will das hier und in der Folge so schreiben:

$$(2^a) \quad \delta_\lambda \mathfrak{B} = \delta_\mu \mathfrak{B} = \delta_\nu \mathfrak{B} = \delta_\varphi \mathfrak{B} = 0.$$

Führen wir diese Variationen aus, so erhalten wir in der That die oben unter (1), (1^a) und (1^b) aufgeführten Bedingungsgleichungen.

Um zu berechnen, welche Aenderung im Werthe von \mathfrak{B} bei Lagenänderungen eines oder mehrerer der electrisirten starren Körper eintritt, wollen wir zunächst annehmen, dass dabei nicht blos die Grössen ε und e , sondern auch λ , μ , ν in jedem materiellen Punkte und Volumenelement der betreffenden Körper ihre Werthe unverändert behalten, dann würde auch überall der Werth der durch die Gleichungen (1^a) und (1^b) bestimmten freien Electricität, beziehlich der Grössen $\Delta\varphi$ und $(\partial\varphi/\partial N_1 + \partial\varphi/\partial N_2)$ in jedem materiellen Punkte unverändert bleiben, φ aber sich ändern wegen der geänderten räumlichen Verhältnisse. Um die entsprechende Variation von \mathfrak{B} zu finden, würden wir den Betrag der zu integrirenden Grössen für jedes Volumenelement der betreffenden Körper vor und nach der Verschiebung zu vergleichen haben, nachdem wir den Theil:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &= - \int \frac{1}{8\pi} \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} d\omega - \int \frac{1}{8\pi} \varphi \cdot \Delta\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

aus der ersten in die zweite Form umgeschrieben haben. Dann sind die Integrale nur über das Innere der electrisirten Körper zu erstrecken, da λ , μ , ν , $\Delta\varphi$ in dem zwischen diesen liegenden Raum in Poisson's Theorie gleich Null gesetzt werden, und es wird:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{B} &= \iiint \delta\varphi \cdot \left\{ \varepsilon - \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \Delta\varphi \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &+ \int \delta\varphi \cdot \left\{ e - \lambda \cdot \cos a - \mu \cdot \cos b - \nu \cdot \cos c + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Gleichungen (1^a) und (1^b) führt dies auf die in (1^d) gefundene Form:

$$\delta\mathfrak{B} = - \iiint \frac{1}{8\pi} \cdot \delta\varphi \cdot \Delta\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \int \frac{\delta\varphi}{8\pi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \delta P.$$

Das heisst die Zunahme des \mathfrak{B} bei der vorausgesetzten Aenderung ist gleich der Zunahme, welche das Potential sämmt-

licher vorhandenen freien Electricität durch dieselbe Lagenänderung erfahren würde, wenn diese an den ponderablen Theilen festhaftete. Wegen der besonderen Eigenschaften der Function \mathfrak{B} ändert sich dieser Werth nicht mehr, wenn man nachträglich in der zweiten Lage die dem neuen Gleichgewichte entsprechende Grösse der Momente λ, μ, ν eintreten lässt. Also auch, wenn man für \mathfrak{B} die den Gleichgewichtsbedingungen (2^a) entsprechenden Werthe der abhängenden Veränderlichen $\lambda, \mu, \nu, \varphi$ als fortdauernd gültig voraussetzt, wird bei Lagenänderungen der einzelnen starren Körper sein:

$$\mathfrak{B} - P = \text{Const.},$$

wobei P die Arbeit bedeutet, welche zur Ueberwindung der ponderomotorischen Kräfte der Electricität bei Lagenänderungen der betreffenden starren Körper aufzuwenden ist. Es geht hieraus also auch hervor, dass diese Arbeit trotz der Veränderlichkeit der electricischen Vertheilung nur abhängt von der Anfangs- und Endlage der betreffenden Körper, nicht von dem Wege, auf dem man sie aus der einen in die andere Lage geführt hat.

Uebrigens ist noch zu beachten, dass auch für Aenderungen in der Vertheilung der eingeleiteten Electricität ε und e die Aenderung von \mathfrak{B} :

$$\delta \mathfrak{B} = \iiint \varphi \cdot \delta \varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot \delta e \cdot d\omega$$

wiederum gleich ist der Arbeit, welche man hätte aufwenden müssen, um in leitenden Drähten durch passend angebrachte electromotorische Kräfte die bewegten Quanta $\delta \varepsilon$ und δe zwischen Orten von verschiedenen Potentialwerthen φ fortzuleiten.

Setzen wir die aus den Gleichungen (1), (1^a) und (1^b) sich ergebenden Werthe von $\lambda, \mu, \nu, e, \varepsilon$ in die Gleichung (2), so erhalten wir die für den Fall des hergestellten Gleichgewichts geltenden Formen des Werthes von \mathfrak{B} :

$$(2^b) \quad \mathfrak{B}_b = \frac{1}{2} \iiint \varphi \cdot \varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \int \varphi \cdot e \cdot d\omega.$$

$$(2^c) \quad \mathfrak{B}_c = \iiint \frac{1 + 4\pi \vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

Die Combination:

$$(2^a) \quad \mathfrak{B} = 2\mathfrak{B}_b - \mathfrak{B}_c \quad \text{mit der Bedingung:} \quad \delta_\varphi \mathfrak{B} = 0$$

ist wieder eine Normalform, aus der λ , μ , ν ausgeschieden sind.

Aus der Form (2^b) folgt, dass $\mathfrak{B} = 0$ wird, wenn die Körperelemente, welche angesammelte Electricität enthalten, voneinander und von den übrigen in unendliche Entfernung gebracht sind.

Die Grösse \mathfrak{B} ist also das Maass der Arbeit, welche verwendet werden muss, um die entsprechende Anordnung der electrisirten Körper herzustellen, wenn die Quanta freier Electricität sich zuerst unter dem Potentialwerthe Null befunden haben. Dies ist anwendbar auf jede Art von Electricisirung, welche durch beliebige Vertheilung zugeleiteter electrischer Quanta im Inneren oder an der Oberfläche der betreffenden Körper entstehen kann.

Im Falle unter den electrisirten Körpern auch Leiter sind, wird innerhalb jedes Leiters auch ϵ , beziehlich e variabel, aber so, dass die in der ganzen Ausdehnung des Leiters enthaltene gesammte Quantität der Electricität unverändert bleibt, d. h. es ist innerhalb des Leiters zu setzen:

$$\delta \mathfrak{B} + C f f f \delta \epsilon . dx . dy . dz + C f \delta e . d\omega = 0.$$

Die aus der Variation hierbei folgenden Bedingungen sind:

$$0 = \delta \epsilon \{ \varphi + C \}, \quad 0 = \delta e \{ \bar{\varphi} + C \},$$

die für die Ausdehnung jedes zusammenhängenden Leiters gelten. Für getrennte Leiter sind verschiedene voneinander unabhängige Constanten C anzuwenden.

Uebrigens kommt man genau zu demselben Resultate, wenn man die Quantität von Electricität, die der Leiter enthalten soll, in ihm als festliegende Masse ϵ annimmt und dann $\vartheta = \infty$ setzt. Um den Werth von \mathfrak{B} in (2_c) zum Minimum zu machen, wird unter diesen Umständen, so weit $\vartheta = \infty$ ist, sein müssen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = C,$$

und das Quantum der im Leiter enthaltenen Electricität wird durch die eintretende dielectriche Polarisirung desselben nicht geändert. Wenn wir diese Form der Behandlung des Problems wählen, wird also der Fall der Leiter als Grenzfall in die bisherigen Rechnungsformen mit eingeschlossen.

Bei der Anwendung auf magnetische Vertheilung kann im ganzen genau ebenso verfahren werden, nur würden die Quanta ϵ und e als festliegend in den Gegenden der Pole unveränderlicher Magnete angesehen werden müssen, und das Gesamtquantum derselben in jedem Magnet gleich Null zu setzen sein. Die aufgestellten Gleichungen würden den Fall mit umfassen; dass neben dem unveränderlichen Magnetismus, der den Quantis ϵ und e entspricht, in der Masse des Magneten sich durch Induction temporärer Magnetismus entwickelt.

Die Function \mathfrak{B} , berechnet für Gleichgewichtszustand in den polarisirten Körpern, kann auch auf die Form gebracht werden:

$$(2^e) \quad \mathfrak{B} = \iiint \left(1 + \frac{4\pi}{9} \vartheta \right) [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{oder:}$$

$$(2^f) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz + \\ &+ \iiint \frac{1}{2\vartheta} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned} \right.$$

In der letzteren Form ist das erste Integral die Arbeit der freien Electricität, nach ihrer Wirkung im Luftraume berechnet, das zweite der Betrag, den die Polarisirung der dielectriche Substanzen hinzufügt. Die Form (2^e) entspricht der Theorie von Faraday, wonach auch im Luftraume Polarisirung stattfindet. Soll sie auf den Luftraum mit der Annahme $\vartheta = \lambda = \mu = \nu = 0$ angewendet werden, so ist hier für λ/ϑ u. s. w. die electriche Kraft ($-\partial\varphi/\partial x$) zu setzen, um der Form (§) zu entgehen, wie dies in (2^f) geschehen ist.

Wenn wir annehmen, die durch die Gleichungen (1), (1^a) und (1^b) bestimmte Polarisirung könnte unveränderlich gemacht werden, wie dies bei magnetischen Substanzen durch die Coërcitivkraft wirklich in ge-

wissem Grade geschieht, und es würden dann noch neue electricische Quanta von der Dichtigkeit ϵ_1 und e_1 hinzugebracht, die, für sich genommen, die Potentialfunction ψ hervorbrächten, so würde deren Ansammlung zunächst gegen ihre eigenen Kräfte die Arbeit:

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

erfordern. Weiter wäre die Abstossung der früher vorhandenen electricischen Quanta und Momente zu überwinden, deren Potentialfunction φ ist. Dies gibt:

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi \cdot \epsilon_1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot e_1 \cdot d\omega \\ &= \iiint \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Arbeitsbeträge unter der Bezeichnung \mathfrak{B} zusammenfassen, so ergibt sich die Gesamtarbeit mit Hinzufügung des Werthes von \mathfrak{B} aus (2^f):

$$(2^g) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} &= \frac{1}{8\pi} \cdot \iiint \left\{ \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &+ \iiint \frac{1}{2\vartheta} \{ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \} dx \cdot dy \cdot dz, \end{aligned} \right.$$

eine der Form (2^f) vollkommen analoge Form. Daraus geht hervor, dass diese ihre Bedeutung auch dann behält, wenn die Momente λ , μ , ν zwar eine solche Anordnung haben, als wären sie durch die vertheilende Wirkung von eingeleiteter Electricität hervorgebracht, aber nicht der zur Zeit bestehenden electricischen Vertheilung entsprechen.

Man findet diese Form z. B. in der Gleichung für die Constanz der Energie (20^k) meiner ersten Abhandlung über Theorie der Electrodynamik¹⁾ für die electrostatische Arbeit wieder, obgleich dort noch inducirte electromotorische Kräfte mitwirken. Für die magnetischen Kräfte findet sich ebenda die einer Gleichgewichtslage entsprechende Form (2^g). Diese Gleichgewichtslage ist aber dort unter dem Einflusse electricischer Ströme zu Stande gekommen. Letztere wirken nach Ampère's Darstellung festen Magneten analog, aber sie machen die Potentialfunction φ mehrdeutig. Eindeutig wird

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. für r. u. a. Math. 72. p. 125. 1870.

diese nur, wenn wir den Raum, der um die Stromleiter herum mehrfach zusammenhängend ist, durch passend gelegte Schnittflächen einfach zusammenhängend machen. An jeder solchen Schnittfläche muss die Potentialfunction φ einen Sprung machen, sodass:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -4\pi J,$$

wo J die Stromintensität bedeutet. Die Schnittflächen dürfen nicht die unveränderlichen Magnete schneiden, die in den bisher angewendeten Gleichungen nur durch die magnetischen Quanta ihrer Pole ϵ und e repräsentirt sind, da es nicht gleichgültig ist, ob der die Pole verbindende Magnetstab auf der einen oder anderen Seite des Stromleiters vorbeigeht. Es dürfen also auch bei Verschiebungen der verschiedenen Körper die Quanta ϵ und e nie durch die genannten Schnittflächen hindurchgehen.

Wenn dies festgehalten wird, so ist zunächst ersichtlich, dass der Werth von \mathfrak{B} , wie er in Gleichung (2) gegeben ist, nicht von der Lage der genannten Schnittflächen abhängig ist. Denn wenn wir sie verschieben, ändert sich nur der Werth von φ , nicht aber der seiner Differentialquotienten, in denjenigen Stellen des Raumes, durch welche die Fläche passirt ist. Da nun φ nur mit ϵ oder e multiplicirt in Gleichung (2) vorkommt, und die Pole der Magnete nicht durch die Fläche gehen sollen, so ändert sich nichts im Werthe von \mathfrak{B} durch eine Verschiebung der Schnittfläche innerhalb des Bereiches der nur temporär magnetisirten Körper, und die Function \mathfrak{B} wird also auch in diesem Falle die ponderomotorische Arbeit auszudrücken geeignet sein, welche bei constant erhaltener Stromintensität aufgewendet werden muss, um die verschiedenen magnetisirten oder magnetisirbaren Körper in der Nähe des Stromleiters zu bewegen. Nur ist dabei die in den obigen Ausdruck von \mathfrak{B} nicht mit aufgenommene Bedingung festzuhalten, dass φ beim Umlauf um den Stromleiter, wenn dessen Stromintensität J ist, um die Grösse $4\pi J$ zunehme.

Zu bemerken ist, dass der Werth von \mathfrak{B} in (2*), der hier nur durch Betrachtung der zur Herstellung der Magnetisirung aufgewendeten Arbeit gewonnen ist, sich

in meiner ersten Abhandlung über Electrodynamik in der schon citirten Gleichung (20^k) als vollständiger Werth der electrokinetischen Energie galvanischer Ströme gefunden hat. Die dortigen Werthe von λ , μ , ν beziehen sich aber nur auf die durch die Ströme selbst hervorgerufene Magnetisirung, da sie nur den mit den Strömen verschwindenden Theil derselben berücksichtigen. Die Herleitung des Werthes beruht dort auf ganz anderen Principien, nämlich auf Berechnung der Wärmeentwicklung durch die Inductionsströme; sie kann für ungeschlossene Ströme problematisch erscheinen, für geschlossene aber hat sie sichere Grundlagen. Wenn im Luftraum $\vartheta = 0$ genommen wird, muss ebenda λ/ϑ durch den Werth der magnetischen Kraft ersetzt werden.

§ 2. Die auf das Innere dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.

Um eine Anzahl electrisirter und entweder leitender oder dielectrisch polarisirbarer Körper aus unendlicher Ferne in eine durch den Index 0 zu bezeichnende Lage zu bringen, brauchen wir die vom Wege unabhängige Arbeit \mathfrak{B}_0 ; um sie in irgend eine andere, durch den Index 1 bezeichnete Lage zu bringen, dagegen die Arbeit \mathfrak{B}_1 ; folglich, um sie aus der Lage 0 im electrisirten Zustande in die Lage 1 zu bringen, die Arbeit $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0$. Diese Verschiedenheit beider Lagen kann auch verschiedene Formen der dielectrischen Körper umfassen, da diese fern von den electrisirten Körpern, ehe man sie in die Lage 1 überführt, beliebige Formänderungen erleiden können, ohne dass Arbeit gegen electrische Kräfte zu leisten wäre. Electrisirte Körper müsste man vorher in kleine Theile zerlegt denken, oder durch Leitung geladen. Beides gibt schliesslich, wie oben gezeigt wurde, denselben Betrag an Arbeit.

Als die zu variirende Normalform von \mathfrak{B} können wir hier die einfachere in (2^d) gegebene benutzen, welche nur die Grössen ϵ , e und φ enthält, nämlich:

$$(2^d) \quad \mathfrak{B} = \iiint \left\{ q \cdot \epsilon - \frac{1 + 4\pi \vartheta}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Wenn sich die dielectricischen Massen bewegen, so ändert sich an den einzelnen Stellen des Raumes durch die Bewegung zunächst der Werth von ϑ . Bezeichnen wir beziehlich mit ξ , η , ζ die Verschiebungen, welche der Punkt x, y, z in Richtung dieser Coordinaten erleidet, und betrachten wir vorläufig ξ , η , ζ und ϑ als continuirliche Functionen der Coordinaten mit dem Vorbehalt, Fälle von sprungweiser Aenderung dieser Grössen an einzelnen Flächen nach gefundener Lösung als Grenzen einer immer jächer werdenden continuirlichen Aenderung zu betrachten: so würde nach der Verschiebung die durch dieselbe eingetretene Aenderung des Werthes von ϑ im Raumpunkte x, y, z , wenn wir mit σ die Dichtigkeit der Substanz bezeichnen, sein:

$$\delta\vartheta = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\xi - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial\vartheta}{\partial\log\sigma} d\log\sigma.$$

Es ist aber nach bekannten Sätzen:

$$d\log\sigma = -\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir die von der Art der Substanz abhängige Constante:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\log\sigma} = \theta,$$

so wird also:

$$(3) \quad \delta\vartheta = -\xi\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \eta\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \zeta\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \theta\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right].$$

Ebenso wird sein, wenn sich ε mit den Körpern bewegt:

$$(3^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\varepsilon = -\xi\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \eta\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \zeta\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right], \text{ oder:} \\ -\delta\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\zeta). \end{array} \right.$$

Wenn wir nun die Variation von \mathfrak{B} zunächst so vollziehen, dass an jeder Stelle des Raumes die Werthe von φ ungeändert bleiben, so sind im Werthe von \mathfrak{B} nur ϑ und ε in dem angegebenen Betrage zu variiren. Variiren wir nachher die Werthe von φ so, dass diese in die von dem neuen Gleichgewichtszustande verlangten Werthe übergehen, so ändert dies unter den gemachten Voraussetzungen nicht mehr den Betrag der gesammten Variation, da:

$$\delta_{\varphi}\mathfrak{B} = 0.$$

Der Energievorrath also wächst auch bei erhaltenem Gleichgewichtszustande um den durch Variirung von ϑ und ε erhaltenen Betrag von $\delta\mathfrak{B}$, während gleichzeitig die durch die Magnetisirung hervorgebrachten ponderomotorischen Kräfte X , Y , Z ihre Arbeit leisten. Das Princip von der Constanz der Energie verlangt:

$$(3^b) \quad \delta\mathfrak{B} + \iiint [X \cdot \xi + Y \cdot \eta + Z \cdot \zeta] dx \cdot dy \cdot dz = 0.$$

Berechnen wir $\delta\mathfrak{B}$ aus (2^d), so kann die Gleichung (3^b) nicht erfüllt sein, wenn nicht zusammengefasst unter ein Integralzeichen die mit ξ , η , ζ multiplicirten Factoren einzeln gleich Null sind. Also die erste dieser Gleichungen ist:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= X + \varepsilon \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \vartheta \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die analogen Ausdrücke für Y und Z sind leicht zu bilden. Der hier gefundene Werth dieser Componenten umfasst nun alle die electricen Einflüsse zusammengekommen, welche auf die Volumeneinheit der Substanz am Orte x, y, z einwirken. Diese können zum Theil directe Wirkungen entfernter Theile, zum Theil Wirkungen aus nächster Nähe sein. Wie man die Theilung zwischen beiden ausführt, ist einigermaßen willkürlich. Die Molecularkräfte müssen den Bedingungen unterworfen sein, welche das Princip von der Gleichheit der Action und Reaction stellt, und die aus der Theorie der elastischen Körper bekannt sind. Bezeichnen wir nämlich mit A Kräfte, die in Richtung der x , mit B solche die in Richtung der y , mit C solche die in Richtung der z fallen; mit dem Index x solche die auf die Einheit einer der yz Ebene parallelen Fläche von Seite der positiven x wirken u. s. w., so muss sein:

$$(4^a) \quad A_y = B_x, \quad B_z = C_y, \quad C_x = A_z.$$

Die auf die Flächeneinheit einer Ebene, deren Normale die Winkel a, b, c mit den positiven Coordinatenaxen macht, auf Seite dieser Normale wirkenden Kräfte, müssen eben deshalb sein:

$$\begin{aligned} A_n &= A_x \cdot \cos a + A_y \cdot \cos b + A_z \cdot \cos c, \\ B_n &= B_x \cdot \cos a + B_y \cdot \cos b + B_z \cdot \cos c, \\ C_n &= C_x \cdot \cos a + C_y \cdot \cos b + C_z \cdot \cos c. \end{aligned}$$

Die auf die Volumeneinheit des inneren Raumes wirkenden Kräfte ergeben sich dann in der Form:

$$(4^b) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} \cdot A_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot A_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot A_z \\ Y = \frac{\partial}{\partial x} \cdot B_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot B_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot B_z \\ Z = \frac{\partial}{\partial x} \cdot C_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot C_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot C_z \end{cases}$$

Die Frage der Rückführung der Molecularkräfte gestaltet sich also dahin, ob es möglich ist, die gefundenen Werthe von X , Y , Z in die Form (4^b) mit Einhaltung der Bedingungen (4^a) zu bringen, wobei die Grössen A , B , C nur von dem örtlichen Zustande der dielectrischen Polarisation abhängen dürfen.

Nun kann man in der That die in (4) gegebenen Kräfte gänzlich auflösen in Molecularkräfte von der Form (4^b).

Um diese Reduction auszuführen, dient folgende Umformung:

Gleichungen (1) und (1^a) ergeben:

$$(4^c) \quad \begin{cases} -4\pi\epsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right], \end{cases}$$

daraus folgt, dass:

$$(4^d) \quad \begin{cases} 4\pi\epsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + 4\pi\vartheta) \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \\ - 2\pi \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Drückt man die Differentialquotienten von φ mittels der Gleichungen (1) durch λ , μ , ν aus, so lassen sich die

Kräfte X , Y , Z in die Form (4^b) bringen, wenn man setzt:

$$(4^e) \left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2} [\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ B_y = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2} [-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ C_z = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2} [-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ A_y = B_x = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2} \cdot \lambda\mu \quad B_z = C_x = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2} \cdot \mu\nu \\ C_z = A_z = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2} \cdot \nu\lambda, \end{array} \right.$$

oder auch:

$$A_x = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ etc.}$$

$$A_y = B_x = \frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} \text{ etc.}$$

Man kann diese Kräfte auch zusammengefasst denken in

1) einen Druck, der überall in Richtung der nach aussen gewendeten Normale jeder Grenzfläche wirkt im Betrage von:

$$\frac{1 + 4\pi(\vartheta - \theta)}{8\pi\vartheta^2} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2],$$

2) einer in Richtung der Kraftlinien wirkenden Spannung im Betrage von:

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \cdot \cos \eta,$$

wobei mit η der spitze Winkel bezeichnet ist, den die Richtung der electricischen Kraft mit der Normale der Oberfläche macht.

Bezeichnen wir die Resultante der electricischen Kraft mit R :

$$R^2 = \frac{1}{\vartheta^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

so ist die hier erwähnte Spannung auch zu setzen gleich:

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi} \cdot R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N}$$

und fällt in die Richtung der in das Innere eintretenden Kraftlinie.

In der Form, wie die Werthe der Kräfte hier gefunden

sind, passen sie auch ohne Schwierigkeit für den Fall, dass an Grenzflächen der Körper der Uebergang in den Werthen der ϑ discontinuirlich wird, oder daselbst zusammengedrückte Flächenschichten von Electricität liegen, da in den Werthen der A, B, C weder die Grösse ε , noch Differentialquotienten von ϑ nach den Coordinaten vorkommen. Will man jedoch zur Controle der Richtigkeit des Verfahrens die an der Grenze verschiedener Substanzen eintretenden Discontinuitäten im Werthe von ϑ gleich von vorn herein als solche berücksichtigen, so ist bei der Ausführung der Rechnung zu beachten, dass die oben gebildete Gleichung:

$$\delta_{\varphi} \mathfrak{B} = 0$$

sich nur auf die Variation ersten Grades bezieht. Dem gesammten Betrage der Veränderung von \mathcal{W} entspricht dieser Werth von $\delta \mathcal{W}$ aber nur, wenn die Quadrate und Producte der variirten Grössen gegen die Glieder ersten Grades vernachlässigt werden dürfen. Wenn nun eine Körpergrenze, wo zwei Medien zusammenstossen, deren dielectrische Constanten ϑ_1 und ϑ_0 sind, und die mit der Flächendichtigkeit e belegt ist, in Richtung der Normale N_0 so weit vorrückt, dass eine Schicht von der Dicke dN , welche bisher die Constante ϑ_0 hatte, den Werth ϑ_1 bekommt, so entsteht zunächst bei unveränderten Werthen von φ dadurch eine Aenderung von \mathfrak{B} , welche beträgt:

$$-fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - e \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Bezeichnen wir den grössten Differentialquotienten, den φ in Richtung der Fläche hat, mit $\partial \varphi / \partial s$, so lässt sich dies auch schreiben:

$$-fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right)^2 \right] - e \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Denn zunächst, ehe die Werthe von φ auf den neuen Gleichgewichtszustand zurückgeführt sind, herrscht in der betreffenden Schicht noch der alte Werth des dortigen $\partial \varphi / \partial N_0$. Wenn nun dieser Uebergang in den Gleichgewichtszustand vor sich geht, tritt in dieser Schicht der Werth des Differentialquotienten $\partial \varphi / \partial N_1$ ein, der der anderen Seite der Fläche entspricht und von jenem wegen der Gleichung:

$$(4^*) \quad -4\pi e = (1 + 4\pi \vartheta_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} + (1 + \pi \vartheta_1) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_1}$$

endlich unterschieden ist. Setzen wir nun:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \cdot \frac{\delta \partial \varphi}{\delta N} + \left(\frac{\delta \partial \varphi}{\delta N}\right)^2,$$

wo annähernd: $\frac{\delta \partial \varphi}{\delta N} = \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_1}.$

so ist diese Variation des Differentialquotienten in der Schicht von Dicke dN endlich, und also ihr Quadrat nicht zu vernachlässigen. Die Glieder ersten Grades werden, wenn man von einer Gleichgewichtslage ausgeht, natürlich auch in diesem Falle gleich Null, ob die $\delta \varphi$ verschwindend klein oder endlich sind. Wenn wir aber das quadratische Glied der Variation fortnehmen, wird der Werth der Variation von \mathfrak{B} , der von dieser Lagenänderung der Fläche herrührt, nunmehr verändert in:

$$-f d\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 \right] - \frac{1 + 4\pi \vartheta_1}{8\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial N_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \right]^2 - e \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (4*) für den Werth von e reducirt sich dies auf:

$$f d\omega \cdot dN \left\{ \frac{1 + 4\pi \vartheta_1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 \right] - \frac{1 + 4\pi \vartheta_0}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 \right] \right\}.$$

Der von θ unabhängige Theil der nach dem Inneren hin normal zur Grenzfläche wirkenden Kraft ergibt sich hieraus gleich:

$$\frac{1 + 4\pi \vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 \right\}$$

übereinstimmend mit den in (4*) für die Coordinatenebenen gegebenen Werthen. Tangentiale Kräfte ergeben sich ebenfalls, wenn man nachträglich auch noch Verschiebungen der Schicht e in Richtung der Fläche voraussetzt.

In der von Cl. Maxwell gegebenen Darstellung¹⁾ dieses Kraftsystems fehlt das mit θ multiplicirte Glied. Es ist in unsere von Poisson's Voraussetzungen ausgehende Analyse eingetreten, da wir die Möglichkeit der Dehnung ponderabler

¹⁾ Cl. Maxwell, Electricity and Magnetism. 1. §§ 104–107. Oxford 1873.

Dielectrica mit in Betracht zogen. Für das zwischen den bewegten Körpern liegende Vacuum aber, beziehlich den Luftraum, ist ϑ nach Poisson's Voraussetzungen, denen wir hier gefolgt sind, überhaupt gleich Null und bleibt gleich Null, wie auch die Form und das Volumen des Vacuums sich verändern möge. Diese Voraussetzungen impliciren also für das Vacuum auch den Werth $\theta = 0$. In der That ergibt sich bei Untersuchung dieses Punktes, dass nur in Medien, in denen entweder $\theta = 0$, oder die incompressibel sind, die ponderomotorischen Kräfte genau dieselbe Vertheilung zeigen, wie sie es im Vacuum nach Coulomb's Hypothese thun würden.

Wenn wir nämlich das Medium als eine homogene Flüssigkeit betrachten, die kein eingeleitetes ϵ enthält, deren Druck p , deren Dichtigkeit σ sei, während P das Potential der äusseren auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden ponderomotorischen Kräfte (z. B. Schwere) darstellt, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial z}.$$

In einer homogenen Flüssigkeit werden ϑ und σ nur vom Drucke p abhängen, und da:

$$\theta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \log \sigma},$$

so können wir die erste jener Gleichungen mit Berücksichtigung von (4) schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\theta}{2g^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\theta}{g^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \right\},$$

oder wenn wir statt des Druckes p die Function ψ von σ einführen, für welche:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

so erhalten wir aus den drei obigen Gleichungen des Gleichgewichts die eine Integralgleichung:

$$(4^a) \quad \psi + P + C = \frac{\theta}{2\sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

welche anzeigt, dass unter Einwirkung der gefundenen Kräfte auch flüssige Medien im Gleichgewicht sein können; ferner,

dass wenn $\theta = 0$, Druckunterschiede innerhalb der Flüssigkeit durch die electricischen Kräfte überhaupt nicht hervorgerufen werden.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so ist:

$$\psi = \frac{p}{\sigma},$$

und die electricische Polarisirung bringt dann also neben den sonst schon bestehenden Druckunterschieden den Druck:

$$p_1 = \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

hervor. An der Grenze des Mediums tritt diesem aber der ebenso grosse, von θ abhängige Theil der Oberflächenkraft entgegen, den die Gleichungen (4°) anzeigen. Auf die jenseits der Grenze gelegenen Körper hat der von θ abhängende Druck also unter diesen Bedingungen gar keinen Einfluss. Es ist dies das folgerichtige Ergebniss der Betrachtung, durch welche θ eingeführt wurde. Dies geschah in der Voraussetzung, dass die Substanz durch Dichtigkeitsänderungen Aenderungen ihrer dielectricischen Constante erleiden könnte. Ist sie incompressibel, so ist diese Möglichkeit wirkungslos.

Nur in einem Medium, in welchem ϑ constant, in welchem also entweder $\theta = 0$ oder σ constant ist, ergibt die Gleichung (4°) für $\varepsilon = 0$ auch:

$$\Delta \varphi = 0,$$

wie es nach Coulomb's Theorie im leeren Raume stattfinden muss. In einem anders beschaffenen Medium, für welches beide genannte Annahmen nicht zutreffen, würde auch die Differentialgleichung für φ sich ändern.

Auf temporär magnetisirte Substanzen sind die hier vorgetragenen Sätze ebenfalls zu übertragen, aber mit Ausschluss der Formänderungen permanenter Magnete, da wir nicht wissen, ob die Gleichung (3°) auf das Verhalten von solchen anwendbar ist.

In der Form (4°) sind die Fernkräfte ganz verschwunden und ersetzt durch die Reactionen des polarisirten Mediums. Es ist dies die Anschauungsweise von Faraday und Cl. Maxwell, die auch in dem von ponderabler Substanz

leeren Raume den Aether als Träger dieser Spannungen betrachten.

Man kann aber auch die zweierlei Ursachen nebeneinander bestehen lassen, wenn man die directen Fernwirkungen nicht aufgeben will. Da nämlich die Dichtigkeit der freien Electricität im Raume dargestellt werden kann durch:

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi,$$

und wir die identische Gleichung bilden können:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

so können wir diesen Ausdruck mit 4π dividirt zum Werthe von X addiren, ohne diesen zu verändern. Dann ist:

$$(5) \quad X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\Delta \varphi}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{A}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{A}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{A}_z).$$

$$(5^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_x = \frac{1}{2\vartheta} (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) + \frac{\mu}{2\vartheta^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \text{ etc.} \\ \mathfrak{A}_y = \mathfrak{B}_x = \frac{1}{\vartheta} \lambda \mu \text{ etc.} \end{array} \right.$$

und da $\lambda^2/\vartheta = \vartheta \cdot (\partial \varphi / \partial x)^2$ etc., so fallen im Raume, wo $\vartheta = 0$, die molecularen Spannungen fort. Diese wirken nur in den ponderablen Dielectricis, und neben ihnen die Fernwirkungen der freien Electricität, welche in dem ersten Gliede des Werthes von X angezeigt werden. Dass die von der Theorie angezeigten dehnenden Kräfte quer gegen die Kraftlinien bestehen, ist durch die von Hrn. G. Quincke kürzlich veröffentlichten Versuche für eine Reihe von Substanzen erwiesen worden.¹⁾

Eine Prüfung des Gesetzes der Anziehungen im Inneren einer dielectricischen Flüssigkeit (Terpentinöl) ist von Hrn. P. Silow schon im Jahre 1875 im hiesigen physikalischen Institute ausgeführt worden.²⁾

1) Quincke, Pogg. Ann. 156. p. 389. 1875.

2) Silow, Wied. Ann. 10. p. 161. 374. 513. 1880.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die in (2^d) gegebene einfachere Normalform von \mathfrak{B} unverändert bleibt, wenn wir in ihr alle Coëfficienten $(1 + 4\pi\theta)$ sowie θ mit derselben Zahl N^2 multipliciren, dagegen alle Werthe von φ durch N dividiren, ε und e dagegen mit N multipliciren. Da nun aus dem Werthe von \mathfrak{B} sowohl die Gesetze der Vertheilung der Potentialwerthe im Raume, wie die Werthe der ponderomotorischen Kräfte hergeleitet werden, so bleiben diese alle unverändert, wie übrigens auch die oben in (4^o) aufgestellte Gleichung für ε und die Werthe für die Kräfte (p. 400 hinter (4^o)) erkennen lassen. Dadurch reducirt sich aber in den Gleichungen (5) der auf directe Fernwirkung der Electricität zurückgeführte erste Theil der Kraft auf $1/N^2$, sodass in dem Maasse, wie N^2 grösser wird, die directe Fernwirkung immer mehr gegen den von den dielectrischen Medien übertragenen Theil verschwindet. Das Quantum der freien Electricität, gemessen durch $\Delta\varphi$, reducirt sich ebenfalls auf $1/N$ seines früheren Werthes. Für grosse Werthe von N verschwindet also freie Electricität und Fernwirkung, was zu Maxwell's Theorie hinüberführt. Diese Sätze, die ich schon am Schlusse meiner ersten Abhandlung über Electrodynamik aufgeführt habe, bestätigen sich also hier auch der vollständigeren Analyse der ponderomotorischen Kräfte gegenüber.

II. *Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Electricität;* *von G. Kirchhoff und G. Hansemann.*

(Der Acad. der Wiss. zu Berlin vorgelegt am 12. Mai 1881.)

In einer früheren Abhandlung¹⁾ haben wir eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit von Metallen auseinandergesetzt und durch ein Beispiel erläutert. Wir hatten damals schon die Absicht, diese Methode auf

1) Kirchhoff u. Hansemann, Wied. Ann. 9. p. 1. 1880.