Comporre musica con la tavola pitagorica

Matrici che servono a scrivere contrappunti e canoni a qualsiasi numero di voci.

Una rivisitazione matematica dei partimenti di scuola napoletana

Luca Bianchini

Dottore in Musicologia - Università di Pavia

Scuola di Paleografia e Filologia Musicale

`luca.bianchini@italianopera.org`

5 febbraio 2026

Nota editoriale. Versione italiana, a cura dell'autore, dell'articolo originale in lingua inglese pubblicato su Zenodo: *Composing Music with the Pythagorean Table. Matrices for Writing Counterpoint and Canons for Any Number of Voices. A Mathematical Reinterpretation of the Neapolitan Partimento Tradition.*

Sommario

Questo articolo presenta un nuovo modello matematico per la composizione contrappuntistica, basato sulla formalizzazione del concetto di seme astratto e sull'uso di trasformatori (chiavi e prolazioni). A differenza degli approcci moderni, spesso complessi e limitati a poche voci, il sistema proposto introduce una nuova logica combinatoria, mostrando come la gestione di otto voci renda paradossalmente più semplice il processo compositivo rispetto alla gestione di due o tre voci.

Viene inoltre illustrato come realizzare, secondo questa teoria, tutti i principali generi di canoni, a qualsiasi intervallo, compresi quelli inversi, retrogradi, retrogradi inversi, aumentati e per prolazione. Il metodo, validato attraverso la formalizzazione algebrica e l'applicazione sistematica ai partimenti storici, è applicabile a ogni specie di contrappunto e propone un superamento della didattica tradizionale a favore di una visione basata su matrici e chiavi potenzialmente infinite.

Indice

1 Introduzione

1.1 Il problema storiografico e didattico

La didattica tradizionale della composizione, così come la storiografia musicale, descrive l'evoluzione della polifonia come una conquista lineare. Secondo questa visione evolutiva e progressiva, lo studente deve prima padroneggiare la dimensione orizzontale (melodia), poi quella verticale (armonia), per infine tentare la sintesi delle due nel contrappunto e, solo al termine del percorso, affrontare la complessità del canone. Questo approccio sequenziale porta con sé il messaggio implicito e fuorviante, che le dimensioni dello spazio sonoro siano entità separate, da combinare l'una con l'altra attraverso un faticoso lavoro di assemblaggio artigianale.

1.2 I limiti della visione lineare

La conseguenza diretta di questa impostazione è l'idea che la difficoltà compositiva cresca linearmente, o addirittura esponenzialmente, con l'aumentare del numero delle voci. Nella prassi comune, gestire un canone a due voci richiede un certo sforzo di controllo degli intervalli; gestirne uno a quattro è considerato un problema difficile; scriverne uno a otto o più voci è visto come un virtuosismo accessibile a pochi, frutto di un estenuante lavoro di *trial-and-error* sugli intervalli. Questa prospettiva si scontra però con una realtà matematica controintuitiva che il presente articolo intende dimostrare: la complessità non risiede nel numero delle parti, ma nel metodo di generazione.

1.3 Un'ipotesi alternativa: la simultaneità dimensionale

La nostra ipotesi è che la dimensione orizzontale, verticale e diagonale (l'imitazione nel tempo) non siano strati successivi, ma proprietà coesistenti, già contenute in potenza in un singolo oggetto astratto: la **triade pitagorica**, intesa non come accordo storico-tonale, ma come struttura numerica relazionale. Nel sistema che presenteremo, la sequenza numerica $1 - 3 - 5$ non viene trattata come un mero accordo, ma come un **seme astratto**, nel quale sono già codificate tutte le informazioni necessarie a sviluppare l'intera architettura polifonica, rendendo la distinzione tra melodia e armonia una pura questione di proiezione assiale.

1.4 Genesi e validazione del sistema

Il modello teorico qui formalizzato non è una speculazione astratta, ma la sistematizzazione di un metodo compositivo sviluppato dall'autore e trasmesso privatamente nel 2013 alla dottoressa Coreen Morsink, successivamente documentato nella sua tesi di dottorato presso il Goldsmiths College (University of London).[1]

In questo lavoro di ricerca, l'autrice riconosce esplicitamente a Luca Bianchini la paternità del "prototipo" matriciale, riportando in appendice la documentazione della corrispondenza privata in cui viene discusso il fondamento teorico del sistema basato sui numeri pitagorici.

La validità del sistema è stata dunque provata empiricamente ben prima della sua odierna formalizzazione algebrica: l'applicazione pratica del metodo ha permesso la realizzazione di canoni a 28 voci reali,[2] un risultato impossibile da ottenere in tempi brevi con le tecniche contrappuntistiche tradizionali, dimostrando l'efficienza computazionale dell'approccio matriciale.

[1] C. E. R. Morsink, *The Composition of New Music Inspired by Music Philosophy and Musical Theoretical Writings from Ancient Greece*, PhD Diss., Goldsmiths, University of London, 2013.

[2] L'incipit di questo canone, composto da Coreen Morsink in base alle teorie sulle matrici dell'autore, è riportato a pagina 101 della sua tesi di dottorato: Coreen Emmie Rose Morsink, Goldsmiths, University of London, PhD in Music, 2013.

1.5 La tesi ontologica

Se una singola struttura numerica (il **seme astratto**) contiene già in sé la melodia (asse orizzontale), l'armonia (asse verticale) e l'imitazione (proiezione diagonale), ne consegue la tesi ontologica forte, che la polifonia non è un'elaborazione storica aggiunta al suono, ma una proprietà intrinseca del sistema numerico stesso. Non si tratta di costruire la polifonia, ma di attivarla operativamente attraverso operatori specifici (le chiavi).

1.6 Obiettivi dell'articolo

Nelle pagine seguenti, tradurremo questa teoria compositiva in un rigoroso formalismo matematico basato sull'algebra matriciale e sull'aritmetica modulare. L'obiettivo è triplice:

- Dimostrare matematicamente il **paradosso della complessità**: far vedere come, in un sistema saturo (quando $n \to 8$), la composizione diventi paradossalmente più semplice e deterministica rispetto alla gestione di poche voci.
- Definire il Canone non come una forma musicale difficile, ma come un caso particolare e automatico di somma vettoriale.
- Proporre un cambio di paradigma didattico: dall'assemblaggio per tentativi alla generazione algoritmica controllata.

Questo articolo non intende proporre un nuovo stile compositivo, bensì un modello generativo formale in grado di riprodurre ed estendere le pratiche storiche del contrappunto. Il lavoro viene pubblicato come preprint con l'obiettivo di fissare un modello teorico completo e formalizzato; le implicazioni storiche, didattiche e compositive del sistema saranno sviluppate separatamente in forma divulgativa.

2 Il fondamento teorico: il seme astratto

2.1 La dimensione orizzontale della melodia

Nel nostro modello, la sequenza rappresentata dai numeri **1**, **3** e **5** definisce in senso orizzontale una sequenza melodica costituita da tre suoni distinti. Attribuiamo a questa successione il nome di **seme astratto** poiché non si limita a descrivere una melodia, ma funge da struttura generatrice dell'intera architettura polifonica. Proprio come in natura, questo seme astratto contiene "in potenza" tutto ciò che serve a costruire la complessità musicale che vedremo più sotto.

La notazione è posizionale e relativa in quanto i numeri indicano che ogni nota si trova a distanza di terza dalla precedente.

Questa sequenza $1 - 3 - 5$ può incarnare, infatti, diverse realizzazioni concrete:

- La melodia *Do - Mi - Sol*
- La melodia *Fa - La - Do*
- La melodia *Si - Re - Fa*

In questa fase di astrazione, la qualità specifica dell'intervallo (se la terza sia maggiore o minore) è ininfluente, perché quel che il sistema codifica è la distanza strutturale tra un evento sonoro e il successivo.

1	**3**	**5**

Tabella 1: Rappresentazione orizzontale del seme astratto.

2.2 La dimensione verticale dell'armonia

Quando disposti in senso verticale all'interno di una colonna della tabella, i medesimi numeri $1 - 3 - 5$ cessano di rappresentare una successione temporale per definire una simultaneità sonora.

In questa configurazione:

- Il numero **1** rappresenta il suono fondamentale (basso);
- Il numero **3** indica la terza sopra il basso;
- Il numero **5** indica la quinta.

L'oggetto risultante è la triade.[3]

5
3
1

Tabella 2: Rappresentazione verticale (accordo).

[3] In questa fase descrittiva adottiamo una rappresentazione tabellare per evidenziare la disposizione spaziale degli intervalli. Nella Sezione 4, formalizzeremo queste strutture come vettori e matrici su cui applicare trasformatori algebrici.

2.3 La dimensione diagonale: il Canone

Nella proiezione diagonale, ripetendo gli stessi numeri $1 - 3 - 5$ sfalsati di posizione, il sistema genera il primo canone all'unisono.

1	**3**	**5**		
	1	**3**	**5**	
		1	**3**	**5**

Tabella 3: Struttura del canone finito all'unisono.

Ripetendo invece gli stessi numeri $1 - 3 - 5$ sfasati di posizione e in modo ciclico, all'unisono, o trasposti all'ottava, il sistema genera il nostro primo canone infinito. Per convenzione, la riga più in basso è all'ottava sotto.

1	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	**1**	**3**	...
	1	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	**1**	...
		1	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	**1**	**3**	**5**	...

Tabella 4: Sviluppo del canone infinito all'unisono.

2.4 Perché i numeri non possono essere casuali

Se vogliamo espandere il canone a **4 voci**, dobbiamo aggiungere un quarto numero al seme. Proviamo a raddoppiare il numero 1 all'inizio:

$$1 - 1 - 3 - 5$$

Musicalmente, questo significa che ogni voce canterà le due note 1 (Do) una dopo l'altra, seguite dal 3 (Mi) e dal 5 (Sol), ripetendo all'infinito. Fin qui, tutto funziona.

1	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	...
	1	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	...
		1	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	**5**	**1**	...
			1	**1**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	**5**	...

Tabella 5: Sviluppo del canone infinito all'unisono con il seme 1135.

Matrice sonora

di un canone a 4 voci

Luca Bianchini

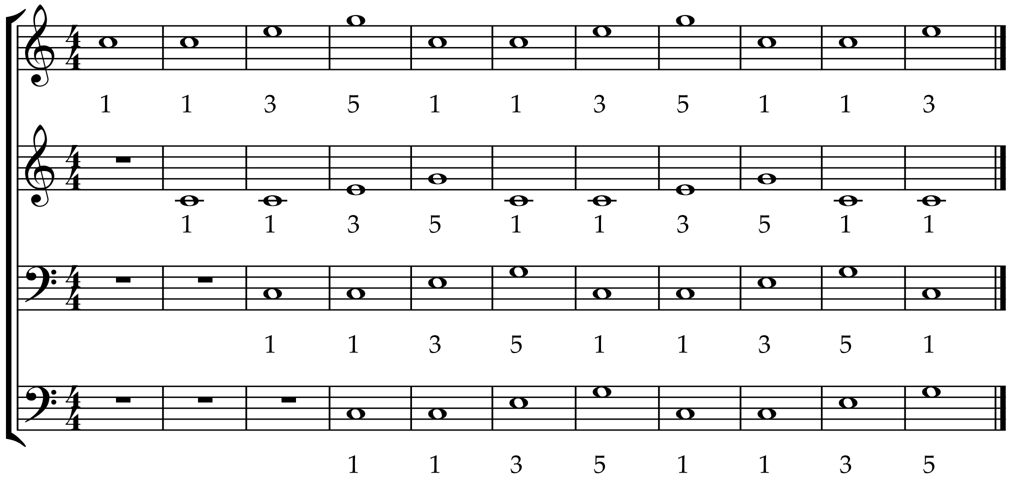

Figura 1: Canone all'ottava, generato dal **seme astratto** $1 - 1 - 3 - 5$.

2.5 Ottave e quinte parallele

La trattatistica tradizionale proibisce le ottave e quinte parallele per qualunque numero di voci.[4] Nel presente articolo si assume consapevolmente tale divieto come unico vincolo generale.

Per mantenere il modello più semplice e formalizzabile possibile, non vengono invece presi in considerazione altri vincoli, relativi ad esempio alle ottave e alle quinte dirette, e ad asprezze intervallari come il tritono, che dipendono da fattori locali di condotta melodica, non incidendo sulla struttura combinatoria del sistema.

Conformemente alle regole della scuola contrappuntistica antica, codificata nei trattati, le ottave e le quinte parallele verranno qui considerate degli errori in senso tecnico, ossia violazioni del vincolo strutturale di un sistema, indipendentemente da valutazioni stilistiche, estetiche e storicamente successive.

Se nei nostri esempi aumentiamo il numero delle voci a 5 o più, sorge allora un problema critico. Volendo evitare errori di quinte e di ottave parallele, non possiamo aggiungere numeri a caso. Proviamo ad esempio la sequenza

$$1 - 1 - 3 - 1 - 1$$

a 5 voci. A prima vista sembrerebbe una soluzione accettabile, ma traducendola in musica e analizzando cosa succede, ad esempio, tra la Voce 1 (V1) e la Voce 2 (V2) quando il canone avanza, vediamo che:

- la sequenza contiene la coppia $1 \to 1$ all'inizio;
- la sequenza contiene nuovamente la coppia $1 \to 1$ alla fine.

Quando il canone si sovrappone, ci troveremo in un punto in cui due voci diverse eseguono contemporaneamente lo stesso movimento melodico ($1 \to 1$) partendo dalla stessa nota, producendo **unisoni consecutivi** o **ottave parallele**.

1	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	...
	1	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	...
		1	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	...
			1	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	...

Tabella 6: Sviluppo del canone. Le celle con sfondo rosso indicano le ottave parallele scolasticamente vietate.

Lo stesso problema accade con le quinte. Immaginiamo un seme che contenga:

$$1 - 1 - 5 - 5$$

Qui le coppie $1 \to 1$ e $5 \to 5$ si ripetono e questo costringerà due voci a muoversi in parallelo a una quinta di distanza (Do-Sol e Do-Sol), generando, se la quinta è sopra, delle **quinte parallele**.

1	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	**5**	...
	1	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	...
		1	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	**5**	**5**	**1**	...
			1	**1**	**5**	**5**	**1**	**1**	**5**	**5**	...

Tabella 7: Sviluppo del canone. Le celle con sfondo rosso indicano le quinte parallele vietate.

[4]Cfr. L. Cherubini, Cours de contepoint, p.4)

Occorre quindi fare attenzione a non usare le coppie 1 →1 e 5 →5 nello stesso seme.

2.6 La legge delle coppie uniche

Per evitare errori (parallelismi) di unisoni e ottave non basta guardare le singole note, bisogna guardare gli **intervalli melodici** (le coppie di numeri vicini).

Con i numeri $1, 3, 5$, le coppie possibili sono esattamente 9:

- Movimenti dall'1: $1 \to 1, 1 \to 3, 1 \to 5$
- Movimenti dal 3: $3 \to 1, 3 \to 3, 3 \to 5$
- Movimenti dal 5: $5 \to 1, 5 \to 3, 5 \to 5$

Volendo scrivere un canone a 8 voci corretto, dobbiamo costruire una catena di 8 numeri (quindi 7 passaggi) usando queste coppie **senza mai ripeterne una**. Solo garantendo l'unicità della coppia (es. se ho usato $1 \to 3$ non posso più usarlo) siamo matematicamente certi che sul pentagramma non compariranno mai due voci che si muovono parallelamente nello stesso modo. Proviamo a usare il seme 11315335:

1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	**3**	**5**	**1**	**1**	**3**	...
	1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	**3**	**5**	**1**	**1**	...
		1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	**3**	**5**	**1**	...
			1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	**3**	**5**	...
				1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	**3**	...
					1	**1**	**3**	**1**	**5**	**3**	...
						1	**1**	**3**	**1**	**5**	...
							1	**1**	**3**	**1**	...

Tabella 8: Sviluppo del canone infinito all'unisono o all'ottava con il seme 11315335.

Il sistema a 8 voci è rigido, perché abbiamo solo 9 "mattoncini" (coppie) a disposizione e ne dobbiamo usare 7 tutti in una volta, incastrandoli perfettamente come in un puzzle.

La sequenza qui sopra $1 \to 1 \to 3 \to 1 \to 5 \to 3 \to 3 \to 5$, ad esempio, è valida per un canone infinito a otto voci all'unisono e all'ottava, come si vede in Figura 2.

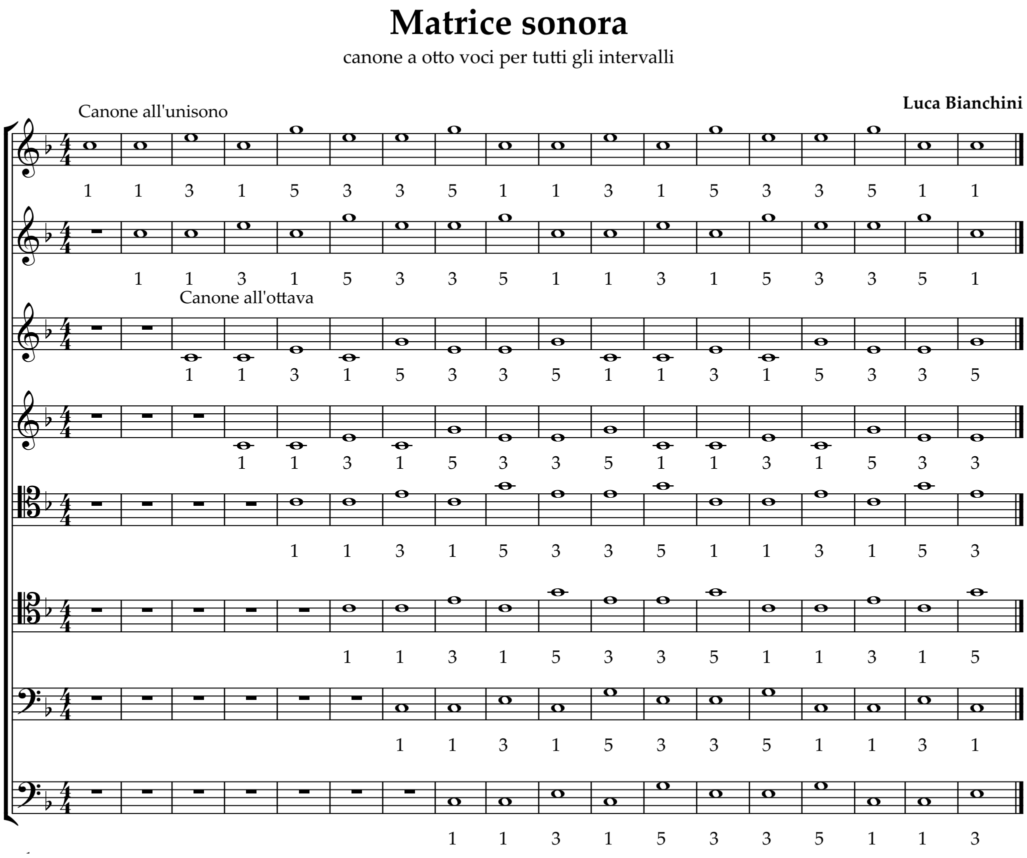

Figura 2: Canone all'ottava, generato dal **seme astratto** $1-1-3-1-5-3-3-5$.

2.7 Il calcolo delle permutazioni

Quante colonne diverse (Semi) possiamo costruire con una catena di 7 numeri, scelti tra 1, 3 o 5? Non si tratta di un calcolo infinito. Utilizzando la formula delle **permutazioni con ripetizione** (multipermutazioni), possiamo definire esattamente lo spazio delle possibilità.[5]

Dato un insieme di $n = 8$ elementi, con gruppi di elementi identici $n_1 = 3$ (gli 1), $n_2 = 3$ (i 3) e $n_3 = 2$ (i 5), il numero delle permutazioni distinte P è:

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Sviluppando il fattoriale:

$$P = \frac{40.320}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{40.320}{72} = \mathbf{560}$$

Esistono quindi esattamente **560** modi univoci di disporre le voci verticalmente rispettando la saturazione ideale. Questo è il nostro "dominio di esistenza".

2.8 La regola delle coppie adiacenti

Come si costruisce concretamente un seme valido? La regola aurea è che ogni coppia di numeri consecutivi (n_i, n_{i+1}) genera un potenziale movimento armonico. Se una coppia si ripete identica a breve distanza, si generano inevitabilmente errori di parallelismo (ottave o quinte parallele) quando le voci si sovrappongono.

Analizziamo la crescita della complessità:

- **2 voci:** Una sequenza $1 \to 1$ genera la coppia $(1, 1)$. È sufficiente per un inizio a due voci.
- **3 voci (errore):** Se estendiamo a $1 \to 1 \to 1$, abbiamo due coppie identiche consecutive: $(1, 1)$ e $(1, 1)$. Questo produce immediatamente ottave parallele. Il canone fallisce.
- **3 voci (corretto):** Se invece scriviamo $1 \to 1 \to 3$, abbiamo le coppie $(1, 1)$ e $(1, 3)$. Essendo diverse, permettono l'entrata di una terza voce senza collisioni.
- **4 voci:** Dato che la sequenza $1 \to 1 \to 3 \to 1$ genera coppie $(1, 1)$, $(1, 3)$ e $(3, 1)$ tutte uniche, possiamo sovrapporre sopra la voce base altre tre voci senza errori.

Più voci vogliamo aggiungere, più lunga deve essere la catena di coppie uniche. Se la sequenza fosse $1 \to 1 \to 3 \to 1 \to 1$, l'ultima coppia $(1, 1)$ sarebbe una duplicazione della prima, impedendo l'ingresso pulito di una quinta voce.

2.9 Il seme perfetto per otto voci

Per gestire un canone a otto voci reali, lo spazio di manovra si restringe drasticamente. Dobbiamo trovare una sequenza di 8 numeri (scelti tra $1, 3, 5$) che generi 7 coppie interne tutte diverse tra loro, e che si raccordi con l'inizio senza creare duplicazioni per permettere il canone infinito.

La sequenza che abbiamo appena visto soddisfa questa condizione:

$$S_8 = \{1, 1, 3, 1, 5, 3, 3, 5\}$$

Verifichiamo le coppie generate:

1. $1 \to 1$ (Coppia 1-1)

[5] Una permutazione è un modo di disporre tutti gli elementi di un insieme, cambiando l'ordine, senza escluderne nessuno. Se ci sono n elementi distinti, una permutazione è una qualunque sequenza possibile di quegli n elementi.

2. $1 \to 3$ (Coppia 1-3)
3. $3 \to 1$ (Coppia 3-1)
4. $1 \to 5$ (Coppia 1-5)
5. $5 \to 3$ (Coppia 5-3)
6. $3 \to 3$ (Coppia 3-3)
7. $3 \to 5$ (Coppia 3-5)

Per rendere il canone **infinito** (circolare), l'ultimo numero (5) deve collegarsi al primo (1). La coppia di raccordo è $(5, 1)$, che è unica e non è mai apparsa prima. Il cerchio si chiude perfettamente, come abbiamo mostrato in Figura 2.

2.9.1 La fragilità dell'equilibrio

Basta un solo errore per far crollare l'architettura. Se la sequenza precedente terminasse con 1:

$$1 - 1 - 3 - 1 - 5 - 3 - 5 - \mathbf{1}$$

nel momento del loop ("da capo"), avremmo la successione $5 \to 1 \to 1$, con la coppia $(1, 1)$ subito dopo la coppia $(5, 1)$. Ma la coppia $(1, 1)$ era già presente all'inizio, e il risultato sarebbe:

$$...5 \to 1 \to \mathbf{1} \to 1 \to 3...$$

Tre 1 consecutivi generano ottave parallele. Il sistema si bloccherebbe matematicamente, impedendo la circolarità infinita.

2.10 La rarità statistica del seme (l'ago nel pagliaio)

Qui si comprende la vera natura della difficoltà storica. Abbiamo visto che esistono teoricamente 560 permutazioni possibili dei numeri $\{1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5\}$. Tuttavia, quelle che rispettano la "regola delle coppie uniche" (senza tripli 1 o tripli 3 adiacenti e senza ripetizioni di coppie nei cicli all'infinito) sono pochissime.

Tentare di trovare questa sequenza "a orecchio" o per tentativi, scrivendo note sul pentagramma, equivale a cercare un ago in un pagliaio di migliaia di combinazioni fallimentari. La matrice, invece, ci consegna l'ago già pronto.

2.11 Censimento dei cicli validi e teorema di copertura

L'analisi combinatoria, filtrata attraverso le regole di consonanza del sistema (in particolare il divieto di parallelismi proibiti), riduce lo spazio delle possibilità a un insieme finito di "semi" (cicli generatori). Di seguito si riportano le successioni ammesse per ogni numero di voci N del canone infinito (da 2 a 8). Si noti che le sequenze di numeri letti al contrario (es. 13, 31) sono equivalenti e pertanto le abbiamo omesse, per non allungare la tabella. Nella prima colonna è segnato il numero di voci, nella seconda il numero di semi validi, e nella terza l'elenco dei semi.

Voci (N)	**Q.tà**	**Semi validi (rappresentanti canonici)**
2	3	`13, 15, 35`
3	8	`113, 115, 133, 135, 153, 155, 335, 355`
4	11	`1133, 1135, 1153, 1315, 1335, 1353, 1355, 1533, 1535, 1553, 3355`
5	16	`11315, 11335, 11353, 11513, 11533, 11535, 13155, 13315, 13353, 13355, 13533, 13553, 15335, 15355, 15533, 15535`
6	13	`113315, 113353, 113533, 115133, 115335, 131535, 133155, 133553, 135153, 135315, 135533, 153355, 155335`
7	18	`1131535, 1135153, 1135315, 1151353, 1153135, 1153513, 1315335, 1315355, 1315535, 1331535, 1335153, 1335315, 1351533, 1351553, 1353155, 1353315, 1355153, 1355315`
8	24	`11315335, 11331535, 11335153, 11335315, 11351533, 11353315, 11513353, 11513533, 11531335, 11533135, 11533513, 11535133, 13153355, 13155335, 13315355, 13315535, 13351553, 13353155, 13355153, 13355315, 13515533, 13533155, 13551533, 13553315`

Tabella 9: Catalogo dei semi canonici per dimensione del sistema, che sono in tutto 93.

Si osservi ancora, che abbiamo escluso i semi che possono generare quinte. Ad esempio, a 4 voci manca il seme teorico `1155`. Senza la regola specifica che impedisce la coesistenza dei bigrammi $(1, 1)$ e $(5, 5)$, questo seme risulterebbe matematicamente generabile, ma l'abbiamo scartato per evitare due quinte consecutive che ne deriverebbero, quando i due 1 stanno sotto.

2.11.1 Principio di validità discendente

La validazione del sistema a 8 voci rivela una proprietà fondamentale di robustezza a ritroso.

Teorema: Se un seme S genera un canone valido a 8 voci, allora S genera necessariamente canoni validi per qualsiasi numero di voci $k < 8$.

Dimostrazione: Poiché il seme a 8 voci è valido, i suoi bigrammi sono univoci per definizione. Di conseguenza, l'uguaglianza bigramma$[p]$ = bigramma$[p + d]$ è impossibile per qualsiasi $d \neq 0$. Non potendo verificarsi coincidenze di moto a nessuna distanza d, non possono generarsi parallelismi vietati per nessuna configurazione di voci inferiore. Il sistema è dunque *downward compatible*: ciò che resiste alla complessità massima è intrinsecamente sicuro per ogni densità polifonica minore. Al contrario, un seme valido per $N = 5$ non garantisce validità per $N = 8$, poiché i suoi bigrammi non sono costretti all'univocità totale.

2.12 L'inevitabilità statistica dell'errore

Questo calcolo ci permette di comprendere scientificamente perché l'approccio empirico sia destinato al fallimento o richieda tempi biblici.[6]

Chi compone senza matrici non lavora all'interno di questi **93** semi "sicuri", ma naviga in uno spazio combinatorio aperto dove ogni voce può teoricamente prendere una qualsiasi delle 3 note ($3^8 = 6.561$ combinazioni, escludendo le pause); tuttavia, solo queste **93** configurazioni bilanciate garantiscono una fluidità ottimale.

L'errore contrappuntistico (ottave/quinte parallele o vicoli ciechi) nasce quando:

[6] Giancarlo Bizzi spiega come si ricavano i canoni a due voci, compreso quello aumentato, procedendo per tentativi ed errori. Il percorso che ne risulta è però lungo e accidentato. Cfr. G. Bizzi, *Specchio invisibile. I canoni enigmatici di J. S. Bach*, Roma, Kappa, 1982.

1. Si sceglie una configurazione verticale non bilanciata (es. quattro 1).
2. Si tenta di collegare due colonne valide attraverso movimenti non permessi dalla matrice vettoriale.

Senza una predeterminazione della struttura, la probabilità che un compositore scelga "a orecchio" una sequenza di 8 colonne consecutive che corrisponda esattamente a una delle sole **24** configurazioni cicliche valide di un canone a otto voci (su un'infinità di combinazioni possibili) è statisticamente nulla, nel quadro dei vincoli assunti. Ecco perché il nostro sistema inverte il paradigma: invece di cercare l'ago nel pagliaio (tentare di correggere gli errori a posteriori), forniamo in anticipo il set completo di aghi di cui abbiamo bisogno.

3 L'attivazione del sistema: chiavi e riduzioni

Storicamente, molti tentativi di automazione compositiva, come la celebre *Tabula Mirifica* o i giochi di dadi musicali (*Musikalisches Würfelspiel*), si sono basati sull'idea che una singola matrice di permutazione potesse contenere tutte le risposte. Tuttavia, considerare una sola tavola come risolutrice universale è un'utopia combinatoria, dato che la musica è un sistema complesso che vive su più dimensioni simultanee (altezza, durata, intensità, timbro).[7]

3.1 Oltre l'utopia della tavola unica

Utilizzare una sola tabella per gestire questo iperspazio comporta inevitabilmente un approccio per tentativi. Il compositore è costretto a scartare manualmente centinaia di combinazioni generate dalla tavola che risultano però incoerenti o proibite dalle regole del contrappunto. Cercare la soluzione corretta in questo modo richiede tempi lunghissimi, rendendo il sistema inefficiente proprio laddove promette rapidità.

Per bypassare questo "collo di bottiglia" occorre separare i parametri in matrici distinte e sovrapponibili:

- La **matrice sonora** (M_S) determina rigorosamente la tessitura intervallare, garantendo la validità armonica.
- La **matrice delle chiavi** (M_K) trasforma l'altezza reale, fornendo il profilo melodico.
- La **matrice delle prolazioni** (M_T) stabilisce invece la durata ritmica.

Non esiste una tavola magica che fa tutto, ma un **sistema di matrici** che, interagendo, determina univocamente il risultato senza bisogno di correzioni a posteriori. La complessità non si risolve semplificando lo strumento con una tavola tuttofare, ma organizzando la struttura in più matrici specializzate.

3.2 Le chiavi come trasformatori

I canoni descritti in precedenza possiedono una coerenza intervallare interna, ma "non suonano" ancora, perché mancano le **chiavi** sul pentagramma che diano un nome reale alle note (altezza). Per determinare quale chiave applicare di volta in volta, utilizziamo la **matrice delle chiavi** derivata dalla tavola pitagorica. Questa corrisponde esattamente alla tavola di moltiplicazione elementare, che qui ha il ruolo di database di trasformatori.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabella 10: La Matrice delle Chiavi (il cuore della Tavola Pitagorica).

[7] M. Nicolella e D. Celletti, *I segreti dell'Harmonia. Comporre canoni musicali con la Tabula mirifica*, Città del Vaticano, Libreria Editrice Vaticana, 2021.

3.3 Riduzioni e aritmetica modulare (0-6)

La tavola pitagorica genera progressioni matematiche che crescono rapidamente verso l'infinito. Per adattare questi valori alla lettura immediata sul pentagramma, adottiamo l'aritmetica modulare in base 7. In questo contesto, il numero 7 e i suoi multipli (14, 21...) vengono ridotti a **0**.

3.3.1 La doppia natura dello zero

È fondamentale distinguere il significato dello zero a seconda del contesto in cui opera:

- **Nella matrice sonora** (M_S): Lo 0 indica l'assenza di evento, ovvero la **pausa**.
- **Nella matrice delle chiavi** (M_K): Lo 0 è un numero attivo che indica la **chiave di riferimento** (o identità).

Se per convenzione stabiliamo che la chiave 0 corrisponde alla **chiave di Do**, allora:

- $0 =$ chiave di Do (riferimento);
- $1 =$ chiave di Re (seconda);
- ...
- $7 \equiv 0 =$ chiave di Do all'ottava superiore (ritorno all'identità).

Il sistema è puramente relazionale: se il compositore decidesse che 0 corrisponde alla **chiave di La** (a 441 Hz), la chiave 1 diverrebbe automaticamente la **chiave di Si**, che sta un gradino sopra quel La. I rapporti interni con tutti gli altri numeri resterebbero ovviamente invariati.

3.3.2 La formula di riduzione

La formula per calcolare il valore ridotto x_{red} è il semplice resto della divisione per 7:

$$x_{\text{red}} = x \pmod 7 \tag{1}$$

Questa operazione taglia ogni eccesso e restituisce sempre un numero compreso tra 0 e 6.

Esempi di calcolo immediato:

- 7 diventa **0** (l'ottava agisce come l'unisono/identità).
- 8 diventa **1** (una seconda composta $\rightarrow$ seconda semplice).
- 14 diventa **0** (due ottave $\rightarrow$ identità).
- 24 diventa **3** ($24 = 21 + 3$, quindi resta una quarta).

Applicando questa logica, la Tavola Pitagorica infinita si cristallizza in un **quadrato magico** bordato di zeri, dove l'ultima riga e l'ultima colonna annullano il movimento, rappresentando la stabilità dell'ottava. Lo 0, come già detto, indica per nostra convenzione la chiave di Do (elemento neutro). Escludendo gli zeri, si noti come la prima riga in alto, letta da sinistra a destra, sia uguale alla prima colonna letta dall'alto al basso, o come la seconda riga in alto, sia la stessa della seconda colonna e così via. Anche in diagonale ci sono affascinanti sequenze invertite, a seconda del punto d'osservazione.

1	2	3	4	5	6	**0**
2	4	6	1	3	5	**0**
3	6	2	5	1	4	**0**
4	1	5	2	6	3	**0**
5	3	1	6	4	2	**0**
6	5	4	3	2	1	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabella 11: La tavola pitagorica modulare.

4 L'algebra delle matrici

4.1 Il principio di sovrapposizione

Definite le regole di riduzione, possiamo vedere il sistema in azione. Il meccanismo generativo è una semplice addizione matriciale di due componenti.[8]

- La **matrice sonora** (M_S), che contiene il **seme astratto** $(1-3-5)$ disposto in verticale, in orizzontale, o in diagonale.
- La **matrice delle chiavi** (M_K), derivata da una riga della tavola pitagorica modulare.

La regola operativa è semplice: se nella cella della matrice sonora è presente un numero, quello rappresenta una nota e viene sommato al valore corrispondente della matrice delle chiavi. Se nella matrice sonora c'è uno zero, cioè una pausa, il risultato resta comunque zero.

4.2 Canone alla seconda superiore

Per ottenere, ad esempio, un Canone in cui le voci si imitano alla seconda superiore, si somma alla Matrice Sonora la progressione pitagorica, che ricaviamo dalla matrice delle chiavi, cioè dalla riga dell'1 nella tabellina pitagorica modulare $(0, 1, 2, 3, 4 \dots)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}}_{M_S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{M_{K1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{\text{Risultato (Canone)}}$$

Interpretazione musicale:

- Voce 1 (Riga 1): $1 \to 4 \to 7$ (es. Do - Fa - Si), e due pause (0, 0).
- Voce 2 (Riga 2): Entra dopo una battuta. Il **seme astratto** originale $1-3-5$ diventa $2-5-8$ (Re - Sol - Do ottava), più la pausa (0).
- Voce 3 (Riga 3): Entra dopo due battute. Il seme diventa $3-6-9$ (Mi - La - Re ottava).

Le voci si rincorrono regolarmente alla seconda superiore. La linearità dell'operazione garantisce che la struttura intervallare interna (la triade 1-3-5) venga preservata intatta, prevenendo errori armonici per costruzione.

4.3 Canone alla terza e successivi

Applicando la riga della tabellina pitagorica modulare del 2 $(0, 2, 4, 6 \dots)$, il sistema genera un Canone alla terza.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Il principio è universale: con la progressione del 3 si ottiene un Canone alla quarta, con quella del 4 un Canone alla quinta, e così via all'infinito. Insomma, per avere un Canone a un intervallo n, la riga pitagorica da utilizzare corrisponde sempre alla tabellina del $n-1$.

[8] Da questo punto in avanti, formalizzeremo le tabelle precedentemente introdotte come **matrici**. Questo cambio di notazione non è puramente stilistico, ma funzionale, perché ci permette di applicare gli operatori dell'algebra lineare (somma, trasposizione, prodotto per scalare) direttamente alle strutture musicali, trasformando la composizione in un calcolo esatto.

4.4 Canone all'ottava

Sommando la progressione del 7 (che equivale allo 0 o all'identità armonica), si ottiene invece il Canone all'ottava.

$$M_S + M_{K7} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{poiché } 1 + 7 \equiv 1)$$

Le voci cantano le stesse note (Do-Mi-Sol), sfasate nel tempo.

4.5 Canoni a intervalli inferiori

Per ottenere imitazioni discendenti, ad esempio un Canone alla seconda inferiore, non è necessario sottrarre, dato che è sufficiente sommare la riga corrispondente della matrice delle chiavi, ma letta in senso inverso. La posizione dell'1 (Canone alla seconda superiore), scorrendo la riga della tabellina al contrario, è occupata dal 6 (Canone alla settima). Matematicamente, un Canone alla seconda inferiore equivale, infatti, a un Canone alla settima superiore trasportato all'ottava sotto.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**0**
2	**4**	**6**	**1**	**3**	**5**	**0**
3	6	2	5	1	4	**0**
4	1	5	2	6	3	**0**
5	3	1	6	4	2	**0**
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabella 12: La tavola pitagorica modulare.

4.6 Canoni infiniti

Con il sistema a doppia matrice, i Canoni infiniti risultano più semplici da realizzare di quelli finiti, poiché non è necessario elaborare una cadenza speciale per concluderli. Per realizzare un Canone infinito è sufficiente ripetere ciclicamente i numeri della **matrice sonora** e applicare a ogni colonna (quindi a ogni battuta temporale) una chiave specifica della **matrice delle chiavi**.

La chiave agisce verticalmente su tutte le voci che suonano in quel momento: se la chiave cambia, cambia per tutte, preservando l'integrità armonica verticale.

Per ottenere un Canone infinito in cui le voci si inseguono alla **seconda inferiore**, combiniamo la Matrice Sonora ciclica con la **riga discendente** delle chiavi $(0, 6, 5, 4 \ldots)$. Alla seconda battuta, la chiave scende a 6: questo abbassa la nota della prima voce (che prosegue) ma definisce anche l'altezza d'entrata della seconda voce, garantendo l'intervallo di imitazione corretto.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 & \ldots \\ \cdot & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & 1 & 3 & 5 & 1 & \ldots \end{bmatrix}}_{M_S \text{ (Ciclica)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & \ldots \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & \ldots \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & \ldots \end{bmatrix}}_{M_K \text{ (Verticale)}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1+0 & 3+6 & 5+5 & 1+4 & 3+3 & 5+2 & \ldots \\ \cdot & 1+6 & 3+5 & 5+4 & 1+3 & 3+2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & 1+5 & 3+4 & 5+3 & 1+2 & \ldots \end{bmatrix}}_{\text{Risultato (Somma Colonna per Colonna)}}$$

Analisi del risultato: Ogni colonna rappresenta un accordo trasposto dalla chiave corrente.

- **Tempo 1 (chiave 0):** Suona solo la prima voce (V1) con nota 1.
- **Tempo 2 (chiave 6):** La V1 suona $3+6 = 9(\equiv 2)$. La seconda voce (V2) entra con $1+6 = 7(\equiv 0)$. L'intervallo tra l'entrata della V1 (1) e l'entrata della V2 (0) è una seconda discendente.
- **Tempo 3 (chiave 5):** La V1 suona $5 + 5 = 10(\equiv 3)$. La V2 suona $3 + 5 = 8(\equiv 1)$. La V3 entra con $1 + 5 = 6$.

Il sistema genera automaticamente una spirale discendente infinita corretta, senza che il compositore debba calcolare i singoli intervalli.

Nella Figura 3 il sistema sopra è una matrice di un Canone all'unisono e all'ottava a otto voci, mentre quello sotto è lo stesso Canone, dopo l'applicazione della matrice delle chiavi (riga del due della tabellina pitagorica). Si notano le voci sfasate che rispondono alla prima a ogni intervallo della scala.

Matrice sonora

canone a otto voci per tutti gli intervalli

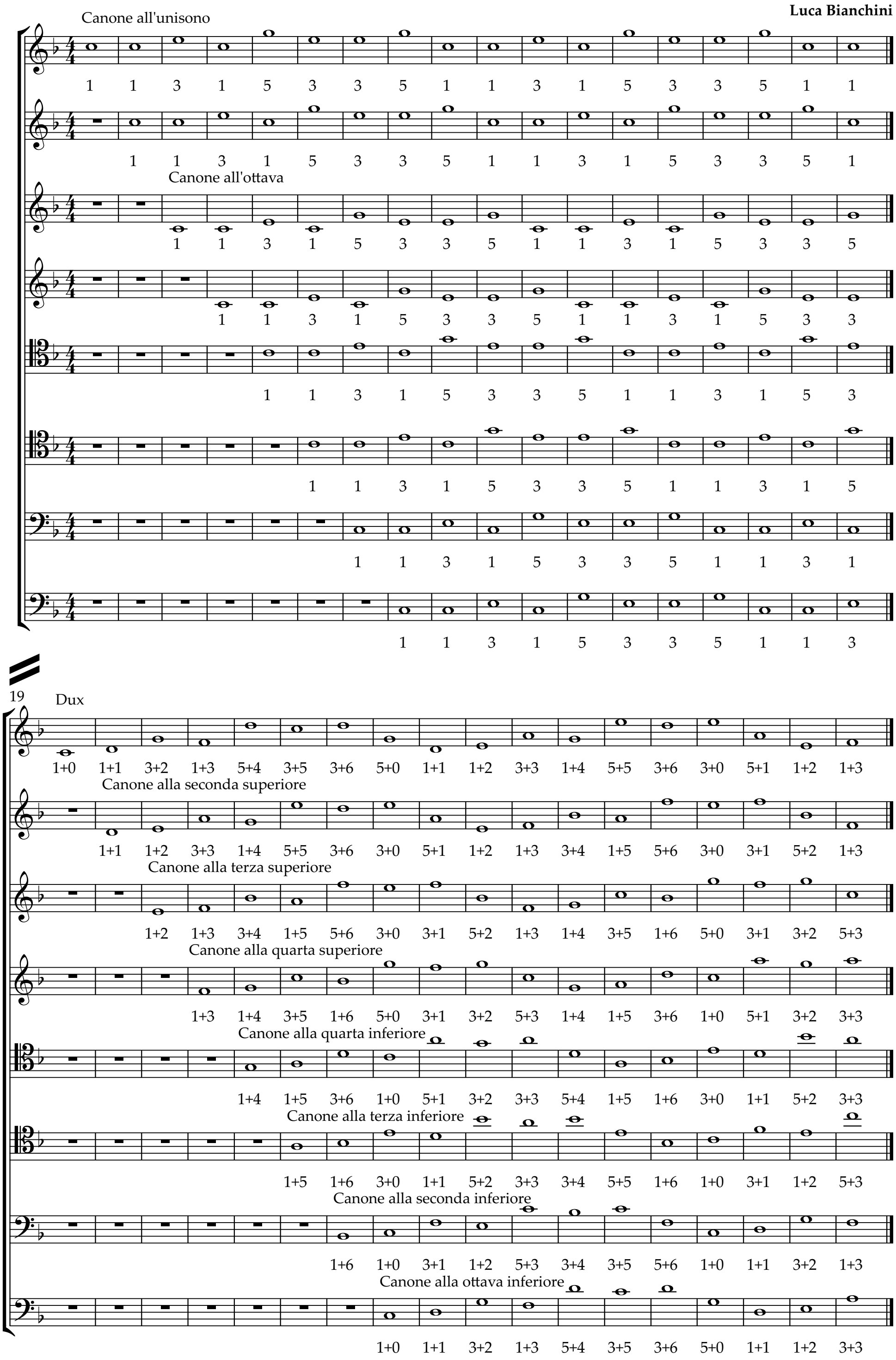

Figura 3: Partendo da un **seme astratto** nel sistema di pentagrammi in alto, da battuta 1 a 18, la semplice applicazione di **chiavi** additive $(+1, +2\ldots)$ genera istantaneamente un Canone a 8 voci per ogni intervallo della scala (Seconda, Terza, Quarta, ecc.), sia ascendente che discendente da battuta 19 alla fine. Ciò che la didattica tradizionale considera "complesso" è qui ridotto a una semplice serie di trasformazioni.

5 La Struttura del seme e i vincoli armonici

È necessario correggere subito un possibile fraintendimento. Sebbene la matrice sia un contenitore matematico, non possiamo metterci i numeri a caso. I numeri del seme rappresentano i **pilastri strutturali** (l'ossatura) della composizione. Affinché il Canone "regga" armonicamente senza errori, questi pilastri devono rispettare rigorose regole di consonanza.

5.1 La regola della consonanza strutturale

Analizzando la tessitura del seme, prima di applicare la matrice delle chiavi, notiamo che non ci sono salti di settima o di quarta, né gradi congiunti (seconda) tra i nodi strutturali. I movimenti ammessi, replicabili all'ottava alta o bassa, sono esclusivamente:

- **Movimenti di terza** (ascendenti o discendenti);
- **Movimenti di quinta** (ascendenti o discendenti);
- **Movimenti di ottava** (o di unisono).

5.2 L'inversione gerarchica

Contrariamente all'intuizione, dopo l'attacco iniziale del **dux** i ruoli gerarchici si invertono: è il **comes** a dettare legge al **dux**.[9]

Il dux dice un numero e il comes decide come rispondere. Da lì in poi ogni scelta passa ancora dal comes, e il dux deve adeguarsi a spostare la sua nota sopra o sotto quella del comes, obbedendo ai criteri di consonanza.

1. Il dux canta una nota, ad esempio 1.
2. Alla battuta successiva, il comes esegue quella stessa nota 1 all'altezza che desidera. Indipendentemente dalla sua posizione (che sia al basso o al canto), essa diventa il **vincolo armonico** ineludibile.
3. Il dux, che ora deve cantare una nuova nota, deve calcolarla in modo da essere consonante con quella appena imposta dal comes.

Ecco perché i gradi congiunti sono proibiti nell'ossatura. Se il dux si muovesse di seconda (es. $1 \to 2$), nel momento in cui tocca il 2, il comes starebbe suonando 1. Si creerebbe un urto verticale di seconda (1 contro 2) che il sistema da solo non risolverebbe, sia che l'1 si trovi sotto o sopra il 2. Di fatto, quindi, il dux è in contrappunto vincolato al comes.

5.3 Struttura portante ed elementi decorativi

Se i numeri della matrice sonora sono costretti a essere consonanti (1, 3, 5), dove risiede la complessità melodica? Risiede nella distinzione tra **elementi portanti** e **decorativi**.

- **I pilastri (Matrice sonora):** sono i numeri $1 - 3 - 5$ scritti nella matrice. Garantiscono che la struttura "stia in piedi".
- **Gli elementi decorativi (diminuzioni):** sono tutto ciò che accade *tra* un numero e l'altro.

Il passaggio strutturale $1 \to 3$ nella matrice è una "ossatura". Il compositore può rivestirla inserendo note di passaggio, ritardi o fioriture (es. $1 \to 2 \to 3$), o addirittura, altre battute e frasi. La regola

[9] Secondo la tradizione, il dux è la voce che inizia il Canone, che detta il tema e guida il gioco. Il comes è invece la voce succube che segue il dux, entrando dopo.

aurea del sistema è che **la chiave agisce sulla struttura portante e quel che gli sta sopra**: quando la matrice delle chiavi trasforma il numero strutturale (ad esempio l'1 diventa 2), trasporta con sé coerentemente tutta la "fioritura" melodica, che sta tra quel pilastro e il successivo.

5.4 Esempio di seme esteso

Per dimostrare la meccanica delle strutture portanti e degli elementi decorativi e la tenuta del sistema anche fuori dalla triade 135, prendiamo per base un seme che funge da ossatura per una melodia ampia e frastagliata, e che tocca gradi distanti:

$$S_{\text{pilastri}} = [1, 3, 1, 6, 4, 2, 7, 5, 3]$$

La regola dei movimenti è rispettata, infatti $1 \to 3$ è una terza ascendente, $3 \to 1$ è una terza discendente, $1 \to 6$ è una terza discendente, e così via. Quei numeri rappresentano i pilastri della melodia. Da questo seme possiamo costruire una matrice di Canone e applicarvi la riga della tabellina dell'1 $(0, 1, 2 \dots)$ della nostra tavola pitagorica modulare. In tal modo otterremo un Canone alla seconda. L'aritmetica ci garantisce che, se il pilastro n diventa $n + 1$, anche tutto l'eventuale "ornamento" melodico che segue verrà coerentemente traslato.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
V1	1	3	1	6	4	2	7	5	3
V2	·	1	3	1	6	4	2	7	5

$$+$$

Chiavi	0	1	2	3	4	5	6	0	1

$$=$$

Ris. V1	1	4	3	2	1	7	6	5	4
Ris. V2	·	2	5	4	3	2	1	7	6

Nonostante l'apparente "spigolosità" dei numeri scelti (si noti il 2 e il 7 o il 6 e il 4), la tessitura è sempre ancorata all'accordo verticale 135. Come si vede in Figura 4, il meccanismo additivo preserva infatti l'imitazione perfetta senza che il compositore debba calcolare le specie degli intervalli.

Matrice sonora

di un canone a due voci all'ottava e alla seconda superiore

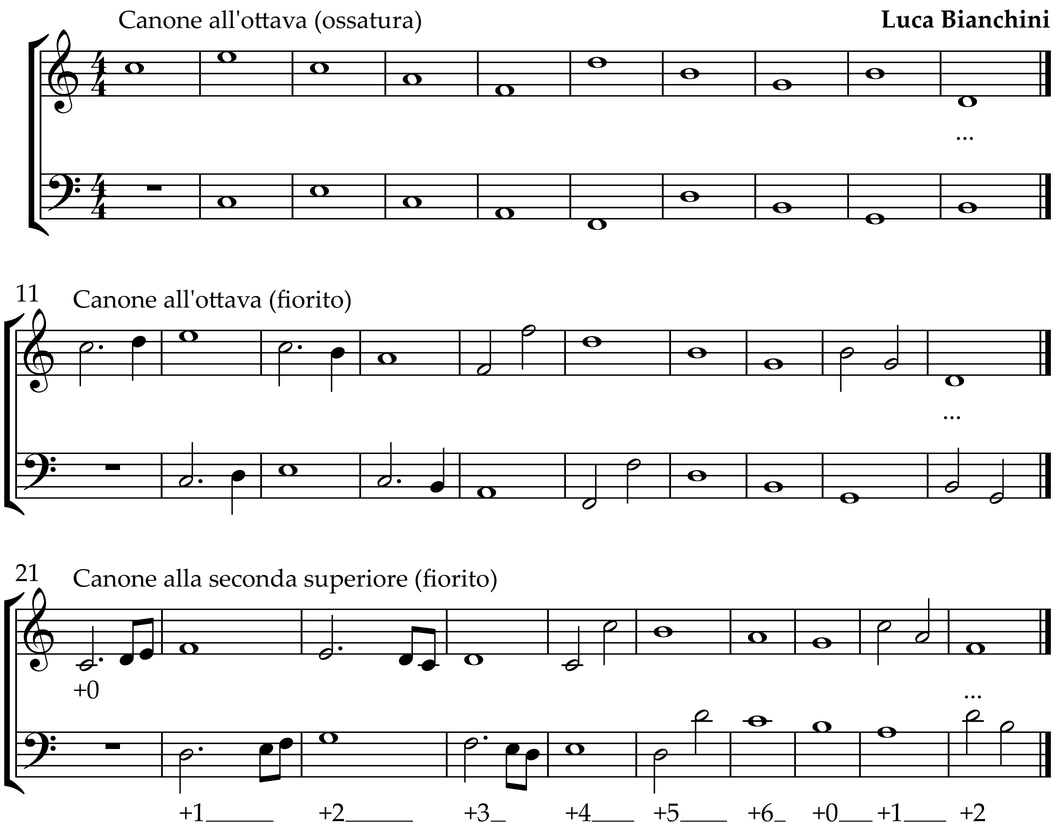

Figura 4: confronto analitico a 2 voci. In alto: ossatura di Canone all'ottava mediante sistema matriciale, che garantisce l'assenza di parallelismi per costruzione. A metà: realizzazione con l'aggiunta degli abbellimenti. Sotto, Canone alla seconda superiore ottenuto dal precedente applicando la riga dell'1 della tabella pitagorica delle chiavi. Si noti come gli abbellimenti abbiano seguito i pilastri, nel loro spostamento. Tra un pilastro e l'altro lo spazio s'è o dilatato o ristretto, secondo i casi, e perciò anche gli abbellimenti, che prima riempivano un dato intervallo, devono essere ritoccati dal compositore per adattarsi alle nuove distanze.

6 Confronto con Cherubini

6.1 La riduzione dello spazio delle scelte

In generale, anche il contrappunto a otto voci, con il sistema matriciale, risulta paradossalmente più gestibile di quello a due parti. Questo avviene perché, utilizzando esclusivamente i numeri del **seme astratto** $(1, 3, 5)$, le scelte all'interno della **matrice sonora** (M_S) sono drasticamente ridotte e quasi obbligate.

I movimenti armonici consentiti tra due colonne contigue sono limitati alle combinazioni vettoriali della triade:

$$\{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$$

Per garantire la validità strutturale essenziale, il sistema impone tre vincoli (due logici e uno prudenziale):

1. **Saturazione controllata (vincolo logico):** In ogni colonna della matrice non possono esserci più di tre 1, tre 3 e tre 5. Questo limite è necessario per non esaurire i movimenti possibili verso la colonna successiva.
2. **Divieto di paralleli (vincolo logico):** In due colonne contigue non devono mai trovarsi due coppie di numeri uguali (ad es. $3 - 3$ in una parte e $3 - 3$ nell'altra) per evitare le ottave parallele, oppure $1 - 1$ sotto e $5 - 5$ sopra, che produrrebbero delle quinte.
3. **Stabilità del basso (vincolo prudenziale):** È preferibile evitare il valore 5 nella parte più grave. Sebbene l'accordo di quarta e sesta sia tecnicamente ammissibile sotto certe condizioni, in questa fase di "ossatura" si sceglie di limitarlo per garantire una maggiore stabilità armonica senza dover fare calcoli ulteriori.

6.2 Esempio di matrice

Di seguito presentiamo la **matrice sonora** (M_S) completa a 9 tempi, di un contrappunto a otto voci di prima specie (nota contro nota).

Voce	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t5**	**t6**	**t7**	**t8**	**t9**
V1	3	1	5	3	1	1	1	5	3
V2	1	5	3	1	5	3	5	3	5
V3	5	3	5	1	1	5	3	3	1
V4	3	5	1	5	1	3	3	1	3
V5	5	1	3	3	5	5	5	1	5
V6	3	3	3	5	3	5	1	3	3
V7	1	3	1	1	3	3	1	1	1
V8 (B)	1	1	1	3	3	1	3	5	1

Tabella 13: Matrice Sonora a 8 voci (Validata).

La struttura rispetta rigorosamente i vincoli imposti. Analizzando la distribuzione verticale di questo specifico esempio, notiamo una configurazione bilanciata:

- I passaggi dal numero **1** sono tre per colonna.
- I passaggi dal numero **5** sono due per colonna.
- Di conseguenza, i passaggi dal numero **3** sono i restanti tre.

Tra una colonna e l'altra, l'1 passa una sola volta a 1, a 3 o a 5. Analogamente, dal 5 si passa sempre a 1 o a 3, mai a 5. Questo sistema di vincoli incrociati garantisce che non possano matematicamente esserci errori di ottave o quinte parallele. Infine, il fatto che la voce al basso (V8) abbia sempre 1 o 3 (tranne che in cadenza finale quando si incrocia con l'altro basso), evita la formazione dell'accordo di sesta e quarta, garantendo stabilità armonica.

Applicando a questa struttura matriciale una data sequenza di chiavi, stavolta indipendente dalla tabella pitagorica (Tab. 14), diamo vita alla musica reale, alzando il basso e le parti solo in alcune battute. La Chiave 0 (Do) funge, al solito, da riferimento iniziale e finale, e chiude il ciclo.

Sommando colonna per colonna, dalla matrice precedente otteniamo la **matrice risultante** (M_R), che contiene i gradi reali della scala (dove 1 = Do, 2 = Re, ..., 7 = Si).

Voce	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t5**	**t6**	**t7**	**t8**	**t9**
(Chiave)	(0)	(1)	(3)	(0)	(2)	(3)	(0)	(4)	(0)
V1	3	2	1	3	3	4	1	2	3
V2	1	6	6	1	7	6	5	7	5
V3	5	4	1	1	3	1	3	7	1
V4	3	6	4	5	3	6	3	5	3
V5	5	2	6	3	7	1	5	5	5
V6	3	4	6	5	5	1	1	7	3
V7	1	4	4	1	5	6	1	5	1
V8 (B)	1	2	4	3	5	4	3	2	1

Tabella 14: matrice risultante (somma $M_S + M_K$). I numeri rappresentano i gradi reali della scala.

Come si osserva nel primo sistema di pentagrammi in Figura 5, la struttura mantiene la coerenza armonica verticale pur variando continuamente le altezze. Ad esempio, nel tempo t_2 (chiave 1), l'intera colonna è traslata di un grado verso l'alto rispetto alla configurazione originale, trasformando gli intervalli ma conservando le distanze relative corrette. Se prima l'accordo era sul DO, ora è sul Re.

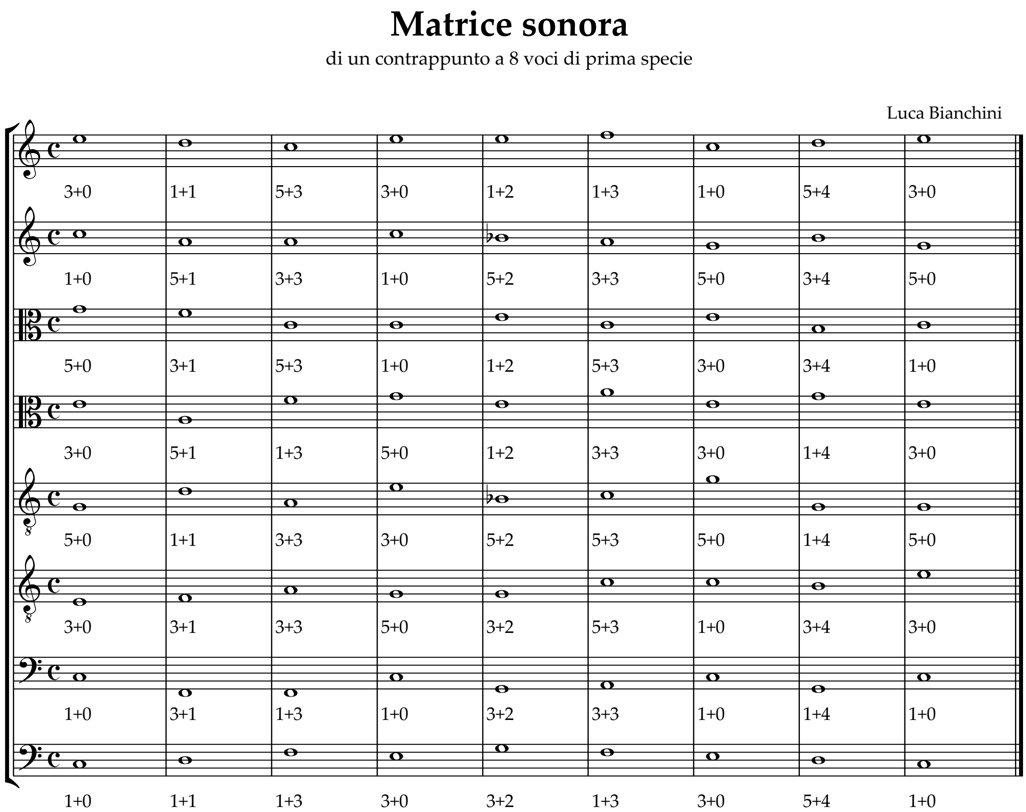

Figura 5: Realizzazione mediante il sistema matriciale, che garantisce l'assenza di parallelismi per costruzione.

6.3 Analisi comparativa (Cherubini)

Se l'esempio precedente non contiene errori di ottave o quinte, l'analisi della "tessitura numerica" dell'esercizio di Cherubini in Figura 6, tratto dall'unico esempio di contrappunto a otto voci di prima specie (nota contro nota) del suo manuale,[10] rivela come l'applicazione di regole scolastiche, in assenza di una teoria globale, porti per forza di cose a un effetto domino problematico.

Riportando la riduzione numerica esatta dell'esempio di Cherubini, in grassetto evidenziamo i punti critici:

1. **Col 2-3:** Applicazione rigida del "legame armonico" (note tenute) → saturazione di "1".
2. **Col 3-4:** Emergenza risolta con "ottave per moto Contrario".
3. **Col 8-9:** Saturazione fatale (tre 5 e tre 1) → errore di ottave parallele (moto retto).

Voce	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**	**t5**	**t6**	**t7**	**t8**	**t9**
V1	3	1	5	3	1	5	1	**5**	**3**
V2	1	5	3	1	5	3	5	3	5
V3	5	3	3	5	3	5	3	**1**	3
V4	3	5	**1**	**1**	1	1	5	**1**	5
V5	5	1	3	3	1	3	3	3	1
V6	3	**3**	**1**	5	5	5	5	**5**	**3**
V7	1	**3**	**1**	**1**	3	3	1	**1**	1
V8	1	1	**1**	3	3	1	3	**5**	1

Tabella 15: Analisi del contrappunto di Cherubini.

6.3.1 La catena degli errori (effetto domino)

L'errore finale non è un evento isolato, ma l'esito di una strategia difensiva.

Fase 1: La trappola delle "note comuni" (t2 → t3)
Tra la seconda e la terza colonna, Cherubini non commette un errore grammaticale, ma cade vittima di una regola didattica: il principio del *legame armonico*. Poiché il basso sale di terza, diverse note sono comuni ai due accordi. Cherubini decide di "andare sul sicuro" tenendo ferme le note comuni o ripetendo gli stessi intervalli (Tenore II e Basso I ripetono il passaggio $3-1$). Sebbene comunemente adottata, questa strategia porta a un accumulo imprevisto di ben **quattro numeri 1** nella colonna t_3. La regola scolastica "tieni le note comuni per non sbagliare" ha paradossalmente indotto all'errore, creando una saturazione ingestibile.

Fase 2: La "pezza" del moto contrario (t3 → t4)
Trovandosi con quattro voci sulla fondamentale (1) al tempo t_3, il compositore è bloccato. Per muovere le parti senza generare errori in un tessuto così denso, è costretto a ricorrere a un artificio: usa le ottave per moto contrario tra Contralto II e Basso I. Questo è il sintomo inequivocabile di una "navigazione a vista": non avendo gradi di libertà, Cherubini forza la serratura con una licenza tecnica.

Fase 3: il crollo finale (t8 → t9)
L'instabilità latente esplode alla penultima misura. Al tempo t_8, la matrice presenta una configurazione satura:

- **Tre numeri 5** (V1, V6, V8).

[10] L. Cherubini, Cours de contrepoint et de fugue, Parigi, Maurice Schlesinger, 1835, p.39.

- **Tre numeri 1** (V3, V4, V7).

La presenza simultanea di tre quinte (5) e tre fondamentali (1) è critica per saturazione combinatoria. Con tre voci che cantano il 5, le vie di fuga lecite sono matematicamente esaurite. Il primo Soprano (V1) scende $5 \to 3$ e il Tenore II (V6), non avendo altre opzioni, è costretto a doppiarlo con un movimento identico $5 \to 3$. L'errore di ottave parallele (moto retto) diventa qui inevitabile: è la cambiale finale pagata per le scelte "prudenti" fatte nelle battute che precedono.

6.3.2 Conclusione analitica

Il confronto dimostra che la regola del "legame armonico", pilastro della didattica tradizionale, è un *falso amico* nel contrappunto a molte parti.

Mentre il sistema tradizionale, adottato e insegnato non solo da Cherubini (che ne è il massimo rappresentante), ricerca la sicurezza nel mantenimento delle singole note, producendo di fatto saturazione ed errore, il nuovo sistema proposto in questo articolo abbandona il controllo armonico locale come vincolo primario e si affida invece a una geometria della saturazione.

Garantendo a monte che la distribuzione verticale non superi mai una soglia critica di ripetizione (non più di tre occorrenze della stessa nota), il movimento contrappuntistico risulta strutturalmente immune da quinte e ottave parallele, senza necessità di ricorrere a licenze, eccezioni o artifici correttivi.

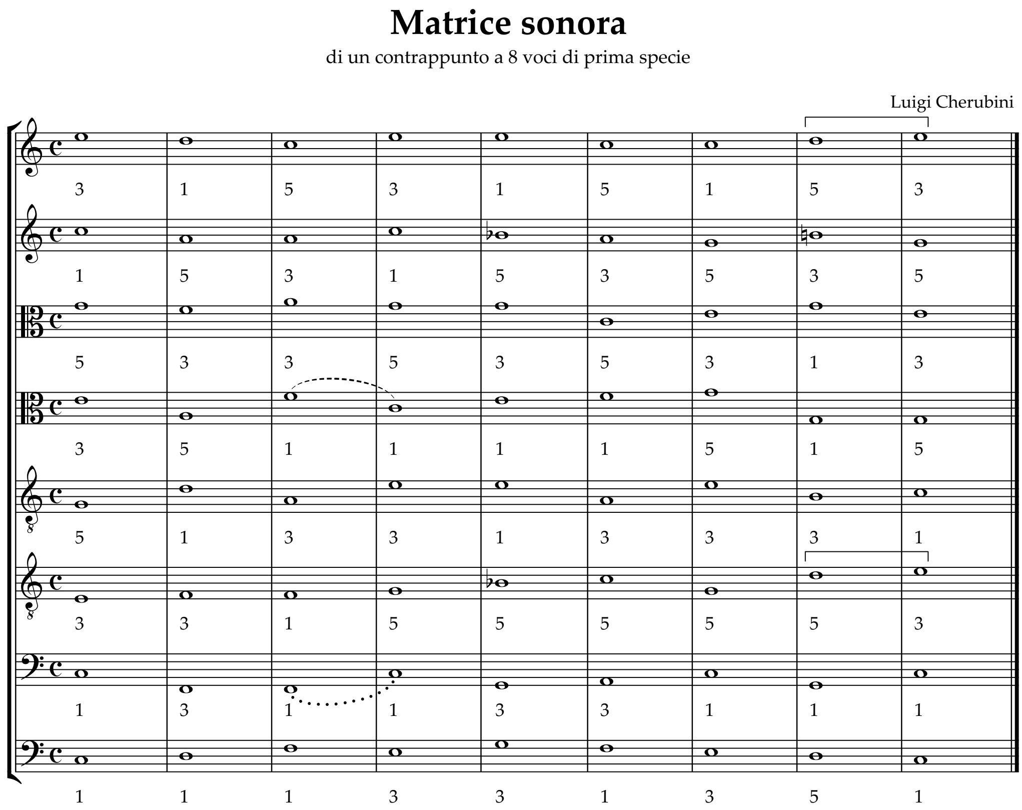

Figura 6: Confronto analitico a 8 voci. Realizzazione di Cherubini, con evidenza delle ottave per moto contrario (legature a puntini) e dell'errore di ottave parallele (parentesi di frasi).

7 Il Canone doppio e la variazione modulare

7.1 L'ossatura astratta

Tornando ai canoni, estendiamo ora il metodo a una struttura più complessa: un Canone doppio in una matrice 4×10.

In questo sistema:

- La **terza riga** (V3, dux 1) propone il primo tema, che viene imitato dalla **prima riga** (V1, comes 1) con un ritardo di due colonne.
- La **seconda riga** (V2, dux 2) propone il secondo tema, che viene imitato dalla **quarta riga** (V4, comes 2), sempre a due colonne di distanza.

7.2 Formalizzazione algebrica

Per trasformare questa struttura in musica, applichiamo un vettore di chiavi alternato ($\mathbf{K}$) alla matrice strutturale ($\mathbf{S}$). L'operazione è definita dalla somma matriciale $\mathbf{S} + \mathbf{K} = \mathbf{R}$.

$$
\begin{array}{rcl}
\begin{array}{r}\text{V1 (C1)}\\ \text{V2 (D2)}\\ \text{V3 (D1)}\\ \text{V4 (C2)}\end{array} &
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1\\
1 & 1 & 6 & 6 & 1 & 4 & 3 & 6 & 1 & 4\\
1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1\\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & 6 & 6 & 1 & 4 & 3 & 6
\end{bmatrix} & \text{(Matrice } \mathbf{S}\text{)}\\
+ &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix} & \text{(Matrice } \mathbf{K}\text{)}\\
= &
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2\\
1 & 2 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 & 7 & 1 & 5\\
1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2\\
\cdot & \cdot & 1 & 2 & 6 & 7 & 1 & 5 & 3 & 7
\end{bmatrix} & \text{(Matrice } \mathbf{R}\text{)}
\end{array}
$$

Il risultato R mostra come le voci si incastrino perfettamente, generando un tessuto polifonico complesso a partire da due semplici temi lineari (Figura 7). È notevole osservare come questa specifica configurazione presenti sorprendenti analogie strutturali con un esempio riportato da Padre Giambattista Martini nel primo volume del suo *Esemplare*, a testimonianza di come la logica combinatoria qui formalizzata fosse già intuitivamente presente nella didattica dei grandi maestri storici.[11]

8 Espansione a quattro voci e variazioni intervallari

8.1 Libertà orizzontale e vincolo verticale

Nulla vieta di variare gli intervalli orizzontali per creare melodie più articolate. Ad esempio, impostando un seme con la sequenza $1-3-1-6$, si produce una melodia che scende alla sesta inferiore, arricchendo il movimento delle parti.

[11] G. B. Martini, *Esemplare o sia saggio fondamentale pratico di contrappunto sopra il canto fermo*, Vol. 1, Bologna, Lelio dalla Volpe, 1774, p. 209.

Matrice sonora

di un canone doppio

Luca Bianchini

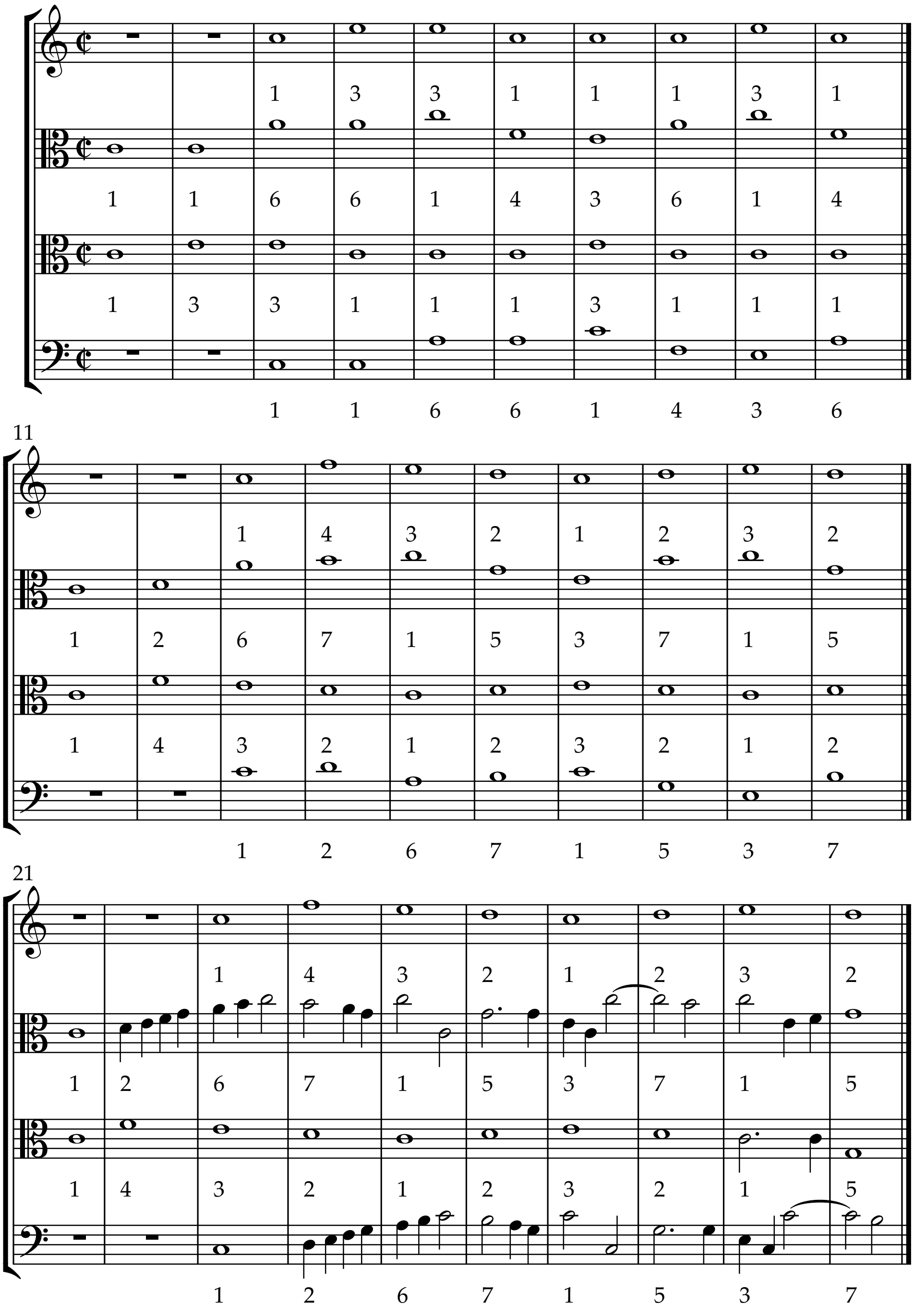

Figura 7: Matrice sonora e realizzazione di un Canone doppio a 4 voci. I temi (dux 1 e dux 2) e le loro risposte (comes 1 e comes 2) sono gestiti simultaneamente dalla somma matriciale. Da battuta 21, lo stesso Canone è abbellito dalle fioriture, che riempiono gli spazi tra i pilastri della melodia.

8.2 Analisi della struttura (matrice S)

In questo nuovo esempio di Canone a quattro voci, il *comes* risponde al *dux* a **due note di distanza**. Nella matrice strutturale le entrate sono sfasate: la seconda voce parte da 1 e la terza risponde con 1 a distanza di due note; le altre due cominciano da 5 e vanno in canone dopo quattro e sei note.

Ecco la rappresentazione formale della matrice strutturale **S**. Si noti l'uso dei segnaposto (spazi vuoti) per visualizzare le entrate scaglionate:

$$\begin{array}{c} \mathrm{V1} \\ \mathrm{V2} \\ \mathrm{V3} \\ \mathrm{V4} \end{array}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 5 & 7 & 7 & 2 & 7 & 6 & \cdot & 6 & 6 & 1 & 1 & 3 & 1 & 7 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 3 & 2 & \cdot & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 4 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 5 & 7 & 7 & 2 & 7 & 6 & \cdot & 6 & 6 & 1 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 3 & 2 & \cdot & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

8.3 Applicazione delle chiavi e risultato (matrice R)

Per variare il Canone e renderlo meno statico, combiniamo la tabella con una sequenza di chiavi alternate. Il vettore delle chiavi **K** è definito dall'alternanza di 0 e 6:

$$\mathbf{K} = [0, 6, 0, 6, 0, 6, \dots]$$

Applicando questa trasformazione (dove il pedice +6 indica l'operazione di alterazione sulla battuta pari), otteniamo la matrice risultante **R**:

$$\begin{array}{c} \mathrm{R1} \\ \mathrm{R2} \\ \mathrm{R3} \\ \mathrm{R4} \end{array}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 5_{+6} & 7 & 7_{+6} & 2 & 7_{+6} & 6 & \cdot & 6 & 6_{+6} & 1 & 1_{+6} & 3 & 1_{+6} & 7 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1_{+6} & 3 & 3_{+6} & 5 & 3_{+6} & 2 & \cdot & 2 & 2_{+6} & 4 & 4_{+6} & 6 & 4_{+6} & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & 5_{+6} & 7 & 7_{+6} & 2 & 7_{+6} & \cdot & \cdot & 6 & 6_{+6} & 1 & 1_{+6} & 3 & 1_{+6} & 7 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1_{+6} & 3 & 3_{+6} & 5 & 3_{+6} & 2 & \cdot & 2 & 2_{+6} & 4 & 4_{+6} & 5 & 4_{+6} & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Se trascriviamo questa matrice su pentagramma aggiungendo le note d'abbellimento, otteniamo il Canone completo (Fig. 8).

Matrice sonora

di un canone a 4 voci

Luca Bianchini

Figura 8: Realizzazione musicale del Canone a 4 voci con variazioni intervallari (matrice R).

8.3.1 Confronto storico con Nicola Sala

Un antecedente storico significativo è stato composto da **Nicola Sala**, il quale ha inserito un Canone strutturalmente simile al precedente tra gli esercizi finali del suo corso di contrappunto.

La differenza risiede nel metodo di variazione. Sala, invece di applicare la nostra alternanza $0 - 6$ (che crea un movimento discendente), ha alzato le battute pari di una seconda. Matematicamente, nel nostro sistema modulare, la sua operazione corrisponde all'applicazione alternata della chiave 1 (che indica l'intervallo di seconda) rispetto alla chiave 0 (che indica l'identità):

$$K_{\text{Sala}} = [0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots]$$

Tale procedimento è riscontrabile nel manoscritto originale dell'autore, dove la variazione è applicata sistematicamente alle battute pari.[12]

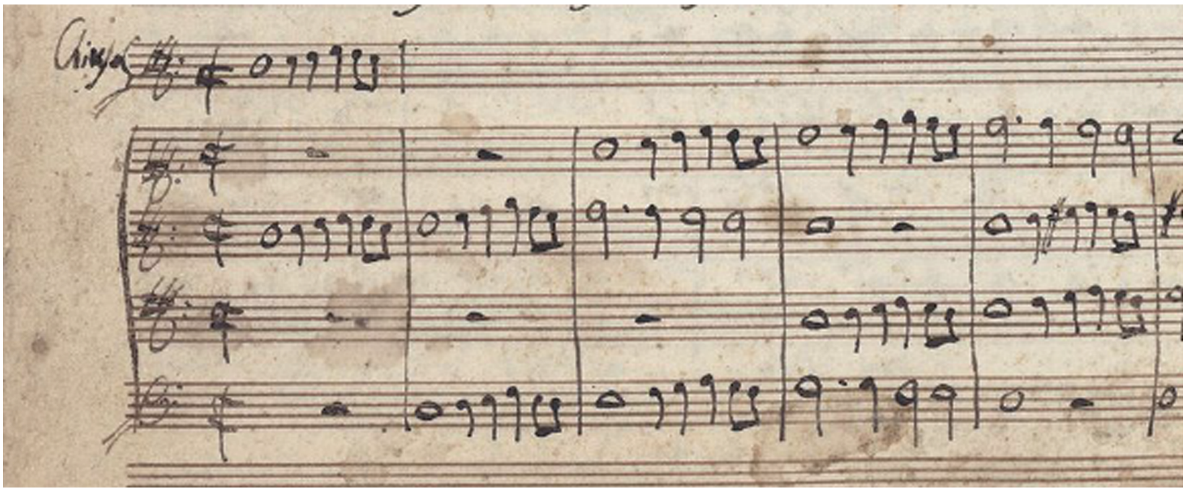

Figura 9: **Canone a 4 voci di N. Sala**.

[12] N. Sala, *Regole del Contrappunto Pratico*, 1787, Manoscritto autografo, p. 96 (numerazione a matita). Napoli, Biblioteca del Conservatorio di Musica San Pietro a Majella. Consultabile anche su IMSLP.

9 Simmetrie avanzate: Il Canone retrogrado

9.1 Costruzione geometrica: specchio e chiasmo

Partiamo da una matrice contenente una musica elementare di tre battute a due voci. La prima riga contiene i numeri della prima voce e l'altra quelli della seconda.

$$M_{start} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Questa polifonia può essere trasformata in un Canone retrogrado (cancrizzante) usando la simmetria della tavola pitagorica modulare. Il procedimento è puramente geometrico e avviene in due fasi.

Fase 1: espansione a specchio
Copiamo i numeri a specchio intorno a un **perno centrale** (asse di simmetria), che qui fissiamo sul numero 5 (l'ultima colonna della matrice M_{start}).

$$M_{mirror} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{5} & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \mathbf{5} & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

In questa fase non abbiamo ancora un Canone, ma due voci indipendenti "palindrome": la prima metà è uguale alla seconda letta al contrario.

Fase 2: il chiasmo (scambio incrociato)
Per attivare il Canone, applichiamo uno scambio a X (chiasmo): invertiamo le metà a destra del perno, spostando alla voce superiore ciò che sta sotto e viceversa.

$$M_{final} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{5} & 1 & 3 \\ 3 & 1 & \mathbf{5} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Questo è un vero e proprio Canone enigmatico risolto. Basta scrivere la sola prima voce $(1-3-5-1-3)$ con un motto (es. *"Cerca il mio fine nel mio principio"*). Il musicista scoprirà che la seconda voce non è altro che la prima letta al contrario $(3-1-5-3-1)$.

9.2 Formalizzazione matematica

Possiamo dividere la struttura in quattro settori più il perno P:

- A: Voce 1 (sinistra)
- B: Voce 2 (sinistra)
- a: Retrogrado di A (che si trova a destra, voce inferiore)
- b: Retrogrado di B (che si trova a destra, voce superiore)

La struttura finale della linea superiore diventa $A-P-b$. Poiché b è il retrogrado di B, la linea inferiore $(B-P-a)$ risulta essere l'esatta retrogradazione della superiore.

9.3 L'invarianza delle chiavi

La matrice strutturale definita sopra rappresenta i rapporti intervallari, ma manca ancora della determinatezza tonale. Nel caso del Canone retrogrado, l'applicazione delle chiavi richiede una cautela matematica supplementare: per non distruggere la simmetria speculare costruita, anche il vettore delle chiavi sommato deve essere **palindromo**.

9.3.1 Caso A: Canone all'unisono (vettore costante)

È sufficiente sommare un vettore costante, ad esempio la serie dello 0 (o del 7). Essendo il numero aggiunto identico per ogni colonna, la simmetria rimane inalterata.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3.2 Caso B: espansione dell'ambito (vettore simmetrico)

Se vogliamo variare la melodia rendendola più dinamica, dobbiamo applicare un vettore chiave palindromo (es. $0-1-2-1-0$). Si noti come il valore della chiave cresca fino al perno centrale e poi decresca specularmente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(Nota: $3+1=4$, $5+2=7$, $1+1=2$*)*

La somma produce una nuova melodia $(1,4,7,2,3)$ che mantiene intatte le proprietà del Canone: la seconda voce $(3,2,7,4,1)$ è l'esatta retrogradazione della prima, ma l'arco melodico risulta ora più ampio e variegato.

9.4 Caso C: Il Canone retrogrado a entrate sfasate (simmetria bilaterale)

Esiste un terzo tipo di Canone retrogrado, più semplice da scrivere ma di grande effetto, che sfrutta lo sfasamento temporale $(t+1)$. Invece di costruire voci speculari complesse, ci basiamo su una proprietà fondamentale: se la matrice sonora di base è palindroma e le chiavi applicate sono anch'esse palindrome, il risultato sarà invariabilmente un Canone retrogrado.

9.4.1 Procedura generativa

Fase 1: La matrice palindroma
Stabiliamo una sequenza numerica che funge da "specchio di se stessa". In questo esempio usiamo il tema $1-3-5-5-3-1$. La seconda voce entra in ritardo di una battuta, ripetendo la stessa sequenza.

$$M_{pal} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fase 2: L'Attivazione tramite chiavi simmetriche
Fissiamo le altezze applicando un vettore di chiavi "ad arco" $(0-1-2-3-2-1-0)$, che sale e scende simmetricamente. La somma di questi due elementi simmetrici (melodia + chiavi) genera una struttura in cui la seconda voce è l'esatta retrogradazione della prima, ma traslata nel tempo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 & 5 & 2 & \cdot \\ \cdot & 2 & 5 & 8 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Analisi del risultato:

- La Voce 1 canta: $1,4,7,8,5,2$.
- La Voce 2 canta: $2,5,8,7,4,1$.

Come si vede, la seconda voce è l'esatto "gambero" della prima (leggibile al contrario).

10 Il Canone retrogrado inverso e la riapertura del sistema

Il Canone retrogrado inverso (o cancrizzante inverso) rappresenterebbe per alcuni il vertice matematico e artistico della costruzione polifonica. In esso, la seconda voce imita la prima leggendo la melodia dall'ultima nota alla prima (moto retrogrado) e ribaltando gli intervalli (moto inverso).

10.1 La riapertura della compatibilità

La caratteristica più promettente di questa forma è la sua straordinaria flessibilità generativa. Mentre il Canone retrogrado semplice impone il vincolo severo delle chiavi palindrome, il retrogrado inverso, grazie alla sua doppia trasformazione (temporale + spaziale), riapre la compatibilità con le sequenze progressive standard.

Ciò significa che possiamo applicare alla struttura retrograda-inversa le normali righe progressive della tavola pitagorica modulare, ricavata al capitolo 3 (ad esempio $1, 2, 3\dots$ oppure $2, 4, 6\dots$). Ognuna di queste righe genera un Canone valido. Il sistema non è più limitato a poche combinazioni simmetriche, ma torna ad attingere all'intero potenziale della tavola pitagorica modulare.

10.2 Esempio pratico

Costruiamo la struttura speculare di base (chiasmo) usando un seme esteso $(1 - 3 - 5 - 7 - 2)$. Dopo aver applicato lo scambio a "X", sommiamo una chiave progressiva standard $(0, 1, 2, 3, 4)$, sfruttando la riga dell'1.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice Chiasmo}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{Chiave Progressiva}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(Nota: $2 + 3 = 5$*;* $7 + 4 = 11 \to 4$*)*

La prima voce $(1, 4, 7, 5, 4)$ sale e oscilla. La seconda voce $(3, 2, 7, 3, 6)$ risponde con una logica inversa complessa ma coerente. La prima voce comincia con un intervallo di quarta ascendente $(1 \to 4)$; la seconda, letta al contrario $(6 \to 3)$, scende di una quarta.

10.3 Retrogrado inverso sfasato

Anche per il Canone retrogrado inverso è possibile fare entrare le parti sfasate in diagonale. Applicando la riga della tabella pitagorica modulare dell'1 $(0, 1, 2\dots)$ a una matrice sfasata, le voci vanno per moto retrogrado inverso e si imitano alla seconda superiore.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 7 & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & 3 & 5 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{S_{\text{sfasata}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{K_{\text{progressiva}}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 & 7 & \cdot \\ \cdot & 2 & 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Con questo metodo, è possibile sovrapporre Canoni retrogradi inversi, ascendenti e discendenti, creando un'architettura polifonica totale limitata solo dalla fantasia del compositore.

11 Estensione del principio. Diagonalizzazione di materiali storici

Il principio di diagonalizzazione finora esposto non si applica esclusivamente a strutture numeriche astratte (come la triade pitagorica), ma può essere esteso con profitto a materiali musicali concreti preesistenti. In luogo di tre valori numerici puntuali, si possono considerare tre **segmenti musicali**

distinti (S_A, S_B, S_C), ciascuno costituito da una porzione di voce di durata definita, verticalmente coerente ma non necessariamente in rapporto canonico all'origine.

11.1 Concatenazione lineare

Si supponga di isolare una sezione verticale tratta da una composizione a tre voci, ad esempio un brano di Corelli. Definiamo i segmenti in base al registro:

- S_A: Segmento della voce acuta.
- S_B: Segmento della voce media.
- S_C: Segmento della voce grave.

L'operazione generativa consiste nel trasformare la simultaneità verticale in una concatenazione diagonale. La sequenza $S_A \to S_B \to S_C$ viene assegnata interamente alla voce superiore (dux). Le voci inferiori (i due comes) riproducono la medesima concatenazione con ingressi sfalsati, rispettivamente della durata di un segmento (Δt_1) e di due segmenti (Δt_2).

La struttura risultante è un Canone basato non sull'imitazione puntuale (nota per nota), ma su uno **sfasamento a blocchi**:

$$\begin{array}{lcccc} \text{V1:} & [S_A] & [S_B] & [S_C] & \dots \\ \text{V2:} & \text{pausa} & [S'_A] & [S'_B] & \dots \\ \text{V3:} & \text{pausa} & \text{pausa} & [S''_A] & \dots \end{array} \tag{2}$$

In questo sistema, l'unità imitativa minima non è la singola nota, bensì l'intero segmento musicale.

Lo stesso vale per qualunque numero di voci. Nell'esempio in Figura 10, un frammento tratto dal Concerto grosso di Corelli Op.6, n.4, è trasformato in Canone infinito all'unisono e all'ottava. Le parti costituenti A, B, C, D, possono essere permutate liberamente, a seconda delle esigenze compositive. In questo caso la prima voce canta A, C, B, e D.

Diagonalizzazione di materiali storici

Canone a 4 voci

Figura 10: Realizzazione musicale di un Canone infinito a 4 voci da una sezione del Concerto grosso di Corelli, Op.6, n.4.

11.2 Variazione tramite traslazione intervallare

Una volta ottenuta la struttura canonica di base per diagonalizzazione, è possibile applicare le **matrici delle chiavi** per generare varianti inedite in cui il comes risponde a diverse altezze.

Tali operazioni preservano la coerenza strutturale interna dell'insieme garantita dalla validità del frammento originale pur generando un tessuto sonoro nuovo, difficilmente riconducibile a una semplice citazione letterale del modello di partenza. Il pezzo storico diviene così, a sua volta, un "seme complesso" per nuove generazioni di Canoni infiniti.

12 L'Espansione temporale: Canoni aumentati e mensurali

Nel Canone aumentato e per prolazione[13] interviene il fattore **tempo**, che negli altri tipi di Canoni (isocroni) era costante. Per comporre un Canone aumentato ci serviamo di tre matrici coordinate:

1. La **matrice sonora** (per la tessitura intervallare);
2. La **matrice delle chiavi** (per determinare l'altezza reale);
3. La **matrice dei tempi** (per assegnare la durata alle misure).

Nella Figura 11, sul primo sistema di pentagrammi è trascritta una battuta a tre voci in 4/2. La parte grave è a valori larghi (parte A), quella di mezzo a valori medi (parte B), e quella in alto a valori piccoli (parte C), come schematizziamo qui sotto.

C
B
A

Tabella 16: Rappresentazione verticale (delle parti).

Nel secondo sistema della stessa Figura 11 abbiamo ricavato un Canone all'ottava, semplicemente copiando in ogni voce, di seguito una all'altra, la parte A, la parte B e la C.

A	**B**	**C**		
	A	**B**	**C**	
		A	**B**	**C**

Tabella 17: Struttura del Canone finito all'ottava.

Dato che il Canone finisce troppo presto, abbiamo composto una parte nuova D sopra dopo la C, voce di mezzo del terzo sistema di Figura 11. In tal modo prolunghiamo il Canone continuando l'imitazione.

A	**B**	**C**	**D**		
	A	**B**	**C**	**D**	
		A	**B**	**C**	**D**

Tabella 18: Struttura del nuovo Canone all'ottava.

[13] Tipo di Canone in cui una stessa linea musicale viene letta contemporaneamente con proporzioni ritmiche diverse.

Figura 11: **Canone preparatorio**. Il primo sistema in alto mostra il *nucleo verticale*, con le voci A, B, C in simultaneità verticale (stato sincrono). Nei sistemi successivi, avviene lo *sfasamento temporale*: le voci vengono traslate sull'asse temporale per generare un Canone all'unisono, mantenendo inalterato il materiale sonoro ma proiettandolo diagonalmente. Quest'ultimo Canone servirà da base per quello aumentato.

Come si nota dalla Figura 11, la parte A procede a valori più lunghi, la B con note più veloci, la C più veloci ancora e la D rapidissime, con valori sempre più piccoli. L'effetto è voluto, perché il Canone, che abbiamo appena realizzato, serve da impalcatura alla struttura più complessa di un Canone aumentato, in cui una parte canta dei valori, un'altra li raddoppia, e la terza li moltiplica per quattro. Ad ogni colonna, si moltiplica il valore per potenze di 2, come si vede in Figura 12.

Ax1	**Bx2**	**Cx4**	**Dx8**		
	Ax2	**Bx4**	**Cx8**	**Dx16**	
		Ax4	**Bx8**	**Cx16**	**Dx32**

Tabella 19: Struttura del nuovo Canone aumentato.

In questo genere di canoni, gli unici punti in cui è necessario controllare che non compaiano ottave o quinte parallele sono quelli in cui i cambi di nota risultano simultanei. Tali punti sono facilmente prevedibili, perché cadono su progressioni aritmetiche determinate dal fattore di aumento (quando ad esempio i valori raddoppiano, o quadruplicano).

Figura 12: **Canone aumentato.** Alle durate del Canone preparatorio della Figura precedente sono stati applicati i coefficienti di moltiplicazione: x2 (*proportio dupla*), x4 (*proportio quadrupla*) e x8 (*proportio octupla*). Si noti l'entrata strategica della voce *D* (battuta 14) funzionale al principio di *conservazione della densità*. Essa introduce nuovo materiale cinetico proprio quando l'energia delle voci precedenti si affievolisce a causa della dilatazione.

12.1 Il compromesso di Nicola Sala

Il confronto con la prassi storica rivela una divergenza estetica affascinante. Analizzando, in Figura 13, un Canone aumentato di Nicola Sala, notiamo che il Maestro napoletano introduce la terza voce (a valori quadruplicati) ritardandone l'ingresso di una misura rispetto al punto teorico di incastro matematico. Questa "licenza" ha una conseguenza strutturale precisa: il Canone funziona perfettamente per le prime poche battute, ma diviene matematicamente insostenibile dalla metà in poi. Di conseguenza, Sala abbandona l'imitazione stretta nelle voci superiori, lasciando che solo la parte grave porti avanti il rigore tematico, mentre le altre due parti procedono come voci libere.

Questa scelta svela l'anima della Scuola italiana, votata alla massima libertà: all'ascoltatore viene data l'idea suggestiva del Canone aumentato, ma l'architettura viene piegata per favorire la musicalità immediata e la conclusione cadenzale. Ci inchiniamo di fronte a queste scelte estetiche, che privilegiano l'effetto artistico sulla fredda coerenza numerica.

Il sistema matriciale proposto in questo articolo non nasce per imporre una rigidità, ma per semplificare la vita a chi voglia seguire le orme di Sala, gestendo agevolmente le sezioni libere, e anche a soddisfare le aspettative di chi persegue un ideale di rigore matematico assoluto. La flessibilità del modello dimostra che, sotto la guida della matrice, il contrappunto canonico e quello libero non sono antitetici, ma possono convivere felicemente, lasciando sempre al compositore l'ultima parola sulla direzione da prendere.

Figura 13: **Canone enigmatico (aumentato) di N. Sala.** Le voci viaggiano secondo *proportio dupla*, *proportio quadrupla* e *proportio octupla*. Si noti in particolare l'entrata della terza voce, che avviene alla quinta misura, invece che alla quarta. La proporzionalità geometrica da lì, per forza di cose, si interrompe. Quando le tre voci raggiungono quel punto, marcato in partitura dal segno $-SS-$, smettono di cantare in Canone.

12.2 Sincronizzazione tramite "perno" (prefisso)

Per trasformare facilmente il Canone a entrate sfasate in un Canone in cui tutte le voci partono assieme, basta aggiungere all'inizio una nota che faccia da **perno** (ad esempio il **3**). In questa matrice ogni numero della seconda riga vale il doppio di quelli della prima, e ogni numero della terza vale il quadruplo di quelli della prima (la lineetta indica la nota tenuta):

$$\begin{array}{r} V_1(\times 1) \\ V_2(\times 2) \\ V_3(\times 4) \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 6 & 6 & 1 & \dots \\ 3 & - & 1 & - & 1 & - & 3 & - & 3 & \dots \\ 3 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

12.3 Canoni mensurali

Il sistema permette di creare infinite specie di Canone, immaginando misure diverse per ogni voce. Come avveniva nel Trecento italiano, combiniamo le misure di un Canone a entrate successive in cui:

- La 1ª misura è metà della 2ª;
- La 3ª è uguale alla 2ª;
- La 4ª è il doppio della 3ª.

Il ciclo riprende moltiplicando per due. Le voci entrano sfasate ma con queste metriche complesse:

- **V1:** 2/4 → 4/4 → 4/4 → 8/4 . . .
- **V2:** 6/4 → 12/4 . . . (Proporzione Sesquialtera/Tripla)
- **V3:** 18/4 → 36/4 . . . (Proporzione Nonupla)

Tempo V1	**2/4**	**4/4**	**4/4**	**8/4**	**4/4**	**8/4**	**8/4**	**16/4**	. . .
V1 (Seme)	1	1	1	3	5	3	3	. . .	

Tempo V2	**6/4**	**12/4**	**12/4**	**24/4**	. . .
V2 (Seme)	1	1	1	3	. . .

Tempo V3	**18/4**	**36/4**	. . .
V3 (Seme)	1	1	. . .

Tabella 20: Allineamento sincronizzato (a Perno) del Canone Mensurale.

Sui pentagrammi non è necessario segnare ogni volta il cambio di misura. Se scrivo solo la misura iniziale, posso infatti adattare il numero di quarti per farli coincidere con la battuta teorica. Per calcolare questo Canone di "improba costruzione", ma solo in apparenza, basta tessere una matrice sonora e applicare la matrice dei tempi (2/4, 6/4, 18/4, . . .), come abbiamo fatto in Figura 14.

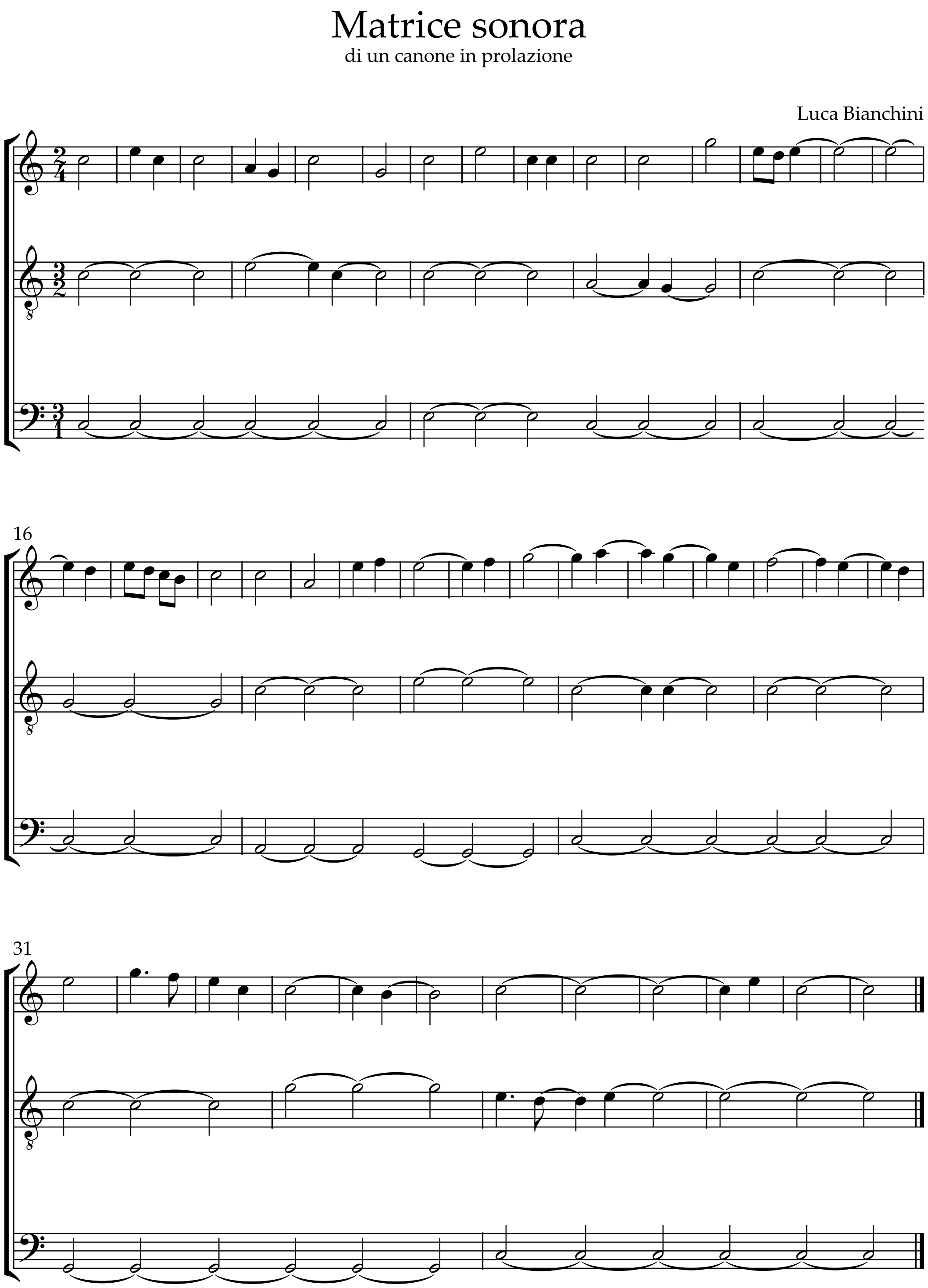

Figura 14: **Realizzazione di un Canone in prolazione**, mediante il sistema matriciale. In ogni parte le note sono le stesse, ma cambiano di valore secondo una proporzione geometrica. Nel primo rigo, ad esempio, il primo Do vale 2/4, nel secondo rigo 3/2 e nel terzo 3/1.

13 Il nesso con la Scuola Napoletana: i partimenti come matrici implicite

La denominazione stessa di "partimento", sistema musicale in uso nei Conservatori di Napoli dai primi del Settecento in poi, suggerisce una natura dinamica che va oltre la statica realizzazione degli accordi del Basso Continuo. Come il nome indica, i partimenti sono "parti in movimento" dove la numerica non serve solo a riempire l'armonia verticale, ma a suggerire una precisa tessitura contrappuntistica. Sono musiche scritte di solito su un solo pentagramma, e in orizzontale mostrano un sistema ingegnoso di indicare non solo l'armonia, ma anche il contrappunto e le entrate delle voci, tramite l'impiego combinato di note, di chiavi musicali e anche di tempi.

In analogia con il nostro sistema matriciale, il partimento storico non è infatti né puro contrappunto (nel senso del nostro Stilnovo in musica) né pura armonia (alla maniera di Rameau), ma un **terzo genere** in cui i numeri fungono da vettori di posizionamento, le chiavi danno l'idea delle entrate e spostano le altezze e i segni di misura danno l'indicazione dei tempi.

Caratteristica distintiva che separa nettamente il partimento dal basso continuo è l'uso frequente e alternato delle chiavi all'interno dello stesso brano.

Nel nostro modello, questo modo di intendere le strutture musicali corrisponde esattamente all'azione della **matrice delle chiavi**, oltre a quella sonora e dei tempi. Quando un maestro napoletano cambiava chiave in un partimento o indicava numeri complessi sopra il rigo, non stava solo chiedendo una trasposizione, ma segnalava l'ingresso di una nuova "voce logica" o una specifica situazione imitativa.

Lo studio dei partimenti nel Settecento era fatto insieme a quello del contrappunto e del solfeggio. I partimenti spiegano le ossature, i solfeggi le ornamentazioni, cioè come diminuire le note in una voce, e il contrappunto le regole per muovere le parti una contro l'altra. L'allievo che realizzava i partimenti metteva in pratica tutto quello che in materia di composizione gli veniva insegnato al Conservatorio.

Ancora oggi, i partimenti possono essere riletti non solo come esercizi di improvvisazione libera, ma come **algoritmi complessi**, retaggio di formule numeriche perfettamente descrivibili attraverso matrici sonore, dove il numero indica la parte e la chiave definisce il trasformatore necessario per attivarla nello spazio tonale.

Anche il contrappunto doppio, insegnato nei Conservatori di Napoli, ad esempio al tempo di Tritto, si semplifica notevolmente, combinando tra loro le matrici.

Un'ultima riflessione ci riporta al tempo delle scuole rinascimentali e al loro sistema di notazione. Nei libri corali si scrivevano le musiche polifoniche, mai in partitura, ma in orizzontale, cosa che da sempre ha affascinato i teorici musicali. Così in alto come in basso. Nell'orizzontalità melodica è già compresa tutta la polifonia e il contrappunto. Anzi, chi ha inventato per primo il sistema musicale, basato su rapporti matematici (pensiamo ai musicografi greci), aveva già in mente la polifonia e ha anticipato di millenni i componimenti medioevali a più voci.

14 Conclusioni

La tradizione didattica dei grandi teorici e compositori del passato, soprattutto di fine Ottocento, ha abbandonato pian piano l'arte dei partimenti. Le spiegazioni pratiche di come scrivere i canoni ricorrono ai metodi di "aggiustamento locale" basati sul *trial-and-error* (scrivi, controlla, correggi). Canoni oltre le due voci rappresentano un'eccezione, e sono mostrati come curiosità d'un passato in cui i compositori raggiunsero le più alte vette del contrappunto, e non furono mai più eguagliati.

Nel nostro sistema, è chiaro che più sono le voci e più il Canone è facile da costruire, essendoci meno possibilità combinatorie. Il Canone, insomma, si scrive in quel caso quasi da sé. Così pure quello enigmatico, che a taluni sembrerebbe impossibile da replicarsi, è facile da comporre partendo dalla matrice sonora e poi applicandovi la matrice delle chiavi e quella dei tempi.

Il sistema del "seme astratto" ribalta un vecchio paradigma; è più conveniente iniziare lo studio dal contrappunto a otto voci di prima specie, che è elementare, per poi passare a quello a due voci, oppure dal Canone a otto voci reali per affrontare poi quello a due, che è più impervio, dato che sono in gioco molte più variabili.

1. **Validazione a monte:** se il nucleo verticale (triade 1-3-5) è corretto all'origine, la sua proiezione temporale *deve* essere necessariamente corretta. La validità armonica è un assioma del sistema, non una verifica empirica.
2. **Estetica della necessità:** le ornamentazioni e le fioriture non sono vezzi stilistici, ma necessità strutturali. Servono a compensare il decadimento dell'energia ritmica causato dalla dilatazione temporale nelle voci inferiori.
3. **Verso l'automazione (C++):** l'approccio logico-matematico qui descritto apre le porte all'informatica musicale. Un sistema fondato su vettori, matrici di tempi (2^n) e operatori di trasposizione è nativamente traducibile in algoritmi.

In realtà, saper scrivere un Canone enigmatico, dopo averne svelato i segreti, è equivalente a saper far di conto usando le tabelline pitagoriche che si imparano alle elementari, e che nessuno si sarebbe aspettato suonassero, come il monocordo di scuola pitagorica, che tra l'altro si chiamava anche Canone.

Mentre il contrappuntista classico manipola note su un pentagramma, il teorico moderno manipola variabili in un flusso dati. La "tavola pitagorica" diviene la *tavola di riferimento* di un processo generativo capace di gestire non due, ma N voci in uno spazio sonoro potenzialmente infinito. Il Canone, dunque, si rivela non come un rompicapo artistico, ma come una struttura cristallina autogenerante: la rivincita dell'ordine matematico sul caos dei tentativi.

Per abbozzare il Canone in prolazione della sezione 12, considerato inarrivabile da molti trattatisti, che infatti non spiegano come ai tempi facessero a realizzarlo, abbiamo impiegato circa mezz'ora di lavoro. Il che, senza tener conto dei trenta e più anni di studio occorsi per arrivarci, dal 1985 a oggi, è un risultato, almeno dal nostro punto di vista, comunque apprezzabile.

14.1 Delimitazione del campo di indagine

In questo studio ci siamo volutamente limitati all'analisi della triade fondamentale $(1, 3, 5)$, che costituisce l'ossatura armonica primaria. La scelta metodologica s'è resa necessaria per isolare i principi generatori del sistema matriciale senza introdurre eccessive variabili in fase di definizione teorica. Riconosciamo che l'applicazione esclusiva alla triade costituisce una delimitazione formale rispetto alla vastità della letteratura musicale storica.

14.2 Scalabilità del sistema e sviluppi futuri

Tuttavia, preme sottolineare che l'architettura teorica qui esposta non è confinata alla triade. Il sistema è intrinsecamente scalabile ed è perfettamente in grado di gestire:

- **L'estensione eptatonica:** la matrice può accogliere accordi complessi basati sulla sovrapposizione completa delle terze $(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6)$.
- **I partimenti storici:** è possibile tradurre in matrici le celebri "regole dell'ottava" della Scuola napoletana, automatizzando i movimenti standard del basso.
- **Cadenze e dissonanze:** il sistema può codificare le cadenze composte (inclusa la gestione dell'accordo di quarta e sesta, spesso problematico nei trattati antichi) e la risoluzione dei ritardi.

Anche in casi di maggiore complessità, come la **fuga**, il principio ontologico rimane invariato: esiste sempre una **matrice seme** (il nucleo armonico vitale) che viene collocata nello spazio e nel tempo attraverso l'azione delle **matrici delle chiavi** e delle **prolazioni**. Mentre il seme contiene la necessità armonica (gli accordi), le matrici delle chiavi e dei tempi agiscono come operatori di trasformazione, definendo rispettivamente l'altezza reale e la durata.

Abbiamo qui esposto i principi teorici fondativi e fornito gli esempi applicativi essenziali; la dimostrazione di come la teoria matriciale possa abbracciare la totalità del linguaggio contrappuntistico sarà oggetto di future pubblicazioni.[14]

[14] Il modello generativo qui descritto è stato applicato anche retrospettivamente a repertori noti, producendo canoni infiniti derivati, ad esempio, da opere di D. Scarlatti (ad es. la cosiddetta "Fuga del Gatto") o G. P. da Palestrina. Esempi selezionati sono stati pubblicati online a scopo dimostrativo e possono essere ascoltati all'indirizzo `https://www.youtube.com/playlist?list=PLNuUwTDYnDaba9Qg5P2YM983DuXI7_V5R`.

15 Verso una nuova filologia digitale

Mostrando come un sistema matriciale consente di controllare lo spazio combinatorio del contrappunto, abbiamo ridotto drasticamente l'incidenza di esiti indesiderati tipici di un procedimento empirico privo di vincoli globali. Tuttavia, la portata del *seme astratto* non si limita alla pedagogia compositiva: esso può operare anche come strumento diagnostico in ambito filologico.

Un'applicazione analitica di un approccio strutturale coerente con il presente modello è documentata in Bianchini-Trombetta (2016), dove viene esaminato il corpus dei canoni attribuiti a Mozart, includendo una revisione critica di alcune realizzazioni editoriali.[15]

In particolare, l'analisi mostra che la soluzione proposta nella *Neue Mozart-Ausgabe* per un canone enigmatico (K.^{2} 89a II; K.^{6} 73r) genera, nella sovrapposizione verticale, combinazioni dissonanti e configurazioni di condotta che richiedono un riesame della realizzazione. L'applicazione di un modello generativo esplicito suggerisce invece una lettura alternativa, basata su una linearità polifonica coerente e su vincoli controllati, evitando le dissonanze sistematiche prodotte da alcune trascrizioni moderne.

Il sistema qui proposto, dunque, non mira soltanto alla generazione di nuova musica, ma fornisce anche un quadro operativo per la verifica e la decodifica di repertori storici, là dove la sola lettura euristica non rende espliciti i vincoli strutturali in gioco.

16 Ringraziamenti

L'autore desidera ringraziare la dottoressa Anna Trombetta per le attente riletture del manoscritto e per i suggerimenti preziosi, volti a migliorarne la chiarezza espositiva.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Bianchini e A. Trombetta, *Mozart. La caduta degli dei. Parte prima*, Tricase, Youcanprint, 2016; English ed.: *Mozart: The Fall of the Gods.*

[2] G. Bizzi, *Specchio invisibile. I canoni enigmatici di J. S. Bach*, Roma, Kappa, 1982.

[3] L. Cherubini, *Cours de contrepoint et de fugue*, Parigi, Maurice Schlesinger, 1835.

[4] G. B. Martini, *Esemplare o sia saggio fondamentale pratico di contrappunto sopra il canto fermo*, Vol. 1, Bologna, Lelio dalla Volpe, 1774.

[5] C. E. R. Morsink, *The Composition of New Music Inspired by Music Philosophy and Musical Theoretical Writings from Ancient Greece*, PhD Diss., Goldsmiths, University of London, 2013.

[6] M. Nicolella e D. Celletti, *I segreti dell'Harmonia. Comporre canoni musicali con la Tabula mirifica*, Città del Vaticano, Libreria Editrice Vaticana, 2021.

[7] N. Sala, *Regole del Contrappunto Pratico*, 1787, Manoscritto autografo, Napoli, Biblioteca del Conservatorio di Musica San Pietro a Majella.

[8] G. Zarlino, *Le istitutioni harmoniche*, Venezia, 1558.

[15] L. Bianchini e A. Trombetta, *Mozart. La caduta degli dei. Parte prima*, Tricase, Youcanprint, 2016.