Симетрична класификация на простите числа

Корелационна, тъждествена и инверсионна симетрия

част от изследователския цикъл

“Линейна безкрайност → Циклично пространство”

Васил Цанов[1]

Abstract

Простите числа обикновено се разглеждат като аритметично прости, но структурно нерегулярни обекти, лишени от вътрешен организиращ принцип отвъд делимостта. Настоящата работа развива допълнителна структурна перспектива, в която на всяко просто число $P > 2$ се приписва добре дефинирана *симетрична сигнатура*, определена от три взаимно независими инварианта.

Първият инвариант, *корелационната симетрия*, възниква от избора на знак в изразите $(P \pm 1)/4$ и определя коя от двете съседни аритметични конфигурации участва в дефинирането на локалната симетрична величина $N(P)$. Вторият инвариант, *тъждествената симетрия*, улавя единна алгебрична връзка между съседните цели числа $P-1$ и $P+1$ — връзка, която е валидна за всички прости числа и служи като структурна основа на рамката. Третият инвариант, *инверсионната симетрия*, свързва локална и глобална информация чрез сравнение на $N(P)$ с индекса на простото число $\mathbb{P}(P)$ посредством целочислената разлика

$$Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P).$$

Заедно тези инварианти дефинират класификационна схема, в която простите числа се организират не само по числов ред, но и по структурни свойства, кодирани в техните симетрични сигнатури. Рамката се установява чрез три основополагащи леми и обединяваща теорема, показваща че всяко просто число $P > 2$ принадлежи към уникален симетричен клас, определен от неговата сигнатура. Конструкцията е изцяло елементарна и не цели предсказателни или аналитични резултати относно разпределението на простите числа; вместо това тя предоставя структурна координатна система, разкриваща допълнителен слой организация в редицата на простите числа, който допълва класическите аналитични и вероятностни подходи в теорията на числата.

Придружаващ набор от данни, осигуряващ възпроизводимост, предоставя явни симетрични сигнатури за големи множества от прости числа, което позволява допълнителни

Email address: vasil.tsanoff@tsanoff-classic.com (Васил Цанов)

[1]OrcID: 0000-0002-5695-1601

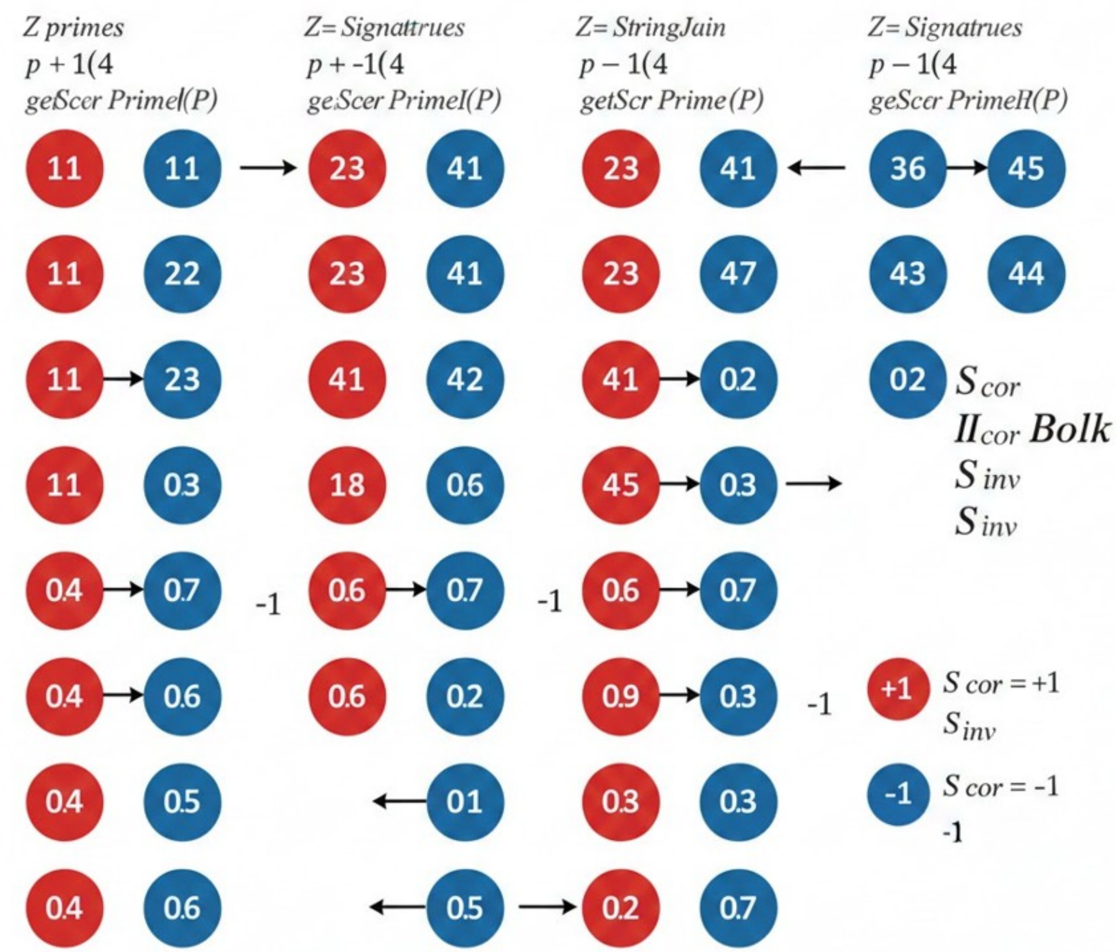
изчислителни и структурни изследвания.

Keywords: прости числа, симетрични инварианти, корелационна симетрия, тъждествена симетрия, инверсионна симетрия, симетрична сигнатура, структурна класификация, теория на числата

MSC (2020): 11A41, 11A07, 11B99; *Secondary:* 11K36, 11J70, 11S05, 11F03, 94A17.

Графично резюме

Концептуални симетрични инварианти



Акценти

- Представя структурна рамка, основана на симетрия, която приписва на всяко просто число $P > 2$ тройна симетрична сигнатура.

- Дефинира корелационната симетрия, която определя дали $(P-1)/4$ или $(P+1)/4$ е естествено число и по този начин фиксира локалната симетрична стойност $N(P)$.
- Установява тъждествената симетрия, показвайки че съседните цели числа $P-1$ и $P+1$ удовлетворяват единно структурно отношение, независимо от конкретното просто число.
- Развива инверсионната симетрия, която свързва локално дефинираната стойност $N(P)$ с глобалния индекс на простото число $\mathbb{P}(P)$ чрез инварианта $Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P)$.
- Показва, че трите инварианта формират последователна класификационна схема, организираща простите числа в симетрични класове в рамките на структурна координатна система.
- Представя три основополагащи леми и обединяваща теорема, интегрираща корелационната, тъждествената и инверсионната симетрия в единна последователна рамка.

Съдържание

1. Въведение

Простите числа [1] заемат централно място в теорията на числата [2, 3]. Въпреки елементарната им дефиниция, тяхното разпределение сред естествените числа проявява степен на нерегулярност, която е мотивирала обширни аналитични, алгебрични и вероятностни изследвания [4]. Отвъд глобалните въпроси, свързани с плътност, асимптотика и закони на разпределение, простите числа допускат и локални структурни описания, които могат да бъдат формулирани независимо от аналитични методи [5]. Подобни описания често възникват при изследване на аритметичните отношения в непосредственото обкръжение на дадено просто число.

Настоящата работа развива именно такава локална и структурна перспектива. Вместо да въвеждаме нови аналитични оценки, ние изучаваме елементарни трансформации, включващи целите числа, съседни на просто число $P > 2$. Тези трансформации пораждат три естествено дефинирани инварианта, които заедно формират това, което наричаме *симетрична сигнатура* на простото число. Целта е да се идентифицират структурни зависимости, които остават инвариантни под прости локални операции, и тези инварианти да се използват като основа за класификационна рамка.

Първият инвариант, *корелационната симетрия*, определя дали $(P-1)/4$ или $(P+1)/4$ е естествено число и по този начин избира локално дефинираната симетрична величина $N(P)$. Този инвариант кодира направленска характеристика на простото число в неговото непосредствено аритметично обкръжение. Вторият инвариант, *тъждествената симетрия*, изразява единно алгебрично отношение между съседните цели числа $P-1$ и $P+1$ — отношение, което е валидно за всички прости числа и служи като структурна основа на конструкцията. Третият инвариант, *инверсионната симетрия*, свързва локално дефинираната стойност $N(P)$ с глобалното подреждане на простите числа чрез функцията за индекс на простото число $\mathbb{P}(P)$ посредством целочислената разлика

$$Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P).$$

Този инвариант свързва локалната аритметична структура с глобалната позиционна информация в подредената редица на простите числа.

Целта на рамката не е да се получат нови резултати относно аналитичното разпределение на простите числа. Вместо това тя предоставя структурна класификационна схема, основана на явно дефинирани инварианти, позволявайки простите числа да бъдат организирани в симетрични класове, определени едновременно от локални и глобални свойства. В този смисъл подходът допълва класическите аналитични и алгебрични гледни точки, като акцентира върху инвариантната структура, а не върху разпределителното поведение.

Статията е организирана както следва. В Раздел 2 се въвеждат трите инварианта като прецизни дефиниции и се установяват техните основни свойства под формата на три основополагащи леми. Тези резултати след това се комбинират в основна теорема, която формализира симетричната сигнатура като последователна система. Макар конструкцията да е елементарна, тя разкрива нетривиална структурна организация на простите числа, която не е непосредствено видима от тяхното обичайно линейно подреждане.

2. Предварителни сведения

В цялата статия разглеждаме прости числа $P > 2$, освен ако не е посочено друго. Този раздел въвежда означенията и основните дефиниции, използвани по-нататък.

Модулна структура и класове на остатъци

Всяко просто число $P > 2$ удовлетворява конгруенцията

$$P \equiv \pm 1 \pmod 4.$$

Този елементарен факт от модулната аритметика предоставя структурната основа за построенията, развити по-долу. Симетричната стойност $N(P)$, въведена по-късно, се определя точно от това кой от двата класа на остатъци $\pm 1 \pmod 4$ се реализира от простото число.

В този смисъл настоящата рамка може да се разглежда като уточнение на класическото разлагане на простите числа по класове на остатъци modulo 4. Вместо да използваме конгруентните класове единствено като аритметични етикети, ние ги интерпретираме като определящи инвариантни структурни роли в симетрично базирана класификационна схема. Получените инварианти комбинират локална модулна информация с глобална информация за подреждането чрез функцията за индекс на простото число.

Подходът принадлежи естествено към методите за класификация, основани на симетрия, в теорията на числата, където аритметичните обекти се организират според инвариантни трансформации, а не според аналитични свойства на разпределението. Не се въвеждат аналитични предпоставки; всички конструкции разчитат единствено на елементарни модулни зависимости и явно дефинирани аритметични величини.

2.1. Индекс на просто число

Нека $\mathbb{P}(P)$ означава индекса на просто число P в подредената редица на всички прости числа. Така,

$$\mathbb{P}(2) = 1, \qquad \mathbb{P}(3) = 2, \qquad \mathbb{P}(5) = 3, \qquad \mathbb{P}(7) = 4, \ \ldots$$

Функцията $\mathbb{P}(P)$ ще се използва за свързване на локалните симетрични величини с глобалната позиция на P в редицата на простите числа.

2.2. Симетрична стойност

Дефиниция 2.1. За всяко просто число $P > 2$ дефинираме *симетричната стойност* $N(P)$ чрез

$$N(P) = \frac{P \pm 1}{4}, \tag{1}$$

където знакът се избира така, че $N(P) \in \mathbb{N}$.

Съществуването и единствеността на $N(P)$ следват от факта, че $P \equiv \pm 1 \pmod 4$; виж Лема 3.2.

Симетрични инварианти

Сега въвеждаме три инварианта, асоциирани с просто число $P > 2$.

Дефиниция 2.2 (Корелационна симетрия)**.** *Корелационната симетрия* на P се дефинира чрез

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = \begin{cases} +1, & \text{ако } \dfrac{P+1}{4} \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{ако } \dfrac{P-1}{4} \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Този инвариант определя коя от двете възможни локални конфигурации участва в дефинирането на $N(P)$.

Дефиниция 2.3 (Тъждествена симетрия)**.** За просто число $P > 2$ разглеждаме величините

$$\frac{(P-1) \pm 1}{4}, \qquad \frac{(P+1) \pm 1}{4}.$$

Лема 3.6 показва, че нито една от тези стойности не принадлежи на $\mathbb{N}$. Съответно *тъждествената симетрия* $\mathbb{S}_{ind}$ се дефинира като универсален инвариант, еднакъв за всички прости числа $P > 2$.

Дефиниция 2.4 (Инверсионна симетрия)**.** *Инверсионната симетрия* на просто число $P > 2$ се дефинира чрез

$$\mathbb{S}_{inv}(P) = Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P). \tag{3}$$

Лема 3.10 установява, че $Z(P) \in \mathbb{Z}$ за всички прости числа $P > 2$.

Симетрична сигнатура

Дефиниция 2.5. *Симетричната сигнатура* на просто число $P > 2$ е четворката

$$\Sigma(P) = \big(\mathbb{S}_{cor}(P),\, \mathbb{S}_{ind},\, \mathbb{S}_{inv}(P),\, \mathbb{P}(P)\big). \tag{4}$$

За удобство на означенията използваме и символното представяне

$$^{\mathbb{S}_{inv}(P)}_{\mathbb{S}_{cor}(P)}\mathbf{P}^{\mathbb{P}(P)}_{\equiv}, \tag{5}$$

където символът $\equiv$ обозначава универсалната тъждествена симетрия.

Бележка 2.6 (Връзка с симетрията на класовете на остатъци). Корелационната симетрия $\mathbb{S}_{cor}(P)$ е еквивалентна на класическото разлагане на нечетните прости числа в класовете на остатъци

$$P \equiv \pm 1 \pmod 4.$$

В този смисъл симетричната стойност $N(P)$ може да се разглежда като нормализиран представител на съответния клас на остатъци.

Настоящата рамка обаче надхвърля модулната класификация. Докато класовете на остатъци описват чисто локална аритметична структура, инверсионната симетрия

$$\mathbb{S}_{inv}(P) = \mathbb{P}(P) - N(P)$$

включва глобална информация за подреждането чрез индекса на простото число. Следователно симетричната сигнатура комбинира локална модулна симетрия с глобална позиционна структура, като предоставя класификация, която не е видима на нивото на класовете на остатъци сами по себе си.

3. Симетрии на простите числа

Симетричната сигнатура може да се интерпретира като уточнение на класическото разлагане по класове на остатъци, като издига локалната модулна информация до смесен локално–глобален инвариант. Въведените по-долу симетрии не представляват нови аритметични свойства на простите числа; по-скоро те реорганизират съществуващата аритметична информация в последователна структурна рамка.

3.1. Корелационна симетрия

Корелационната симетрия е първият и най-елементарен инвариант, влизащ в симетричната сигнатура на просто число. Тя произтича от наблюдението, че за всяко просто число $P > 2$ точно една от величините $(P - 1)/4$ и $(P + 1)/4$ е естествено число. Това индуцира канонично бинарно разделение на простите числа, определено от страната, на която се появява симетричната стойност.

От настоящата гледна точка този инвариант идентифицира направлението, в което едно просто число е локално подравнено със своя симетричен представител $N(P)$, и следователно предоставя локалния компонент на симетричната класификация.

Дефиниция 3.1. За всяко просто число $P > 2$ дефинираме *корелационната симетрия* чрез

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = \begin{cases} +1, & \text{ако } \dfrac{P+1}{4} \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{ако } \dfrac{P-1}{4} \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

Този инвариант определя направлението, в което P корелира със своята симетрична стойност $N(P)$, дефинирана в (1).

Лема 3.2. *За всяко просто число $P > 2$ точно едно от числата $\frac{P-1}{4}$ и $\frac{P+1}{4}$ е естествено число. Следователно корелационната симетрия $\mathbb{S}_{cor}(P)$, дефинирана в* (6)*, е добре дефинирана и приема стойности единствено в $\{+1, -1\}$.*

Доказателство. Всяко просто число $P > 2$ е нечетно и следователно може да бъде записано в една от двете форми

$$P = 4k + 1 \quad \text{или} \quad P = 4k + 3,$$

където $k \in \mathbb{Z}$.

- Ако $P = 4k + 1$, то

$$\frac{P-1}{4} = k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{P+1}{4} = k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

- Ако $P = 4k + 3$, то

$$\frac{P+1}{4} = k + 1 \in \mathbb{N}, \qquad \frac{P-1}{4} = k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

И в двата случая точно една от двете стойности е естествено число, откъдето следва твърдението. □

Бележка 3.3 (Аритметично преформулиране)*.* Тъй като всяко просто число $P > 2$ удовлетворява $P \equiv 1$ или $3 \pmod 4$, следва че

$$P \pm 1 \equiv 0 \text{ или } 2 \pmod 4.$$

Следователно точно един от двамата съседи $P - 1$ и $P + 1$ е делим на 4, докато другият е конгруентен на $2 \pmod 4$. В резултат точно една от стойностите $(P-1)/4$ и $(P+1)/4$ е естествено число.

Бележка 3.4 (Структурна роля)*.* Корелационната симетрия разделя простите числа на два класа,

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = +1 \iff P \equiv 3 \pmod 4,$$

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = -1 \iff P \equiv 1 \pmod 4.$$

В рамките на симетричната сигнатура (4) този инвариант предоставя локалния модулен компонент на класификацията. Останалите инварианти, въведени по-долу, включват глобална позиционна информация, така че пълната симетрична сигнатура комбинира симетрията на класовете на остатъци с глобална структурна подредба.

3.2. Тъждествена симетрия

Втората симетрия в класификационната рамка се отнася до структурното поведение на непосредствените съседи на просто число $P > 2$. Докато корелационната симетрия зависи от страната на P, от която възниква естествената стойност $N(P)$ (дефинирана в (1)), тъждествената симетрия изразява допълващо явление: съседните цели числа $P - 1$ и $P + 1$ проявяват напълно еднородно поведение по отношение на симетричната конструкция.

По-точно, всички изрази, които биха могли да генерират допълнителни симетрични кандидати в непосредственото обкръжение на просто число, са неизбежно дробни. Вследствие на това симетричната конфигурация около всяко просто число е строго фиксирана. Тази фиксираност е независима от конкретното просто число и следователно определя универсален структурен инвариант.

Дефиниция 3.5. За всяко просто число $P > 2$ дефинираме *тъждествената симетрия* като структурното условие, че нито едно от числата

$$\frac{(P-1) \pm 1}{4}, \qquad \frac{(P+1) \pm 1}{4}$$

не е естествено число. Това свойство е независимо от конкретното просто число и отразява универсално ограничение върху непосредствените съседи на простите числа. Съответно представяме тази симетрия чрез фиксираната стойност

$$\mathbb{S}_{ind} \equiv 0. \tag{7}$$

Лема 3.6. *За всяко просто число $P > 2$ числата $\frac{(P-1) \pm 1}{4}$ и $\frac{(P+1) \pm 1}{4}$ са дробни. Следователно тъждествената симетрия $\mathbb{S}_{ind}$ е универсален инвариант, независим от P.*

Доказателство. Нека $P > 2$ бъде произволно просто число. Тогава P е нечетно и може да бъде записано като $P = 4k + 1$ или $P = 4k + 3$.

- **Случай** $P = 4k + 1$**.**

$$P - 1 = 4k, \qquad P + 1 = 4k + 2.$$

  Следователно

$$\frac{(P-1) \pm 1}{4} = k \pm \frac{1}{4}, \qquad \frac{(P+1) \pm 1}{4} = k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}.$$

  Всички стойности са дробни.

- **Случай** $P = 4k + 3$**.**

$$P - 1 = 4k + 2, \qquad P + 1 = 4k + 4.$$

  Следователно

$$\frac{(P-1) \pm 1}{4} = k + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}, \qquad \frac{(P+1) \pm 1}{4} = k + 1 \pm \frac{1}{4}.$$

  Отново всички стойности са дробни.

И в двата случая нито един от четирите израза не е естествено число. Следователно $\mathbb{S}_{ind}$ е универсален инвариант. □

Бележка 3.7 (Структурна роля на тъждествената симетрия)*.* Универсалността на $\mathbb{S}_{ind}$ не означава тривиалност. Макар подлежащият аритметичен аргумент да важи за всички нечетни цели числа, неговата функция в настоящата рамка е структурна, а не класификационна. Тъждествената симетрия фиксира допустимата конфигурация на симетричните кандидати около просто число и по този начин установява фоновото ограничение, спрямо което действат останалите инварианти. В този смисъл $\mathbb{S}_{ind}$ действа като нормализиращо условие, което гарантира единствеността на локално дефинираната симетрична стойност $N(P)$.

Бележка 3.8. Тъждествената симетрия показва, че непосредствените съседи на всяко просто число $P > 2$ проявяват идентично симетрично поведение. Вследствие на това $\mathbb{S}_{ind}$ е единственият инвариант в симетричната сигнатура, който не зависи от конкретното просто число. В рамките на сигнатурата (4) той изпълнява ролята на фиксирана структурна ос, спрямо която са подредени корелационната и инверсионната симетрия.

3.3. Инверсионна симетрия

Третата симетрия в класификационната рамка установява връзка между локално дефинираната симетрична стойност $N(P)$ и глобалната позиция на простото число P в подредената редица на простите числа. Докато корелационната симетрия определя направлението на локалната симетрична конструкция, а тъждествената симетрия фиксира универсалната структура на допустимите локални конфигурации, инверсионната симетрия сравнява локалната симетрична информация с глобалното подреждане.

За разлика от предходните инварианти, които са изцяло локални по своя характер, инверсионната симетрия въвежда смесена локално–глобална величина, измерваща несъответствието между тези две нива на описание.

Дефиниция 3.9. За всяко просто число $P > 2$ дефинираме *инверсионната симетрия* чрез инварианта

$$\mathbb{S}_{inv}(P) = Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P), \tag{8}$$

където $\mathbb{P}(P)$ означава индекса на P в редицата на простите числа, а $N(P)$ е симетричната стойност, дефинирана в (1).

Следователно инвариантът $Z(P)$ измерва отклонението между локалната симетрична позиция, определена от аритметичната структура, и глобалната позиция, определена от подреждането на простите числа.

Лема 3.10. *За всяко просто число $P > 2$ величината*

$$Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P)$$

е целочислен инвариант.

Доказателство. От Лема 1 следва, че симетричната стойност $N(P)$ е еднозначно определена и принадлежи на $\mathbb{N}$. По дефиниция индексът $\mathbb{P}(P)$ също е естествено число. Следователно тяхната разлика $Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P)$ е цяло число за всяко просто $P > 2$.

Величините, влизащи в дефиницията на $Z(P)$, произлизат от различни структури: $N(P)$ зависи единствено от локалната аритметична симетрия, определена от класа на остатъка на P modulo 4, докато $\mathbb{P}(P)$ отразява глобалното подреждане на простите числа. Вследствие на това $Z(P)$ измерва дискретното несъответствие между локалното симетрично позициониране и глобалното разположение. □

Бележка 3.11 (Локално–глобално свързване). За разлика от предходните две симетрии, инверсионната симетрия комбинира локална и глобална информация. Инвариантите $\mathbb{S}_{cor}(P)$ и $\mathbb{S}_{ind}$ зависят единствено от непосредственото аритметично обкръжение на P, докато $Z(P)$ сравнява тази локална структура с глобалното подреждане на простите числа. В резултат прости числа, които споделят идентична локална симетрия, могат да принадлежат към различни инверсионни класове, отразявайки различия в тяхното глобално разпределение.

Бележка 3.12. В рамките на симетричната сигнатура (4) инверсионната симетрия изпълнява ролята на инверсионна координата. Тя различава прости числа, които са локално еквивалентни, но глобално отдалечени в редицата на простите числа, като по този начин завършва прехода от чисто локална симетрия към смесена локално–глобална класификационна рамка.

4. Основна теорема

Трите симетрии, въведени по-горе, описват допълващи се аспекти на структурата, асоциирана с всяко просто число $P > 2$. Следната теорема показва, че те се комбинират в една единствена добре дефинирана класификационна рамка.

Теорема 4.1. *За всяко просто число $P > 2$ съществува уникална симетрична сигнатура*

$$\Sigma(P),$$

дефинирана чрез (4), характеризирана от следните условия:

(i) точно едно от числата $\dfrac{P-1}{4}$ и $\dfrac{P+1}{4}$ е естествено число;

(ii) нито едно от числата $\dfrac{(P-1)\pm 1}{4}$ и $\dfrac{(P+1)\pm 1}{4}$ не е естествено число;

(iii) величината $Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P)$ е цяло число.

Следователно всяко просто число $P > 2$ принадлежи към точно един симетричен клас, определен от неговата сигнатура $\Sigma(P)$.

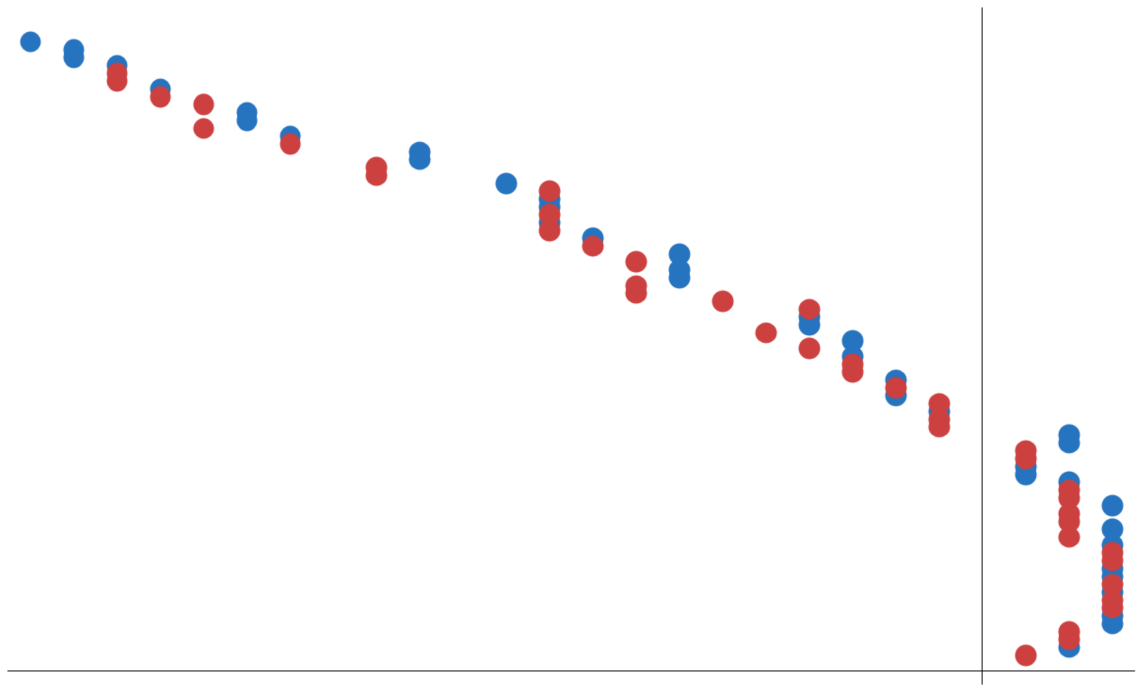
Доказателство. Свойство (i) следва от Лема 3.2, свойство (ii) — от Лема 3.6, а свойство (iii) — от Лема 3.10. Заедно тези условия еднозначно определят инвариантите $\mathbb{S}_{cor}(P)$, $\mathbb{S}_{ind}$ и $\mathbb{S}_{inv}(P)$. Тъй като индексът $\mathbb{P}(P)$ е еднозначно определен, сигнатурата $\Sigma(P)$ е следователно уникална. $\square$

Бележка 4.2. Теоремата показва, че трите симетрии формират последователна класификационна система. На всяко просто число се приписва уникална симетрична сигнатура, което позволява множеството на простите числа да се разглежда не само като редица, но и като колекция от ясно дефинирани симетрични класове.

Бележка 4.3 (Синтез на трите симетрии). Теоремата показва, че трите симетрии изпълняват допълващи се роли и заедно формират пълно структурно описание на симетричната сигнатура.

Корелационната симетрия $\mathbb{S}_{cor}(P)$ произтича от структурата на класовете на остатъци modulo 4 и определя направлението на локалната симетрична конструкция. Тъждествената симетрия $\mathbb{S}_{ind}$ предоставя универсално структурно ограничение, фиксирайки допустимата конфигурация на симетричните кандидати около всяко просто число и по този начин установява общ фон за класификацията. Инверсионната симетрия $\mathbb{S}_{inv}(P)$ свързва тази локална структура с глобалното подреждане на простите числа чрез индекса $\mathbb{P}(P)$.

Взети заедно, тези инварианти реализират преход от чисто локална аритметична симетрия към смесена локално–глобална класификационна рамка. Следователно симетричната сигнатура $\Sigma(P)$ може да се интерпретира като минимален инвариант, който



Фигура 1: Минималистична визуализация на симетричната класификация на простите числа. Хоризонталната ос представя инверсионната симетрия $Z(P)$, вертикалната ос — индекса $\mathbb{P}(P)$, а цветът кодира корелационната симетрия $\mathbb{S}_{cor}(P) \in \{-1, +1\}$.

едновременно кодира информация за класовете на остатъци, структурни ограничения и глобална позиционна информация. В този смисъл симетричната класификация допълва традиционното линейно подреждане на простите числа чрез въвеждане на допълнителна организация, основана на симетрия.

4.1. Символна нотация

За удобство на означенията въвеждаме компактно символно представяне на симетричната сигнатура, асоциирана с просто число $P > 2$. Сборът от инвариантите заедно с индекса $\mathbb{P}(P)$ се означава чрез

$$ {}^{\mathbb{S}_{inv}(P)}_{\mathbb{S}_{cor}(P)}\mathbf{P}^{\mathbb{P}(P)}_{\equiv}, \tag{9} $$

където символът $\equiv$ представлява универсалната тъждествена симетрия $\mathbb{S}_{ind} \equiv 0$, дефинирана в (7).

Тази нотация може да се разглежда като символно издигане на симетричната сигнатура $\Sigma(P)$ в компактна алгебрична форма, която едновременно записва локалната ориентация на симетрията, универсалното структурно ограничение и глобалната позиция на простото число.

В тази нотация:

- горният ляв индекс $\mathbb{S}_{inv}(P)$ обозначава инверсионната симетрия;
- долният ляв индекс $\mathbb{S}_{cor}(P)$ обозначава корелационната симетрия;

- горният десен индекс $\mathbb{P}(P)$ обозначава индекса на P в подредената редица на простите числа;
- долният десен символ $\equiv$ кодира универсалната тъждествена симетрия.

Изразът (9) следователно предоставя кратко кодиране на симетричната сигнатура $\Sigma(P)$, дефинирана в (4), позволявайки простите числа да бъдат представяни директно чрез своите структурни инварианти.

4.2. Пример

Илюстрираме нотацията с три несъседни прости числа: $P = 11$, $P = 23$ и $P = 41$. Тези примери показват как идентични или сходни инверсионни стойности могат да възникнат за прости числа, принадлежащи към различни локални симетрични ориентации.

1. Простото число $P = 11$.

$$N(11) = \frac{11-1}{4} = 3, \qquad \mathbb{P}(11) = 5, \qquad Z(11) = 5 - 3 = 2.$$

Тъй като $(11-1)/4 \in \mathbb{N}$, имаме $\mathbb{S}_{cor}(11) = -1$. Следователно,

$${}^{2}_{-1}\mathbf{11}^{5}_{\equiv}.$$

2. Простото число $P = 23$.

$$N(23) = \frac{23+1}{4} = 6, \qquad \mathbb{P}(23) = 9, \qquad Z(23) = 9 - 6 = 3.$$

Тъй като $(23+1)/4 \in \mathbb{N}$, имаме $\mathbb{S}_{cor}(23) = +1$. Следователно,

$${}^{3}_{+1}\mathbf{23}^{9}_{\equiv}.$$

3. Простото число $P = 41$.

$$N(41) = \frac{41-1}{4} = 10, \qquad \mathbb{P}(41) = 13, \qquad Z(41) = 13 - 10 = 3.$$

Тъй като $(41-1)/4 \in \mathbb{N}$, имаме $\mathbb{S}_{cor}(41) = -1$. Следователно,

$${}^{3}_{-1}\mathbf{41}^{13}_{\equiv}.$$

Тези примери показват, че различни прости числа могат да споделят една и съща инверсионна симетрия, докато се различават по корелационна симетрия или индекс. Нотацията (9) прави подобни структурни зависимости явни, без да се позовава на числова близост.

4.3. Симетрични класове на простите числа

Симетричната сигнатура $\Sigma(P)$, дефинирана в (4), позволява простите числа да бъдат групирани в класове, които споделят едни и същи стойности на симетричните инварианти. Фиксирането на корелационната симетрия $\mathbb{S}_{cor}(P)$ и инверсионната симетрия $\mathbb{S}_{inv}(P)$ определя такъв клас, докато индексът $\mathbb{P}(P)$ варира в неговите граници.

В този смисъл класификацията, индуцирана от $\Sigma(P)$, е структурна, а не метрична: простите числа могат да бъдат произволно отдалечени в естественото подреждане, но да останат близки в организацията, основана на симетрия.

Просто число P	$\mathbb{S}_{cor}(P)$	$N(P)$	$\mathbb{P}(P)$	$\mathbb{S}_{inv}(P)$
11	-1	3	5	2
41	-1	10	13	3
71	-1	17	20	3

Таблица 1: Три несъседни прости числа, принадлежащи към корелационния клас $\mathbb{S}_{cor} = -1$ и имащи близки инверсионни стойности.

Таблица 1 илюстрира тази ситуация чрез три несъседни прости числа, които принадлежат към един и същ корелационен клас и проявяват сходни инверсионни стойности. Самите прости числа са разделени от големи интервали, което подчертава, че класификацията не се основава на числова близост.

Използвайки символната нотация, въведена в (9), тези прости числа се представят като

$$ {}^{2}_{-1}\mathbf{11}^{5}_{\equiv}, \qquad {}^{3}_{-1}\mathbf{41}^{13}_{\equiv}, \qquad {}^{3}_{-1}\mathbf{71}^{20}_{\equiv}. $$

Бележка 4.4. Таблица 1 показва, че прости числа, отдалечени в естественото подреждане, могат въпреки това да принадлежат към един и същ симетричен клас. Съвпадението в $\mathbb{S}_{cor}(P)$ заедно с близостта на инверсионния инвариант $\mathbb{S}_{inv}(P)$ показва, че симетричната сигнатура улавя структурни свойства, независими от локалното разстояние. Получената организация допълва класическото линейно подреждане на простите числа чрез въвеждане на перспектива, основана на симетрия.

Бележка 4.5 (Интерпретационен обхват). Симетричната сигнатура, въведена в тази работа, не е предназначена като инструмент за предсказване на прости числа, нито цели да генерира нови прости числа или да предоставя оценки за тяхното разпределение. Вместо това тя трябва да се разбира като структурна координатна система върху множеството на простите числа.

В тази перспектива на всяко просто число се присвоява позиция, определена от явно дефинирани инварианти, които комбинират локална аритметична симетрия с глобална информация за подреждането. Получената класификация допълва класическото описание на простите числа чрез модулна аритметика и класове на остатъци, като издига модулната симетрия в смесена локално–глобална рамка.

Съответно симетричната сигнатура организира простите числа геометрично в термини на симетрия и структура, а не в термини на числово предсказване или асимптотично поведение.

4.3.1. Втори симетричен клас

Като допълнение към предходния пример, сега разглеждаме прости числа, принадлежащи към противоположния корелационен клас,

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = +1.$$

Както и преди, симетричната стойност $N(P)$ се определя чрез подходящия избор на $(P \pm 1)/4$, докато инверсионната симетрия $\mathbb{S}_{inv}(P)$ отразява разликата между локалната симетрична структура и глобалния индекс.

Просто число P	$\mathbb{S}_{cor}(P)$	$N(P)$	$\mathbb{P}(P)$	$\mathbb{S}_{inv}(P)$
23	$+1$	6	9	3
47	$+1$	12	15	3
83	$+1$	21	23	2

Таблица 2: Прости числа от корелационния клас $\mathbb{S}_{cor} = +1$ с близки инверсионни стойности.

Бележка 4.6. Таблица 2 предоставя симетричния аналог на Таблица 1, като показва прости числа с противоположна корелационна ориентация. Заедно двете таблици илюстрират, че симетричната сигнатура $\Sigma(P)$ индуцира разлагане на простите числа, определено от структурни симетрии, а не от аритметична близост. В частност, прости числа, които са широко раздалечени по числовата ос, могат да заемат съседни позиции в симетричната координатна система, определена от $(\mathbb{S}_{cor}, \mathbb{S}_{inv})$.

$${}^{3}_{+1}\mathbf{23}^{9}_{\equiv}, \qquad {}^{3}_{+1}\mathbf{47}^{15}_{\equiv}, \qquad {}^{2}_{+1}\mathbf{83}^{23}_{\equiv}.$$

4.3.2. Трети симетричен клас

За пълнота представяме трети пример за симетричен клас прости числа, споделящи една и съща корелационна симетрия и проявяващи близки инверсионни стойности. В този случай,

$$\mathbb{S}_{cor}(P) = -1,$$

докато съответните инверсионни стойности $\mathbb{S}_{inv}(P)$ остават в тесен диапазон, въпреки че простите числа са далеч едно от друго в редицата на простите числа.

Просто число P	$\mathbb{S}_{cor}(P)$	$N(P)$	$\mathbb{P}(P)$	$\mathbb{S}_{inv}(P)$
19	-1	5	8	3
59	-1	15	17	2
79	-1	20	22	2

Таблица 3: Трети пример за симетричен клас: прости числа с $\mathbb{S}_{cor} = -1$ и близки инверсионни стойности.

Бележка 4.7. Този трети пример допълва предходните два и показва, че симетричните сигнатури не се появяват изолирано, а формират семейства, свързани чрез инвариантите, дефиниращи сигнатурата. Макар простите числа да са широко раздалечени както по стойност, така и по индекс, тяхната близост в симетричното пространство, определено от $(\mathbb{S}_{cor}, \mathbb{S}_{ind}, \mathbb{S}_{inv})$, разкрива структурни зависимости, които са невидими в обичайното линейно подреждане на простите числа.

$$ {}^{3}_{-1}\mathbf{19}^{8}_{\equiv}, \qquad {}^{2}_{-1}\mathbf{59}^{17}_{\equiv}, \qquad {}^{2}_{-1}\mathbf{79}^{22}_{\equiv}. $$

4.3.3. Несъседни прости числа със същата инверсионна симетрия

Докато корелационната симетрия разделя простите числа на два широки класа, инверсионната симетрия

$$ \mathbb{S}_{inv}(P) = Z(P) = \mathbb{P}(P) - N(P) $$

дефинирана в (8), определя естествени класове прости числа, за които стойността на $Z(P)$ съвпада. Тези класове често съдържат прости числа, които са далеч едно от друго както по числова стойност, така и по индекс, но са „близки“ в инверсионното пространство.

Като пример разглеждаме инверсионния клас $Z(P) = 2$. За няколко прости числа получаваме:

$$ \begin{aligned} P &= 5, & N(5) &= 1, & \mathbb{P}(5) &= 3, & Z(5) &= 2, \\ P &= 7, & N(7) &= 2, & \mathbb{P}(7) &= 4, & Z(7) &= 2, \\ P &= 11, & N(11) &= 3, & \mathbb{P}(11) &= 5, & Z(11) &= 2, \\ P &= 59, & N(59) &= 15, & \mathbb{P}(59) &= 17, & Z(59) &= 2, \\ P &= 71, & N(71) &= 18, & \mathbb{P}(71) &= 20, & Z(71) &= 2. \end{aligned} $$

$$ {}^{2}_{-1}\mathbf{5}^{3}_{\equiv}, \quad {}^{2}_{+1}\mathbf{7}^{4}_{\equiv}, \quad {}^{2}_{-1}\mathbf{11}^{5}_{\equiv}, \quad {}^{2}_{+1}\mathbf{59}^{17}_{\equiv}, \quad {}^{2}_{+1}\mathbf{71}^{20}_{\equiv}. $$

Бележка 4.8. Този пример показва, че инверсионната симетрия $\mathbb{S}_{inv}(P)$ групира заедно прости числа, които са отдалечени както по стойност, така и по индекс, но споделят една и съща разлика между локалната симетрична стойност $N(P)$ и глобалния индекс $\mathbb{P}(P)$. Инверсионните класове следователно предоставят допълнителен структурен слой, независим от локалната числова съседност.

5. Заключение

В настоящата работа въведохме симетрична рамка, която приписва на всяко просто число $P > 2$ естествен набор от инварианти, формиращи симетрична сигнатура. Корелационната симетрия определя направлението на локалната симетрична стойност $N(P)$, дефинирана в (1), тъждествената симетрия улавя еднородното структурно поведение на съседните цели числа $P-1$ и $P+1$, а инверсионната симетрия свързва локалната и глобалната структура чрез целочислената разлика $Z(P)=\mathbb{P}(P)-N(P)$, дефинирана в (8). Заедно тези инварианти дефинират симетричната сигнатура (4), която отнася всяко просто число към ясно определен симетричен клас.

Целта на рамката не е да извежда нови аналитични резултати относно разпределението на простите числа. Вместо това тя предлага алтернативна организационна перспектива, в която простите числа се разглеждат не само като елементи на линейна редица, но и като точки в дискретно симетрично пространство. В рамките на това пространство прости числа, които са далеч едно от друго по стойност или индекс, могат въпреки това да споделят общи структурни характеристики, кодирани чрез техните симетрични сигнатури.

Представените примери илюстрират, че корелационната и инверсионната симетрия естествено генерират глобални класове, които не са видими от чисто числовото подреждане. От тази гледна точка симетричната сигнатура действа като структурна координатна система: тя организира съществуваща аритметична информация, без да въвежда предсказателни допускания относно появата на простите числа. Нейната роля е описателна, а не предсказателна, като предоставя език, в който връзките между локалната модулна структура и глобалното подреждане могат да бъдат изразени по единен начин.

От тази перспектива естествено възникват няколко направления за бъдещи изследвания. Те включват статистическото поведение на инверсионните класове, възможни връзки между симетричните инварианти и класически аритметични свойства, както и използването на симетричните сигнатури като описателни инструменти в изчислителни или експлораторни изследвания на структурата на простите числа.

Макар конструкцията да разчита единствено на елементарни аритметични наблюдения, получената рамка разкрива нетривиална структурна организация на простите числа. Въведената тук симетрична рамка следва да се разбира не като затворена теория, а като отворена координатна система: формална среда, в която нови структурни въпроси относно простите числа могат да бъдат формулирани прецизно.

Придружаващият Zenodo dataset подкрепя възпроизводимото изследване на тези идеи, като предоставя явни симетрични вектори и класификационни данни. Не се твърди за наличие на скрити закони, управляващи простите числа; вместо това рамката установява последователен структурен език, чрез който съществуващите аритметични явления могат да бъдат организирани, сравнени и потенциално преинтерпретирани. Надяваме се тази перспектива да послужи като отправна точка за бъдещи изследвания, в които простите числа се разглеждат не само като редица, но и като колекция от симетрични форми в дискретно структурно пространство.

В по-широкия изследователски контекст геометричните основи на линейно–цикличния преход са развити в съпътстващата статия *Global Affine Time and Metric Uniqueness: A Geometric Characterization of Linear and Cyclic Temporal Structure*, която предоставя афинната и метричната рамка, лежаща в основата на структурната интерпретация, приета в целия цикъл.

6. Бележка на автора

Симетричната рамка, представена в тази работа, произхожда от по-ранни разсъждения, свързани със структурно кодиране и разпознаване на модели в нередови числови последователности, включително въпроси, възникващи в контекста на анализа на техносигнатури и SETI-ориентирана интерпретация на сигнали. В този контекст водещата идея беше, че структурно значими модели, ако присъстват в числови данни, следва да допускат представяне чрез стабилни инварианти, а не чрез изолирани числови съвпадения.

Настоящата статия не прави твърдения относно извънземни сигнали или методологии за детекция. Вместо това SETI-контекстът служи като първоначална концептуална мотивация за търсене на координатоподобни описания на числови структури, които остават стабилни при промяна на мащаба или представянето. Въведената тук симетрична сигнатура се представя изцяло като математическа и структурна рамка, независима от конкретна област на приложение.

Възможните приложения към информационно кодиране, класификация на сигнали или разпознаване на модели в големи числови масиви остават спекулативни и се споменават единствено като направления за бъдещи интердисциплинарни изследвания.

7. Бележка към серията

По-общо, преходът от линейна към циклична структура се изследва от допълващи се гледни точки: топологична, информационна, аритметична и геометрична. Настоящата работа представлява аритметичния компонент на тази програма. Паралелно с това геометричните основи на линейно–цикличния преход са развити в съпътстващо изследване, което установява ролята на афинната структура и метричната единственост в интерпретацията на темпорални и асимптотични граници.

Пълният цикъл се състои от четири взаимосвързани части:

- **Част I:** Hybrid Linear–Cyclic Topological Structures for Digital Sequence Encoding and Technosignature Analysis
  DOI: 10.5281/zenodo.18473473
- **Част II:** Informational Geometry of the Positive Half-Line. A World Without Negative Numbers
  DOI: 10.5281/zenodo.18474513
- **Част III:** A Symmetric Classification of Prime Numbers. Correlational, Identity, and Inversion Symmetry
- **Част IV:** Global Affine Time and Metric Uniqueness: A Geometric Characterization of Linear and Cyclic Temporal Structure
  DOI: 10.5281/zenodo.18505857

Цикълът се поддържа от FAIR-съвместим набор от данни и изчислителна рамка, достъпни чрез Zenodo, които осигуряват възпроизводим достъп до симетричните вектори и инварианти, обсъждани в отделните части. В своята цялост тези работи предоставят модулна основа за по-нататъшно изследване на геометричната природа на асимптотичната структура, организацията на простите числа и възникването на циклично поведение от линейни режими при подходяща метрична интерпретация.

Литература

[1] N. J. A. Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences, a000040, `https://oeis.org/A000040`, sequence of prime numbers (2024).

[2] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 6th Edition, Oxford University Press, 2008.

[4] D. M. Burton, Elementary Number Theory, 7th Edition, McGraw-Hill, 2010.

[5] P. J. Cameron, Some notes on symmetry and structure in mathematics, Mathematical Gazette 92 (523) (2008) 1–12.