

Flavor from a $\sqrt{2}$ -Discrete Vacuum: 13-Selective CKM Suppression and a Geometric Seesaw for PMNS(NO)

$\sqrt{2}$ 離散真空がフレーバーを生成する：

13 選択的 CKM 抑圧と PMNS(NO) の幾何学シーソー

Hiroto Iwasaki¹

hirotaiwasaki25@gmail.com^{*}

February 2, 2026

Abstract

標準模型における質量階層とフレーバー混合は多数の自由パラメータに依存し、その起源は未解決である。本稿では、 $\sqrt{2}$ を最小ステップとする離散生成則に微小補正（離散ラベル）を組み合わせたハイブリッド枠組を提案し、荷電レプトンおよびクォークの質量階層を少数パラメータで連鎖的に再構成する（相対誤差 $\text{RMS} \simeq 4.03 \times 10^{-3}$ ）。さらに同一形式の混合則により CKM/PMNS の混合角階層を統一的に記述し、クォークの混合では必要な補正が 13 成分に局在することをデータ駆動で同定する。すなわち、他成分は既に生成則のみで観測と整合し、13 にのみ追加の自由度が要求されるため、最小補正として 13 残差のみを吸収すれば十分である。実際、13 の残差のみを最小補正として取り込むと、CKM の整合性は $\text{RMS}(|V|) = 1.79 \times 10^{-2}$ から 1.09×10^{-4} へ改善する。残差の大きさを次元 6 有効演算子に写像することで新物理スケールを $\Lambda \simeq 14.8 \text{ TeV}$ (95%CI : [14.796, 14.817] TeV) と推定する。

レプトン側では同種の歪みパラメータをガウスのモンテカルロで評価し、分布と信頼区間を与えるとともに、 $\sum m_\nu$ との相関が $|\text{corr}| \sim 10^{-3}$ と極小であることを示す。加えて、幾何学的入力を Type-I シーソーへ埋め込み、正階層 (NO) を主分岐として採用すると、 $\sum m_\nu = 0.12067 \text{ eV}$ 、 $m_\beta \simeq 0.03171 \text{ eV}$ 、および位相スキャンにより $m_{\beta\beta} \in [0.01007, 0.03144] \text{ eV}$ (68%CI : (0.01346, 0.02906) eV) を得る。以上により、本枠組は質量・混合・ニュートリノ絶対質量・ $0\nu\beta\beta$ を単一の生成則と最小の補正で結び、 Λ 、 $\sum m_\nu$ 、 m_β 、 $m_{\beta\beta}$ を通じて反証可能な形で検証へ接続する。なお、 $\sum m_\nu$ の宇宙論上限はデータ組に依存するため、本稿の値は CMB 中心の保守的上限では許容域、BAO などを含む厳しい組では境界近傍に位置する（例：Planck 2018 や DESI BAO 等）。[1, 2, 3]

キーワード：フレーバー、Yukawa、CKM、PMNS、シーソー、EFT、 $0\nu\beta\beta$

^{*}ORCID: 0009-0004-9647-9198

Contents

Notation / 表記一覧	4
1 序論	8
1.1 動機と背景：フレーバー問題を「構成則」として扱う	8
1.2 本研究のアプローチ：ハイブリッド生成則 → 「原理+歪み」としての分離	8
1.3 主要結果(中心値+ 68% 区間)：CKM 改善、EFT スケール、PMNS(NO) 予言、seesaw 整合性 (IO は比較)	10
1.4 本論文の構成	14
2 標準理論の基準：Yukawa セクターと混合の定義	14
2.1 ゲージ構造とカイラル表現 (復習)	14
2.2 標準理論 Yukawa ラグランジアン	15
2.3 対角化と CKM/PMNS の定義	15
3 GAV 着想ハイブリッド再構成：質量連鎖と Yukawa 固有値	17
3.1 ハイブリッド質量則：主階層 (整数 K) + 微補正 (Casimir 差)	17
3.2 再構成質量から Yukawa 固有値へ	17
3.3 数値まとめ (クォーク・荷電レプトン)	18
3.4 小結：以降の混合再構成への接続	20
3.5 観測へのマッチングと Λ 予言	20
3.5.1 頑健性テスト：入力摂動に対する主要出力の安定性	24
4 PMNS：GAV 混合則と幾何学シーソー (NO)	29
4.1 PMNS 角のフィットとレプトン側 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ (NO)	29
4.2 幾何学入力：正四面体自己双対性と $K_{\text{geo}} = -48$ (NO)	31
4.3 NO スペクトルと $m_{\beta\beta}$ 予言	32
4.4 小結：PMNS(NO) の観測比較点	34
5 PMNS：GAV 混合則と幾何学シーソー (IO)	34
5.1 PMNS 角のフィットとレプトン側 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$	34
5.2 幾何学入力：正四面体自己双対性と $K_{\text{geo}} = -48$	36
5.3 IO スペクトルと $m_{\beta\beta}$ 予言	37
5.4 小結：PMNS(IO) の観測比較点	38
6 シーソー埋め込み：非ユニタリ性・LFV・ R 抽出	38
6.1 入力の凍結：NO 代表スペクトルと複素 PMNS	39
6.2 Casas-Ibarra による埋め込みと規約	39
6.3 NO-main の重いスケール： M_i (GAV 候補)	40
6.4 非ユニタリ性： Θ と η	40
6.5 LFV： $\mu \rightarrow e\gamma$ の評価	40
6.6 R 抽出：直交性と規約整合の検証	41
6.7 小結：NO 予言帯から UV 安全領域へ	41

7	議論	41
7.1	「次元 6 はパッチに見える」問題への回答	41
7.2	NO vs IO と観測比較の予先（本稿は NO を主分岐）	42
7.3	自然化の拡張候補（将来課題）	43
8	結論	44
A	数値入力と規約	48
A.1	質量入力とスケール規約	49
A.2	Higgs VEV と Yukawa の定義	49
A.3	混合ターゲットと PMNS 入力の扱い	49
A.4	乱数シードと走査設定	49
B	再現性のための定義・抽出手順	51
B.1	連続指数と残差の定義（手続きの固定）	51
B.1.1	連続指数 K_{obs}	52
B.1.2	主階層予測と対数残差 $\ln P_{\text{obs}}$	52
B.1.3	質量入力の規約（スキームとスケールの固定）	52
B.2	ΔC の定義（離散差分ラベルとしての固定）	53
B.2.1	質量連鎖（ハイブリッド則）で用いた ΔC の一覧	53
B.2.2	混合則で用いた離散ラベル ($\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij}$) の一覧	53
B.3	K_{int} と β_{sector} の推定手順（アルゴリズム）	53
B.3.1	観測連続指数 K_{obs} の計算	54
B.3.2	整数ステップ K_{int} の固定（本稿の実装）	54
B.3.3	微補正係数 β_{sector} の推定（回帰）	54
B.3.4	混合側： (p, r) の推定（2 チャンネル校正＋第 3 チャンネル検証）	55
B.4	基底候補の比較 ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \varphi$)	57
C	補助表：Yukawa 行列・混合行列	58
C.1	対角 Yukawa (chain)	58
C.2	CKM の絶対値行列 (GAV)	58
C.3	PMNS の絶対値行列 (eff、NO 代表：low/high)	59
C.4	NO 主解析： $\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ （位相走査）	59

Notation / 表記一覧

記号	意味 (Meaning)	役割 (Role / Usage)
K_{geo}	幾何学的に固定された離散指数 (geometric discrete index)	混合角・階層の「基底指数」。本稿の識別対象 (例: -48)。
K_{obs}	観測量から逆算した連続指数 (observed continuous index)	データ側の連続的な指標。離散モデルとのズレを定量化する入口。
K_{int}	整数ステップ (integer step index)	$\sqrt{2}$ の離散階段として階層を構成する「主階層」の段数。
ΔK	離散ずれ (discrete offset)	基準値 (例: -48) からのずれを走査し、構造感度を測る。
K_{ν}^{cont}	ニュートリノ側の連続推定中心 (continuous estimate; neutrino)	K_{geo} の候補を内部整合で絞る際の参照中心 (例: -46.6)。
σ_K	連続推定の許容幅 (tolerance / uncertainty for K)	「どれくらい近ければ内部整合とみなすか」を設定する幅。
$Z_K(K)$	標準化乖離 (standardized deviation)	内部整合の“距離”を無次元化して比較できるようにする。
ΔC	離散ラベル (Casimir-difference label)	ステップ間の微補正ラベル。混合則・階層則の補正項に入る。
$\sum m_{\nu}$	ニュートリノ質量和 (sum of neutrino masses)	宇宙論制約で K_{geo} を外部から切る主要観測量。
m_{β}	β 崩壊の有効質量 (effective electron-neutrino mass)	直接探索 (KATRIN 等) の外部制約として用いる。
$m_{\beta\beta}$	$0\nu\beta\beta$ の有効 Majorana 質量 (effective Majorana mass)	$0\nu\beta\beta$ 制約で K_{geo} を外部から切る (NME 依存に注意)。
$\sum m_{\nu}^{\text{max}}$	$\sum m_{\nu}$ の外部上限 (upper bound)	「external OK」を定めるしきい値 (境界感度解析の軸)。
$m_{\beta\beta}^{\text{max}}$	$m_{\beta\beta}$ の外部上限 (upper bound)	同上。核行列要素 (NME) によりレンジを持ちうる。
m_{β}^{max}	m_{β} の外部上限 (upper bound)	同上。通常はゆるく効き、補助制約として扱う。

(次ページへ続く)

記号	意味 (Meaning)	役割 (Role / Usage)
θ_{ext}	外部上限の選択 (set of external thresholds)	$\theta_{\text{ext}} = (\sum m_{\nu}^{\text{max}}, m_{\beta\beta}^{\text{max}}, m_{\beta}^{\text{max}})$ のようにまとめて管理。
$1[\cdots]$	指示関数 (indicator function)	条件を満たすと 1、満たさないと 0。external OK の機械判定に使う。
TotalScore(K)	外部 OK × 内部整合の合成スコア (combined score)	external OK の集合の中で「内部整合が最良の K 」を一意に選ぶ規則。
$\epsilon_{13}^{(\ell)}$	レプトン側 13 残差 (leptonic 13 residual)	混合則の「ずれ」を要約する指標。分布や相関解析で使用。
$x_{13,\text{eff}}^{(\ell)}$	有効 13 スケール (effective 13 parameter)	$\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と等価情報を別変数で表したもの (本文定義に従う)。

Assumptions & Outputs. 本稿で固定する前提 (Assumptions)、外部から与える入力 (Inputs)、および本稿の主要な予言・出力 (Outputs) を以下に整理する。加えて、表2に「固定原理／固定ラベル／フィット係数／外部入力／派生出力」を自由度 (DoF) とともに1枚でまとめ、循環 (結果を入力側へ入れているように見えること) を避ける。

- Assumptions: 主分岐として NO を採用し、幾何学的指数 $K_{\text{geo}} = -48$ を固定する。また、クォーク混合における「13成分のみの残差」を最小の歪みとして抽出し、dim-6 Yukawa 演算子 (単一係数) へ吸収する枠組を採用する (基準として $|c_{13}^{(d)}| = 1$ を置く)。
- Inputs: ニュートリノ振動パラメータ ($\Delta m_{21}^2, \Delta m_{3\ell}^2, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ など) および $|U_{ei}|$ の参照値を外部入力として用い、モンテカルロ (または誤差伝播) により $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ や質量和の分布を評価する。
- Outputs: Λ (EFT 新物理スケール) の推定帯、 $\sum m_\nu$ 、 m_β 、 $m_{\beta\beta}$ の予言帯 (平均・分散・CI) を与える。さらにシーソー埋め込みでは、抽出した R 行列の直交性チェック $\|R^T R - \mathbb{I}\|$ 、非ユニタリティ η 、および $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の見積もりを提示する。

Table 2. Degrees-of-freedom ledger (Assumptions / Inputs / Fits / Derived / Outputs).

区分	量 (代表記号)	分類	DoF	役割 (どこで使うか)
固定原理	$\sqrt{2}$ 基底、整数ステップ	Principle (fixed)	0	主階層の最小更新単位 (質量連鎖・混合則の基底)
固定ラベル (実装)	$\Delta C, (\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij})$ の一覧	Label (frozen list)	0	ハイブリッド則の離散入力として使用 (群論的には Casimir 差として解釈)
分岐仮定	NO (主分岐)	Assumption (discrete)	1	ニュートリノ側の分岐を固定 (以後の絶対質量・位相走査の前提)
幾何学入力	$K_{\text{geo}} = -48$	Assumption (fixed)	0	先行研究(GAV)で導入した幾何学入力をそのまま採用し、 $m_p^{\text{geo}} = m_e(\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}}$ により絶対質量スケールを固定 (離散ずれは頑健性テストで評価)
フィット係数 (chain)	$\beta_{\text{lep}}, \beta_{\text{up}}, \beta_{\text{down}}$	Fit-coef (regression)	3	$e^{\beta_{\text{sector}} \Delta C}$ の微補正係数 (セクター別)
フィット係数 (mixing)	(p, r)	Fit-coef (calibration)	2	混合則の校正パラメータ (2 チャンネルで固定し第3チャンネルで検証)
外部入力 (数値)	m_f, v (規約)、振動入力 ($\Delta m^2, \theta_{ij}, \delta$)、参照 $ U_{ei} $	External data	入力	MC/誤差伝播の外部入力として分布評価に用いる
データ抽出残差 (CKM)	13 残差 (例: $\Delta_{13}, \delta Y_{13}^{(d)}, \epsilon_{13}^{(q)}$)	Data-derived residual	1 (中心+揺らぎ)	「13 のみ必要な抑圧」を単一スカラーとして保持し EFT へ写像
規約 (EFT 正規化)	$ c_{13}^{(d)} = 1$	Convention	0	Λ 推定の基準化 (数値帯の提示)
主要出力 (予言帯)	$\Lambda, \sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$	Outputs	0 (派生)	反証可能な予言 (平均・分散・CI)
整合性チェック (seesaw)	$\ R^T R - \mathbb{I}\ , \eta = \frac{1}{2} \Theta \Theta^\dagger, \text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$	Derived checks	0 (派生)	埋め込みの妥当性・安全性の指標

1 序論

1.1 動機と背景：フレーバー問題を「構成則」として扱う

標準理論 (SM) はゲージ原理により強く拘束された理論である一方、フレーバー構造 (フェルミオン質量階層と混合角、ならびに CP 位相) は Yukawa 行列に集約され、数十個の自由度として実験値に合わせ込まれている。すなわち、ゲージ部門が高い普遍性をもつのに対し、Yukawa 部門は「入力表」として残されているという非対称性が、フレーバー問題の核心である。

本研究の立場は、Yukawa 行列を「任意の入力」ではなく、より少数の離散的・幾何学的パラメータから生成される対象として扱う点にある。とりわけ、著者の一連の枠組み (RQT I, II) では、質量階層と混合を「離散指数」および「幾何学的制約」によって組織化する方針を採用している [4, 5]。本稿では、その設計思想を GAV の生成則として具体化し [6]、(i) CKM の再構成、(ii) PMNS とニュートリノ絶対質量の検証可能な予言、(iii) seesaw 埋め込みに伴う非ユニタリ性・LFV の整合性、を一つの有効ラグランジアンに統合する。

本稿の主張レベル (粗視化と具体化の位置づけ)：本稿は、ミクロな理論 (UV 完成) の一意的導出を主張するものではない。むしろ、GAV の生成則を粗視化された原理として受け取り、その原理が低エネルギー観測へ接続されるときの一つの具体的実現として有効ラグランジアンを構成する、という立場を採る。したがって本稿の「ラグランジアン」は、原理の必然性を保証する唯一解ではなく、観測整合・検証可能性を満たす代表解である。UV 完成や対称性の厳密実装は次段階の課題として明示的に留保する。以下では、この代表解の一つとして数値実装を示し、検証可能性に焦点を当てる。

1.2 本研究のアプローチ：ハイブリッド生成則 → 「原理 + 歪み」としての分離

本稿は、観測量の再現を「フィットの巧拙」ではなく、原理 (principle) と現実の歪み (residual/distortion) の分離として定式化する。具体的には、(A) 質量階層、(B) 混合角階層、(C) 13 チャンネルの専用補正、(D) ニュートリノ幾何学シーソー、を順に接続する。

まず、同一セクター内の質量連鎖を「主階層 ($\sqrt{2}$ の整数ステップ) + 微補正 (Casimir 差)」で表す：

$$m_{\text{target}} = m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}} \exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C). \quad (1)$$

- $m_{\text{base}}, m_{\text{target}}$ ：同一セクター内で連鎖させる基準質量と目標質量である。
- K_{int} ：主階層を担う整数指数であり、 $\sqrt{2}$ ステップの回数を表す。
- ΔC ：離散ラベル (Casimir 差) であり、微補正の入力である。
- β_{sector} ：セクター (荷電レプトン / アップ型クォーク / ダウン型クォーク) ごとに定まる補正係数である。
- 役割：質量階層を少数パラメータで再構成し、Yukawa 固有値 (対角成分) の基準を確定する。

なぜ最小ステップが $\sqrt{2}$ なのか（直交合成による動機づけ）。(1) で主階層の最小ステップとして $\sqrt{2}$ を採用する動機は、質量（スケール）が「有効振幅（ノルム）の二乗」に対応するという幾何学的見方に基づく ([6] で詳述)。すなわち、世代更新を直交方向の自由度が開く「ベクトル合成」とみなすと、

$$v_n^2 = v_{n-1}^2 + \Delta_n^2 \quad (2)$$

と書ける。

- ・ 項の意味： v_n は n 段階の有効振幅スケール（質量スケールに対応）、 v_{n-1} は前段階の有効振幅スケール、 Δ_n は新たに開く直交成分（新規寄与）である。
- ・ 役割：世代進行を「足し算」ではなく「直交合成」として定式化し、 $\sqrt{2}$ 基底の階層化に直観的・物理的背景を与える。

特に、最小の非自明更新として $\Delta_n = v_{n-1}$ を仮定すると、

$$v_n = \sqrt{2} v_{n-1} \quad (3)$$

という関係が導かれ、更新 1 回あたりの最小増幅単位として $\sqrt{2}$ が自然に現れる。

- ・ 項の意味： $\Delta_n = v_{n-1}$ は新規直交成分が前段階と同程度に開く最小の更新であり、 $v_n = \sqrt{2} v_{n-1}$ はその結果として得られるスケール増幅則である。

補足：基底候補 ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \varphi$) の簡易比較。 $\sqrt{2}$ の採用が恣意的に見えないよう、基底候補として $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \varphi$ を同一手続きで比較した。質量連鎖・CKM・PMNS (NO 低/高オクタント) を同時に評価する総合指標 R_{sum} (定義は Appendix B, Table 12) で見ると、 ΔC 補正あり ((ii)) では $R_{\text{sum}}(\sqrt{2}) = 0.646$ が最小であり、 $\varphi(0.730)$ 、 $\sqrt{3}(0.989)$ 、 $\sqrt{5}(5.07)$ を上回る。さらに $x_{13,\text{eff}}$ 調整あり ((iii)) でも $R_{\text{sum}}(\sqrt{2}) = 0.0314$ が最小であり、 $\varphi(0.528)$ 、 $\sqrt{3}(0.937)$ 、 $\sqrt{5}(4.48)$ より優位である。

以上を踏まえ、次節では質量比を $\sqrt{2}$ 基底で測った連続指数 K_{obs} と、整数ステップ予測からの対数残差 $\ln P_{\text{obs}}$ を導入し、主階層と微補正をデータ側から分離して同定する。

この「離散ステップ+残差」という分解は混合角にも同様に適用できるため、次に混合角階層を同じ離散差分で表す：

$$\log_2(\sin \theta_{ij}) \simeq -(p \Delta K_{ij} + r \Delta C_{ij}). \quad (4)$$

- ・ θ_{ij} ：混合角（CKM/PMNS のいずれにも適用）である。
- ・ ΔK_{ij} ：離散差分ラベル（主階層側）である。
- ・ ΔC_{ij} ：離散差分ラベル（微補正側）である。
- ・ p, r ：(12) と (23) を用いて決める係数である。
- ・ 役割：混合角階層を少数係数で統一的に生成する「コア仮説」である。
- ・ 本稿で用いる離散ラベル ΔC および $(\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij})$ の固定値と推定手順は、再現性のため Appendix B にまとめる。

しかし CKM では、13 チャンネルが上式の「原理値」から系統的にずれる。ここを本稿では「現実の歪み」として保存し、実効指数

$$x_{13}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(q)} \quad (5)$$

で記述する。

- $x_{13}^{(q)}$: クォーク部門の 13 抑圧に対応する実効指数である。
- $\epsilon_{13}^{(q)}$: 原理値 $\sqrt{2}$ からのズレ（歪み）である。
- 役割 : 原理 ($\sqrt{2}$) は保ったまま、観測に必要な 13 専用補正を最小自由度で実装する。

本稿の基準点 (baseline) では

$$\epsilon_{13,0}^{(q)} = 0.07964, \quad (6)$$

$$x_{13,\text{eff}}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13,0}^{(q)} = 1.3346, \quad (7)$$

- $\epsilon_{13,0}^{(q)}$: CKM の 13 残差の基準値である。
- $x_{13,\text{eff}}^{(q)}$: 13 抑圧の実効指数（基準値）である。
- 役割 : 以後の数値提示は「中心値 + 区間 (68%)」で統一し、この中心値を代表値として用いる。

1.3 主要結果（中心値 + 68% 区間）：CKM 改善、EFT スケール、PMNS(NO) 予言、seesaw 整合性 (IO は比較)

本稿の数値実装により、CKM の一致度は 13 補正を入れることで大幅に改善する。具体的に、補正なし (baseline) では

$$\text{RMS}(|V|)_{\text{baseline}} = 0.0179, \quad (8)$$

- $\text{RMS}(|V|)_{\text{baseline}}$: CKM 絶対値行列の相対誤差の代表指標（補正なし）である。
- 役割 : 13 補正の必要性を定量的に示す基準線である。

一方、 $x_{13,\text{eff}}^{(q)}$ を用いると

$$\text{RMS}(|V|)_{x_{13,\text{eff}}} = 1.09 \times 10^{-4}, \quad (9)$$

- $\text{RMS}(|V|)_{x_{13,\text{eff}}}$: 13 補正を入れたときの一致度である。
- 役割 : 本稿の「原理 + 歪み」分離が実験再現に十分であることを示す。

EFT による 13 補正の解釈（次元 6） 13 残差を Yukawa セクターのフレーバー選択的次元 6 演算子として表す。以下は代表例であり、同次元の他演算子や基底変換により等価な表現があり得ることに注意する：

$$\mathcal{O}_{13}^{(6)} = \frac{c_{13}^{(d)}}{\Lambda^2} (\bar{Q}_L \Phi d_R) (\Phi^\dagger \Phi) + \text{h.c.} \quad (10)$$

- $c_{13}^{(d)}$ ：Wilson 係数（無次元）である。
- Λ ：新物理スケールである。
- 役割：低エネルギーで $\delta Y_{13}^{(d)}$ を誘起し、 $x_{13}^{(q)}$ を観測に一致させる。

本稿では $c_{13}^{(d)} \sim 1$ を基準に、 Λ は TeV スケールの狭い帯に推定される。ただし、演算子選択・基底・混在の違いは系統誤差として扱い、後段で Λ の安定性評価（混在パラメータ化）を与える。68% 区間として

$$\Lambda_{68\% \text{CI}} = (14.8, 14.81) \text{ TeV}, \quad (11)$$

- $\Lambda_{68\% \text{CI}}$ ： $\epsilon_{13}^{(q)}$ の揺らぎを反映した Λ の 68% 信頼区間である。
- 役割：13 補正が「パッチ」ではなく、具体的な検証可能スケールに対応することを示す。

PMNS(NO) と幾何学シーソー：宇宙論と $0\nu\beta\beta$ への接続（IO は比較） ニュートリノ絶対質量は、幾何学入力 $K_{\text{geo}} = -48$ から与えられる

$$m_\nu^{\text{geo}} = m_e (\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}} \quad (12)$$

を基準にして固定する。本稿では NO を主分岐として採用し、

$$(\text{NO main}) \quad m_1 = m_\nu^{\text{geo}} \quad (13)$$

と同定する（NO で m_3 に置くと $m_3^2 - \Delta m_{31}^2 < 0$ となり得て整合を失うため）。

なお、 K_{geo} は幾何学入力として固定して用いるが、離散ずれ $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ に対する $\sum m_\nu$, m_β , $m_{\beta\beta}$ の感度は頑健性テスト（Fig. 1, Table 8）で明示する。

IO は比較分岐として扱い、必要に応じて

$$(\text{IO comparison}) \quad m_3 = m_\nu^{\text{geo}} \quad (14)$$

を併記する。

- m_ν^{geo} ：幾何学入力から与える絶対質量スケール（基準質量）である。
- K_{geo} ：正四面体自己双対性に基づく幾何学指数（本稿では -48 ）である。
- 役割：NO（主）において最小自由度で絶対質量スケールを固定し、 $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ を反証可能量へ落とす（IO は比較として同一枠で参照可能）。

まず NO（主分岐： $m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$ ）では、代表値として

$$\sum m_\nu(\text{NO}) = 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta(\text{NO}) \simeq 3.17 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (15)$$

を与える（NO_low/NO_high のオクタント差による m_β の変動も僅少である）。

- $\sum m_\nu(\text{NO})$ ：ニュートリノ質量和（位相非依存）である。
- $m_\beta(\text{NO})$ ：単一 β 崩壊に現れる有効質量（位相非依存）である。
- 役割：NO 主分岐における「宇宙論＋直接測定」比較の中心予言を序論の段階で確定する。

また Majorana 位相 $(\alpha_{21}, \alpha_{31})$ を一様にスキャン ($N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$) すると

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} \in [0.01007, 0.03144] \text{ eV}, \quad 68\% \text{CI} \simeq (0.01346, 0.02906) \text{ eV} \quad (16)$$

の予言帯を得る。なお NO_low/NO_high のオクタント差による $m_{\beta\beta}$ の変動は僅少である。

- N_{phase} ：Majorana 位相スキャンのサンプル数である。
- 役割： $m_{\beta\beta}$ 予言帯 (min/max, CI) の統計的再現性を明示する。
- $\sum m_\nu(\text{NO})$ ：ニュートリノ質量和（位相非依存）である。
- $m_\beta(\text{NO})$ ：単一 β 崩壊に現れる有効質量（位相非依存）である。
- $m_{\beta\beta}^{\text{NO}}$ ： $0\nu\beta\beta$ 有効質量（位相依存）である。
- 役割：NO 主分岐における「宇宙論＋ $0\nu\beta\beta$ 」同時比較の中心予言を序論の段階で確定する。

比較として IO ($m_3 = m_\nu^{\text{geo}}$) も同一の幾何学入力から一意に定まり、Gaussian MC (採用：②) により

$$\sum m_\nu(\text{IO}) : \mu = \begin{cases} 0.1469 & (\text{low}) \\ 0.1469 & (\text{high}) \end{cases} \text{ eV}, \quad \sigma \simeq \begin{cases} 0.001791 & (\text{low}) \\ 0.001794 & (\text{high}) \end{cases} \text{ eV}, \quad (17)$$

を得る。さらに Majorana 位相走査から

$$m_{\beta\beta}^{\text{IO}, 68\% \text{CI}} = (0.0257, 0.05525) \text{ eV}, \quad (18)$$

および位相非依存量として

$$m_\beta(\text{IO}) = 0.05763 \text{ eV} \quad (19)$$

を得る。

- $\sum m_\nu(\text{IO})$ ：IO における質量和（位相非依存）である。
- $m_{\beta\beta}^{\text{IO}}$ ：IO における $0\nu\beta\beta$ 有効質量の予言帯である。
- 役割：NO 主筋の結論を維持したまま、IO を比較参照として同一枠組で位置づける。

(NO 主分岐の見出し数値) $\sum m_\nu^{\text{NO}} \simeq 0.1207 \text{ eV}$.

- $\sum m_\nu^{\text{NO}}$ ：NO における質量和（位相非依存）の中心値である。
- 役割：宇宙論比較の「見出し予言」として読者の注意を一点に集める。

Type-I seesaw 埋め込みの整合性：非ユニタリ性と LFV Type-I seesaw では、軽い混合行列の非ユニタリ性は

$$\eta \equiv \frac{1}{2} \Theta \Theta^\dagger \quad (20)$$

で定義される。

- Θ ：軽・重ニュートリノ混合 (active–sterile mixing) である。
- η ：低エネルギーでの非ユニタリ性パラメータである。
- 役割：PMNS の「見かけのユニタリ性」からのズレと LFV を統一的に拘束する。

GAV 生成則から得た NO-main の代表点 (GAV 点) において

$$|\eta_{e\mu}| = 5.592 \times 10^{-17}, \quad (21)$$

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq 2.724 \times 10^{-36}, \quad (22)$$

となり、既存制限に対し十分小さい [7, 8]。

- $|\eta_{e\mu}|$ ：非ユニタリ性のフレーバー外成分である。
- $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ ：代表的 LFV 過程の分岐比推定である。
- 役割：本稿の seesaw 埋め込みが「危険な LFV を自動的に避ける」安全領域にあることを示す。

一般解空間における GAV 点の位置づけ： R 行列の逆抽出 Casas–Ibarra 表現に基づき、GAV 点の Dirac Yukawa から R 行列を逆抽出すると

$$\|R^T R - I\| = 1.094 \times 10^{-15}, \quad (23)$$

$$\|\text{Re}(R)\| = 1.732, \quad \|\text{Im}(R)\| \simeq 5.193 \times 10^{-17}, \quad (24)$$

となり、 R は実直交行列に極めて近い。

- $\|R^T R - I\|$ ： R の直交性からのズレのノルムである。
- $\|\text{Re}(R)\|, \|\text{Im}(R)\|$ ：実部・虚部の大きさの指標である。
- 役割：GAV 点一般解 (任意 R) の中で強く制限された部分空間に属する、という予言性を与える。

Summary (one-line). 本稿の見出し予言は、NO-main において $\sum m_\nu \simeq 0.1207 \text{ eV}$ と $m_{\beta\beta} \in [0.010, 0.031] \text{ eV}$ (68% 区間 $\simeq (0.0135, 0.0291) \text{ eV}$) であり、同時に seesaw 埋め込みは $|\eta_{e\mu}| \sim 10^{-17} \cdot \text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \sim 10^{-36}$ の安全領域にある。

1.4 本論文の構成

本稿の構成は次の通りである。第 2 節で SM Yukawa と混合の定義を基準として整理する。第 3 節でハイブリッド質量則により Yukawa 固有値を再構成する。第 4 節で CKM を生成し、13 残差 $\epsilon_{13}^{(q)}$ を EFT 次元 6 項として実装し、 Λ の推定帯を与える。第 5 節で PMNS を議論し、幾何学入力に基づく NO スペクトルと $m_{\beta\beta}$ の预言帯（および $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の MC 評価）を与える。IO は比較分岐として同節内で補足する。第 6 節で seesaw 埋め込み（非ユニタリ性・LFV・ R 抽出）を述べ、第 7 節で最終ラグランジアンを提示する。最後に第 8 節で次元 6 項の「パッチ性」に対する自然化（UV 完成）候補を議論し、結論を与える。

2 標準理論の基準：Yukawa セクターと混合の定義

2.1 ゲージ構造とカイラル表現（復習）

標準理論の電弱ゲージ群は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ であり、左手成分と右手成分は異なる表現に属する。例えば 1 世代のレプトンでは

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \sim (2, Y_L), \quad e_R \sim (1, Y_e), \quad (25)$$

となる（クォークでも同様に Q_L がダブレット、 u_R, d_R がシングレットである）。

- $SU(2)_L$ ：左手場にのみ作用する非可換ゲージ群である。
- $U(1)_Y$ ：超電荷（ハイパーチャージ） Y による位相回転である。
- L_L, Q_L ：左手ダブレットであり、 $SU(2)_L$ の基本表現を持つ。
- u_R, d_R, e_R ：右手シングレットであり、 $SU(2)_L$ では不変である。
- 役割：左手と右手が同じ表現にいないため、単純な質量項がゲージ不変にならないという帰結を与える。

実際、ディラック質量項 $\bar{\psi}_L \psi_R$ を考えると、 $SU(2)_L$ 変換 $U(x) \in SU(2)_L$ の下で

$$\psi_L \rightarrow U(x)\psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi_R \Rightarrow \bar{\psi}_L \psi_R \rightarrow \bar{\psi}_L U^\dagger(x)\psi_R, \quad (26)$$

となり、一般に不変ではない（左手側の $SU(2)$ 添字が収縮できない）。

- ψ_L ：左手成分であり、 $SU(2)_L$ ダブレット（または一般表現）として回転する。
- ψ_R ：右手成分であり、 $SU(2)_L$ では回転しない。
- $U(x)$ ：局所ゲージ変換行列であり、位置依存の内部空間回転を表す。
- 役割：ゲージ対称性を保つ限り、裸のフェルミオン質量項が禁じられることを数式で示す。

この問題を解決するのが Higgs ダブレット Φ の導入である。 Φ は

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim (2, Y_\Phi), \quad \tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^* \sim (2, -Y_\Phi), \quad (27)$$

として $SU(2)_L$ ダブレットであり、 L_L （あるいは Q_L ）と組み合わせて $SU(2)_L$ シングレットを作れる。

- Φ : Higgs ダブルレットであり、左手ダブルレットと同じ $SU(2)_L$ 表現を持つ。
- $\tilde{\Phi}$: アップ型 Yukawa のために用いる共役ダブルレットである。
- Y_Φ : Higgs のハイパーチャージであり、電荷生成 $Q = T^3 + Y$ を成立させるように選ばれる。
- 役割 : $\bar{\psi}_L \Phi \psi_R$ の形でゲージ不変な「質量生成の種」を作る。

2.2 標準理論 Yukawa ラグランジアン

$$\mathcal{L}_Y^{\text{SM}} = -\bar{Q}_L Y_u \tilde{\Phi} u_R - \bar{Q}_L Y_d \Phi d_R - \bar{L}_L Y_e \Phi e_R + \text{h.c.} \quad (28)$$

- $\mathcal{L}_Y^{\text{SM}}$: 標準理論の Yukawa 部門ラグランジアンである。
- Q_L, L_L : 左手ダブルレットであり、 $SU(2)_L$ の基本表現を持つ。
- u_R, d_R, e_R : 右手シングレットであり、 $SU(2)_L$ では不変である。
- Φ : Higgs ダブルレットである。
- $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$: Higgs 共役ダブルレットであり、アップ型 Yukawa に必要である。
- $Y_{u,d,e}$: Yukawa 行列 (3×3 複素) であり、世代空間の結合を表す。
- 役割 : フレーバー質量階層と混合を導入する最小のゲージ不変相互作用である。

電弱対称性の自発的破れ $\langle \Phi \rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$ により、(28) はフェルミオン質量行列を生成する：

$$M_u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_u, \quad M_d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_d, \quad M_e = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_e. \quad (29)$$

- v : Higgs の真空期待値 (VEV) である。
- $M_{u,d,e}$: アップ型クォーク、ダウン型クォーク、荷電レプトンの質量行列である。
- 役割 : Yukawa 行列を「観測可能な質量行列」に写像する関係式である。

2.3 対角化と CKM/PMNS の定義

一般に Yukawa (あるいは質量) 行列は非対角であり、ユニタリ変換で対角化される。クォーク部門では

$$U_{uL}^\dagger M_u U_{uR} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) \equiv D_u, \quad (30)$$

$$U_{dL}^\dagger M_d U_{dR} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \equiv D_d. \quad (31)$$

- U_{uL}, U_{uR} : アップ型左手／右手場の世代回転 (ユニタリ) である。
- U_{dL}, U_{dR} : ダウン型左手／右手場の世代回転 (ユニタリ) である。

- D_u, D_d ：物理質量固有値を並べた対角行列である。
- 役割：場の基底を「相互作用基底」から「質量基底」に移す手続きである。

このとき、荷電カレント相互作用で現れる混合行列が CKM 行列であり [9, 10, 11]

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL}, \quad (32)$$

と定義される。

- V_{CKM} ：クォーク混合行列である。
- $U_{uL}^\dagger U_{dL}$ ：左手回転の不一致が混合として観測されることを表す。
- 役割：弱相互作用のフレーバー遷移 ($u \leftrightarrow d$ 系) を支配する。

レプトン部門では、荷電レプトンとニュートリノの左手回転の不一致として PMNS 行列を定義する [12, 13]。荷電レプトンは

$$U_{eL}^\dagger M_e U_{eR} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \equiv D_e. \quad (33)$$

- U_{eL}, U_{eR} ：荷電レプトン左手／右手の世代回転である。
- D_e ：荷電レプトンの物理質量固有値の対角行列である。
- 役割：レプトン混合の基準として荷電レプトン側を固定する。

ニュートリノの質量生成機構に依存して U_ν の定義は変わるが、本稿では Type-I seesaw [14, 15, 16] を採用するため、低エネルギーの有効 Majorana 質量行列 m_ν を

$$U_\nu^T m_\nu U_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \equiv D_\nu \quad (34)$$

で対角化する ($m_i \geq 0$)。

- m_ν ：低エネルギーの有効 Majorana 質量行列である。
- U_ν ：ニュートリノの左手回転 (ユニタリ) である。
- D_ν ：ニュートリノ質量固有値の対角行列である。
- 役割：振動実験で観測される混合角と質量差を記述する基礎である。

以上より PMNS 行列は

$$U_{\text{PMNS}} \equiv U_{eL}^\dagger U_\nu. \quad (35)$$

- U_{PMNS} ：レプトン混合行列である。
- $U_{eL}^\dagger U_\nu$ ：荷電レプトンとニュートリノの左手回転の不一致である。
- 役割：ニュートリノ振動および $0\nu\beta\beta$ などのレプトン数非保存過程に現れる。

本稿では、混合角の数値提示には PDG 標準パラメータ化 ($\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta$) を念頭に置きつつ、計算実装ではまず $|V_{\text{CKM}}|$ および $|U_{\text{PMNS}}|$ の絶対値行列を用いて議論を進める (位相は必要箇所で見査する) [17, 18]。

- PDG パラメータ化：混合角と CP 位相の標準規約である。
- $|V|, |U|$ ：絶対値行列であり、主要な階層構造の比較に有効である。
- 役割：本稿の「生成則」はまず階層 (大きさ) を再現し、位相は後段で拘束するという戦略を明確化する。

3 GAV 着想ハイブリッド再構成：質量連鎖と Yukawa 固有値

3.1 ハイブリッド質量則：主階層（整数 K ）＋微補正（Casimir 差）

本稿では、フレーバー階層を「主階層（ $\sqrt{2}$ の整数ステップ）」と「微補正（Casimir 差 ΔC に比例する指数補正）」に分解し、同一セクター内の質量連鎖を

$$m_{\text{target}} = m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}} \exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C) \quad (36)$$

で再構成する。

- $m_{\text{base}}, m_{\text{target}}$ ：同一セクター（lep/up/down）内の連鎖質量である。
- K_{int} ：主階層の整数指数（ $\sqrt{2}$ ステップ数）である。
- ΔC ：Casimir 差（離散ラベル）である。
- β_{sector} ：セクター（lep/up/down）ごとの補正係数である。
- 役割：質量階層を少数パラメータで再構成し、以降の Yukawa 固有値（対角基準）を決定する。

ここで観測値との整合性を評価するため、各ステップの観測的指数

$$K_{\text{obs}} \equiv 2 \log_2 \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}}} \right) \quad (37)$$

を導入すると、

$$\ln P_{\text{obs}} \equiv \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}}} \right) = \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{pred}}^{(0)}} \right) \quad (38)$$

は、(36) の $\exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C)$ に対応する「微補正の観測量」として解釈できる。

- K_{obs} ：質量比を $\sqrt{2}$ 基底で測った連続指数である。
- $\ln P_{\text{obs}}$ ：整数ステップ予測 $m_{\text{pred}}^{(0)} = m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}}$ からの対数残差である。
- 役割： β_{sector} の推定と、 ΔC 依存補正の妥当性検証を可能にする。

3.2 再構成質量から Yukawa 固有値へ

電弱対称性の自発的破れの後、フェルミオン f の Yukawa 固有値は

$$y_f = \frac{\sqrt{2} m_f}{v} \quad (39)$$

で与えられる。

- y_f ：フェルミオン f の Yukawa 固有値である。

- m_f ：対応する質量入力である（pole/MSbar のスキームおよびスケールは明示する）。
- v ：Higgs VEV であり、本稿では $v = 246$ GeV を用いる。
- 役割：混合生成（CKM/PMNS）に入れる「対角基準（固有値スケール）」を与える。

本稿の実装では、上式を直接用いて対角行列

$$D_u = \text{diag}(y_u, y_c, y_t), \quad D_d = \text{diag}(y_d, y_s, y_b), \quad D_e = \text{diag}(y_e, y_\mu, y_\tau) \quad (40)$$

を構成し、以後の混合行列再構成の入力とする。

- $D_{u,d,e}$ ：それぞれアップ型、ダウン型、荷電レプトンの Yukawa 固有値の対角行列である。
- 役割：非対角性（混合）は「回転（ユニタリ変換）」に集約し、階層（固有値）と混合（回転）を分離する。

3.3 数値まとめ（クォーク・荷電レプトン）

以下では、ハイブリッド質量則 (36) により得た連鎖再構成（chain）を用いて、代表的な Yukawa 固有値を提示する。ここで質量入力は（本文の定義に従い）軽クォークは $\overline{\text{MS}}$ ($\mu = 2$ GeV)、重クォークは自分自身のスケールでの $\overline{\text{MS}}$ 、荷電レプトンは pole を用いる。

(i) セクター係数（連鎖フィット）

$$\beta_{\text{lep}} = 2.244 \times 10^{-2}, \quad (41)$$

$$\beta_{\text{up}} = 6.917 \times 10^{-2}, \quad (42)$$

$$\beta_{\text{down}} = -6.172 \times 10^{-2}. \quad (43)$$

- β_{lep} ：lep セクターの微補正係数。
- β_{up} ：up セクターの微補正係数。
- β_{down} ：down セクターの微補正係数。
- 役割： ΔC を介して「整数ステップからのズレ」を体系的に吸収する。

(ii) 連鎖再構成による質量（例） 本稿の chain 再構成（代表値）は、 μ, τ, t, b に対して観測値と $\mathcal{O}(10^{-3}) \sim \mathcal{O}(10^{-2})$ の相対誤差で整合する（詳細は表3）。

- chain 再構成：(36) を連鎖的に適用して得る予測である。
- 役割：以降の Yukawa 固有値 ((39)) と、混合生成に入る基準スケールを固定する。

Table 3. Hybrid mass reconstruction (chain) summary.

particle	$m_{\text{pred}}^{\text{chain}}$ [MeV]	m_{obs} [MeV]	err [%]
e	0.511	0.511	0
μ	105.8	105.7	0.1643
τ	1771	1777	-0.3278
u	2.16	2.16	0
c	1270	1270	0
$t_{\overline{\text{MS}}}$	162560	163000	-0.2699
d	4.67	4.67	0
s	93.4	93.4	0
b	4227	4180	1.12

$$\text{RMS}(\text{relative, chain}) = 4.03 \times 10^{-3}.$$

Table 4. Yukawa eigenvalues obtained from the chain reconstruction.

sector	fermion f	y_f
up-type	u	1.242×10^{-5}
	c	7.301×10^{-3}
	t	9.345×10^{-1}
down-type	d	2.685×10^{-5}
	s	5.369×10^{-4}
	b	2.43×10^{-2}
lepton	e	2.938×10^{-6}
	μ	6.084×10^{-4}
	τ	1.018×10^{-2}

(iii) Yukawa 固有値 (chain) chain 再構成から得た Yukawa 固有値 (代表値) は

$$y_u = 1.242 \times 10^{-5}, \quad y_c = 7.301 \times 10^{-3}, \quad y_t = 9.345 \times 10^{-1}, \quad (44)$$

$$y_d = 2.685 \times 10^{-5}, \quad y_s = 5.369 \times 10^{-4}, \quad y_b = 2.43 \times 10^{-2}, \quad (45)$$

$$y_e = 2.938 \times 10^{-6}, \quad y_\mu = 6.084 \times 10^{-4}, \quad y_\tau = 1.018 \times 10^{-2}. \quad (46)$$

- $y_{u,c,t}$: アップ型クォークの Yukawa 固有値である。
- $y_{d,s,b}$: ダウン型クォークの Yukawa 固有値である。
- $y_{e,\mu,\tau}$: 荷電レプトンの Yukawa 固有値である。
- 役割 : 本稿の CKM/PMNS 再構成における「固有値 (階層) 入力」を確定する。

(iv) 対角基準行列 上記を用いて

$$\begin{aligned}
D_u &= \begin{pmatrix} 1.242 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 7.301 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 9.345 \times 10^{-1} \end{pmatrix}, \\
D_d &= \begin{pmatrix} 2.685 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 5.369 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 2.43 \times 10^{-2} \end{pmatrix}, \\
D_e &= \begin{pmatrix} 2.938 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 6.084 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.018 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{47}$$

- D_u : up セクターの Yukawa 固有値の対角基準行列。
- D_d : down セクターの Yukawa 固有値の対角基準行列。
- D_e : lep セクターの Yukawa 固有値の対角基準行列。
- 役割 : 混合 (非対角成分) は回転行列側に集約し、階層と混合を分離する。

3.4 小結：以降の混合再構成への接続

本節の結論は、(36) により「階層 (固有値)」を固定し、次節以降で「混合 (回転)」を構成するための入力 (D_u, D_d, D_e) を得たことである。以降では、まず CKM に対して混合角の生成則と x_{13} 抑圧 ($\sqrt{2} - \epsilon_{13}$) を導入し、その後 PMNS と (Type-I seesaw を通じた) ニュートリノ絶対質量 $\cdot 0\nu\beta\beta$ へ拡張する。

- 階層固定 : (D_u, D_d, D_e) により質量スケールを確定する。
- 混合構成 : CKM/PMNS は左手回転の不一致として与える。
- 役割 : 本稿の「生成則」をラグランジアン言語へ接続するための準備である。

3.5 観測へのマッチングと Λ 予言

本節では、CKM の 13 チャンネルにのみ必要となる抑圧 $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(q)}$ を、EFT 次元 6 挿入 (10) により低エネルギーで実現する。具体的には、GAV 混合則 (4) が与える基準値 s_{13}^{base} に対し、観測値 s_{13}^{obs} を再現するための「必要抑圧率」を定義する。

(i) 必要抑圧率 Δ_{13}

$$\Delta_{13} \equiv 1 - \frac{s_{13}^{\text{obs}}}{s_{13}^{\text{base}}} = 1 - \frac{0.003732}{0.009412} = 0.6035. \tag{48}$$

- Δ_{13} : s_{13} の必要な相対減少分 (本稿では 60.3492%)。
- s_{13}^{base} : 混合則 (p, r 決定後) から得る 13 の基準値。
- s_{13}^{obs} : 観測値 (本稿では $|V_{ub}|$ 由来の s_{13})。
- 役割 : EFT が生むべき「不足分」を 1 つの数で固定する。

(ii) 小角近似での Yukawa 必要量： $|\delta Y_{13}^{(d)}|_{\text{req}}$ 本稿では、13 回転が主としてダウン型 Yukawa の微小非対角成分により誘起されるとみなし、 y_b を用いた一次近似で必要量を見積もる。

$$\theta_{13}^{\text{base}} \simeq \arcsin(s_{13}^{\text{base}}) = 9.412 \times 10^{-3} \text{ rad}, \quad \theta_{13}^{\text{EFT}} \equiv \Delta_{13} \theta_{13}^{\text{base}} = 5.68 \times 10^{-3} \text{ rad}, \quad (49)$$

- $\theta_{13}^{\text{base}}$ ：基準の混合角 (s_{13}^{base} から復元)。
- θ_{13}^{EFT} ：EFT が実効的に「削るべき」角度成分。
- 役割：必要な補正を「角度」として表現し、Yukawa の大きさへ接続する。

$$|\delta Y_{13}^{(d)}|_{\text{req}} \simeq y_b \theta_{13}^{\text{EFT}} = (2.43 \times 10^{-2})(5.68 \times 10^{-3}) = 1.38 \times 10^{-4}. \quad (50)$$

- $|\delta Y_{13}^{(d)}|_{\text{req}}$ ：観測に必要なダウン型 Yukawa の 13 成分の大きさ。
- y_b ：chain から得た b の Yukawa 固有値 ((45))。
- 役割：次元 6 演算子の Wilson 係数・スケールと直接マッチング可能な「要求値」を与える。

(iii) 次元 6 マッチングから Λ を推定 本節で用いる次元 6 Yukawa 補正は、SMEFT (Warsaw 基底) の $Q_{d\phi}$ 型演算子に対応する [19, 20, 21]。

(iii-a) 単一演算子仮定：主要候補と本稿の採用。同じ次元 6 (Warsaw 基底) でも、CKM 抽出や Yukawa 構造に寄与しうる演算子は複数存在する。本稿では「13 成分にのみ残る最小残差」を Yukawa の直接補正として抽出する目的から、 $Q_{d\phi}^{13}$ を支配項と仮定し、他候補は副次（抑圧）として扱う。主要候補（代表例）は次の通りである：

- (採用) Yukawa 直接補正：

$$Q_{d\phi}^{13} \equiv (\phi^\dagger \phi) (\bar{q}_L^1 \phi d_R^3) + \text{h.c.} \quad (51)$$

- $Q_{d\phi}^{13}$ ：ダウン型 Yukawa 行列の (1, 3) 成分に直接寄与する次元 6 演算子である。
- ϕ ：Higgs 二重項、 q_L ：左手クォーク二重項、 d_R ：右手ダウン型特異項である。
- 役割：本稿で抽出した 13 Yukawa 残差を、 $c_{13}^{(d)}/\Lambda^2$ に最短距離で写像する（本節の中心仮定）。

- (副次) 電流型（正準化・ゲージ結合補正を介して CKM 抽出に影響）：

$$Q_{\phi q}^{(1)ij} \equiv (\phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \phi) (\bar{q}_L^i \gamma^\mu q_L^j), \quad Q_{\phi q}^{(3)ij} \equiv (\phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \phi) (\bar{q}_L^i \tau^I \gamma^\mu q_L^j), \quad (52)$$

$$Q_{\phi d}^{ij} \equiv (\phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \phi) (\bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^j) \quad (53)$$

- $\overleftrightarrow{D}_\mu$ ：共変微分の双方向作用、 τ^I ：SU(2) 生成子である。

- 役割：W/Z 結合や場の正準化の補正を通じて、間接に CKM 抽出へ影響しうる。本稿では「 $Q_{d\phi}^{13}$ による 13 直接補正が支配的」という作業仮説のもとで副次として扱う。

- (強制約) 4 フェルミ型 ($\Delta F = 2$ 等)：

$$Q_{qq}^{(1)ijkl} \equiv (\bar{q}_L^i \gamma_\mu q_L^j)(\bar{q}_L^k \gamma^\mu q_L^l) \quad (54)$$

- 役割：中間子混合などのフレーバー制約に強く効き得る代表例である。同程度に存在すると他観測と衝突しやすいため、本稿のスケール推定において支配項になりにくい、という位置づけを与える。

(55) により、

$$|\delta Y_{13}^{(d)}|_{\text{req}} \simeq \frac{v^2}{2\Lambda^2} |c_{13}^{(d)}| \Rightarrow \Lambda \simeq \frac{v}{\sqrt{2|\delta Y_{13}^{(d)}|_{\text{req}}/|c_{13}^{(d)}|}}. \quad (55)$$

- Λ ：新物理スケール（本稿では TeV スケールで推定）。
- v ：Higgs VEV ($v = 246 \text{ GeV}$)。
- $c_{13}^{(d)}$ ：Wilson 係数（無次元）。
- 役割： $\epsilon_{13}^{(q)}$ を「EFT のスケール予言」に翻訳する中心式である。

(iii-b) 単一演算子仮定が破れた場合の Λ 系統誤差（最小見積もり）。式(55) より、基準 $|c_{13}^{(d)}| = 1$ に対して

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \sqrt{|c_{13}^{(d)}|} \quad (56)$$

が成り立つ。

- Λ_0 ： $|c_{13}^{(d)}| = 1$ を置いた基準推定値（式(59)）である。
- 役割：Wilson 係数仮定の変更が Λ をどの程度動かすかを、平方根則として明示する。

さらに、同次数の他演算子混在を

$$c_{13}^{(d)} \rightarrow c_{13}^{(d)} + \delta c_{\text{mix}} \quad (57)$$

と圧縮すると、

$$\frac{\Lambda_{\text{eff}}}{\Lambda_0} = \sqrt{|c_{13}^{(d)} + \delta c_{\text{mix}}|} \quad (|c_{13}^{(d)}| = 1 \text{ を基準}) \quad (58)$$

を得る。

- δc_{mix} ：単一演算子仮定からの逸脱（他演算子混在）の有効シフトである。
- Λ_{eff} ：混在を含めた有効スケール推定である。

- ・ 役割：混在の影響を 1 パラメータに集約し、 Λ 推定の安定性を示す。

(例) $|c_{13}^{(d)}| \in [1/3, 3]$ なら $\Lambda/\Lambda_0 \in [0.58, 1.73]$ 。また $|\delta c_{\text{mix}}| \leq 0.3$ 程度なら $\Lambda_{\text{eff}}/\Lambda_0 \in [0.84, 1.14]$ となり、桁としては安定である。

代表として $|c_{13}^{(d)}| = 1$ を基準にすると、

$$\Lambda_0 \simeq 14.806 \text{ TeV} \quad (|c_{13}^{(d)}| = 1). \quad (59)$$

- ・ $\Lambda_0 : |c_{13}^{(d)}| = 1$ の基準スケール (数値はログ出力を固定)。
- ・ 役割：本稿の CKM-13 補正が要求する新物理スケールの「代表値」を与える。

(iv) $\epsilon_{13}^{(q)}$ の不確かさを Λ 帯へ伝播 本稿では、 $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(q)}$ の補正量として

$$\epsilon_{13,0}^{(q)} = 0.07964, \quad \epsilon_{13}^{(q)} \in (0.07747, 0.08180) \quad (60)$$

を固定する。

- ・ $\epsilon_{13,0}^{(q)}$: ベースライン (代表点) の $\epsilon_{13}^{(q)}$ 。
- ・ $\epsilon_{13}^{(q)}$ 帯 : 入力 (質量取り等) に対する安定性評価から得た許容区間。
- ・ 役割：モデルの「現実の歪み」を定量化し、EFT 予言の幅へ写像する。

ここでは ϵ_{13} の揺らぎを $c_{13}^{(d)}$ の有効揺らぎに吸収し、

$$c_{13}^{(d)}(\epsilon_{13}) = c_{13,0}^{(d)} 2^{(\epsilon_{13} - \epsilon_{13,0})}, \quad c_{13,0}^{(d)} = 1, \quad (61)$$

と置く (すなわち ϵ_{13} を Wilson 係数の対数補正として解釈する)。

- ・ $c_{13}^{(d)}(\epsilon_{13})$: ϵ_{13} を吸収した有効 Wilson 係数。
- ・ $2^{(\epsilon_{13} - \epsilon_{13,0})}$: x_{13} の「指数的補正」を係数側へ移す写像。
- ・ 役割： ϵ_{13} の不確かさを EFT パラメータの幅として統一的に扱う。

このとき $|c_{13,0}^{(d)}| = 1$ を基準にした Λ の決定論的帯は

$$\Lambda \in [14.79, 14.82] \text{ TeV}, \quad (62)$$

また Gaussian 伝播 (MC) では

$$\Lambda (68\% \text{ CI}) = (14.8, 14.81) \text{ TeV}, \quad \Lambda (95\% \text{ CI}) = (14.8, 14.82) \text{ TeV}. \quad (63)$$

- ・ Λ 帯 : $\epsilon_{13}^{(q)}$ の許容範囲を EFT スケールの不確かさへ変換したもの。
- ・ 68%/95% CI : Gaussian 伝播に基づく信頼区間 (ログ出力を固定)。
- ・ 役割：13 専用補正が「TeV 帯の新物理」を要求する、という定量的予言を与える。

(v) CKM 精度改善 (RMS) と $\epsilon_{13}^{(q)}$ の意義 最後に、 $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2}$ を固定した基準では

$$\text{RMS}(|V|)_{\text{baseline}} = 1.79 \times 10^{-2}, \quad (64)$$

であるのに対し、 $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(q)}$ を導入すると

$$\text{RMS}(|V|)_{x_{13}^{\text{eff}}} = 1.09 \times 10^{-4}, \quad (65)$$

まで改善する。

- $\text{RMS}(|V|)$: $|V_{\text{CKM}}|$ の要素ごとの相対誤差を集約した指標 (ノートブック定義に従う)。
- baseline : $\epsilon_{13}^{(q)} = 0$ (すなわち $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2}$) の原理固定。
- x_{13}^{eff} : 観測に合わせた実効指数 ($\epsilon_{13}^{(q)}$ を含む)。
- 役割 : $\epsilon_{13}^{(q)}$ が「恣意的パッチ」ではなく、最小自由度で精度を桁改善することを示す。

3.5.1 頑健性テスト：入力摂動に対する主要出力の安定性

本稿の主要出力 $\Lambda, \sum m_\nu, m_{\beta\beta}$ について、入力 (スケール・振動パラメータ・ラベル/帯の取り方・離散幾何学指数) を現実的範囲で摂動させたときの揺れを 相対変化 で要約する。ここでは、(A) 連続パラメータの小摂動と、(B) 構造入力である K_{geo} の離散ずれを区別して評価する。

$$\delta O_k \equiv \frac{O_k - O_0}{O_0}, \quad \Delta_{\text{rob}}(O) \equiv \max_k |\delta O_k|. \quad (66)$$

- δO_k : 摂動ケース k における出力 O の相対変化である。
- O_k : 摂動ケース k での出力である。
- O_0 : baseline (基準入力) での出力である。
- O : 対象出力 ($\Lambda, \sum m_\nu, m_{\beta\beta}$) である。
- $\Delta_{\text{rob}}(O)$: 全摂動の中での最大偏差 (最悪ケース) である。
- 役割 : 入力の取り方を動かしたときの結論の揺れを、単位に依らず「何% 以内か」で提示する。

摂動集合 (Δ_{rob} の定義を一意化) . 式(66) の $\Delta_{\text{rob}}(O)$ を再現可能にするため、摂動ケース k は「どの入力をどの幅で揺らすか」を固定した有限集合として定義する。本稿で用いる摂動集合を Table 5 にまとめる。各摂動は原則として単独 (one-at-a-time) で与え、必要に応じて代表的な同時摂動 (ALL) も併せて評価する。

Table 5. 頑健性指標 $\Delta_{\text{rob}}(O)$ (式(66)) を定義するために用いる摂動集合。摂動ケース k は、下記の「入力」と「幅 (レンジ)」の組で一意に指定される。

摂動する入力	幅 (採用レンジ)
y_b (スケール不確かさ)	相対摂動 $\pm 5\%$
CKM 入力 s_{13}^{obs}	相対摂動 $\pm 0.5\%$
SMEFT 係数 (理論系統)	$ c_{13}^{(d)} \in [1/3, 3]$ (必要なら $\delta c_{\text{mix}} = \pm 0.3$)
ϵ_{13} の基準値 ϵ_0	絶対摂動 ± 0.01
ϵ -band (中心)	平行移動 ± 0.01
ϵ -band (幅)	伸縮 $\times(1 \pm 0.20)$
振動パラメータ・質量スキーム入力	各入力の $\pm 1\sigma$ (フィットの許容域)
力	
離散幾何学指数 K_{geo}	離散ずれ $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ (baseline からのオフセット)

- ・ 意味：摂動ケース k は Table 5 の「入力 \times 幅」の指定で定義される。
- ・ 役割： $\Delta_{\text{rob}}(O) = \max_k |\delta O_k|$ における「 \max_k の範囲」を本文で固定し、第三者が同一条件で再現できるようにする。

(A) 連続入力の小摂動 (数% レベル) . 本解析では、(i) y_b スケール不確かさ ($\pm 5\%$)、(ii) CKM 入力 s_{13}^{obs} の相対摂動 ($\pm 0.5\%$)、(iii) レプトン側残差 ϵ_{13} の基準値 ϵ_0 および帯 (中心/幅) の摂動、(iv) 振動パラメータ・質量スキーム入力の $\pm 1\sigma$ 摂動、(v) SMEFT 係数の理論系統として $|c_{13}^{(d)}| = \mathcal{O}(1)$ の幅 (Table 5) を順に与え、各ケースで同一の計算関数呼び出しにより $(\Lambda, \sum m_\nu, m_{\beta\beta})$ を評価した。結果の要約を Table 6 に示す。

Table 6. 主要出力の頑健性要約 (連続入力の小摂動)。定義 (66) により、全摂動ケースでの最大相対変化 Δ_{rob} (%) を示す。 $m_{\beta\beta, \text{mid}}$ は $m_{\beta\beta}$ の 68% 区間の midpoint で代表させた。

スコープ	$\Delta_{\text{rob}}(\Lambda)$ [%]	$\Delta_{\text{rob}}(\sum m_\nu)$ [%]	$\Delta_{\text{rob}}(m_{\beta\beta, \text{mid}})$ [%]
ALL	2.598	2.217	3.543
NO	2.598	2.217	3.543
IO	2.598	1.498	1.091

Table 7. Λ の感度分解 (最大相対変化)。各摂動源を単独で与えたときの $\max |\delta \Lambda|$ (%) を示す。これにより、 Λ の不確かさが観測入力由来か理論内部由来かを分離できる。

摂動源	$\max \delta \Lambda $ [%]
y_b スケール $\pm 5\%$	2.598
s_{13}^{obs} 相対摂動 $\pm 0.5\%$	0.165
ϵ_0 摂動 ± 0.01	0.347
ϵ -band 中心の平行移動 ± 0.01	0.347
ϵ -band 幅 $\times(1 \pm 0.20)$	1.13×10^{-4}

(B) 離散入力 K_{geo} のずれ（構造頑健性）．ニュートリノの絶対スケールは、幾何学指数 K_{geo} により

$$m_1 \equiv m_\nu^{\text{geo}} = m_e(\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}} \quad (67)$$

で固定される（NO 主分岐では $m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$ ）。

- m_1 ($= m_\nu^{\text{geo}}$)：幾何学入力から固定される最軽質量である。
- m_e ：電子質量（基準スケール）である。
- K_{geo} ：幾何学指数（本稿の基準は -48 ）である。
- 役割：自由度を最小化したまま絶対質量スケールを固定し、 $\sum m_\nu$ や $m_{\beta\beta}$ を反証可能量として決める。

読者が最初に確認したいのは「なぜ -48 か」という由来そのものよりも、「採用値が ± 1 程度ずれた場合に予言がどれだけ変化するか」と考える。そこで、まずはその問いに対して、離散ずれ $\Delta K \equiv K_{\text{geo}} - (-48)$ を導入し、 $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ に対する主要量の変動を評価した。

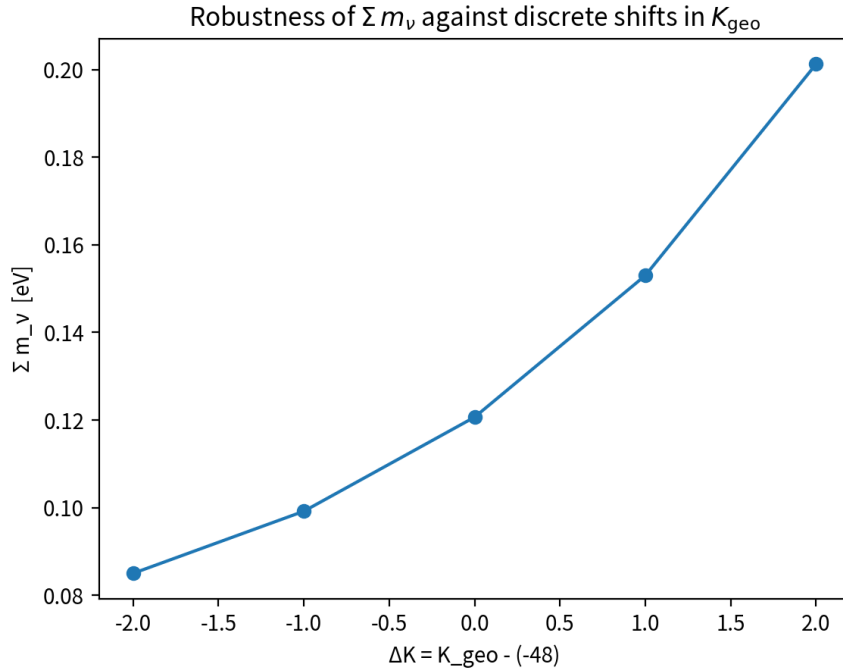


Figure 1. K_{geo} の離散ずれ ΔK に対する $\sum m_\nu$ の変動。基準 $\Delta K = 0$ ($K_{\text{geo}} = -48$) から、 $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ の離散摂動を与えた。

Table 8. K_{geo} の離散ずれに対する主要ニュートリノ量の変動 (NO 主分岐)。基準値は $\Delta K = 0$ の行である。 $m_{\beta\beta}$ は Majorana 位相を一様サンプルした分布の 68% 帯 $[m_{\beta\beta}^{68\%lo}, m_{\beta\beta}^{68\%hi}]$ を示す。

ΔK	$\sum m_\nu$ [eV]	m_β [eV]	$(m_{\beta\beta}^{68\%lo}, m_{\beta\beta}^{68\%hi})$ [eV]	$\delta(\sum m_\nu)$
-2	0.08502	0.0176	(0.006514, 0.01498)	-0.2955
-1	0.09919	0.02327	(0.009461, 0.02075)	-0.1780
0	0.1207	0.03171	(0.01347, 0.0291)	0.0000
+1	0.153	0.04397	(0.01911, 0.04095)	0.2680
+2	0.2013	0.06155	(0.02724, 0.05788)	0.6678

Table 6 より、連続入力の小摂動に対して主要出力は数% 以内で安定である。特に Λ は最大でも $\sim 2.6\%$ の変化に留まり、その支配要因は y_b のスケール摂動である (Table 7)。一方で、離散入力 K_{geo} のずれは構造的であり、 $\sum m_\nu$ は $\Delta K = \pm 1$ で $(-18\%, +27\%)$ 、 $\Delta K = \pm 2$ で $(-30\%, +67\%)$ と有意に変動する (Fig. 1)。同様に m_β と $m_{\beta\beta}$ (68% 帯) も ΔK に対して同程度以上の感度を示す (Table 8)。従って、 K_{geo} の決定 (あるいは許容範囲の制約) は、宇宙論量 $\sum m_\nu$ と $0\nu\beta\beta$ 予言の精度を左右する主要因である。

なお、先行する GAV 論文 [6] では、代表スケール $m_\nu \simeq 0.05$ eV を仮定すると

$$K_\nu^{\text{cont}} = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{m_\nu}{m_e}\right) = 2 \log_2\left(\frac{m_\nu}{m_e}\right) \simeq -46.6 \quad (68)$$

を与える (連続指数)。

- K_ν^{cont} : $\sqrt{2}$ 基底で測ったニュートリノ絶対スケールの連続指数である。
- m_ν : ニュートリノの代表的絶対スケール (ここでは 0.05 eV) である。
- m_e : 電子質量 (基準スケール) である。
- 役割: 絶対スケール仮定を $\sqrt{2}$ ステップの指数へ写像し、離散化の候補 (例: $K \simeq -47$ 近傍) を与える。

GAV[6] では、この連続推定 $K_\nu^{\text{cont}} \simeq -46.6$ がレプトン側の到達スケールとして議論した $K \simeq +24$ (SU(5) の指数カウント) と数値的に $\simeq -2$ 倍の近傍にあることを動機づけの一つとして用い、幾何学的完全性 (離散化) により $K_{\text{geo}} = -48$ を採用した。

本稿は、GAV における同一の筋道 (連続推定 \rightarrow 離散化) を踏襲し、幾何学的入力として整数の指数 K_{geo} (基準値 -48) を採用、ニュートリノ絶対スケールを固定し主要観測量へ落とす。このとき興味深い点は、固定の仕方が異なる二つのルート (GAV における連続推定 K_ν^{cont} と、本稿における離散指数 K_{geo}) が、いずれも $K \sim -48$ 近傍を指し示すことである。

ただし、振動実験は Δm^2 のみを直接拘束し絶対スケールは一意に決めないため、 K_{geo} の採用 (および連続値からの離散化) は不可避にモデル化に依存する。従って本稿では主張を先取りせず、まず基準 $K_{\text{geo}} = -48$ からの離散ずれ $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ が $\sum m_\nu$, m_β , $m_{\beta\beta}$ に与える影響を Fig. 1 および Table 8 として明示し、外部観測により ΔK を将来制約可能な形で提示する。この近傍での整合は、 K_{geo} を選別する幾何学的原理 (制約) の存在を動機づけるが、その具体化は今後の課題として切り分ける。

(C) 外部上限 \times 内部整合による K_{geo} の識別力（境界感度）：前項 (B) では、基準 $K_{\text{geo}} = -48$ の近傍で $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ を与えたときの予言変動（構造感度）を明示した。しかし、読者視点では、「外部観測で許される範囲の中で、内部整合が最良な K_{geo} はどれか」（すなわち「なぜ -48 なのか」を識別力として示せるか）が次の関心になる。そこで、外部上限（宇宙論 $\sum m_\nu^{\text{max}}$ と $0\nu\beta\beta$ による $m_{\beta\beta}^{\text{max}}$ ）の取り方を格子状に変化させ、そのたびに「external OK の集合の中で内部整合が最良の点」を機械的に 1 つ選ぶ規則を導入する。

$$\text{TotalScore}(K) \equiv 1[\text{external OK}(K; \theta_{\text{ext}})] \exp\left(-\frac{Z_K(K)^2}{2}\right), \quad Z_K(K) \equiv \frac{|K - K_\nu^{\text{cont}}|}{\sigma_K}. \quad (69)$$

- $1[\text{external OK}]$ ：外部上限を満たすと 1、満たさないと 0 を返す指示関数である。
- θ_{ext} ：外部上限の選択であり、ここでは $\theta_{\text{ext}} \equiv (\sum m_\nu^{\text{max}}, m_{\beta\beta}^{\text{max}}, m_\beta^{\text{max}})$ とする。
- K_ν^{cont} ：連続推定による K の中心値であり、ここでは (68) の -46.6 を採る。
- σ_K ：連続推定の許容幅（「どれくらい近ければ内部整合的か」）であり、ここでは $\sigma_K = 1$ とする。
- Z_K ：連続推定からの標準化乖離（何 σ ずれか）である。
- 役割：外部で許される K の集合をまず切り出し、その集合の内部で内部整合が最良の K （TotalScore 最大）を再現可能な規則として一意に選ぶ。

なお本稿の設定（ $K_\nu^{\text{cont}} = -46.6$, $\sigma_K = 1$ ）では、 $K_{\text{geo}} = -48$ の方が -49 よりも連続推定に近く、 $Z_K(-48) = |-48 - (-46.6)| = 1.4$ 、 $Z_K(-49) = |-49 - (-46.6)| = 2.4$ となる。したがって内部整合スコア $\exp(-Z_K^2/2)$ は -48 で 0.375、 -49 で 0.056 と桁違いになり、external OK 内に -48 が含まれる限り best は -48 に強く引き寄せられる。

Table 9 に、 $(\sum m_\nu^{\text{max}}, m_{\beta\beta}^{\text{max}})$ を格子で動かしたときの best K_{geo} （TotalScore 最大）を示す。この結果は、best K_{geo} の切り替わりが主として $\sum m_\nu^{\text{max}}$ の境界で制御され、 $m_{\beta\beta}^{\text{max}}$ の選択は二次的であることを示唆する（本稿のスキャンでは $K_{\text{geo}} = -48$ は $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ の上限に近い）。

Table 9. 外部上限 $(\sum m_\nu^{\text{max}}, m_{\beta\beta}^{\text{max}})$ の取り方に対する best K_{geo} の境界感度（NO 主分岐）。各セルは、external OK を満たす点集合の内部で TotalScore (69) を最大化して得た best K_{geo} を表す。ここでは $m_\beta^{\text{max}} = 0.45$ eV、 $K_\nu^{\text{cont}} = -46.6$ 、 $\sigma_K = 1$ を固定した。

$\sum m_\nu^{\text{max}}$ [eV] \ $m_{\beta\beta}^{\text{max}}$ [eV]	0.028	0.029	0.050	0.100
0.120	-49	-49	-49	-49
0.121	-49	-49	-48	-48

4 PMNS：GAV 混合則と幾何学シーソー（NO）

本節では、前節（CKM）で導入した GAV 混合則 (4) をレプトン混合へ拡張し、レプトン側の 13 チャンネル残差を $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ として定義することで、PMNS の $\sin \theta_{13}$ を精密に再現する。さらに、幾何学的シーソー入力（正四面体自己双対性、 $K_{\text{geo}} = -48$ ）によりニュートリノ絶対質量スケールを固定し、NO スペクトルの下で宇宙論量 $\sum m_\nu$ と $0\nu\beta\beta$ 有効質量 $m_{\beta\beta}$ （および m_β ）を预言する。

4.1 PMNS 角のフィットとレプトン側 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ （NO）

PMNS 角の再構成は CKM と同様に (4) を用い、 θ_{12}, θ_{23} から (p_ℓ, r_ℓ) を固定した上で、13 チャンネルに限って

$$x_{13}^{(\ell)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(\ell)} \quad (70)$$

を導入し、 $\sin \theta_{13}$ を観測値へマッチさせる。

- $x_{13}^{(\ell)}$ ：レプトン 13 抑圧の実効指数である。
- $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ ：原理値 $\sqrt{2}$ からのズレ（レプトン側残差）である。
- 役割：同一生成則 ((4)) を維持したまま、13 チャンネルの実データ歪みのみを最小自由度で吸収する。

本稿では NO の二つのオクタント解（NO_low_octant, NO_high_octant）を併記し、Gaussian MC により、振動パラメータおよび幾何学入力の揺らぎに対する $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の分布と信頼区間を評価した。ここでは

$$N = 200000, \quad \text{seed} = 12345$$

を用いる。

- N ：Gaussian MC のサンプル数である。
- seed：乱数系列を固定するための種である。
- 役割：統計要約（平均・分散・CI）の再現性を担保する。

図2, 3 に low/high の結果を重ねて示す。

NO_low_octant (NO) .

$$\begin{aligned} \epsilon_{13}^{(\ell)}(\text{NO_low}) : \quad & \epsilon_0 \simeq 0.1054, \\ & \mu = 0.106, \\ & \sigma = 0.04589, \\ & 68\% \text{ CI} = (0.0603, 0.1515), \\ & 95\% \text{ CI} = (0.01744, 0.1976), \\ x_{13, \text{eff}}^{(\ell)} : \quad & 68\% \text{ CI} = (1.263, 1.354), \\ & 95\% \text{ CI} = (1.217, 1.397), \\ \sum m_\nu : \quad & \mu = 0.1207, \\ & \sigma = 0.001639, \\ & \text{corr} = -0.001569. \end{aligned} \quad (71)$$

- ϵ_0 : 基準入力 (baseline) から得た $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の代表値である。
- μ, σ : Gaussian MC による平均と標準偏差である。
- 68%CI, 95%CI : それぞれ 16–84%、2.5–97.5% 分位区間である。
- $x_{13,\text{eff}}^{(\ell)}$: PMNS フィットから得た 13 抑圧の実効指数である。
- corr : $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と $\sum m_\nu$ の相関係数である。
- 役割 : $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ を「任意の微小補正」ではなく、入力揺らぎに対する 予言帯として固定する。

NO_high_octant (NO) .

$$\begin{aligned}
\epsilon_{13}^{(\ell)}(\text{NO_high}) : \quad & \epsilon_0 \simeq -0.07349, \\
& \mu = -0.07301, \\
& \sigma = 0.04158, \\
& 68\% \text{ CI} = (-0.1144, -0.0315), \\
& 95\% \text{ CI} = (-0.1531, 0.009413), \\
x_{13,\text{eff}}^{(\ell)} : \quad & 68\% \text{ CI} = (1.446, 1.529), \\
& 95\% \text{ CI} = (1.405, 1.567), \\
\sum m_\nu : \quad & \mu = 0.1207, \\
& \sigma = 0.001643, \\
& \text{corr} = 0.001059.
\end{aligned} \tag{72}$$

- octant 反転 : low では $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ が正、high では負の帯が優勢となる。
- 役割 : octant の差が $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の中心を反転させる一方で、 $\sum m_\nu$ との相関は依然として極小であることを明示する。

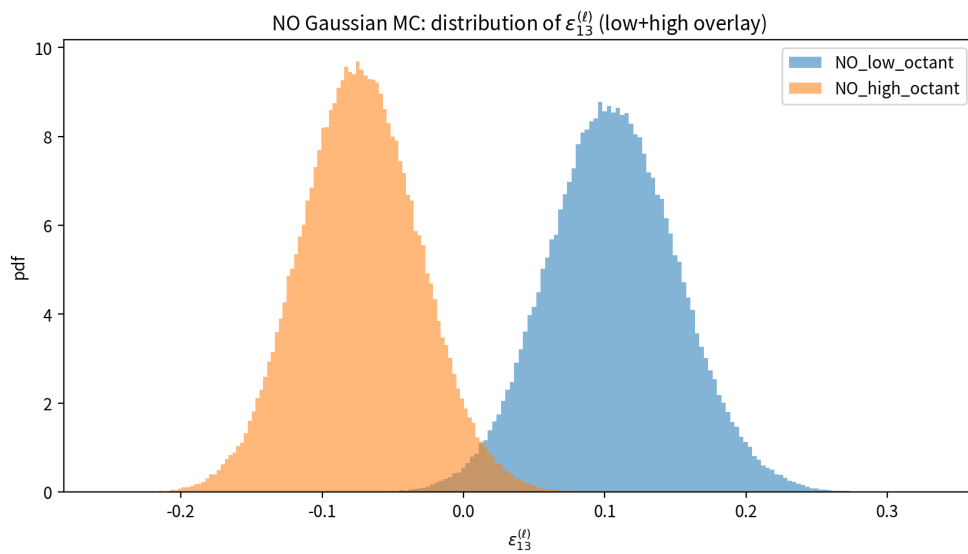


Figure 2. NO : Gaussian MC による $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ 分布 (NO_low と NO_high の重ね描き)。low では正、high では負の帯が優勢となる。

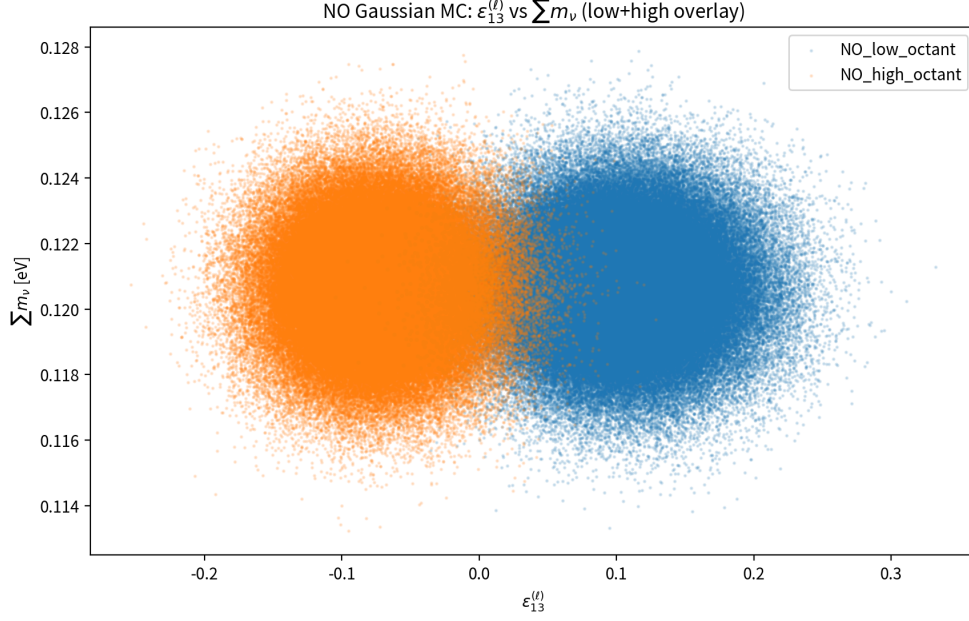


Figure 3. NO : $\epsilon_{13}^{(l)}$ と $\sum m_\nu$ の相関 (Gaussian MC ; NO_low と NO_high の重ね描き)。相関係数は $|\text{corr}| \sim 10^{-3}$ と極小であり、角度側残差と絶対質量側予言は事実上独立である。

4.2 幾何学入力：正四面体自己双対性と $K_{\text{geo}} = -48$ (NO)

幾何学的シーソー入力は、正四面体の自己双対性に基づく指数 $K_{\text{geo}} = -48$ を用いて、NO の最軽質量 m_1 を

$$m_1^{\text{geo}} = m_e(\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}}, \quad K_{\text{geo}} = -48 \quad (73)$$

で固定する (m_e は eV 単位に換算して用いる)。

- m_1^{geo} : 幾何学シーソーから与える NO の最軽質量 (m_1) である。
- m_e : 電子質量 (eV 換算して使用) である。
- K_{geo} : 幾何学指数 (固定) である。
- 役割 : NO の絶対質量スケールを「検証可能予言」として固定し、以降の NO スペクトルと観測量予言を一意にする。

本稿で用いた電子質量 $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ に対し、

$$m_1^{\text{geo}} = 3.046 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (74)$$

を得る。

- 数値 : 本稿の設定 (m_e, K_{geo}) から計算される固定値である。
- 役割 : NO スペクトルと $\sum m_\nu$ の中心値を与える起点である。

4.3 NO スペクトルと $m_{\beta\beta}$ 予言

本稿では NO (normal ordering) を採用し、 $m_1 = m_1^{\text{geo}}$ を固定した上で、振動差分を入力として

$$m_2 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{21}^2}, \quad (75)$$

$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{31}^2} \quad (76)$$

により (m_2, m_3) を決定する。

- m_1, m_2, m_3 : 軽いニュートリノの質量固有値である。
- $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$: 振動実験から与える質量二乗差である。
- 役割 : 幾何学入力で固定した m_1 から、NO スペクトルを一意に構成する。

観測比較に用いる代表的量は

$$\begin{aligned} \sum m_\nu &= m_1 + m_2 + m_3, \\ m_\beta &= \sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2}, \\ m_{\beta\beta} &= \left| \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i e^{i\alpha_i} \right|, \quad (\alpha_1 \equiv 0, \alpha_2 \equiv \alpha_{21}, \alpha_3 \equiv \alpha_{31}) \end{aligned} \quad (77)$$

である。

- $\sum m_\nu$: 宇宙論に効く総和 (Majorana 位相に依存しない) である。
- m_β : 単一 β 崩壊有効質量 (位相非依存) である。
- $m_{\beta\beta}$: $0\nu\beta\beta$ 有効質量 (Majorana 位相に依存) である。
- 役割 : NO 仮定の下で、宇宙論・単一 β ・ $0\nu\beta\beta$ を同一フレームで比較可能にする。

幾何学入力 (74) と NO 仮定から得られた代表スペクトルは

$$\begin{aligned} (m_1, m_2, m_3)_{\text{rep}} &= (3.046 \times 10^{-2}, 3.167 \times 10^{-2}, 5.855 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \\ \sum m_\nu|_{\text{rep}} &= 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}. \end{aligned} \quad (78)$$

- (m_1, m_2, m_3) : NO スペクトルの代表値である。
- $\sum m_\nu$: 位相非依存のため、幾何学入力により鋭く固定される予言量である。
- 役割 : NO を採用する場合、観測比較の主要ターゲットの一つは $\sum m_\nu$ 帯の検証である。

次に $m_{\beta\beta}$ は Majorana 位相に依存するため、位相を一様にスキャンして予言帯を得た。本稿では Majorana 位相 $(\alpha_{21}, \alpha_{31})$ を一様乱数で走査し、 $N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$ サンプルから $m_{\beta\beta}$ の分布と信頼区間を求めた。PMNS の $|U|$ については、GAV-fit により得られた `pmns_fits[PMNS_KEY]['Uabs_eff']` を用い、 e 行の値は

$$(|U_{e1}|, |U_{e2}|, |U_{e3}|) \simeq \begin{cases} (0.8255, 0.5443, 0.1492) & (\text{NO_low_octant}) \\ (0.8256, 0.5444, 0.1484) & (\text{NO_high_octant}) \end{cases} \quad (79)$$

である。

- $|U_{ei}|$: PMNS 行列の e 行の絶対値成分である。
- 役割 : m_β と $m_{\beta\beta}$ の予言を支配する入力であり、特に $|U_{e3}|$ は θ_{13} と直結する。

位相スキャンによる $0\nu\beta\beta$ 予言帯は以下である。

NO_low_octant (NO) .

$$\begin{aligned} m_{\beta\beta}^{\text{NO}} [\text{eV}] : \min &= 1.007 \times 10^{-2}, \max = 3.144 \times 10^{-2}, \\ 68\% \text{CI} &= (1.346 \times 10^{-2}, 2.906 \times 10^{-2}), \\ 95\% \text{CI} &= (1.082 \times 10^{-2}, 3.1 \times 10^{-2}), \end{aligned} \quad (80)$$

併せて位相非依存量として

$$m_\beta = 3.171 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad \sum m_\nu = 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}. \quad (81)$$

を得る。

- $m_{\beta\beta}^{\text{NO}}$: 位相スキャンから得た $0\nu\beta\beta$ 有効質量の予言帯である。
- m_β : 単一 β 崩壊有効質量（位相非依存）である。
- 役割 : NO 予言は、 m_β の小ささと $m_{\beta\beta}$ の帯域として観測比較に直結する。

NO_high_octant (NO) .

$$\begin{aligned} m_{\beta\beta}^{\text{NO}} [\text{eV}] : \min &= 1.009 \times 10^{-2}, \max = 3.143 \times 10^{-2}, \\ 68\% \text{CI} &= (1.344 \times 10^{-2}, 2.907 \times 10^{-2}), \\ 95\% \text{CI} &= (1.083 \times 10^{-2}, 3.1 \times 10^{-2}), \end{aligned} \quad (82)$$

併せて位相非依存量として

$$m_\beta = 3.17 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad \sum m_\nu = 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}. \quad (83)$$

を得る。

- octant 差 : $m_\beta, m_{\beta\beta}$ は octant に対して僅差である。
- 役割 : NO においては、octant の不確かさが主要予言量を大きくは揺らさないことを示す。

4.4 小結：PMNS(NO) の観測比較点

本節の結論は、(i) 同一生成則 (4) の下で 13 残差 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ を最小自由度として導入すると PMNS の $\sin \theta_{13}$ を精密に再現でき、(ii) 幾何学入力 (73) により NO の絶対質量スケールが固定され、 $\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ が具体的な予言帯として得られる点にある。特に、Gaussian MC による評価では $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と $\sum m_\nu$ の相関が極小であり、角度側残差と絶対質量側予言は事実上独立に扱える。以降では、この NO 予言 ($\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ 帯) をシーソー埋め込み (非ユニタリ性・LFV・ R 抽出) と接続し、「生成則が許す安全領域」の中で自然に成立することを示す。

(外部データとの比較) 振動パラメータの世界平均は NuFIT の全球フィット [17] (および PDG[18]) に基づく。宇宙論的には Planck 2018 の Λ CDM 解析で $\sum m_\nu$ に上限が与えられる [1]。直接質量測定では KATRIN が m_β に上限を与える [22]。また $0\nu\beta\beta$ の探索では CUORE、近年は LEGEND-200 などが代表的である [23, 24]。

5 PMNS：GAV 混合則と幾何学シーソー (IO)

本節では、前節 (CKM) で導入した GAV 混合則 (4) をレプトン混合へ拡張し、レプトン側の 13 チャンネル残差を $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ として定義することで、PMNS の $\sin \theta_{13}$ を精密に再現する。さらに、GAV の幾何学的シーソー入力 (正四面体自己双対性、 $K_{\text{geo}} = -48$) によりニュートリノ絶対質量スケールを固定し、IO スペクトルの下で宇宙論量 $\sum m_\nu$ と $0\nu\beta\beta$ 有効質量 $m_{\beta\beta}$ を同時に予言する。本節は、(NO 主筋の議論に対する) 比較分岐としての IO を明示的に整理する。

5.1 PMNS 角のフィットとレプトン側 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$

PMNS 角の再構成は CKM と同様に (4) を用い、 θ_{12}, θ_{23} から (p_ℓ, r_ℓ) を固定した上で、13 チャンネルに限って

$$x_{13}^{(\ell)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(\ell)} \quad (84)$$

を導入し、 $\sin \theta_{13}$ を観測値へマッチさせる。

- $x_{13}^{(\ell)}$ ：レプトン 13 抑圧の実効指数である。
- $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ ：原理値 $\sqrt{2}$ からのズレ (レプトン側残差) である。
- 役割：同一生成則 ((4)) を維持したまま、13 チャンネルの実データ歪みのみを最小自由度で吸収する。

本稿では IO の二つのオクタント解 (low_octant, high_octant) を併記し、Gaussian MC により、振動パラメータおよび幾何学入力の揺らぎに対する $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の分布と信頼区間を評価した。ここでは

$$N = 200000, \quad \text{seed} = 12345$$

を用いる。

- N ：Gaussian MC のサンプル数である。
- seed：乱数系列を固定するための種である。

- 役割：統計要約（平均・分散・CI）の再現性を担保する。

結果は以下である（図4, 5）。

$$\epsilon_{13}^{(\ell)} (\text{IO_low}) : \mu = 0.106, \sigma = 0.04589, \quad (85)$$

$$68\% \text{CI} = (0.0603, 0.1515), \quad (86)$$

$$95\% \text{CI} = (0.01744, 0.1976), \quad (87)$$

$$\epsilon_{13}^{(\ell)} (\text{IO_high}) : \mu = -0.07301, \sigma = 0.04158, \quad (88)$$

$$68\% \text{CI} = (-0.1144, -0.0315), \quad (89)$$

$$95\% \text{CI} = (-0.1531, 0.009413). \quad (90)$$

- μ : Gaussian MC による平均である。
- σ : Gaussian MC による標準偏差である。
- 68%CI : 16–84% 分位の区間である。
- 95%CI : 2.5–97.5% 分位の区間である。
- 役割： $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ を「任意のフィット係数」ではなく、入力揺らぎに対する頑健な予言帯として提示する。

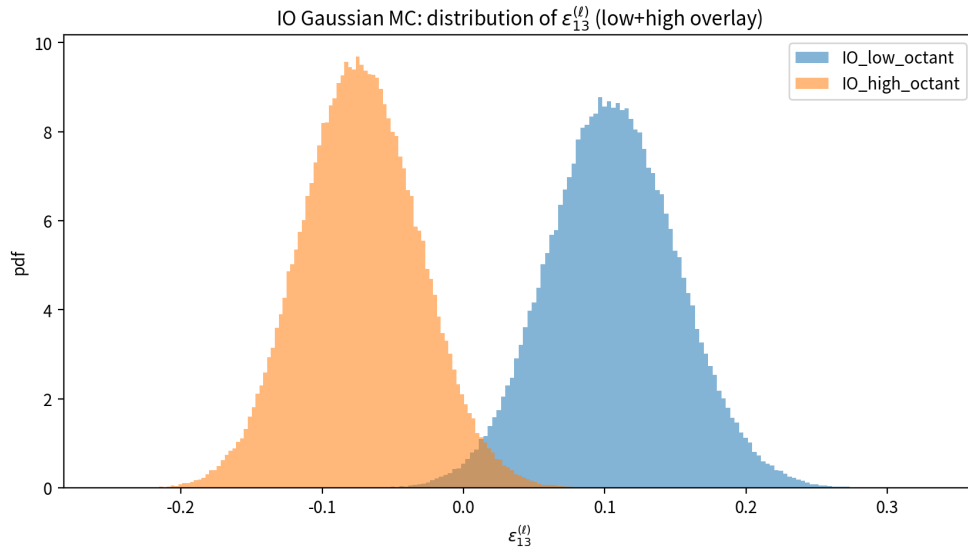


Figure 4. Gaussian MC による $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の分布（IO・low/high overlay）。low_octant では正、high_octant では負の帯が優勢となる。

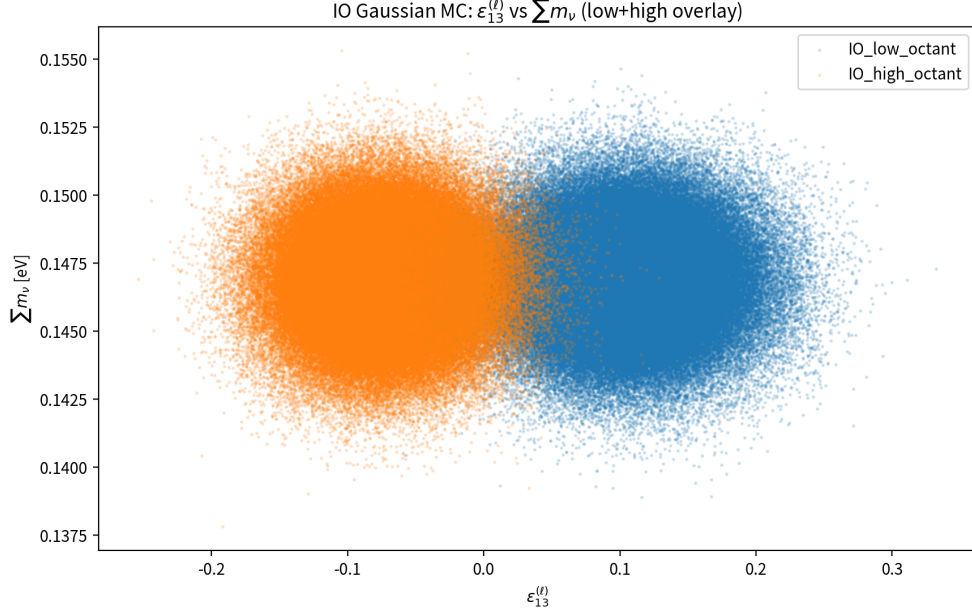


Figure 5. $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と $\sum m_\nu$ の相関 (Gaussian MC、IO・low/high overlay)。幾何学入力により $\sum m_\nu$ は狭い帯に固定され、相関は極めて弱い (例: $\text{corr} = -9.292 \times 10^{-4}$ for low、 $\text{corr} = 1.048 \times 10^{-3}$ for high)。

5.2 幾何学入力：正四面体自己双対性と $K_{\text{geo}} = -48$

GAV における幾何学シーソー入力は、正四面体の自己双対性に基づく指数 $K_{\text{geo}} = -48$ を用いて、IO における軽い質量スケールとして m_3 を

$$m_3^{\text{geo}} = m_e (\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}}, \quad K_{\text{geo}} = -48 \quad (91)$$

で固定する (m_e は eV 単位に換算して用いる)。

- m_3^{geo} ：幾何学シーソーから与える IO の基準質量 (ここでは m_3) である。
- m_e ：電子質量 (eV 換算して使用) である。
- K_{geo} ：幾何学指数 (固定) である。
- 役割：ニュートリノ絶対質量を「検証可能予言」として固定し、以降の IO スペクトルと観測量予言を一意にする。

本稿で用いた電子質量 $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ に対し、

$$m_3^{\text{geo}} = 3.046 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (92)$$

を得る。

- m_3^{geo} ：IO における基準質量 (m_3 同定) である。
- 数値：本稿の設定 (m_e, K_{geo}) から計算される固定値である。
- 役割： $\sum m_\nu$ や $m_{\beta(\beta)}$ の予言帯を「数値の決着」として与える起点である。

5.3 IO スペクトルと $m_{\beta\beta}$ 予言

本稿では IO (inverted ordering) を採用し、 $m_3 = m_3^{\text{geo}}$ を固定した上で、振動差分を入力として (m_1, m_2) を決定する。観測比較に用いる代表的量は

$$\begin{aligned}\sum m_\nu &= m_1 + m_2 + m_3, \\ m_\beta &= \sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2}, \\ m_{\beta\beta} &= \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right|\end{aligned}\tag{93}$$

である。

- $\sum m_\nu$: 宇宙論に効く総和 (Majorana 位相に依存しない) である。
- m_β : 単一 β 崩壊有効質量 (位相非依存) である。
- $m_{\beta\beta}$: $0\nu\beta\beta$ 有効質量 (Majorana 位相に依存) である。
- 役割: IO 仮定の下で、宇宙論と $0\nu\beta\beta$ を同一フレームで比較可能にする。

幾何学入力 (92) と IO 仮定から得られた代表スペクトルは

$$(m_1, m_2, m_3) = (5.79 \times 10^{-2}, 5.855 \times 10^{-2}, 3.046 \times 10^{-2}) \text{ eV},\tag{94}$$

$$\sum m_\nu = 1.469 \times 10^{-1} \text{ eV}.\tag{95}$$

- (m_1, m_2, m_3) : IO スペクトルの代表値である。
- $\sum m_\nu$: 位相非依存のため、幾何学入力により鋭く固定される予言量である。
- 役割: IO を採用する場合、観測比較の主要ターゲットは $\sum m_\nu$ 帯の検証に集約される。

次に $m_{\beta\beta}$ は Majorana 位相 (および δ の扱い) に依存するため、位相を一様にスキャンして予言帯を得た。PMNS の $|U|$ については、GAV-fit により得られた `pmns_fits[PMNS_KEY]['Uabs_eff']` を用い、 e 行の値は

$$(|U_{e1}|, |U_{e2}|, |U_{e3}|) \simeq \begin{cases} (0.8255, 0.5443, 0.1492) & (\text{low_octant}) \\ (0.8256, 0.5444, 0.1484) & (\text{high_octant}) \end{cases}\tag{96}$$

である。

- $|U_{ei}|$: PMNS 行列の e 行の絶対値成分である。
- 役割: m_β と $m_{\beta\beta}$ の予言を支配する入力であり、特に $|U_{e3}|$ は θ_{13} と直結する。

位相スキャン ($N = 3 \times 10^5$) による $0\nu\beta\beta$ 予言帯は以下である:

$$\begin{aligned}m_{\beta\beta}^{\text{IO}} [\text{eV}] : \text{min} &= 2.144 \times 10^{-2}, \text{max} = 5.748 \times 10^{-2}, \\ 68\% \text{CI} &= (2.57 \times 10^{-2}, 5.525 \times 10^{-2}), \\ 95\% \text{CI} &= (2.211 \times 10^{-2}, 5.705 \times 10^{-2}).\end{aligned}\tag{97}$$

- $m_{\beta\beta}^{\text{IO}}$ ：位相スキャンから得た $0\nu\beta\beta$ 有効質量の予言帯である。
- min / max：位相走査により得られる全域の端点である。
- CI：位相一様走査に基づく分位区間である。
- 役割：IO 分岐の $0\nu\beta\beta$ 予言を、次世代実験と直接比較できる帯として与える。

併せて位相非依存量として、Gaussian MC ($N = 200000$, seed= 12345) の要約は

$$\sum m_\nu (\text{IO_low}) : \mu = 0.1469, \sigma = 0.001791, \text{corr} = -0.0009292, \quad (98)$$

$$\sum m_\nu (\text{IO_high}) : \mu = 0.1469, \sigma = 0.001794, \text{corr} = 0.001048, \quad (99)$$

を得る (corr は $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ との相関係数)。

- μ, σ ： $\sum m_\nu$ の平均・標準偏差である。
- corr： $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と $\sum m_\nu$ の相関係数である。
- 役割：幾何学入力により $\sum m_\nu$ が狭い帯に固定され、 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ とは実質的に独立であることを示す。

5.4 小結：PMNS(IO) の観測比較点

本節の結論は、(i) 同一生成則 (4) の下で 13 残差 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ を最小自由度として導入すると PMNS の $\sin\theta_{13}$ を精密に再現でき、(ii) 幾何学入力 (91) により IO の絶対質量スケールが固定され、 $\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ が具体的な予言帯として得られる点にある。特に $\sum m_\nu$ は位相非依存であり、宇宙論制限の精密化により IO 分岐は鋭く検証され得る。以降では、この IO 予言を非ユニタリ性・LFV・右手ニュートリノスケールと接続し、「生成則が許す安全領域」の中で自然に成立することを示す。

(外部データとの比較) 振動パラメータの世界平均は NuFIT の全球フィット [17] (および PDG[18]) に基づく。宇宙論的には Planck 2018 の ΛCDM 解析で $\sum m_\nu$ に上限が与えられる [1]。直接質量測定では KATRIN が m_β に上限を与える [22]。また $0\nu\beta\beta$ の探索では GERDA と CUORE、近年は LEGEND-200 などが代表的である [23, 24]。

なお、直前の IO 予言 ($\sum m_\nu \simeq 0.147$ eV 付近) は Planck 2018 の ΛCDM 上限と近接するため、宇宙論モデル依存性も含めた検証が重要である [1]。

6 シーソー埋め込み：非ユニタリ性・LFV・ R 抽出

前節で得られた NO 予言

$$\sum m_\nu \simeq 1.2067 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta \simeq 3.1711 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (100)$$

および Majorana 位相スキャンによる $m_{\beta\beta}$ 帯

$$\begin{aligned} m_{\beta\beta}^{\text{NO}} [\text{eV}] : \text{min} &= 1.0073 \times 10^{-2}, \text{max} = 3.1442 \times 10^{-2}, \\ 68\% \text{CI} &= (1.3458 \times 10^{-2}, 2.9061 \times 10^{-2}), \\ 95\% \text{CI} &= (1.0825 \times 10^{-2}, 3.1002 \times 10^{-2}) \end{aligned} \quad (101)$$

は、低エネルギー側の入力 (U, m_i) だけで定まる予言である。本節ではこれを Type-I seesaw へ埋め込み、(i) 生成された重いスケール M_i が妥当な領域にあるか、(ii) 混合による非ユニタリ性 (η) が十分小さいか、(iii) LFV (例: $\mu \rightarrow e\gamma$) 制約を満たすか、(iv) 逆抽出した R が直交性 $R^T R \simeq I$ を満たすかを同一の規約のもとで検証する。

6.1 入力の凍結：NO 代表スペクトルと複素 PMNS

本節の数値は NO_main として以下を固定する。振動差分は $\Delta m_{21}^2 = 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{31}^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ とし、幾何学入力により lightest を $m_1 \simeq 3.0458 \times 10^{-2} \text{ eV}$ に固定すると

$$(m_1, m_2, m_3) \simeq (3.0458 \times 10^{-2}, 3.1665 \times 10^{-2}, 5.8546 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \quad (102)$$

$$\sum m_\nu \simeq 1.2067 \times 10^{-1} \text{ eV}. \quad (103)$$

PMNS は PDG 規約で Dirac 位相を含む複素行列として固定し (NO_low_octant 代表)、

$$\sin^2 \theta_{12} = 0.303, \quad \sin^2 \theta_{23} = 0.451, \quad \sin^2 \theta_{13} = 0.02225, \quad \delta = 232^\circ, \quad (104)$$

を用いる (Majorana 位相は $m_{\beta\beta}$ 評価時に別途走査)。このとき $U^\dagger U = I$ は数値的に高精度で満たされる。

- m_i (NO 代表値) : $\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ を一意に定める質量スペクトル (低エネルギー入力)。
- 複素 PMNS U : seesaw での m_ν 再構成と R 抽出の規約 (共役・転置の位置) を固定する要。
- 役割 : 低エネルギーの「観測比較量」を固定した上で、高エネルギー (M_i, Y_ν) へ埋め込む土台。

6.2 Casas-Ibarra による埋め込みと規約

Type-I seesaw では

$$m_\nu = -m_D M_R^{-1} m_D^T, \quad (105)$$

が成り立つ。ここで $m_D = (v/\sqrt{2})Y_\nu$ は Dirac 質量行列、 $M_R = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ は重い Majorana 質量である。低エネルギー側の対角化を

$$U^T m_\nu U = D_\nu \equiv \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad \Leftrightarrow \quad m_\nu = U^* D_\nu U^\dagger \quad (106)$$

と取る (この共役の位置が規約の核心)。Casas-Ibarra[25] により一般解は

$$m_D = i U^* \sqrt{D_\nu} R \sqrt{D_R}, \quad D_R \equiv \text{diag}(M_1, M_2, M_3), \quad (107)$$

と書ける。 R は複素直交行列で $R^T R = I$ を満たす。

- (105) : 低エネルギー質量を高エネルギー (m_D, M_R) へ結びつける基本式。
- (106) : 採用する共役規約 (U^* と U^\dagger) の宣言。 R 抽出の一致判定に直結。
- (107) : R を自由度として m_D (ひいては Y_ν) を構成する一般解。直交性が自己整合性テストになる。

6.3 NO-main の重いスケール： M_i (GAV 候補)

本稿では Yukawa 固有値の仮説（幾何列： $y_{\nu,i} = y_0 r^{i-1}$ ）から M_i を推定し、NO では

$$y_{\nu}^{\text{diag}} = (1.0 \times 10^{-5}, 3.0 \times 10^{-4}, 9.0 \times 10^{-3}), \quad (108)$$

$$(M_1, M_2, M_3) \simeq (9.934 \times 10^4, 8.600 \times 10^7, 4.186 \times 10^{10}) \text{ GeV} \quad (109)$$

を得た (NO_main 候補点)。以降はこの (U, m_i, M_i) を固定し、 R を走査（まず実直交）することで非ユニタリ性および LFV を評価する。

- M_i ：右手ニュートリノのスケール。 Θ や LFV の大きさを支配する。
- y_{ν}^{diag} ： M_i 推定に用いる Dirac Yukawa 固有値の仮説 (GAV の内部整合性入力)。
- 役割：NO で得た「観測比較量」を、具体的な UV スケールへ接続する橋。

6.4 非ユニタリ性： Θ と η

重い状態との混合を

$$\Theta \equiv m_D M_R^{-1}, \quad \eta \equiv \frac{1}{2} \Theta \Theta^\dagger \quad (110)$$

で定義する。低エネルギーの有効混合は概ね $(I - \eta)U$ で与えられ、 η が非ユニタリ性の大きさを表す。NO_main 候補点では

$$|\eta_{e\mu}| \sim 5.6 \times 10^{-17}, \quad (111)$$

と極めて小さく、実験制限から十分に安全側にある。

- Θ ：軽重混合の大きさ。 M_i が小さいほど増大しやすい。
- η ：非ユニタリ性（有効 PMNS のズレ）を表す主要パラメータ。
- 役割：seesaw 埋め込みが低エネルギーの混合に与える影響を定量化し、「安全領域」を定義する。

6.5 LFV： $\mu \rightarrow e\gamma$ の評価

簡易指標として

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \propto |\eta_{e\mu}|^2 \quad (112)$$

を用いる（比例係数は標準近似 [25]）。NO_main では走査全体（実直交 R の 2 万点）にわたり

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \sim 10^{-42} - 10^{-35} \quad (113)$$

と、参照上限 (MEG II) [26, 27] に対し大幅に小さい。

- $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ ：LFV の代表観測量。 Θ （ゆえに M_i と R ）に敏感。
- (112)：本節のスクリーニング用近似。まず安全性を迅速に確認する役割。
- 役割：NO の预言帯が、LFV 制約を満たす UV 埋め込みと両立することを示す。

6.6 R 抽出：直交性と規約整合の検証

得られた Y_ν (あるいは m_D) が (107) の解空間上にあるかは、逆に R を抽出して

$$R = (\sqrt{D_\nu})^{-1} \left[U^T \left(\frac{v}{\sqrt{2}} Y_\nu \right) \right] (\sqrt{D_R})^{-1} \quad (\text{本稿の規約}) \quad (114)$$

と置き、 $R^T R \simeq I$ を確認すればよい。NO_main 候補点では

$$\|R^T R - I\| \sim 10^{-15} \quad (115)$$

が得られ、数値誤差の範囲で直交性が成り立つ。従って、本稿の NO 予言 ($\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$) は、同一の規約のもとで seesaw 埋め込みに整合的である。

- (114) : Y_ν から R を逆算する式。転置・共役の位置が規約チェック点。
- $R^T R \simeq I$: GAV 候補点が Casas-Ibarra の解として自己整合かどうかの判定基準。
- 役割 : NO で固定した低エネルギー予言を、高エネルギー構成が“同じ一貫規約”で再現していることを示す核心テスト。

6.7 小結：NO 予言帯から UV 安全領域へ

以上より、NO で固定された ($\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$) の予言帯は、右手ニュートリノ質量 (109) を持つ seesaw 埋め込みと両立し、非ユニタリ性 (110) と LFV (112) は十分小さい。さらに R 抽出 (114) により直交性 (115) が確認され、NO_main の候補点が Casas-Ibarra の解として自己整合であることが示された。次節では、この「安全領域」の中で R を複素化 (複素角 3 つ) した場合の変動と、 $m_{\beta\beta}$ 帯との相関 (あるいは独立性) を系統的に調べる。

7 議論

本節では、(i) CKM の 13 専用補正を次元 6 演算子として導入した際に生じる「パッチ性」への懸念に答え、(ii) NO を主分岐として採用したとき、観測比較の矛先がどの量へ定まるかを明確化し、(iii) 本稿の枠組みを「自然化 (naturalization)」へ拡張する将来課題を整理する。

7.1 「次元 6 はパッチに見える」問題への回答

次元 6 演算子 $\mathcal{O}_{13}^{(6)}$ ((10)) は、見かけ上は「13 チャンネルのためだけに足されたパッチ」に映りうる。しかし本稿の立場では、これは原理値 $x_{13} = \sqrt{2}$ を壊す自由度ではなく、原理からの残差 ϵ_{13} を UV へ輸送するための最小の有効記述である。

(i) EFT としての正当性：低エネルギーでは一般に必然 標準理論に重い自由度 (質量 Λ) が存在するなら、低エネルギー有効理論は一般に

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \sum_{d>4} \frac{1}{\Lambda^{d-4}} \sum_a c_a^{(d)} \mathcal{O}_a^{(d)} \quad (116)$$

の形を取る。従って、次元 6 の Yukawa 修正は「不自然」ではなく、重い自由度を積分消去した結果として標準的である。

(ii) 「フレーバー選択的」に見える理由：対称性で制御できる 問題は次元 6 自体ではなく、「なぜ 13 に選択的か」である。この点は、フレーバー対称性（あるいは選択則）で説明できる。例えば、

1. 近似的な $U(1)_F$ （フレーバー電荷）により、 $(\bar{Q}_L \Phi d_R)$ の特定成分のみが許容される。
2. 離散対称性 (Z_N) により、12, 23 を禁止しつつ 13 だけを許す選択則を与える。
3. フラボン φ を導入し、 $\langle \varphi \rangle / \Lambda$ により有効 Yukawa を生成する (FN 型)。

これらは「13 にだけ強い補正が出る」状況を、't Hooft の意味で自然に（すなわち対称性により保護された形で）実現しうる。

(iii) 代表的 UV 完成の例：次元 6 の生成源 (10) は、具体的には次のような重い自由度から生成されうる (例示)：

1. 重いスカラー：ヒッグスと混合する重いスカラー S を介し、ツリーで $(\Phi^\dagger \Phi)(\bar{Q}_L \Phi d_R)$ が誘導される。
2. ベクトル様クォーク (VLQ)：重い D 型 VLQ により、EWSB 後に実効的な 13 Yukawa が生成される。
3. 重いベクトル：フレーバー依存ゲージボソンを介する場合も、選択的な有効演算子が得られる。

これらの UV は、本稿が示したスケール推定 ($\Lambda \simeq \mathcal{O}(10) \text{ TeV}$, (59)–(62)) と整合する範囲に自然に置ける。

7.2 NO vs IO と観測比較の予先（本稿は NO を主分岐）

本稿の幾何学入力は、絶対質量スケールを固定する点で強い。その強みを最大化するには、どの質量順序 (NO/IO) で幾何学スケールをどの固有値へ同定し、観測比較の「予先」をどこへ定めるかを明確化する必要がある。

(i) 固有値同定の自然性：NO では m_1 , IO では m_3 幾何学入力

$$m_\nu^{\text{geo}} = m_e(\sqrt{2})^{K_{\text{geo}}}, \quad K_{\text{geo}} = -48 \quad (117)$$

を、質量順序ごとに次のように同定するのが自然である：

$$\text{IO: } m_3 = m_\nu^{\text{geo}}, \quad \text{NO: } m_1 = m_\nu^{\text{geo}}. \quad (118)$$

NO で m_3 (最重) に同定すると、 $m_1^2 = m_3^2 - \Delta m_{31}^2$ が負になり得て、 $\Delta m_{31}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ と両立しない領域が生じるため、本稿では同定規則 (118) を固定する。

(ii) NO を主分岐として採用する理由：宇宙論・ $0\nu\beta\beta$ の比較軸が明快 本稿では NO を主分岐として採用し、(118) に従って $m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$ を固定する。代表点として

$$(m_1, m_2, m_3) = (3.046 \times 10^{-2}, 3.167 \times 10^{-2}, 5.855 \times 10^{-2}) \text{ eV},$$

$$\sum m_\nu = 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta \simeq 3.17 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (119)$$

を得る。さらに Majorana 位相（および Dirac 位相の取り扱い）に依存する $m_{\beta\beta}$ について、位相を一様にスキャンして予言帯を得た（サンプル数： $N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$ ）：

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} \in (1.007 \times 10^{-2}, 3.144 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \quad (120)$$

$$68\% \text{CI} = (1.344 \times 10^{-2}, 2.908 \times 10^{-2}) \text{ eV}. \quad (121)$$

という予言帯が与えられる。したがって本稿の主張は、幾何学入力 NO の下で $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ を同時に固定し、「宇宙論 + $0\nu\beta\beta$ 」という明確な比較軸へ落ちる点にある。

(iii) IO は比較分岐：同一枠での分岐判別点を提供する 比較として IO も同一枠組で与えられる。(118) に従い $m_3 = m_\nu^{\text{geo}}$ を固定すると、

$$(m_1, m_2, m_3) = (5.79 \times 10^{-2}, 5.855 \times 10^{-2}, 3.046 \times 10^{-2}) \text{ eV},$$

$$\sum m_\nu = 1.469 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta = 5.763 \times 10^{-2} \text{ eV}, \quad (122)$$

また $m_{\beta\beta}$ は位相に依存するため、位相を一様にスキャンして予言帯を得た（サンプル数： $N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$ ）：

$$m_{\beta\beta}^{\text{IO}} \in (2.144 \times 10^{-2}, 5.748 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \quad (123)$$

$$68\% \text{CI} = (2.57 \times 10^{-2}, 5.525 \times 10^{-2}) \text{ eV}. \quad (124)$$

が得られる。従って IO は「主採用」のためというよりも、NO との分岐判別点を同じ生成則の下で同時に提示する役割を担う。なお NO_low/high の octant 差は m_β および $m_{\beta\beta}$ に対して僅差であり、本稿の観測比較軸（ $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ ）を本質的には変えない。

(iv) 小結：本稿の予先（NO 主・IO 比較） 以上より、本稿の予先は NO を主分岐として $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ の帯を観測へ接続する点にある。IO は比較分岐として同一の幾何学入力から自動的に定まり、分岐判別（ $\sum m_\nu$ のレベル差、 $m_{\beta\beta}$ 帯域の差）を与える。

7.3 自然化の拡張候補（将来課題）

本稿は、原理（ $\sqrt{2}$ ）と歪み（ ϵ_{13} および $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ ）を分離し、歪みを EFT として保存した。次段階では、この「保存」を自然化し、理論の閉じ方を強化する必要がある。

(i) EFT 項の UV 完成（最優先） $\Delta\mathcal{L}_{13}^{(6)}$ の背後にある重い自由度を特定し、

$$c_{13}^{(d)} \sim \mathcal{O}(1), \quad \Lambda \sim \mathcal{O}(10) \text{ TeV} \quad (125)$$

を自然に生成する UV 模型を構成する。このとき、フレーバー選択性（なぜ 13 だけか）を対称性で説明することが鍵である。

(ii) R の制限構造の原理化 (Casas-Ibarra 空間の縮約) Casas-Ibarra の一般解 (R 自由度) の中で、GAV が抽出する R が著しく制限された部分空間に落ちることを、対称性または幾何学原理から説明する。これは「一般解の普遍性」と「生成則の予言性」を同時に理論化する作業である。

(iii) 位相分布と関連観測への拡張 $0\nu\beta\beta$ の位相走査を、PMNS の不確かさ ($\epsilon_{13}^{(\ell)}$ 分布) と結合して体系化し、将来的には LFV ($\mu \rightarrow 3e$, $\mu-e$ 転換など) や非ユニタリ性の直接探索まで拡張することで、複数観測でモデルを拘束する予言ネットワークを構築できる。

小結 本稿の次元 6 挿入は、原理 ($\sqrt{2}$) を守ったまま残差 ϵ_{13} を保存し、観測と UV へ接続するための最小実装である。主分岐として NO を採用することで、幾何学入力 $\sum m_\nu$ と $m_{\beta\beta}$ の帯として直ちに観測比較へ落ちる。次段階の主課題は、 $\Delta\mathcal{L}_{13}^{(6)}$ の UV 完成と、GAV が抽出する R の制限構造の原理化により、歪みの自然化を完了することである。

宇宙論上限と K_{geo} の再定位 (シナリオ別) 本稿の NO 主分岐では $\sum m_\nu$ が K_{geo} によってほぼ一意に定まり、既存の $\Delta K = \pm 1, \pm 2$ 感度 (Table 8) により宇宙論上限との整合域を整理できる。上限が $\sum m_\nu^{\text{max}} \simeq 0.12$ eV 程度なら $K_{\text{geo}} = -48$ は境界的に許容されるが [3]、 $\sum m_\nu^{\text{max}} \simeq 0.07$ eV 方向へ強くなると $K_{\text{geo}} = -48$ は押され [2]、Table 8 の範囲では $\Delta K = -2$ でも不足するため、 $\Delta K < -2$ (より小さい K_{geo}) が必要となる。さらに 0.05–0.06 eV 級の強い上限が採用される場合は [28, 29]、NO 主分岐は一層厳しくなり、より小さい K_{geo} を要請する。ここで宇宙論上限は解析手法と宇宙論モデル (Λ CDM 固定 vs 拡張) に依存して動くため [3, 28]、本稿の生成則はそのモデル依存性を「反証可能性の幅」として取り込める。

8 結論

本稿では、GAV 着想に基づく「主階層 ($\sqrt{2}$ 整数ステップ) + 微補正 (Casimir 差)」というハイブリッド生成則を標準理論 Yukawa セクターに接続し、検証可能な予言帯として CKM/PMNS とニュートリノ絶対質量を提示した。原理値 $x_{13} = \sqrt{2}$ を保ったまま、現実の歪みを残差 ϵ_{13} として分離・保存し、EFT (次元 6) を通じて UV と観測へ接続する枠組みを与える。さらに、幾何学入力 ($K_{\text{geo}} = -48$) を Type-I シーソーに埋め込み、NO を主分岐として絶対質量スケールと $0\nu\beta\beta$ 予言帯を得た ($m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$)。IO は条件付き比較として併記し、宇宙論制限と $0\nu\beta\beta$ の進展で反証可能であることを示した。

検証軸の整理. 本稿の検証軸は $\Lambda \cdot \sum m_\nu \cdot m_{\beta\beta}$ の 3 本に集約され、他の数値結果はその内部整合性を支える補助指標である。

Neutrino predictions (quick view)

	NO (main)	IO (what-if)
$\sum m_\nu$	$1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}$	$1.469 \times 10^{-1} \text{ eV}$
m_β	$3.17 \times 10^{-2} \text{ eV}$	$5.76 \times 10^{-2} \text{ eV}$
$m_{\beta\beta} \text{ (min-max)}$	$(1.007, 3.144) \times 10^{-2} \text{ eV}$	$(2.144, 5.748) \times 10^{-2} \text{ eV}$
$m_{\beta\beta} \text{ (68\% CI)}$	$(1.344, 2.907) \times 10^{-2} \text{ eV}$	$(2.570, 5.525) \times 10^{-2} \text{ eV}$

- いずれも検証軸 $\sum m_\nu / m_{\beta\beta}$ に直結する予言帯である（IO は比較分岐）。

主要結果（代表値） 以下に、本稿の主要な数値結果を箇条書きでまとめる。

- (CKM-EFT) 新物理スケール Λ の推定： $\delta Y_{13}^{(d)} \simeq (v^2/2\Lambda^2)c_{13}^{(d)}$ を用い、 $c_{13}^{(d)} \sim \mathcal{O}(1)$ を仮定すると

$$\Lambda \simeq 14.81 \text{ TeV} \quad (126)$$

を得る。また、 $\epsilon_{13}^{(q)}$ の帯 $\epsilon_{13}^{(q)} \in (0.07747, 0.08180)$ を $c_{13}^{(d)}$ に吸収する写像により、 Λ は

$$\Lambda \in [14.795, 14.817] \text{ TeV} \quad (\text{deterministic band}) \quad (127)$$

と評価される（ $c_{13,0}^{(d)} = 1$ を基準）。

- Λ ：次元 6 演算子の有効スケールである。
- $c_{13}^{(d)}$ ：Wilson 係数（無次元）である。
- 役割： $\epsilon_{13}^{(q)}$ を UV へ輸送し、モデルを「検証可能なエネルギースケール予言」に変換する。
- (PMNS+ 幾何学シーソー, NO) 絶対質量と宇宙論量（主結果）：正四面体自己双対性に基づく幾何学入力 $K_{\text{geo}} = -48$ により $m_\nu^{\text{geo}} = 0.03046 \text{ eV}$ を固定し、NO では整合性のため $m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$ と同定してスペクトルを構成すると

$$\sum m_\nu = 1.207 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta \simeq 3.17 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (128)$$

を得る。

- m_ν^{geo} ：幾何学シーソーが与える絶対質量スケールである。
- $m_1 = m_\nu^{\text{geo}}$ ：NO における自然な同定規則である（仮に $m_3 = m_\nu^{\text{geo}}$ と同定すると $m_1^2 = m_3^2 - \Delta m_{31}^2 < 0$ を生み得て整合を失う）。
- $\sum m_\nu$ ：位相非依存の宇宙論量である。
- 役割：NO 枝で絶対質量と宇宙論量を一意に固定し、観測比較を可能にする。

- (PMNS+ 幾何学シーソー, NO) $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の統計要約 (Gaussian MC) : NO 分岐において $N = 200000$ (seed = 12345) の Gaussian MC を行くと、low/high octant で

$$\epsilon_{13}^{(\ell)} (\text{NO_low}) : \mu = 0.1060, \sigma = 0.0459, \quad (129)$$

$$68\% \text{CI} = (0.06030, 0.1515), \quad (130)$$

$$95\% \text{CI} = (0.01744, 0.1976), \quad (131)$$

$$\epsilon_{13}^{(\ell)} (\text{NO_high}) : \mu = -0.07301, \sigma = 0.04158, \quad (132)$$

$$68\% \text{CI} = (-0.1144, -0.03150), \quad (133)$$

$$95\% \text{CI} = (-0.1531, 0.009413), \quad (134)$$

を得る。対応する実効指数は

$$x_{13,\text{eff}}^{(\ell)} (\text{NO_low}) : \quad (135)$$

$$68\% \text{CI} = (1.263, 1.354), \quad (136)$$

$$95\% \text{CI} = (1.217, 1.397), \quad (137)$$

$$x_{13,\text{eff}}^{(\ell)} (\text{NO_high}) : \quad (138)$$

$$68\% \text{CI} = (1.446, 1.529), \quad (139)$$

$$95\% \text{CI} = (1.405, 1.567), \quad (140)$$

であり、 $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ と $\sum m_\nu$ の相関は $\text{corr}(\epsilon, \sum m_\nu) = -0.00157$ (low) および 0.00106 (high) と、実質的にゼロである。

- $\epsilon_{13}^{(\ell)} : x_{13}^{(\ell)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(\ell)}$ の残差である。
 - $x_{13,\text{eff}}^{(\ell)}$: PMNS の 13 抑圧を表す実効指数である。
 - CI : Gaussian MC に基づく分位区間である。
 - 役割 : NO の下で $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の許容域と予言帯を定量化し、観測比較の基準帯を与える。
- ($0\nu\beta\beta$, NO) $m_{\beta\beta}$ 予言帯 (位相走査) : Majorana 位相 (および δ の取り扱い) に依存するため、位相を一様に走査して予言帯を得た ($N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$) :

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} \in (1.007 \times 10^{-2}, 3.144 \times 10^{-2}) \text{ eV}. \quad (141)$$

- N_{phase} : 位相走査のサンプル数である。
- 役割 : 位相依存量 $m_{\beta\beta}$ の帯 (min/max と CI) を統計的に安定に推定する。

を得る (octant 依存は僅少)。代表的な信用区間として

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} 68\% \text{CI} = (1.344 \times 10^{-2}, 2.907 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \quad (142)$$

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} 95\% \text{CI} = (1.082 \times 10^{-2}, 3.100 \times 10^{-2}) \text{ eV} \quad (143)$$

を得る。

- $m_{\beta\beta}^{\text{NO}}$: NO における位相走査から得た予言帯である。
- CI : 位相一様走査に基づく分位区間である。

- 役割：NO では帯域が IO より小さくなるが、幾何学入力により反証可能なレンジへ落ちる。
- (CKM) 13 専用残差の導入と RMS 改善： $x_{13}^{(q)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(q)}$ を導入し、 $|V_{ub}|$ を観測値に整合させた。RMS は

$$\text{RMS}(|V|)_{\text{baseline}} = 1.79 \times 10^{-2}, \quad (144)$$

$$\text{RMS}(|V|)_{x_{13}^{\text{eff}}} = 1.09 \times 10^{-4}, \quad (145)$$

へ改善した。

- $\text{RMS}(|V|)$ ： $|V_{\text{CKM}}|$ の要素ごとの相対誤差に基づく指標である。
- baseline： $x_{13} = \sqrt{2}$ を固定した場合を指す。
- x_{13}^{eff} ： $\epsilon_{13}^{(q)}$ を導入した実効値を指す。
- 役割：13 方向の「現実の歪み」を最小自由度で吸収し、生成則の予言性を維持する。
- (質量連鎖) ハイブリッド再構成の精度：連鎖再構成 (chain) により、クォーク・荷電レプトン質量は $\text{RMS}(\text{relative, chain}) = 4.03 \times 10^{-3}$ を達成した (表3)。
- (比較：PMNS+ 幾何学シーソー, IO) 絶対質量と宇宙論量 (条件付き)：同一の幾何学入力の下で、IO を仮定して $m_3 = m_\nu^{\text{geo}}$ と同定すると

$$\sum m_\nu = 1.469 \times 10^{-1} \text{ eV}, \quad m_\beta = 5.76 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (146)$$

を得る。

- IO：反転階層 (inverted ordering) を仮定した分岐である。
- $\sum m_\nu$ ：宇宙論に効く総和であり位相非依存である。
- 役割：宇宙論制限が現行の枠組みで強固である場合、IO 分岐は鋭く検証 (排除) され得ることを示す。
- (比較： $0\nu\beta\beta$, IO) $m_{\beta\beta}$ 予言帯 (位相走査)：Majorana 位相に依存するため、位相を一様に走査して予言帯を得た ($N_{\text{phase}} = 3 \times 10^5$)：

$$m_{\beta\beta}^{\text{IO}} \in (2.144 \times 10^{-2}, 5.748 \times 10^{-2}) \text{ eV}. \quad (147)$$

- N_{phase} ：位相走査のサンプル数である。
- 役割：IO の $m_{\beta\beta}$ 予言帯を NO と同じ基準で比較可能にする。

を得る。さらに代表的な信用区間として

$$m_{\beta\beta}^{\text{IO}} 68\% \text{ CI} = (2.57 \times 10^{-2}, 5.525 \times 10^{-2}) \text{ eV}, \quad (148)$$

$$m_{\beta\beta}^{\text{IO}} 95\% \text{ CI} = (2.211 \times 10^{-2}, 5.705 \times 10^{-2}) \text{ eV} \quad (149)$$

を得る (PMNS の e 行は $|U|$ から再構成)。

- $m_{\beta\beta}^{\text{IO}}$ ：IO における位相走査から得た予言帯である。
- CI：位相一様走査に基づく分位区間である。

- 役割：IO 分岐が有効な場合に、次世代実験へ直接比較可能な予言帯を与える。
- (非ユニタリ性) η の規模 (GAV 点)：GAV 点で

$$|\eta_{e\mu}| = 5.305 \times 10^{-17} \quad (150)$$

を得る (他の成分も同程度以下)。

- $\eta = \frac{1}{2}\Theta\Theta^\dagger$ ：非ユニタリ性パラメータである。
 - $|\eta_{e\mu}|$ ：LFV と強く関連する代表成分である。
 - 役割：seesaw 埋め込みが精密制限を余裕で満たすことを示す。
 - (LFV) $\mu \rightarrow e\gamma$ の見積り (スキャン+ GAV 点)：real R スキャンでは
- $$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)_{\text{min/med/max}} = (5.6183 \times 10^{-43}, 8.0246 \times 10^{-36}, 5.8700 \times 10^{-35}) \quad (151)$$

を得、MEG II 感度に対して十分小さい。GAV 点でも $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq 2.4511 \times 10^{-36}$ である。

- $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ ：LFV の代表観測量である。
- スキャン： R の自由度を走査した一般解側の検証である。
- 役割：PMNS 再現と両立した上で LFV が安全領域に入ることを地図化できる。
- (R 抽出) GAV 点が一般解空間で与える制限：GAV で構成した Y_ν から逆に抽出した R は

$$\|R^T R - 1\| = 6.259 \times 10^{-16}, \quad \|\text{Im}(R)\| \simeq 1.29 \times 10^{-17} \quad (152)$$

を満たし、ほぼ実直交 (real orthogonal) に一致する。

- R ：Casas-Ibarra 表式の自由度を表す行列である。
- $\|R^T R - 1\|$ ：直交性の数値検証である。
- 役割：本稿の生成則が、一般解 (R 自由度) の中の「強く制限された部分空間」に対応することを示す。

総括と今後 本稿の枠組みは、(i) Yukawa 固有値 (階層) をハイブリッド則で固定し、(ii) 混合角を log2 生成則で統一的に表し、(iii) 13 専用残差 ϵ_{13} を EFT として保存して UV スケールへ結び、(iv) 幾何学シーソーにより NO 主筋で絶対質量と $0\nu\beta\beta$ 予言帯を与えるものである。今後の最優先課題は、 $\Delta\mathcal{L}_{13}^{(6)}$ の UV 完成 (対称性によるフレーバー選択則の原理化) と、抽出 R の制限構造を幾何学原理へ還元する自然化 (naturalization) である。次段階の課題は、この 2 点の具体的な実装である。

A 数値入力と規約

本付録では、再現性のために数値入力・規約・乱数設定をまとめる。本文と付録で示す数値は、過剰精度を避けるため原則として有効数字 4 桁に丸めて表記する。

A.1 質量入力とスケール規約

本稿の質量入力は、軽クォークを $\overline{\text{MS}}$ ($\mu = 2 \text{ GeV}$)、重クォークを自己スケールでの $\overline{\text{MS}}$ 、荷電レプトンを pole とした。具体的には (MeV 単位)、

$$\begin{aligned} m_e &= 0.511, & m_\mu &= 105.7, & m_\tau &= 1776.86, \\ m_u &= 2.16, & m_d &= 4.67, & m_s &= 93.4, & m_c &= 1270.0, & m_b &= 4180.0, & m_{t,\overline{\text{MS}}} &= 163000.0. \end{aligned} \quad (153)$$

- m_f : 各フェルミオンの質量入力である。
- $\overline{\text{MS}}/\text{pole}$: スキームの違いを明示するために区別する。
- 役割 : ハイブリッド則・Yukawa 固有値・混合の数値再現性を保証する。

A.2 Higgs VEV と Yukawa の定義

$$v = 246 \text{ GeV}, \quad y_f = \frac{\sqrt{2} m_f}{v}. \quad (154)$$

- v : Higgs 真空期待値である。
- y_f : Yukawa 固有値の定義である。
- 役割 : 本文の D_u, D_d, D_e の数値を一意に定義する。

A.3 混合ターゲットと PMNS 入力の扱い

CKM の基準値は $s_{12} = 0.225$, $s_{23} = 0.04183$, $s_{13} = 0.003732$ を用いた。

PMNS の数値計算では、ノートブック変数 `pmns_fits[PMNS_KEY]['Uabs_eff']` に格納された $|U|$ を入力とし、 e 行 ($|U_{e1}|, |U_{e2}|, |U_{e3}|$) から m_β と $m_{\beta\beta}$ を評価した。なお $|U|$ は NO_low_octant / NO_high_octant の双方について用意し、位相走査は各オクタントの e 行を入力として独立に実行した。

- s_{ij} : $\sin \theta_{ij}$ の略記である。
- $|U|$: PMNS の絶対値行列入力である (GAV-fit による `Uabs_eff`)。
- NO_low / NO_high : θ_{23} オクタントの二解である。
- 役割 : 位相走査の再現性 (特に $m_{\beta\beta}$) と、オクタント差の影響評価を保証する。

A.4 乱数シードと走査設定

本稿では、再現性のために乱数シードと走査回数 (サンプル数) を明示する。

(i) Gaussian MC ($\epsilon_{13}^{(\ell)}$ など) Gaussian MC の設定は本文 (図・式の該当箇所) に従う (例: $N = 200000$, `seed` = 12345 など)。

- N : Gaussian MC のサンプル数である。
- `seed`: Gaussian MC の乱数初期化である。
- 役割: $\epsilon_{13}^{(\ell)}$ の分布と分位区間 (68%, 95% CI) の再現性を担保する。

(ii) $0\nu\beta\beta$ 位相走査 (Majorana 位相) $0\nu\beta\beta$ の位相走査は、混同を避けるためサンプル数を

$$N_{\text{phase}} = 300000 \quad (155)$$

と表記する。

- N_{phase} : 位相走査のサンプル数である。
- 役割: $m_{\beta\beta}$ 分布 (min/max と分位区間) の統計精度を規定する。

乱数は再現性のため基準シード

$$\text{seed}_{\text{phase}}^{(\text{base})} = 20260111 \quad (156)$$

で固定し、オクタント比較では処理順依存を避けるため

$$\text{seed}_{\text{phase}} = \text{seed}_{\text{phase}}^{(\text{base})} + \delta_{\text{oct}}, \quad \delta_{\text{oct}} = \begin{cases} 0 & (\text{low_octant}) \\ 1 & (\text{high_octant}) \end{cases} \quad (157)$$

として位相乱数列をオクタントごとに独立に固定した。

- $\text{seed}_{\text{phase}}^{(\text{base})}$: 位相走査の基準となる乱数初期化 (ベースシード) である。
- $\text{seed}_{\text{phase}}$: 各オクタントで実際に用いる乱数初期化である。
- δ_{oct} : オクタント識別子 (low/high に応じて 0/1 を加算) である。
- 役割: オクタントの処理順に依存しない形で、位相走査の再現性と厳密比較性を担保する。

走査対象は Majorana 位相 (2 自由度) であり、 $\alpha_{21}, \alpha_{31} \in [0, 2\pi)$ を一様走査して

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_i m_i |U_{ei}|^2 e^{i\alpha_i} \right|, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \alpha_{21}, \alpha_{31}) \quad (158)$$

の分布 (min/max と分位区間) を評価する。

- $m_{\beta\beta}$: $0\nu\beta\beta$ の有効質量である。
- m_i : 軽いニュートリノ質量固有値である (NO/IO によりスペクトルが切り替わる)。
- $|U_{ei}|$: PMNS 行列の e 行絶対値成分であり、本稿では GAV-fit の `Uabs_eff` を入力として用いる。
- α_{21}, α_{31} : Majorana 位相であり、干渉を通じて $m_{\beta\beta}$ の帯 (許容域) を与える自由度である。
- 役割: 位相不定性に由来する $m_{\beta\beta}$ の予言帯 (min/max, 68%, 95% CI) を再現可能に要約する。

(iii) Dirac 位相 δ の扱い（固定と健全性チェック） 本稿の位相走査では Dirac 位相 δ は固定して評価した（固定値は本文またはノートブックの設定に従う）。一方で、固定の妥当性を確認するため、同一の乱数列 (α_{21}, α_{31}) を用いたまま δ を $0^\circ, 180^\circ$, および代表値 (NO_low: 232° , NO_high: 197°) に切り替えて $m_{\beta\beta}$ の帯 (min/max と 68%CI, 95%CI) がほぼ不変であることを検証した。具体的には、各オクタント内での 68%CI 端点・min/max の相対変化は最大でも

$$\frac{\Delta m_{\beta\beta}}{m_{\beta\beta}} \lesssim 1.3 \times 10^{-3} \quad (159)$$

であり、 δ を固定する近似は本稿の精度範囲で十分安全である。

- δ : PMNS の Dirac 位相である（本稿では固定して扱う）。
- 同一乱数列固定 : δ 以外の揺らぎを消し、 δ 依存のみを公平に比較するためである。
- 役割 : δ 固定が $m_{\beta\beta}$ 予言帯を実質的に変えないことを明示し、走査設定の安全性を担保する。

再現性のための固定値と代表値規約（推奨明記）. 本稿の数値結果は、乱数初期化とサンプル数を固定して再現可能性を担保している。特に、Gaussian MC では $N = 200000$, `seed` = 12345 を用い、Majorana 位相走査では $N_{\text{phase}} = 300000$, `seed`_{phase} = 20260111（または本文・コードで採用した値）を用いた。また、位相走査に用いる代表質量 m_i^{rep} は、Gaussian MC で得た各 m_i の平均 (mean) として定義し、これを用いて $m_{\beta\beta}$ の位相走査 (min/max と分位区間) を評価した。

- N , `seed` : Gaussian MC のサンプル数と乱数初期化である。
- N_{phase} , `seed`_{phase} : 位相走査のサンプル数と乱数初期化である。
- m_i^{rep} : 位相走査に用いる代表質量であり、本稿では mean で定義する。
- 役割 : 数値表・図（分布、相関、CI、予言帯）を第三者が同一条件で再現できるように規約を固定する。

B 再現性のための定義・抽出手順

本付録では、本稿の質量連鎖および微補正推定が再現可能となるよう、観測量と離散入力、ならびに推定アルゴリズムを固定する。

B.1 連続指数と残差の定義（手続きの固定）

本付録では、本稿の質量連鎖および微補正推定が再現可能となるよう、観測量（連続指数と残差）と離散入力 (ΔC)、ならびに推定アルゴリズムを固定する。本節ではまず、観測質量比から導く連続指数 K_{obs} と、整数ステップ予測からの対数残差 $\ln P_{\text{obs}}$ を定義する。

B.1.1 連続指数 K_{obs}

質量比を $\sqrt{2}$ 基底で測った連続指数を

$$K_{\text{obs}} \equiv \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}}} \right) = 2 \log_2 \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}}} \right) \quad (160)$$

と定義する。

- ・ 項の意味： K_{obs} は質量比を $\sqrt{2}$ 基底で測った連続指数であり、 $m_{\text{base}}, m_{\text{target}}$ は同一セクター内の基準質量と目標質量である。
- ・ 役割：主階層の整数指数 K_{int} の選択を導き、階層の“連続的なずれ”を定量化する。

B.1.2 主階層予測と対数残差 $\ln P_{\text{obs}}$

主階層（整数ステップ）のみを用いた予測質量を

$$m_{\text{pred}}^{(0)} = m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}} \quad (161)$$

と定義し、その予測からの対数残差（観測量）を

$$\ln P_{\text{obs}} \equiv \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{pred}}^{(0)}} \right) = \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}}} \right) \quad (162)$$

と定める。

- ・ 項の意味： $\ln P_{\text{obs}}$ は主階層予測 $m_{\text{pred}}^{(0)}$ からの対数残差であり、 K_{int} は採用した整数ステップ数である。
- ・ 役割：ハイブリッド則の微補正 $\exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C)$ に対応する部分をデータ側から抽出し、 β_{sector} 推定および ΔC 依存性の検証を可能にする。

B.1.3 質量入力規約（スキームとスケールの固定）

本稿の数値実装では、質量入力のスキームとスケールを次のように固定する：軽クォークは $\overline{\text{MS}}$ ($\mu = 2 \text{ GeV}$)、重クォークは各自スケールでの $\overline{\text{MS}}$ 、荷電レプトンは pole 質量を用いる。

- ・ 項の意味： $\overline{\text{MS}}$ は繰り込みスキーム、 μ は繰り込みスケールである。
- ・ 役割：入力規約の不一致による系統差を排し、 K_{obs} と $\ln P_{\text{obs}}$ の定義を実装と一対一に対応づける。

次節への導線. 次節 Appendix B.2 では、本稿の数値再現で用いる離散ラベル ΔC (および混合側の ΔC_{ij}) を「データに整合する最小の離散差分ラベル」として定義し、固定値を表として与える。そのうえで Appendix B.3 にて K_{int} の同定規約と β_{sector} の推定手順、ならびに混合側の (p, r) の推定手順を固定する。

B.2 ΔC の定義（離散差分ラベルとしての固定）

本稿では、 ΔC （および混合側の ΔC_{ij} ）を「データに整合する最小の離散差分ラベル」として先に採用し、数値再現ではその整数ラベルを入力として固定する。すなわち、本付録における ΔC は群鎖から計算した量ではなく、実装上の離散インデックス（整数）である。

- ・ 項の意味： ΔC はステップ（またはチャンネル）ごとに付与される整数ラベルであり、本稿の再現計算では表に示す固定値をそのまま用いる。
- ・ 役割：微補正や混合則に現れる「離散的な差分構造」を最小限の整数データとして符号化し、以後の係数推定（ β_{sector} および (p, r) ）を一意に定める。

B.2.1 質量連鎖（ハイブリッド則）で用いた ΔC の一覧

本稿の質量連鎖（lep/up/down の各セクター）で用いた $(K_{\text{int}}, \Delta C)$ を Table 10 に固定する。

Table 10. 本稿の質量連鎖で用いた整数ステップ K_{int} と離散ラベル ΔC の固定値。

Step	Sector	base	target	K_{int}	ΔC
$e \rightarrow \mu$	lep	e	μ	15	4
$\mu \rightarrow \tau$	lep	μ	τ	8	2
$u \rightarrow c$	up	u	c	18	4
$c \rightarrow t$	up	c	t	14	2
$d \rightarrow s$	down	d	s	9	4
$s \rightarrow b$	down	s	b	11	2

B.2.2 混合則で用いた離散ラベル $(\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij})$ の一覧

混合角の階層則 $\log_2(\sin \theta_{ij}) \simeq -(p \Delta K_{ij} + r \Delta C_{ij})$ で用いた離散ラベルを Table 11 に固定する。

Table 11. 混合則で用いた離散ラベルの固定値（本稿実装）。

Channel ij	ΔK_{ij}	ΔC_{ij}
12	1	4
23	1	2
13	2	6

注記（最小離散ラベルの採用）． 本稿では、 ΔC_{ij} を先に固定した上で (p, r) を解き、混合角階層の再現を行う。したがって、 ΔC_{ij} は「データに整合する最小の離散差分ラベル」としての採用であり、特定の群鎖や表現に結び付けた計算量としては導入しない。

B.3 K_{int} と β_{sector} の推定手順（アルゴリズム）

本稿のハイブリッド則 $m_{\text{target}} = m_{\text{base}}(\sqrt{2})^{K_{\text{int}}} \exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C)$ において、(i) 主階層の整数指数 K_{int} の同定と、(ii) 微補正係数 β_{sector} の推定は、以下の手続きで一意に固定できる。

B.3.1 観測連続指数 K_{obs} の計算

入力質量 $m_{\text{base}}, m_{\text{target}}$ から、 $\sqrt{2}$ 基底での連続指数を

$$K_{\text{obs}} \equiv 2 \log_2 \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}}} \right) \quad (163)$$

と定義する。

- ・ 項の意味： K_{obs} は質量比を $\sqrt{2}$ 基底で測った連続指数であり、 $m_{\text{base}}, m_{\text{target}}$ は同一セクター内の基準質量と目標質量である。
- ・ 役割：主階層の整数指数 K_{int} の候補を絞り込み、階層の連続的なずれを可視化する。

B.3.2 整数ステップ K_{int} の固定（本稿の実装）

本稿の質量連鎖では、整数ステップ K_{int} は探索で同定せず、Table 10 に与えた固定値をそのまま用いる。主階層のみの予測を

$$m_{\text{pred}}^{(0)} = m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}} \quad (164)$$

と定義し、そこからの対数残差（観測量）を

$$\ln P_{\text{obs}} \equiv \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{pred}}^{(0)}} \right) = \ln \left(\frac{m_{\text{target}}}{m_{\text{base}} (\sqrt{2})^{K_{\text{int}}}} \right) \quad (165)$$

とする。

- ・ 項の意味： $m_{\text{pred}}^{(0)}$ は主階層（整数ステップ）のみでの予測質量、 $\ln P_{\text{obs}}$ はその予測からの対数残差であり、 K_{int} は Table 10 に固定された整数ステップ数である。
- ・ 役割：微補正 $\exp(\beta_{\text{sector}} \Delta C)$ に対応する部分をデータ側から抽出し、 β_{sector} の推定と、固定ラベル ΔC との整合性チェックを可能にする。

B.3.3 微補正係数 β_{sector} の推定（回帰）

同定した K_{int} に対する $\ln P_{\text{obs}}$ を用い、

$$\ln P_{\text{obs}} \approx \beta_{\text{sector}} \Delta C \quad (166)$$

として β_{sector} を推定する。

- ・ 項の意味： β_{sector} はセクター（lep/up/down）ごとの比例係数、 ΔC は Appendix B.2 で定義し、Table 10（または混合なら Table 11）で固定した離散入力である。
- ・ 役割：微補正が ΔC に比例するという仮説を最小二乗（回帰）として検証し、セクターごとの一意な係数として数値提示する。

セクター内の複数ステップ a (例: lep では $e \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \tau$) に対し、切片をゼロに固定した最小二乗推定は

$$\hat{\beta}_{\text{sector}} = \frac{\sum_a \Delta C_a \ln P_{\text{obs},a}}{\sum_a (\Delta C_a)^2} \quad (167)$$

で与えられる。

- 項の意味: ΔC_a はステップ a の離散入力、 $\ln P_{\text{obs},a}$ はステップ a の観測残差である。
- 役割: β_{sector} を閉じた形で推定し、以後の再現計算で同一値を用いるための規約を固定する。

B.3.4 混合側: (p, r) の推定 (2 チャンネル校正 + 第 3 チャンネル検証)

混合角の階層則を

$$\log_2(\sin \theta_{ij}) \simeq -(p \Delta K_{ij} + r \Delta C_{ij}) \quad (168)$$

とし、Appendix B.2.2 で固定した $(\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij})$ を入力として (p, r) を推定する。

- 項の意味: (p, r) は混合角階層の係数、 ΔK_{ij} は整数差分ラベル、 ΔC_{ij} は先に採用した最小の離散差分ラベルである。
- 役割: 離散ラベルが与えられたときに混合角を再現する係数を一意に決め、第 3 チャンネルの再現誤差を独立な検証量として用いる。

観測値 θ_{ij} から

$$y_{ij} \equiv -\log_2(\sin \theta_{ij}) \quad (169)$$

を定義すると、(168) は

$$y_{ij} \simeq p \Delta K_{ij} + r \Delta C_{ij} \quad (170)$$

という線形モデルになる。

- 項の意味: y_{ij} は混合角の階層量 ($\sin \theta_{ij}$ を \log_2 で測った量) である。
- 役割: (p, r) の推定を連立一次方程式として実装できる形にする。

2 チャンネル校正 (実装の固定). 本稿の数値実装では、2 つのチャンネル (例: 12 と 23) を校正点として選び、(170) を 2×2 の連立方程式として解くことで (p, r) を一意に決定する。すなわち

$$\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta K_{12} & \Delta C_{12} \\ \Delta K_{23} & \Delta C_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad (171)$$

を満たす (p, r) を求める。

- 項の意味: 左辺 y_{12}, y_{23} は観測混合角から計算した階層量、右辺の行列は固定ラベル $(\Delta K_{ij}, \Delta C_{ij})$ からなる係数行列である。
- 役割: (p, r) を最小二乗ではなく「校正点 2 つで厳密に決める」という実装規約を固定する。

第3チャンネル検証（例：13）． 得られた (p, r) を用いると、第3チャンネル（例：13）の階層量は

$$y_{13}^{(\text{pred})} = p \Delta K_{13} + r \Delta C_{13} \quad (172)$$

と予測され、対応する混合角は

$$\sin \theta_{13}^{(\text{pred})} = 2^{-y_{13}^{(\text{pred})}} \quad (173)$$

で与えられる。

- ・ 項の意味： $y_{13}^{(\text{pred})}$ は校正した (p, r) から得た第3チャンネルの予測階層量、 $\sin \theta_{13}^{(\text{pred})}$ はその混合角予測値である。
- ・ 役割：校正に用いていないチャンネルを独立な検証量とし、本稿の離散ラベル固定が過剰適合でないことを確認する。

残差の定義． 観測値 $\sin \theta_{13}^{(\text{obs})}$ に対し、

$$\Delta y_{13} \equiv y_{13}^{(\text{pred})} - y_{13}^{(\text{obs})} \quad \left(y_{13}^{(\text{obs})} \equiv -\log_2(\sin \theta_{13}^{(\text{obs})}) \right) \quad (174)$$

を定義すれば、13チャンネルの再現誤差を単一のスカラー量として報告できる。

- ・ 項の意味： Δy_{13} は第3チャンネルの階層量における予測と観測の差である。
- ・ 役割：校正に用いた2チャンネルとは独立な整合性指標として、混合則の有効性を定量化する。

頑健性テスト（robustness driver） ノートブック後半では、入力摂動（ケース）ごとに主要出力 $(\Lambda, \sum m_\nu, m_{\beta\beta})$ を同一の計算関数で再評価し、ケース別の相対変化と、その最悪ケース指標 Δ_{rob} を機械的に集約する。具体的には、(i) 各摂動ケースの結果を `F2DV_outputs/robustness_summary.csv` に保存し、(ii) そのCSVから Δ_{rob} を再計算して `F2DV_outputs/robustness_bands.csv`（比）および `F2DV_outputs/robustness_bands_percent.csv`（%）として要約を出力する。

- ・ `robustness_summary.csv`：各ケースの $(\Lambda, \sum m_\nu, m_{\beta\beta})$ と相対変化 $(\delta\Lambda, \delta\sum m_\nu, \delta m_{\beta\beta, \text{mid}})$ を格納する。
- ・ `robustness_bands(.csv/.percent.csv)`：定義(66)に基づき $\Delta_{\text{rob}} = \max_k |\delta O_k|$ を集約した要約表である。
- ・ 役割：連続入力の小摂動に対して、結論が「何%以内で安定か」を再現可能に提示する。

補足：離散入力 K_{geo} の頑健性スキャン 連続摂動とは別に、幾何学指数 K_{geo} の離散ずれ $\Delta K \in \{-2, -1, 0, +1, +2\}$ に対して、NO主分岐のニュートリノ量 $(\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta})$ の感度を独立に評価する。この置換セルは、 U_{ei} を `pmns_fits`（利用可能なら `Uabs_eff` の e 行）から取得し、Majorana位相を一様サンプルして $m_{\beta\beta}$ の68%帯を算出する。結果は `F2DV_outputs/Kgeo_robustness_scan.csv` として保存し、併せて $\sum m_\nu$ の変動図 `F2DV_outputs/Kgeo_scan_sum_mnu.png` を出力する。

- `Kgeo_robustness_scan.csv` : ΔK ごとの $\sum m_\nu$, m_β , $(m_{\beta\beta}^{68\%lo}, m_{\beta\beta}^{68\%hi})$ 等を格納する。
- `Kgeo_scan_sum_mnu.png` : ΔK に対する $\sum m_\nu$ の単調変化を可視化する。
- 役割 : K_{geo} の離散不確かさがニュートリノ予言をどれだけ分岐させるかを定量化する。

補足 : 13-only 補正に対する CKM 感度 さらに、ダウン型 Yukawa の (1,3) 成分のみを微小に摂動する 13-only 変形 (例 : $Y_d^{13} \rightarrow (1 + \varepsilon)Y_d^{13}$) に対し、左ユニタリ変換から CKM 行列を再構成して $|V_{ub}|, |V_{us}|, |V_{cb}|$ 等の感度を評価する。結果は `F2DV_outputs/ckm_13only_sensitivity.csv` に保存する。

- `ckm_13only_sensitivity.csv` : ε スキャンと CKM 要素の相対変化を格納する。
- 役割 : 「13 のみを補正する」仮定が CKM の他要素への程度波及するかを可視化する。

B.4 基底候補の比較 ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \varphi$)

基底候補として $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \varphi$ を取り、同一の評価手続きで「どの基底が最も整合的か」を簡易比較した。比較はノートブック後半にあるスクリプト `compare_bases.py` により行い、要約は `F2DV_outputs/base_comparison_summary.csv` に保存した。

総合指標の定義 質量連鎖・CKM・PMNS (NO 低/高オクタント) を同時に評価するため、各 RMS を単純和でまとめた指標

$$R_{\text{sum}} \equiv \text{RMS}_{\text{mass}} + \text{RMS}_{\text{CKM}} + \text{RMS}_{\text{PMNS}}^{(\text{NO}, \text{low})} + \text{RMS}_{\text{PMNS}}^{(\text{NO}, \text{high})}. \quad (175)$$

- RMS_{mass} : 質量連鎖 (主階層+微補正) の相対誤差 RMS である。
- RMS_{CKM} : CKM (例 : $|V_{ij}|$) の相対誤差 RMS である。
- $\text{RMS}_{\text{PMNS}}^{(\text{NO}, \text{low/high})}$: PMNS (NO 低/高オクタント) の相対誤差 RMS である。
- 役割 : 複数観測 (質量・混合) を一つのスカラーで比較し、基底選択の恣意性を下げる。

Table 12. 基底候補の比較要約 (`base_comparison_summary.csv`)。小さいほど整合が良い。ここで (i) は補正なし, (ii) は ΔC 補正あり, (iii) は $x_{13, \text{eff}}$ 調整ありを表す。

Base	value	mode	mass RMS [%]	CKM RMS	PMNS RMS (low)	PMNS RMS (high)	R_{sum}
$\sqrt{2}$	1.414	(i) 補正なし	9.305	0.8553	0.5128	0.6449	2.106
φ	1.618	(i) 補正なし	521.5	0.8553	0.5128	0.6449	7.228
$\sqrt{3}$	1.732	(i) 補正なし	1.7e+03	0.8553	0.5128	0.6449	19.01
$\sqrt{5}$	2.236	(i) 補正なし	1.42e+05	0.8553	0.5128	0.6449	1.424e+03
$\sqrt{2}$	1.414	(ii) ΔC 補正あり	3.132	0.1818	0.1766	0.2558	0.6455
φ	1.618	(ii) ΔC 補正あり	52.83	0.05257	0.04690	0.1025	0.7303
$\sqrt{3}$	1.732	(ii) ΔC 補正あり	93.64	0.008678	0.01463	0.02968	0.9894
$\sqrt{5}$	2.236	(ii) ΔC 補正あり	448.2	0.1947	0.2011	0.1914	5.069
$\sqrt{2}$	1.414	(iii) $x_{13, \text{eff}}$ 調整あり	3.132	1.09e-04	7.09e-09	1.27e-08	0.03143
φ	1.618	(iii) $x_{13, \text{eff}}$ 調整あり	52.83	1.09e-04	7.09e-09	1.27e-08	0.5284
$\sqrt{3}$	1.732	(iii) $x_{13, \text{eff}}$ 調整あり	93.64	1.09e-04	7.09e-09	1.27e-08	0.9365
$\sqrt{5}$	2.236	(iii) $x_{13, \text{eff}}$ 調整あり	448.2	1.09e-04	7.09e-09	1.27e-08	4.482

C 補助表：Yukawa 行列・混合行列

本付録では、本文で用いた代表的な数値行列をまとめて掲載し、再現計算に必要な最低限の情報（規約・参照先）を併記する。Yukawa は無次元であり、質量との関係は

$$m_f = \frac{v}{\sqrt{2}} y_f, \quad v = 246 \text{ GeV} \quad (176)$$

の規約に従う。

- m_f ：フェルミオンの質量である。
- y_f ：Yukawa 結合（無次元）である。
- v ：ヒッグス真空期待値である。
- 役割：本文の Yukawa 数値と質量スケールの対応規約を固定し、seesaw 節の $m_D = (v/\sqrt{2})Y$ と整合させる。

C.1 対角 Yukawa (chain)

本文の (47) を再掲する。

$$\begin{aligned} D_u &= \begin{pmatrix} 1.242 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 7.301 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 9.345 \times 10^{-1} \end{pmatrix}, \\ D_d &= \begin{pmatrix} 2.685 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 5.369 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 2.43 \times 10^{-2} \end{pmatrix}, \\ D_e &= \begin{pmatrix} 2.938 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 6.084 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.018 \times 10^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (177)$$

- $D_{u,d,e}$ ：Yukawa 固有値の対角基準（無次元）である。
- 役割：階層（ D ）と混合（回転行列）を分離し、混合は回転側に集約される。

C.2 CKM の絶対値行列（GAV）

本文で得た CKM の絶対値行列を掲げる：

$$|V_{\text{CKM}}^{\text{GAV}}| = \begin{pmatrix} 0.9743 & 0.225 & 0.003732 \\ 0.2249 & 0.9735 & 0.04183 \\ 0.008583 & 0.04111 & 0.9991 \end{pmatrix}. \quad (178)$$

- $|V_{\text{CKM}}|$ ：CKM 行列の絶対値である（位相は本文の規約に従う）。
- 役割：13 専用残差（ x_{13}^{eff} ）により $|V_{ub}|$ が整合することを示す代表出力である。

C.3 PMNS の絶対値行列 (eff、NO 代表：low/high)

本文の PMNS 節で用いた $|U|$ は `pmns_fits[PMNS_KEY]['Uabs_eff']` に格納した。本稿の NO 主解析に対応して、low/high の代表 $|U|$ (eff) を併記する：

$$|U_{\text{PMNS}}^{\text{eff}}|(\text{NO_low_octant}) = \begin{pmatrix} 0.8255 & 0.5443 & 0.1492 \\ 0.3624 & 0.654 & 0.6641 \\ 0.4326 & 0.5254 & 0.7327 \end{pmatrix}, \quad (179)$$

$$|U_{\text{PMNS}}^{\text{eff}}|(\text{NO_high_octant}) = \begin{pmatrix} 0.8256 & 0.5444 & 0.1484 \\ 0.2719 & 0.6055 & 0.7479 \\ 0.4944 & 0.5805 & 0.647 \end{pmatrix}. \quad (180)$$

加えて、 $0\nu\beta\beta$ 位相走査で直接用いる e 行の値を抜き出す：

$$(|U_{e1}|, |U_{e2}|, |U_{e3}|) \simeq \begin{cases} (0.8255, 0.5443, 0.1492) & (\text{NO_low_octant}) \\ (0.8256, 0.5444, 0.1484) & (\text{NO_high_octant}) \end{cases}. \quad (181)$$

- $|U_{\text{PMNS}}|$ ：PMNS 行列の絶対値である（位相を含む複素 U は本文の seesaw 節で固定する）。
- eff：13 チャンネルの実効指数 $x_{13}^{(\ell)} = \sqrt{2} - \epsilon_{13}^{(\ell)}$ を反映した $|U|$ である。
- $|U_{ei}|$ ：PMNS 行列の e 行の絶対値成分である。
- 役割： m_β と $m_{\beta\beta}$ の評価入力を与える（特に $|U_{e3}|$ は θ_{13} と直結し、位相走査の帯の形に影響する）。

C.4 NO 主解析： $\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta}$ （位相走査）

本稿の NO 主解析では、GAV-fit により得た PMNS の $|U|$ ((179),(180)) と、代表質量スペクトル（本文の NO 固定代表値）を用いて、位相依存量 $m_{\beta\beta}$ は Majorana 位相を一様に走査して予言帯を得た。ここで m_β と $\sum m_\nu$ は位相非依存量である。

$$m_\beta \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^3 |U_{ei}|^2 m_i^2}, \quad (182)$$

$$m_{\beta\beta} \equiv \left| \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i e^{i\alpha_i} \right|, \quad (\alpha_1 \equiv 0, \alpha_2 \equiv \alpha_{21}, \alpha_3 \equiv \alpha_{31}) \quad (183)$$

- m_β ：単一 β 崩壊有効質量（位相非依存）である。
- $m_{\beta\beta}$ ： $0\nu\beta\beta$ 有効質量（Majorana 位相に依存）である。
- α_{21}, α_{31} ：Majorana 位相である（Dirac 位相 δ は U に含まれる）。
- 役割：NO の観測比較を $(\sum m_\nu, m_\beta, m_{\beta\beta})$ の「点＋帯」として与え、以降の seesaw 節（非ユニタリ性・LFV・ R 抽出）で得られる許容領域と同一土俵で突き合わせる。

数値結果 (NO_low / NO_high) . 位相走査 ($N = 3 \times 10^5$) の結果を以下にまとめる：

$$\sum m_\nu [\text{eV}] = \begin{cases} 1.207 \times 10^{-1} & (\text{NO_low_octant}) \\ 1.207 \times 10^{-1} & (\text{NO_high_octant}) \end{cases}, \quad (184)$$

$$m_\beta [\text{eV}] = \begin{cases} 3.171 \times 10^{-2} & (\text{NO_low_octant}) \\ 3.17 \times 10^{-2} & (\text{NO_high_octant}) \end{cases}. \quad (185)$$

$$m_{\beta\beta}^{\text{NO}} [\text{eV}] : \begin{cases} \min = 1.007 \times 10^{-2}, \max = 3.144 \times 10^{-2} & (\text{NO_low}) \\ \min = 1.009 \times 10^{-2}, \max = 3.143 \times 10^{-2} & (\text{NO_high}) \end{cases} \quad (186)$$

$$68\% \text{CI} : \begin{cases} (1.346 \times 10^{-2}, 2.906 \times 10^{-2}) & (\text{NO_low}) \\ (1.344 \times 10^{-2}, 2.907 \times 10^{-2}) & (\text{NO_high}) \end{cases} \quad (187)$$

$$95\% \text{CI} : \begin{cases} (1.082 \times 10^{-2}, 3.1 \times 10^{-2}) & (\text{NO_low}) \\ (1.083 \times 10^{-2}, 3.1 \times 10^{-2}) & (\text{NO_high}) \end{cases} \quad (188)$$

Table 13. NO 主解析における位相非依存量 ($\sum m_\nu, m_\beta$) と、位相走査から得た $m_{\beta\beta}$ 预言帯。表中では NO_low_octant \rightarrow NO_low_oct, NO_high_octant \rightarrow NO_high_oct と略記する。

Case	$\sum m_\nu [\text{eV}]$	$m_\beta [\text{eV}]$
NO_low_oct	1.207×10^{-1}	3.171×10^{-2}
NO_high_oct	1.207×10^{-1}	3.17×10^{-2}

Case	$m_{\beta\beta} [\times 10^{-2} \text{ eV}]$			
	min	68%CI	95%CI	max
NO_low_oct	1.007	(1.346, 2.906)	(1.082, 3.1)	3.144
NO_high_oct	1.009	(1.344, 2.907)	(1.083, 3.1)	3.143

表（観測比較用の要約）。

- ・ 役割：本表は、本文の seesaw 節で導く非ユニタリ性 (η)・LFV (例： $\mu \rightarrow e\gamma$)・ R の直交性と並べて、「NO の预言が安全領域の中で自然に成立する」ことを示すための観測比較パネルである。

謝辞

本研究は、対話型 AI アシスタント (ChatGPT 5.2Thinking) との反復的な共同作業 (数式化、検算、数値実験、および学術的記述の整備) によって推進された。とくに、CKM/PMNS 再構成の記述統一、13 専用補正の EFT 表現、幾何学シーソー (NO) による絶対質量入力と $0\nu\beta\beta$ 预言量の位相スキャン設計、ならびに Casas-Ibarra 表式

に基づく $\eta \cdot \text{LFV} \cdot R$ 抽出の整理において、対話を通じた整合性チェックと文章化が決定的に有効であった。なお、本稿の科学的主張、解釈、誤りの責任はすべて著者にある。

データ可用性に関する声明

本研究で使用したすべてのデータセット、計算コード、数式処理、図の生成スクリプト、および最終的な予測結果は、以下の GitHub リポジトリに公開されています。

Python ノートブックを実行することで、全結果をワンクリックで完全に再現可能です：

<https://github.com/Hiroto-Iwasaki/Particle-physics-paper-datasets/tree/main/F2DV>

References

- [1] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020.
- [2] A. G. Adame et al. Desi 2024 vi: Cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 02:021, 2025.
- [3] Particle Data Group. Review of particle physics (2025) — sum of neutrino masses. PDG online resources, 2025. <https://pdg.lbl.gov/2025/reviews/rpp2025-rev-sum-neutrino-masses.pdf>.
- [4] H. Iwasaki. Recursive quantum theory (rqt) : A first-principles solution to the mass-hierarchy problem, and—based on it—an empirical or working-hypothesis approach to the neutrino mixing angles, the quark (ckm) mixing matrix, and cp violation. Preprint, 2025.
- [5] H. Iwasaki. Recursive quantum theory ii: A geometric model for the fermion mass hierarchy and mixing. Preprint, 2025.
- [6] H. Iwasaki. The geometric architecture of vacuum: Dual integration, dimensional transmutation, and the origin of flavor. Preprint, 2025.
- [7] Stefan Antusch and Oliver Fischer. Non-unitarity of the leptonic mixing matrix: present bounds and future sensitivities. *JHEP*, 10:094, 2014.
- [8] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, and J. Lopez-Pavon. Unitarity of the leptonic mixing matrix. *JHEP*, 10:084, 2006.
- [9] Nicola Cabibbo. Unitary symmetry and leptonic decays. *Phys. Rev. Lett.*, 10:531–533, 1963.
- [10] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. Cp-violation in the renormalizable theory of weak interaction. *Prog. Theor. Phys.*, 49:652–657, 1973.

- [11] Particle Data Group. Review of particle physics (2024) — ckm matrix and related constants. PDG online resources, 2024.
- [12] Bruno Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. *Sov. Phys. JETP*, 6:429–431, 1957.
- [13] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 28:870–880, 1962.
- [14] Peter Minkowski. $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 10^9 muon decays? *Phys. Lett. B*, 67:421–428, 1977.
- [15] Tsutomu Yanagida. Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos. In Osamu Sawada and Akio Sugamoto, editors, *Proceedings of the Workshop on the Unified Theories and the Baryon Number in the Universe*, pages 95–99, Tsukuba, Japan, 1979. KEK. KEK Report KEK-79-18; Conf. Proc. C7902131.
- [16] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912–915, 1980.
- [17] Ivan Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Ivan Martinez-Soler, João Paulo Pinheiro, and Thomas Schwetz. NuFit-6.0: Updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *JHEP*, 12:216, 2024.
- [18] Particle Data Group. Review of particle physics (2024) — neutrino mixing and mass parameters. PDG online resources, 2024.
- [19] Werner Buchmüller and Daniel Wyler. Effective lagrangian analysis of new interactions and flavor conservation. *Nucl. Phys. B*, 268:621–653, 1986.
- [20] Bohdan Grzadkowski, Mateusz Iskrzynski, Mikolaj Misiak, and Janusz Rosiek. Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian. *JHEP*, 10:085, 2010.
- [21] Ilaria Brivio and Michael Trott. The standard model as an effective field theory. *Phys. Rept.*, 793:1–98, 2019.
- [22] M. Aker et al. Direct neutrino-mass measurement based on 259 days of katrin data. *Science*, 388:180–185, 2025.
- [23] D. Q. Adams et al. Improved limit on neutrinoless double-beta decay in ^{130}Te with cuore. *Phys. Rev. Lett.*, 124:122501, 2020.
- [24] H. Acharya et al. First results on the search for lepton number violating neutrinoless double- β decay with the legend-200 experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 136:022701, Jan 2026.
- [25] J. A. Casas and A. Ibarra. Oscillating neutrinos and $\mu \rightarrow e\gamma$. *Nucl. Phys. B*, 618:171–204, 2001.
- [26] K. Afanaciev et al. New limit on the $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ decay with the meg ii experiment. *Eur. Phys. J. C*, 85:1177, 2025.

- [27] A. M. Baldini et al. Search for the lepton flavour violating decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ with the full dataset of the meg experiment. Eur. Phys. J. C, 76:434, 2016.
- [28] DESI Collaboration. Desi dr2 results: March 19 guide. DESI Collaboration, 2025. <https://www.desi.lbl.gov/2025/03/19/desi-dr2-results-march-19-guide/>.
- [29] W. Elbers et al. Constraints on neutrino physics from desi dr2 bao and dr1 full shape. Phys. Rev. D, 2025. FERMILAB-PUB-25-0168-PPD.