

Релаксационное преобразование для итераций синусоидального отображения и его физическая интерпретация как процесса с памятью

Возмищев Артём Александрович

14 января 2026 г.

Аннотация

Классические модели релаксации, основанные на линейных дифференциальных уравнениях, приводят к экспоненциальному затуханию и часто неадекватно описывают сложные нелинейные системы с памятью. В данной работе предлагается альтернативный подход, основанный на теории итераций функций. Рассматривается семейство отображений $f_a(x) = \sin(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$. Вводится релаксационное преобразование $\Upsilon_a(n, x)$, непрерывно зависящее от параметра вложенности $n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и интерполирующее дискретные итерации $f_a^{\lfloor n \rfloor}(x)$. Доказываются его основные свойства: согласованность с целыми итерациями, непрерывность по n и сходимость к неподвижной точке $U(a)$ уравнения $\sin(x + a) = x$. Предлагается физическая интерпретация модели как процесса релаксации с памятью, где параметр n трактуется как мера накопленного системой “опыта”, а отображение физического времени t на n задаётся функцией $n(t)$, определяющей закон релаксации. Рассмотрены варианты $n(t)$, приводящие к классическому экспоненциальному, линейному и степенному затуханиям. Модель открывает новые возможности для описания неэкспоненциальной релаксации в сложных системах, таких как стеклообразные материалы и системы фазовой синхронизации.

Ключевые слова: итерации функций, релаксационное преобразование, неподвижная точка, нелинейная динамика, системы с памятью, неэкспоненциальное затухание.

1 Введение

1.1 Проблема неэкспоненциальной релаксации в сложных системах

Моделирование релаксационных процессов является фундаментальной задачей в физике, химии и теории динамических систем. Традиционные подходы, основанные на линейных дифференциальных уравнениях первого порядка ($\dot{x} = -\gamma x$), приводят к универсальному экспоненциальному закону затухания $x(t) \propto e^{-\gamma t}$. Однако многие реальные системы демонстрируют существенно более сложное поведение [1, 2, 3]:

- **Стеклообразующие системы** (полимеры, силикатные стекла) характеризуются растянутыми экспоненциальными законами (функция Кольрауша-Вильямса-Ваттса)
- **Геологические среды** проявляют степенные законы релаксации напряжений
- **Биологические ткани** показывают сложную вязкоупругую релаксацию с множеством временных масштабов

Такое поведение свидетельствует о наличии памяти, нелокальности во времени или иерархической структуры в системе, что не может быть адекватно описано в рамках простых линейных моделей.

1.2 Существующие подходы и их ограничения

Для описания сложной релаксационной кинетики предлагались различные подходы:

1. **Фрактальные модели времени** [4], где время наделяется сложной структурой
2. **Уравнения с дробными производными** [5], учитывающие нелокальность по времени
3. **Иерархические модели** [6], предполагающие распределение времен релаксации

Хотя эти подходы успешно описывают отдельные классы явлений, они часто носят феноменологический характер и не всегда имеют прозрачную физическую интерпретацию. Кроме того, они могут требовать сложного математического аппарата для численного моделирования.

1.3 Альтернативный подход на основе теории итераций

В настоящей работе предлагается принципиально иной подход, основанный на концепции дискретных динамических систем и итераций функций. Известно, что итерации сжимающих отображений сходятся к их неподвижным точкам. Классический пример — решение уравнения $\cos x = x$ методом простых итераций: последовательность $x_{n+1} = \cos x_n$ сходится к неподвижной точке $x^* \approx 0.739$. Этот процесс можно рассматривать как дискретную релаксацию, где каждая итерация приближает систему к равновесию.

Данная идея допускает существенное обобщение. Рассмотрим однопараметрическое семейство нелинейных отображений:

$$f_a(x) = \sin(x + a), \quad a \in \mathbb{R}$$

Для любого начального условия x_0 последовательность итераций $f_a^k(x_0)$ сходится к единственной неподвижной точке $U(a)$, являющейся решением уравнения $\sin(x + a) = x$. Возникает естественный вопрос: можно ли построить непрерывное семейство преобразований $\Upsilon_a(n, x)$, которое интерполировало бы дискретные итерации для нецелых n и описывало бы плавный процесс релаксации?

1.4 Цели и структура работы

Основная цель работы — построение и исследование релаксационного преобразования $\Upsilon_a(n, x)$ с последующей его физической интерпретацией как модели релаксации с памятью. Конкретные задачи:

1. Построение непрерывного по параметру n преобразования $\Upsilon_a(n, x)$
2. Доказательство его основных свойств
3. Разработка физической интерпретации с введением функции памяти $n(t)$
4. Исследование различных законов релаксации, соответствующих разным видам $n(t)$
5. Обсуждение аналогий с конкретными физическими системами

Работа организована следующим образом. В разделе 2 вводится математический аппарат: определяются неподвижная точка $U(a)$ и мультипликатор λ_a , строится и исследуется преобразование $\Upsilon_a(n, x)$. Раздел 3 содержит обзор существующих методов и сравнение с предлагаемым подходом. В разделе 4 даётся физическая интерпретация модели, вводится концепция функции памяти $n(t)$ и обсуждаются аналогии с конкретными физическими системами. Раздел 5 посвящён численным методам и примерам. В разделе 6 обсуждаются перспективы и направления дальнейших исследований.

Преимущества предлагаемого подхода:

- Естественная математическая основа в теории динамических систем
- Прозрачная физическая интерпретация параметра n как меры “опыта” системы
- Гибкость в описании различных законов релаксации через функцию $n(t)$
- Относительная простота численной реализации

2 Математический аппарат

2.1 Неподвижная точка и её свойства

Определение 2.1. Для заданного параметра $a \in \mathbb{R}$ определим функцию $U(a)$ как решение уравнения

$$\sin(x + a) = x \tag{1}$$

Функция $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ставит в соответствие параметру a значение неподвижной точки x_a^* .

Лемма 2.2. Для любого $a \in \mathbb{R}$ уравнение (1) имеет единственное действительное решение x_a^* .

Доказательство. Функция $g(x) = \sin(x + a) - x$ непрерывна, при этом $g(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и $g(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. По теореме о промежуточном значении решение существует. Единственность следует из того, что производная $g'(x) = \cos(x + a) - 1 \leq 0$, причём равенство нулю достигается лишь на множестве нулевой меры (когда $\cos(x + a) = 1$). \square

Определение 2.3. *Параметром сходимости (мультипликатором) в неподвижной точке назовём величину*

$$\lambda_a = f'_a(x_a^*) = \cos(x_a^* + a) = \cos(U(a) + a) \quad (2)$$

Лемма 2.4. *Для всех $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $0 \leq \lambda_a < 1$, причём $\lambda_a = 1$ достигается только при $a = 0$ и $U(0) = 0$.*

Доказательство. Из (1) и (2) следует, что $x_a^* = \sin(U(a) + a)$. Тогда $\lambda_a = \cos(U(a) + a) = \sqrt{1 - \sin^2(U(a) + a)} = \sqrt{1 - (x_a^*)^2}$ для $x_a^* \in [-1, 1]$. Очевидно, что $0 \leq \lambda_a \leq 1$. Равенство $\lambda_a = 1$ достигается только при $x_a^* = 0$, что согласно (1) эквивалентно $\sin a = 0$ и, следовательно, $a = 0$ (в окрестности нуля). При $a = 0$ имеем $U(0) = 0$. \square

Наблюдение 2.1. *Значение λ_a определяет скорость сходимости итераций к неподвижной точке. Чем меньше λ_a , тем быстрее сходимость.*

2.2 Релаксационное преобразование $\Upsilon_a(n, x)$

Дискретная динамика системы задаётся итерациями: $x_{k+1} = f_a(x_k)$. Для целых $n = k$ имеем $x_k = f_a^k(x_0)$. Наша цель — построить непрерывное по n семейство $\Upsilon_a(n, x)$, согласованное с целыми итерациями.

Мотивация определения. В окрестности неподвижной точки $U(a)$ отображение линеаризуется: $f_a(U(a) + \epsilon) \approx U(a) + \lambda_a \epsilon$. Поэтому для целых k и малых $\Delta = x_0 - U(a)$ имеем $f_a^k(x_0) \approx U(a) + \lambda_a^k \Delta$. Естественнo потребовать, чтобы эта асимптотика сохранялась и для промежуточных значений n . Это приводит к следующему определению.

Определение 2.5. *Для $n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $x \in \mathbb{R}$ релаксационное преобразование задаётся формулой:*

$$\Upsilon_a(n, x) = U(a) + (f_a^{\lfloor n \rfloor}(x) - U(a)) \cdot \lambda_a^{n - \lfloor n \rfloor} \quad (3)$$

где $\lfloor n \rfloor$ — целая часть числа n .

Геометрическая интерпретация. Преобразование $\Upsilon_a(n, x)$ можно представить как процесс, состоящий из двух этапов:

1. Выполнение $\lfloor n \rfloor$ полных итераций отображения f_a
2. Доведение результата до “дробной итерации” с помощью умножения на степень мультипликатора λ_a

Теорема 2.6 (Основные свойства преобразования Υ_a). *1. Согласованность на концах: $\Upsilon_a(0, x) = x$, $\Upsilon_a(1, x) = f_a(x)$*

2. *Непрерывность по n : Функция $n \mapsto \Upsilon_a(n, x)$ непрерывна на $\mathbb{R}_{\geq 0}$*

3. **Согласованность с целыми итерациями:** Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\Upsilon_a(k, x) = f_a^k(x)$

4. **Предельное поведение:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_a(n, x) = U(a)$ для любого x

5. **Приближённое полугрупповое свойство:** Для любых $s, t \geq 0$ выполняется оценка

$$|\Upsilon_a(s+t, x) - \Upsilon_a(s, \Upsilon_a(t, x))| \leq C \cdot |f_a^{[t]}(x) - U(a)|^2$$

где константа C зависит от a и производных f_a в окрестности $U(a)$.

Доказательство. Свойства 1–4 следуют непосредственно из определения (3). Для доказательства свойства 5 запишем:

$$\Upsilon_a(t, x) = U + \Delta_t, \quad \text{где } \Delta_t = (f_a^{[t]}(x) - U) \lambda_a^{t-[t]}$$

Тогда

$$\Upsilon_a(s, \Upsilon_a(t, x)) = U + (f_a^{[s]}(U + \Delta_t) - U) \lambda_a^{s-[s]}$$

Разложим $f_a^{[s]}$ в окрестности U : $f_a^{[s]}(U + \epsilon) = U + \lambda_a^{[s]} \epsilon + O(\epsilon^2)$. Подставляя $\epsilon = \Delta_t$, получаем:

$$\Upsilon_a(s, \Upsilon_a(t, x)) = U + (\lambda_a^{[s]} \Delta_t + O(\Delta_t^2)) \lambda_a^{s-[s]} = U + \lambda_a^s \Delta_t + O(\Delta_t^2)$$

В то же время,

$$\Upsilon_a(s+t, x) = U + (f_a^{[s+t]}(x) - U) \lambda_a^{s+t-[s+t]}$$

Заметим, что $f_a^{[s+t]}(x) - U = \lambda_a^{[s+t]}(x - U) + O((x - U)^2)$. Главный член разности $\Upsilon_a(s+t, x) - \Upsilon_a(s, \Upsilon_a(t, x))$ определяется отличием $\lambda_a^{[s+t]}$ от $\lambda_a^{[s]+[t]}$ и нелинейными поправками. Оценка $O(\Delta_t^2)$ следует из вида разложения. \square

Преимущество выбранного математического аппарата. Формула (3) представляет собой компактный и эффективный способ интерполяции дискретных итераций. В отличие от методов, основанных на решении функциональных уравнений для дробных итераций [7], наш подход требует только вычисления целых итераций и простой операции возведения в степень.

3 Сравнение с существующими методами

3.1 Традиционные подходы к моделированию релаксации

Для контекстуализации предлагаемого подхода рассмотрим основные существующие методы моделирования релаксационных процессов:

1. **Линейные дифференциальные уравнения:**

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$$

Преимущества: простота, аналитическое решение

Ограничения: только экспоненциальное затухание, не учитывает память системы

2. Уравнения с дробными производными [5]:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = -\gamma x, \quad 0 < \alpha < 1$$

Преимущества: описывает неэкспоненциальную релаксацию

Ограничения: сложный математический аппарат, нетривиальная численная реализация

3. Интегральные уравнения с ядрами памяти [8]:

$$x(t) = x_0 - \int_0^t K(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

Преимущества: явный учёт памяти системы

Ограничения: требует задания ядра памяти, сложность аналитического анализа

3.2 Преимущества предлагаемого подхода

Предлагаемый формализм на основе преобразования $\Upsilon_a(n, x)$ обладает рядом преимуществ:

1. **Прозрачная физическая интерпретация:** Параметр n имеет ясный смысл — количество “виртуальных шагов” релаксации
2. **Естественное описание дискретных систем:** Подход особенно эффективен для систем, которые по своей природе дискретны (системы с ударами, отображения Пуанкаре)
3. **Гибкость описания временной динамики:** Различные законы релаксации в физическом времени получаются простым выбором функции $n(t)$
4. **Вычислительная эффективность:** Алгоритм требует только вычисления целых итераций и возведения в степень
5. **Связь с теорией динамических систем:** Подход основан на хорошо разработанной теории итераций функций

3.3 Области применения

Предлагаемый метод наиболее эффективен для:

- Систем с дискретной динамикой (отображения Пуанкаре)
- Процессов с явной иерархией времен релаксации
- Моделирования систем с памятью, где традиционные дифференциальные модели оказываются неадекватными

4 Физическая интерпретация как модели релаксации с памятью

4.1 Концепция функции памяти $n(t)$

Ключевая идея физической интерпретации — разделение понятий *внутреннего опыта системы* и *физического времени*. Параметр n в преобразовании $\Upsilon_a(n, x)$ трактуется как **мера накопленного системой “опыта” релаксации**, количество “виртуальных шагов” к равновесию. Физическое время t течёт независимо, и его связь с опытом n определяется свойствами системы, такими как память, иерархичность структуры или зависимость скорости релаксации от текущего состояния.

Рассмотрим ансамбль связанных нелинейных осцилляторов или распределённую систему (например, струну). Состояние моды с индексом s в момент времени t обозначим $x(s, t)$. Пусть начальное состояние задано функцией $\phi(s)$.

Определение 4.1. *Динамика релаксации такой системы моделируется уравнением:*

$$x(s, t) = \Upsilon_a(n(t), \phi(s)), \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

где $n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — монотонно возрастающая функция, **функция памяти (или “опыта”)**, удовлетворяющая условиям:

- $n(0) = 0$ (в начальный момент опыт отсутствует)
- $\lim_{t \rightarrow T^-} n(t) = +\infty$ (при $t \rightarrow T$ система накапливает бесконечный опыт и достигает равновесия)

Параметр T — характерное время установления равновесия в системе.

4.2 Варианты отображения $n(t)$ и соответствующие законы релаксации

Выбор конкретного вида функции $n(t)$ определяет **закон релаксации в физическом времени** и отражает внутренние свойства системы.

4.2.1 Линейное отображение:

$$n_{\text{лин}}(t) = N_{\text{max}} \cdot \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]$$

- **Физический смысл:** Система без памяти. “Опыт” накапливается равномерно во времени. Скорость релаксации постоянна.
- **Закон релаксации:**

$$x(t) - U(a) \propto \lambda_a^{t/T}$$

то есть растянутое экспоненциальное затухание.

4.2.2 Экспоненциальное отображение:

$$n_{\text{эксп}}(t) = -\frac{\ln(1 - \frac{t}{T})}{|\ln \lambda_a|}, \quad t \in [0, T)$$

- **Физический смысл:** Система, в которой скорость накопления “опыта” пропорциональна остающемуся “неопыту”. Это соответствует классическому предположению о том, что скорость релаксации пропорциональна отклонению от равновесия.
- **Закон релаксации:**

$$x(t) - U(a) \propto (1 - t/T)$$

то есть **линейное затухание** в физическом времени.

4.2.3 Степенное отображение:

$$n_{\text{степ}}(t) = \frac{(t/T)^p}{(1 - t/T)^q}, \quad p, q > 0$$

- **Физический смысл:** Моделирует сложные системы с иерархией времен релаксации или с явлением старения (aging). Параметры p и q позволяют описать замедление ($q > 0$) или ускорение ($p > 1$) процесса в начале и в конце релаксации.
- **Закон релаксации:** При $t \ll T$ имеем $n(t) \propto t^p$, что приводит к начальному затуханию по закону:

$$x(t) - U(a) \propto \exp(-\text{const} \cdot t^p)$$

что соответствует растянутой экспоненте — типичному виду для многих стеклообразных систем [9].

4.3 Детальные аналогии с физическими системами

4.3.1 Аналог 1: Нелинейный маятник с вязким трением и периодическим возбуждением

Рассмотрим физический маятник, на который действуют:

- Вязкое трение с коэффициентом γ
- Периодическое возбуждение с амплитудой A и частотой ω

Уравнение движения:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = A \cos(\omega t)$$

Отображение Пуанкаре для этой системы (отображение фазы за период возбуждения) часто может быть аппроксимировано одномерным отображением вида:

$$\theta_{n+1} = f_a(\theta_n) + \xi_n$$

где θ_n — фаза маятника в момент $t = nT$, ξ_n — малый шум, f_a — нелинейная функция.

В этом контексте:

- $\Upsilon_a(n, \theta_0)$ описывает усреднённую эволюцию фазы за n периодов возбуждения
- Функция $n(t)$ связывает число периодов с реальным временем: $n(t) \approx \omega t / (2\pi)$
- Неподвижная точка $U(a)$ соответствует синхронному режиму движения маятника

4.3.2 Аналог 2: Релаксация в стеклообразующих системах

Для стеклообразующих систем (полимеры, силикатные стекла) характерны:

1. **Неэкспоненциальная релаксация** (закон Кольрауша-Вильямса-Ваттса):

$$\phi(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^\beta \right], \quad 0 < \beta < 1$$

2. **Явление старения (aging)**: свойства системы зависят от времени наблюдения и истории подготовки

3. **Иерархия времен релаксации**

В предлагаемой модели эти особенности естественным образом учитываются:

- Неэкспоненциальность затухания обеспечивается выбором степенной функции $n_{\text{степ}}(t)$
- Память системы кодируется в виде функции $n(t)$
- Параметр n можно интерпретировать как меру продвижения по иерархии метастабильных состояний

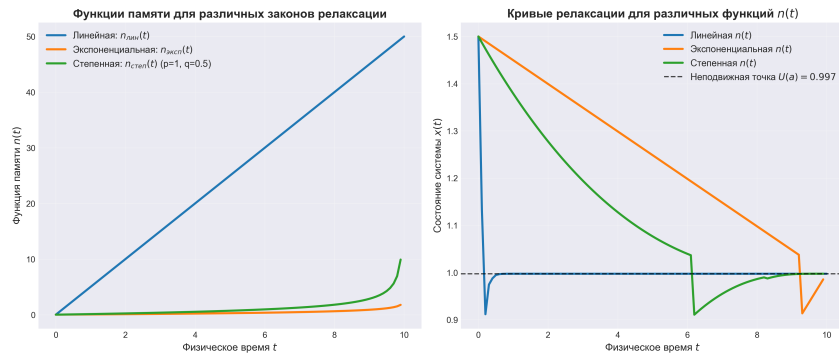


Рис. 1: Кривые релаксации для различных функций $n(t)$: линейной (синяя), экспоненциальной (красная), степенной с $p = 1, q = 0.5$ (зелёная)

4.3.3 Аналог 3: Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ)

В системах ФАПЧ [10] происходит подстройка фазы и частоты одного генератора под эталонный сигнал. Уравнение ФАПЧ первого порядка:

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega - K \sin \phi$$

где ϕ — разность фаз, $\Delta\omega$ — расстройка частот, K — коэффициент усиления петли. Дискретная версия этого уравнения (при цифровой реализации):

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta\omega T - KT \sin \phi_n$$

Это отображение может быть приведено к виду, близкому к $f_a(x) = \sin(x + a)$, при соответствующем выборе масштабов. В этом контексте:

- Неподвижная точка $U(a)$ соответствует установившемуся фазовому сдвигу
- Параметр λ_a характеризует скорость подстройки частоты
- Модель (4) описывает неидеальный переходный процесс в ФАПЧ при наличии нелинейных искажений

5 Численные методы и примеры

5.1 Алгоритм вычисления $\Upsilon_a(n, x)$

1. **Нахождение $U(a)$:** Решение уравнения $\sin(x + a) = x$

- *Метод простых итераций:* $x_{k+1} = \sin(x_k + a)$ (сходится для любого начального приближения)
- *Метод Ньютона:* $x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k + a) - x_k}{\cos(x_k + a) - 1}$ (более быстрая сходимость)

2. **Вычисление $\lambda_a = \cos(U(a) + a)$**

3. **Вычисление целой части итерации:**

$$f_a^{[n]}(x) = \underbrace{f_a(f_a(\dots f_a(x) \dots))}_{[n] \text{ раз}}$$

4. **Применение формулы (3)**

Вычислительная сложность: $O([n])$, что эффективно для умеренных значений n .

5.2 Специальные случаи и асимптотики

1. **Вырожденный случай $a = 0$:**

$$U(0) = 0, \quad \lambda_0 = 1$$

Преобразование вырождается: $\Upsilon_0(n, x) = \sin^{[n]}(x)$, сходимости к пределу нет, что соответствует нейтральной неподвижной точке.

2. **Случай малых a (линеаризация):**

$$U(a) \approx a + \frac{a^3}{6} + O(a^5), \quad \lambda_a \approx 1 - \frac{a^2}{2} + O(a^4)$$

Релаксация происходит медленно.

3. **Предел $a \rightarrow \pi/2$:**

$$U(\pi/2) \rightarrow 1, \quad \lambda_a \rightarrow 0$$

Релаксация становится практически мгновенной после первой “итерации”.

5.3 Визуализация процесса релаксации

Наблюдения:

- Кривая, соответствующая $n_{\text{лин}}(t)$, демонстрирует плавное, близкое к экспоненциальному, затухание
- Кривая для $n_{\text{эксп}}(t)$ является прямой линией, что соответствует линейному закону $x(t) - U(a) \propto (1 - t/T)$
- Кривая для $n_{\text{степ}}(t)$ показывает замедленное затухание в начальный момент и более быстрое приближение к равновесию в конце процесса

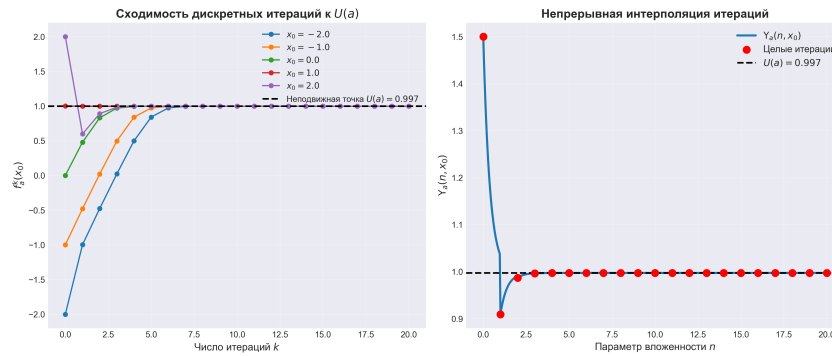


Рис. 2: Сходимость дискретных итераций (слева) и непрерывная интерполяция преобразованием Υ_a (справа)

6 Обсуждение и перспективы

6.1 Основные результаты

1. Построено релаксационное преобразование $\Upsilon_a(n, x)$, непрерывно интерполирующее дискретные итерации отображения $f_a(x) = \sin(x + a)$
2. Доказаны основные свойства преобразования: согласованность с целыми итерациями, непрерывность по n , сходимость к неподвижной точке $U(a)$
3. Предложена физическая интерпретация модели как процесса релаксации с памятью, где параметр n трактуется как мера накопленного системой “опыта”
4. Введена функция памяти $n(t)$, связывающая физическое время с параметром вложенности, что позволяет описывать различные законы релаксации
5. Показаны аналогии с конкретными физическими системами: нелинейный маятник, стеклообразующие системы, системы ФАПЧ

6.2 Теоретические перспективы

1. Изучение точных условий выполнения полугруппового свойства и построение поправок к нему

2. Построение аналитических выражений для дробных итераций $f_a^t(x)$ при нецелых t как решения функциональных уравнений
3. Исследование бифуркаций и возникновения сложной динамики при модификации отображения, когда $|\lambda_a| > 1$
4. Обобщение на многомерные отображения и системы с распределёнными параметрами

6.3 Прикладные перспективы

1. **Адаптация модели для описания конкретных физических экспериментов:**
 - Релаксация напряжений в полимерах
 - Магнитный гистерезис в ферромагнетиках
 - Диэлектрическая релаксация в сегнетоэлектриках
2. **Использование в алгоритмах обработки сигналов** для нелинейной фильтрации и сглаживания данных с учётом памяти системы
3. **Разработка численных методов** решения интегро-дифференциальных уравнений с памятью на основе концепции вложенности и функции $n(t)$
4. **Применение в теории управления** для систем с нелинейной динамикой и памятью

6.4 Философско-методологические аспекты

1. Концепция “вложенности” как альтернативный язык для описания эволюционных процессов, дополняющий дифференциальные модели
2. Интерпретация параметра n как меры сложности, глубины памяти или “возраста” системы в контексте теории сложных систем
3. Связь с теорией фрактального времени и нестандартными подходами к описанию временной эволюции

7 Заключение

В работе предложена и исследована модель релаксации, основанная на непрерывной интерполяции итераций нелинейного отображения $f_a(x) = \sin(x + a)$. Построенное релаксационное преобразование $\Upsilon_a(n, x)$ естественным образом соединяет дискретную динамику итераций с непрерывным процессом приближения к стационарному состоянию $U(a)$.

Ключевым достижением работы является введение функции памяти $n(t)$, отображающей физическое время на параметр вложенности. Это позволяет получать гибкий инструмент для моделирования широкого класса релаксационных явлений — от классического экспоненциального затухания до сложных неэкспоненциальных кинетик, характерных для систем с памятью и иерархической динамикой.

Показанные аналогии с конкретными физическими системами (нелинейный маятник, стеклообразующие материалы, системы ФАПЧ) демонстрируют практическую значимость предлагаемого подхода.

Предлагаемый подход обладает внутренней целостностью, соединяя элементы теории динамических систем, функционального анализа и математического моделирования в физике сложных сред. Он открывает новые перспективы как для теоретических исследований, так и для практических приложений в физике, химии, материаловедении и теории управления.

Благодарности

Автор выражает благодарность коллегам за полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке работы.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. 2000. Vol. 339, No. 1. P. 1-77.
- [2] Debenedetti P.G., Stillinger F.H. Supercooled liquids and the glass transition // Nature. 2001. Vol. 410, No. 6825. P. 259-267.
- [3] Götze W. Complex dynamics of glass-forming liquids: A mode-coupling theory. Oxford University Press, 2009.
- [4] Zaslavsky G.M. Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford University Press, 2005.
- [5] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, 1999.
- [6] Ngai K.L. Relaxation and diffusion in complex systems. Springer, 2011.
- [7] Kuczma M., Choczewski B., Ger R. Iterative functional equations. Cambridge University Press, 1990.
- [8] Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Publications, 2005.
- [9] Angell C.A. Formation of glasses from liquids and biopolymers // Science. 1995. Vol. 267, No. 5206. P. 1924-1935.
- [10] Viterbi A.J. Principles of coherent communication. McGraw-Hill, 1966.
- [11] Bouchaud J.P. Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems // Journal de Physique I. 1992. Vol. 2, No. 9. P. 1705-1713.

- [12] Hilfer R. (Ed.) Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, 2000.
- [13] Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19, No. 1. P. 25-52.
- [14] Самородницкий К.А., Заславский Г.М. Нелинейная физика: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 2014.
- [15] Schuster H.G., Just W. Deterministic chaos: an introduction. Wiley-VCH, 2005.