

## 4.

**Beiträge zur näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale nach der Methode der Quadraturen.**

(Von Herrn Prof. J. L. Raabe zu Zürich.)

Die Methode der Quadraturen zur näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale erhielt erst durch *Poissons* Bearbeitung \*) dieses Gegenstandes eine streng wissenschaftliche Begründung. Denn die, dieser Methode von *Maclaurin* und *Euler* beigelegte Correctionsreihe ermangelte eines Kennzeichens aus dem der jedesmal Statt habende Fehler beurtheilt werden könnte. Diese Lücke ist durch das von *Poisson* dieser Reihe noch beigelegte Ergänzungsglied völlig ausgefüllt, wodurch in theoretischer Beziehung der Gegenstand als geschlossen angesehen werden darf. Für die Anwendung hingegen ist der große Vortheil dieses Ergänzungsgliedes bis jetzt nicht genügend aufgedeckt worden. So ist z. B. der Fall, wenn sämtliche Glieder der Correctionsreihe in Nullen übergehen, nur oberflächlich erläutert. Das Paradoxe desselben ist zwar durch das Dasein des Ergänzungsgliedes gehoben; allein man sieht nicht recht ab, wie dann nach der Quadraturmethode die Rechnung zu führen sei. Im Allgemeinen vermisst man ein Verfahren, welches den Genauigkeitsgrad eines nach der Methode der Quadraturen bestimmten Integrals anzeigt, wenn mit irgend einem Incremente der Variablen die Rechnung angestellt wird, und umgekehrt.

Die Aufklärung dieser Punkte wird den Inhalt der vorliegenden Beiträge ausmachen.

1. Stellt  $\Phi(x)$  eine innerhalb  $a$  und  $b$  ( $b > a$ ) continuirliche Function von  $x$  dar und setzt man

$$b - a = n\omega,$$

wo  $n$  eine ganze positive Zahl bedeutet, so enthält eine der folgenden drei Gleichungen:

---

\*) Mémoires de l'institut 1823.

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \omega [\Phi(a) + \Phi(a+\omega) + \Phi(a+2\omega) + \dots + \Phi(a+(n-1)\omega)],$$

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \omega [\Phi(a+\omega) + \Phi(a+2\omega) + \dots + \Phi(a+(n-1)\omega) + \Phi(b)],$$

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \omega [\tfrac{1}{2}\Phi(a) + \Phi(a+\omega) + \Phi(a+2\omega) + \dots + \Phi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\Phi(b)]$$

die Integrationsmethode der Quadraturen. Je kleiner das Increment  $\omega$  gedacht wird: mit desto mehr Genauigkeit bestehen auch diese Gleichungen. Diese Gleichungen sind vollkommen richtig, wenn  $\omega$  als ein unendlich klein-, also  $n$  als ein unendlich groß-Werdendes gedacht wird. Den Unterschied im Resultate, falls  $\omega$  einen endlichen Werth annimmt, welches letztere Resultat nur einen angenäherten Werth darstellt, suchten die Geometer durch Reihen, die nach den Potenzen von  $\omega$  fortgehen, darzustellen. *Legendre* fand \*), wenn die dritte der obigen Gleichungen festgesetzt wird, diese Reihe unter folgender Form:

$$-Y_2[\Phi_1(b) - \Phi_1(a)]\omega^2 + Y_4[\Phi_3(b) - \Phi_3(a)]\omega^4 - Y_6[\Phi_5(b) - \Phi_5(a)]\omega^6 + \dots,$$

wo

$$Y_2 = \frac{1}{1.2} B_1, \quad Y_4 = \frac{1}{1.2.3.4} B_2, \quad Y_6 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} B_3, \text{ u. s. w.}$$

und  $B_1, B_2, B_3$  die Bernouillischen Zahlen sind. Ein Ausdruck von der Form  $\Phi_k(m)$  stellt hier und in der Folge den  $k$ ten Differentialcoefficienten der Function  $\Phi(x)$  vor, wenn nach vollzogener Differentiation  $x = m$  gesetzt wird.

Die hier aufgestellte Reihe wird die *Correctionsreihe* zur näherungsweisen Berechnung der Integrale nach der Quadraturmethode genannt.

Endlich hat *Poisson*, um diese Correctionsreihe sammt ihrem Erzeugungsgliede zu gewinnen, eine mit der folgenden Gleichung ganz ähnliche:

$$\text{I. } \int_a^b \Phi(x) dx = \omega [\tfrac{1}{2}\Phi(a) + \Phi(a+\omega) + \Phi(a+2\omega) + \dots + \Phi(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\Phi(b)] \\ - 2 \sum_{\varrho=1}^{\infty} \int_a^b \Phi(x) \cos \frac{2\varrho\pi(x-a)}{\omega} dx$$

aufgestellt, in der das Summenzeichen auf alle ganze und positive Werthe von  $\varrho$  sich erstreckt.

Am schnellsten gelangt man zu derselben, wenn folgende Gleichung:

$$\Phi(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(x) dx + \frac{2}{b-a} \sum_{r=1}^{\infty} \left( \int_a^b \Phi(x) \cos \frac{r\pi(x-a)}{b-a} dx \right) \cos \frac{r\pi(u-a)}{b-a}$$

\*) *Traité des fonctions elliptiques*. T. II.

zum Grunde gelegt wird, die zur Darstellung der Functionen in Reihen, welche nach den Cosinussen der Vielfachen der Variablen fortgehen, dient. Wird nun in derselben nach und nach  $u = a$ ,  $u = a + \omega$ ,  $u = a + 2\omega$ , ....  $u = a + (n-1)\omega$ ,  $u = b$  gesetzt und dann die Summe derselben genommen, nachdem man noch früher die erste und die letzte mit  $\frac{1}{2}$  multiplicirt hat, so ergibt sich nach einigen Reductionen die obige Gleichung (I.). Durch Integration p. p. geht das bestimmte Integral in Gleichung (I.):

$$\int_a^b \Phi(x) \cos \frac{2\varrho \pi (x-a)}{\omega} dx,$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von  $\omega^2$  fortgehende Reihe über, wodurch endlich erhalten wird:

$$\text{II. } \int_a^b \Phi(x) dx =$$

$$\begin{aligned} & \omega \left[ \frac{1}{2} \Phi(a) + \Phi(a + \omega) + \Phi(a + 2\omega) + \dots + \Phi(a + (n-1)\omega) + \frac{1}{2} \Phi(b) \right] \\ & - Y_2 [\Phi_1(b) - \Phi_1(a)] \omega^2 + Y_4 [\Phi_3(b) - \Phi_3(a)] \omega^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m} \\ & + 2(-1)^{m+1} \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \cos \frac{2\varrho \pi (x-a)}{\omega} dx. \end{aligned}$$

Diese Gleichung, in welcher:

$$1. \quad Y_{2k} = \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \left( 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots \right)$$

ist, löset das Problem der näherungsweise Integration nach der Methode der Quadraturen vollständig.

Die erste Zeile dieser Gleichung drückt die allgemein bekannte Integrationsmethode der Quadraturen aus. Die zweite Zeile corrigirt die erste, falls in derselben  $\omega$  endlich vorausgesetzt wird. Die dritte Zeile endlich enthält das *Poissonsche* Ergänzungsglied, welches zur Schätzung des mit der Correctionsreihe noch begangenen Fehlers dienen soll. Dieses Ergänzungsglied bildet die Basis unserer folgenden Untersuchungen.

2. Stellt man durch  $R_m$  den numerischen Werth dieses Ergänzungsgliedes dar, so ist

$$R_m = 2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \cos \frac{2\varrho \pi (x-a)}{\omega} dx,$$

und wegen

$$\cos \frac{2\varrho \pi (x-a)}{\omega} = 2 \left( \cos \frac{\varrho \pi (x-a)}{\omega} \right)^2 - 1$$

hat man auch

$$2. \quad R_m = 4 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{4m}(x) \left( \cos \frac{\varrho \pi (x-a)}{\omega} \right)^2 dx \\ - 2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) dx.$$

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn die Function  $\Phi_{2m}(x)$  für keinen der Werthe von  $x$ , die innerhalb  $a$  und  $b$  liegen, eine Veränderung im Zustande des Zeichens erleidet, oder wenn diese Function von  $x=a$  bis  $x=b$  dasselbe Zeichen behält, so besteht, was die numerischen Werthe betrifft, folgende Ungleichheit:

$$3. \quad 4 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) \left( \cos \frac{\varrho \pi (x-a)}{\omega} \right)^2 dx \\ < 4 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) dx.$$

Daher hat man mit Berücksichtigung des aufgestellten Werthes von  $R_m$  mit Gleichung (2.)

$$R_m < 2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} \frac{1}{\varrho^{2m}} \int_a^b \Phi_{2m}(x) dx.$$

Nun ist

$$\int_a^b \Phi_{2m}(x) dx = \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a).$$

Also, mit Zuziehung der Bedeutung von  $Y_{2m}$  nach Gleichung (1.),

$$4. \quad R_m < Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m}.$$

Vergleicht man dieses Ergebniss mit dem letzten Gliede der Correctionsreihe in Gleichung (II.), so kann man folgenden Satz aufstellen: *Wird der Werth eines Integrals nach Gleichung (II.) bestimmt, und bricht mit irgend einem Gliede der Correctionsreihe, z. B. mit dem Gliede*

$$(-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m}$$

*die Rechnung ab, so ist der hiebei begangene Fehler numerisch kleiner, als das letzte noch gerechnete Glied der Correctionsreihe, wenn die Function  $\Phi_{2m}(x)$  von  $x=a$  bis  $x=b$  ein und dasselbe Zeichen behält.*

3. Als Anwendung dieses Theorems eignet sich sehr gut das Integral  $\int_a^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}$ , wobei  $a > 0$  gedacht wird.

Es ist hier

$$\Phi(x) = \frac{e^{-x}}{x},$$

$$\Phi_1(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-x},$$

$$\Phi_2(x) = +\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) e^{-x},$$

$$\Phi_3(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) e^{-x},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Phi_{2m-1}(x) = -[x^{2m-1} + (2m-1)x^{2m-2} + (2m-1)(2m-2)x^{2m-3} + \dots \\ \dots + (2m-1)(2m-2)\dots 4.3.2.1] \frac{e^{-x}}{x^{2m}},$$

$$\Phi_{2m}(x) = +[x^{2m} + 2mx^{2m-1} + 2m(2m-1)x^{2m-2} + \dots \\ \dots + 2m(2m-1)\dots 4.3.2.1] \frac{e^{-x}}{x^{2m+1}}.$$

Dafs die Function  $\Phi_{2m}(x)$  für keinen endlichen Werth von  $x$  verschwinden kann, wird aus den positiven Coëfficienten des Ausdruckes innerhalb der Klammern gefolgert; und da dieselbe Function von  $x=a$  bis  $x=\infty$  continuirlich bleibt, so gelangt man zu dem Schlusse, dafs sie im Bereiche dieser Grenzen beständig positiv bleiben mufs. Wenn daher mit der allgemeinen Gleichung (II.)

$$\int_a^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \omega \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-a}}{a} + \frac{e^{-(a+\omega)}}{a+\omega} + \frac{e^{-(a+2\omega)}}{a+2\omega} + \dots \right] \\ - Y_2(a+1) e^{-a} \frac{\omega^2}{a^2} + Y_4(a^3 + 3a^2 + 3.2a + 3.2.1) e^{-a} \frac{\omega^4}{a^4} \dots \\ + (-1)^m Y_{2m}[a^{2m-1} + (2m-1)a^{2m-2} + (2m-1)(2m-2)a^{2m-3} + \dots \\ \dots + (2m-1)(2m-2)\dots 2.1] e^{-a} \frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}$$

gesetzt und der numerische Werth des Fehlers durch  $R_m$  angedeutet wird, so besteht folgende Ungleichheit:

$$R_m < 1.2.3\dots(2m-1) Y_{2m} \left( 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \dots + \frac{a^{2m-1}}{1.2.3\dots(2m-1)} \right) e^{-a} \cdot \frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}.$$

Nun ist

$$e^{+a} > 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \dots + \frac{a^{2m-1}}{1.2.3\dots(2m-1)}.$$

Daher um so mehr

$$R_m < 1.2.3\dots(2m-1) Y_{2m} \cdot \frac{\omega^{2m}}{a^{2m}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\epsilon_m = 1.2.3\dots(2m-1) Y_{2m} \frac{\omega^{2m}}{a^{2m}},$$

so ist

$$R_m < \varepsilon_m$$

Wird  $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$  angenommen, so findet man

$$\text{für } m=1, \quad \frac{\omega}{a} = 0'0010954,$$

$$- \quad m=2, \quad \frac{\omega}{a} = 0'0588566,$$

$$- \quad m=3, \quad \frac{\omega}{a} = 0'1712248,$$

$$- \quad m=4, \quad \frac{\omega}{a} = 0'2645613.$$

Erklären wir uns für den letzten Werth von  $\frac{\omega}{a}$ , so besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} &= \omega e^{-a} \left[ \frac{1}{2a} + \frac{e^{-\omega}}{a+\omega} + \frac{e^{-2\omega}}{a+2\omega} + \frac{e^{-3\omega}}{a+3\omega} + \dots \right] \\ &\quad - (a+1) Y_2 \frac{\omega^2}{a^2} e^{-a} + (a^3 + 3a^2 + 6a + 6) Y_4 \frac{\omega^4}{a^4} e^{-a} \\ &\quad - (a^5 + 5a^4 + 20a^3 + 60a^2 + 120a + 120) Y_6 \frac{\omega^6}{a^6} e^{-a} \\ &\quad + (a^7 + 7a^6 + 42a^5 + 210a^4 + 840a^3 + 2520a^2 + 5040a + 5040) Y_8 \frac{\omega^8}{a^8} e^{-a} \end{aligned}$$

mit einer Genauigkeit, die sich noch auf die siebente Decimalstelle erstreckt. Denn das letzte Glied in dieser Gleichung ist nach dem Vorhergehenden numerisch kleiner als  $\frac{1}{10^7}$ , und die Ergänzung der Correctionsreihe ist nach dem aufgestellten Satze kleiner als das letzte Glied derselben. Um Erleichterung im Rechnen zu erzwicken, ohne den Genauigkeitsgrad des Resultats zu verringern, kann man  $\frac{\omega}{a} = \frac{1}{4}$  setzen.

Für den ganz speciellen Fall, wenn man  $a=1$  hat, erhält man:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} &= \frac{1}{4e} \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1+\frac{3}{4}} + \frac{e^{-1}}{1+1} + \dots \right] \\ &\quad - \frac{2}{e} Y_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{e} Y_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \frac{326}{e} Y_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \frac{13700}{e} Y_8 \left(\frac{1}{4}\right)^8. \end{aligned}$$

Die 50 ersten Glieder innerhalb der Klammern der ersten Zeile habe ich berechnet und mit  $\frac{1}{4e}$  die Summe derselben multiplicirt. Als Resultat ergab sich:

$$0'2231850.$$

Schon in der zweiten Decimalstelle weicht dieses Resultat von dem bis jetzt bekannten Werthe des vorliegenden Integrals ab. Nun hat man:

$$\begin{array}{ll}
Y_2 = 0'0833333 & \text{und} \quad \log Y_2 = 0'9208188 - 2, \\
Y_4 = 0'0013889 & - \quad \log Y_4 = 0'1426675 - 3, \\
Y_6 = 0'0000331 & - \quad \log Y_6 = 0'5194182 - 5, \\
Y_8 = 0'0000008 & - \quad \log Y_8 = 0'9173583 - 7,
\end{array}$$

Daher, wenn die 4 Glieder der Correctionsreihe berücksichtigt werden,

$$\int_1^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} = 0'2231850 - 0'0038018 = 0'2193839;$$

in welchem Resultate sämtliche sieben Decimalstellen richtig sind.

4. Gehen wir nun zu dem Falle über, wenn die Function  $\Phi_{2m}(x)$  beim Uebergange von  $x=a$  bis  $x=b$  ein oder mehrere mal das Zeichen verändert. In diesem Falle sind die Schlüsse aus No. 2. nicht zulässig; namentlich kann man alsdann die Ungleichheit (2.) nicht aufstellen; daher auch die Ungleichheit (4.) nicht mehr gefolgert werden darf. Um diesen schwierigen Fall zu lösen, bedenken wir zuerst, daß die allgemeine Gleichung (II.) nur unter der Bedingung aus der Gleichung (I.) abgeleitet werden konnte, daß die Functionen  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_3(x)$ , . . . ,  $\Phi_{2m}(x)$  für Werthe von  $x$ , die innerhalb der Integrationsgrenzen fallen, nicht unendlich groß werden. Da demnach die Function  $\Phi_{2m}(x)$  beim Uebergange von  $x=a$  bis  $x=b$  eine oder mehrere Zeichenveränderungen hat, so kann dieses nur daher rühren, daß sie bei dem erwähnten Uebergange ein oder mehrere mal durch Null geht. Seien nun  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  reelle, die Function  $\Phi_{2m}(x)$  verschwinden machende Werthe von  $x$ , welche Abänderungen im Zeichenzustande der Function  $\Phi_{2m}(x)$  bewirken, dergestalt, daß für jeden noch so kleinen Werth von  $h$  die Ausdrücke

$$\Phi_{2m}(\alpha_k - h) \quad \text{und} \quad \Phi_{2m}(\alpha_k + h)$$

entgegengesetzte Zeichen haben; so zerlege man das gegebene Integral in eine Summe von Integralen, deren jedes zwei, der Größe nach auf einander folgende Buchstaben  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  zu Grenzen hat. Diese Integrale sind sämtlich nach der Gleichung (II.) zu behandeln. Auf jedes derselben ist das Theorem in No. 2. anwendbar. Will man überdies für alle diese Integrale gleich viele Glieder der Correctionsreihe in Anspruch nehmen, so wird für jedes ein eignes Increment bestimmt werden müssen, um einen gemeinschaftlichen Genauigkeitsgrad für alle Integrale zu erzielen.

In diesem Falle ergibt sich also folgendes Verfahren.

Man suche diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{2m}(x) = 0,$$

die gröfser als  $a$  und kleiner als  $b$  und die Uebergänge des Zeichenzustandes der Function  $\Phi_{2m}(x)$  sind. Bezeichnet man dieselben, wie vorhin, durch  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k$ , wo

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots < \alpha_k < b,$$

so setze man

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^{\alpha_1} \Phi(x) dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(x) dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \Phi(x) dx + \dots + \int_{\alpha_k}^b \Phi(x) dx.$$

Wird ferner

$n_0 \omega_0 = \alpha_1 - a$ ,  $n_1 \omega_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $n_2 \omega_2 = \alpha_3 - \alpha_2$ ,  $\dots$   $n_k \omega_k = b - \alpha_k$  gesetzt, wo  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$  ganze positive Zahlen sind, und wird

$$\begin{aligned} & \int_a^{\alpha_1} \Phi(x) dx = \\ & \left\{ \begin{aligned} & \omega_0 \left[ \frac{1}{2} \Phi(a) + \Phi(a + \omega_0) + \Phi(a + 2\omega_0) + \dots + \Phi(a + (n_0 - 1)\omega_0) + \frac{1}{2} \Phi(\alpha_1) \right] \\ & - Y_2 [\Phi_1(\alpha_1) - \Phi_1(a)] \omega_0^2 + Y_4 [\Phi_3(\alpha_1) - \Phi_3(a)] \omega_0^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega_0^{2m}, \\ & \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(x) dx = \\ & \omega_1 \left[ \frac{1}{2} \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_1 + \omega_1) + \Phi(\alpha_1 + 2\omega_1) + \dots + \Phi(\alpha_1 + (n_1 - 1)\omega_1) + \frac{1}{2} \Phi(\alpha_2) \right] \\ & - Y_2 [\Phi_1(\alpha_2) - \Phi_1(\alpha_1)] \omega_1^2 + Y_4 [\Phi_3(\alpha_2) - \Phi_3(\alpha_1)] \omega_1^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1)] \omega_1^{2m}, \\ & \dots \\ & \int_{\alpha_k}^b \Phi(x) dx = \\ & \omega_k \left[ \frac{1}{2} \Phi(\alpha_k) + \Phi(\alpha_k + \omega_k) + \Phi(\alpha_k + 2\omega_k) + \dots + \Phi(\alpha_k + (n_k - 1)\omega_k) + \frac{1}{2} \Phi(b) \right] \\ & - Y_2 [\Phi_1(b) - \Phi_1(\alpha_k)] \omega_k^2 + Y_4 [\Phi_3(b) - \Phi_3(\alpha_k)] \omega_k^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k)] \omega_k^{2m} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

angenommen, so bestimme man die Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$  aus folgenden Gleichungen:

$$6. \quad \begin{cases} Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega_0^{2m} = \pm \varepsilon_m, \\ Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1)] \omega_1^{2m} = \mp \varepsilon_m, \\ Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2)] \omega_2^{2m} = \pm \varepsilon_m, \\ \dots \\ Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(\alpha_k) - \Phi_{2m-1}(\alpha_{k-1})] \omega_{k-1}^{2m} = \pm (-1)^{k-1} \varepsilon_m, \\ Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k)] \omega_k^{2m} = \pm (-1)^k \varepsilon_m, \end{cases}$$

in welchen, damit die Incremente reelle Werthe bekommen, die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem die Function  $\Phi_{2m}(x)$  von  $x = a$  bis  $x = \alpha_1$  ein positives oder negatives Zeichen hat. Wenn mit diesen Incrementsen die vorhergehenden Integrale gerechnet werden, so sind die Fehler in den Resultaten überall numerisch kleiner als  $\varepsilon_m$ .

5. Die zuletzt aufgestellten Gleichungen (6.) führen auf einen Zusammenhang unter den Incrementsen  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ , der beachtet zu werden verdient. Dividirt man diese Gleichungen, in der Ordnung wie sie aufgestellt sind, durch  $\omega_0^{2m}, \omega_1^{2m}, \omega_2^{2m}, \dots, \omega_{k-1}^{2m}, \omega_k^{2m}$  und nimmt dann ihre Summe, so stellt die gefundene Gleichung

$$Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] = \pm \varepsilon_m \left[ \frac{1}{\omega_0^{2m}} - \frac{1}{\omega_1^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}} - \dots + \frac{(-1)^k}{\omega_k^{2m}} \right]$$

den Zusammenhang unter den Incrementsen dar, welcher ganz independent von den Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  besteht. Der nicht selten vorkommende Fall, wenn man

$$\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a) = 0$$

hat, giebt folgende noch einfachere Relation:

$$\frac{1}{\omega_0^{2m}} - \frac{1}{\omega_1^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}} - \frac{1}{\omega_3^{2m}} + \dots + \frac{(-1)^k}{\omega_k^{2m}} = 0.$$

Für  $k = 1$  giebt diese Gleichung

$$\omega_0 = \omega_1.$$

In diesem speciellen Falle wird die Integration von  $a$  bis  $b$  mit einem einzigen Incremente bewerkstelliget.

Für  $k = 2$  giebt die Gleichung

$$\frac{1}{\omega_1^{2m}} = \frac{1}{\omega_0^{2m}} + \frac{1}{\omega_2^{2m}};$$

woraus gefolgert werden kann, daß das mittlere Increment, oder dasjenige mit welchem das bestimmte Integral  $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(x) dx$  ausgemittelt wird, numerisch kleiner als die beiden andern Incremente  $\omega_0$  und  $\omega_2$  sein muß.

6. Die in No. 4. angestellten Betrachtungen heben alle Zweifel wegen der Benutzung der Correctionsreihe bei der Quadraturmethode. Nur für die Anwendung wäre es höchst beschwerlich und in vielen Fällen sogar unausführbar, das am gleichen Orte gefolgerte Verfahren zur numerischen Bestimmung eines Integralwerthes auch unverändert befolgen zu müssen. Die folgenden Betrachtungen, welche sich auf die in No. 4. stützen,

führen zu einem viel einfachern Verfahren, welches den Vorzug der Einfachheit mit dem der Gleichförmigkeit in der Behandlung aller Fälle vereint.

Wenn irgend eines der Integrale der Gleichungen (5.) mit dem ihm entsprechenden Incremente aus den Gleichungen (6.) bestimmt wird, so erreicht man jedesmal einen von der Größe  $\varepsilon_m$  abhängigen Genauigkeitsgrad. Da dieser Genauigkeitsgrad erhöht werden muß, wenn unter übrigen gleichen Verhältnissen ein noch kleineres Increment der Rechnung zum Grunde gelegt wird, so werden viele Schwierigkeiten umgangen, wenn sämtliche Integrale der Gleichungen (5.) mit dem kleinsten der Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  oder mit einem noch kleinern Incremente bestimmt werden. Nennt man  $\omega$  dieses allen Integralen der Gleichungen (5.) zugehörnde Increment, so hat man, wenn diese Gleichungen addirt werden und

$$n\omega = b - a$$

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{III. } \int_a^b \Phi(x) dx = & \\ & \omega \left[ \frac{1}{2} \Phi(a) + \Phi(a + \omega) + \Phi(a + 2\omega) + \dots + \Phi(a + (n-1)\omega) + \frac{1}{2} \Phi(b) \right] \\ & - Y_2 [\Phi_1(b) - \Phi_1(a)] \omega^2 + Y_4 [\Phi_3(b) - \Phi_3(a)] \omega^4 - \dots \\ & \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m} \end{aligned}$$

zur Ausmittlung eines bestimmten Integrals.

Dieses Ergebniss zeigt, daß man die Quadraturmethode auf gleiche Weise zu corrigiren habe, es möge die Function  $\Phi_{2m}(x)$  von  $x = a$  bis  $x = b$  beständig ihr Zeichen beibehalten, oder dasselbe mehrere Male ändern. Der Unterschied der beiden Fälle liegt lediglich in der Bestimmungsweise der Größe  $\omega$ . Während im ersten Falle bei einer willkürlichen Annahme von  $\omega$  der Fehler des Resultats numerisch kleiner als  $\varepsilon_m$  ist, wo man

$$Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m} = \pm \varepsilon_m$$

hat, muß im letzten Falle bei der Bestimmung des Increments  $\omega$  die Vorsicht beachtet werden, daß dasselbe das Minimum unter den Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  der Gleichungen (6.), oder noch kleiner als dieses Minimum sei, damit ein gleicher Genauigkeitsgrad erzielt werde. Im letztern Falle kann es sich auch ereignen, daß man

$\Phi_1(b) - \Phi_1(a) = 0, \quad \Phi_3(b) - \Phi_3(a) = 0, \quad \dots \quad \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a) = 0$   
findet. Dann hat man

$$\int_a^b \Phi(x) dx =$$

$$\omega \left[ \frac{1}{2} \Phi(a) + \Phi(a + \omega) + \Phi(a + 2\omega) + \dots + \Phi(a + (n-1)\omega) + \frac{1}{2} \Phi(b) \right],$$

und das nach dieser Gleichung gefundene Resultat differirt von dem unbekannten, wahren Resultate um eine Gröfse, die kleiner als  $\varepsilon_m$  ist, wenn nur  $\omega$  die oben erwähnte Eigenschaft des Minimums hat. Das Paradoxon von Legendre ist daher vollständig erläutert; denn das Increment  $\omega$  ist nicht völlig willkürlich, sondern es muß der oben erwähnten Bedingung genügen.

7. Nach dem eben Vorgetragenen handelt es sich jedesmal um die Ausmittlung des kleinsten der Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ , zu welchem Behufe die Kenntniß dieser sämtlichen Gröfsen unerlaßlich ist. Da ferner die Bestimmung dieser Gröfsen eine genaue Kenntniß der Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$  voraussetzt, und diese Wurzeln im Allgemeinen nur angenähert gegeben werden können, so erachten wir es als zweckdienlich, zuerst den Einfluß einer fehlerhaften Annahme der Wurzelwerthe auf die Bestimmung der Incremente zu untersuchen. Wegen der Aehnlichkeit der Gleichungen (6.) unter einander kann man die Untersuchung dadurch erleichtern, daß man nur ein solches Increment der Betrachtung unterzieht und die für dasselbe gefundenen Resultate, nach gehöriger Umsetzung der Buchstaben, den übrigen Incrementen anpaßt.

Legen wir daher die zweite der Gleichungen (6.) zum Grunde und setzen einstweilen

$$A = \sqrt{\frac{\pm \varepsilon_m}{Y_{2m}}},$$

so hat man

$$\omega_1 = A [\Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1)]^{-\frac{1}{2m}}.$$

Stellt man die genäherten Werthe von  $\alpha_2$  und  $\alpha_1$  durch  $a_2$  und  $a_1$  vor und den durch diese Annahme erzeugten Werth von  $\omega_1$  durch  $v_1$ , so hat man auch

$$v_1 = A [\Phi_{2m-1}(a_2) - \Phi_{2m-1}(a_1)]^{-\frac{1}{2m}}.$$

Nun sei

$$a_2 = \alpha_2 \pm h_2, \quad a_1 = \alpha_1 \pm h_1,$$

wo also  $h_2$  und  $h_1$  die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln  $\alpha_2$  und  $\alpha_1$  vorstellen: so hat man, wenn die dritten und höhern Potenzen dieser Fehler vernachlässigt und die Gleichungen





zeigt für  $\Phi_{2m+1}(\alpha_k)$  ein Resultat mit dem Zeichen von  $(-1)^k$ . Stellt man daher die Functionen  $\Phi_{2m+1}(\alpha_1)$ ,  $\Phi_{2m+1}(\alpha_2)$ ,  $\dots$   $\Phi_{2m+1}(\alpha_k)$  in horizontaler Reihe auf, und unter jeder das ihr zugehörnde Zeichen, so erhält man folgende Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{2m+1}(\alpha_1), & \Phi_{2m+1}(\alpha_2), & \Phi_{2m+1}(\alpha_3), & \dots & \Phi_{2m+1}(\alpha_{k-1}), & \Phi_{2m+1}(\alpha_k), \\ - & + & - & & (-1)^{k-1} & (-1)^k. \end{array}$$

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a) &= \int_a^{\alpha_1} \Phi_{2m}(x) dx, \\ \Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_{2m}(x) dx, \\ \Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2) &= \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \Phi_{2m}(x) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k) &= \int_{\alpha_k}^b \Phi_{2m}(x) dx. \end{aligned}$$

Wird nun der bekannte Zusammenhang zwischen Summe und bestimmtem Integral berücksichtigt, so ergibt sich folgende Anordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a), & \Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1), & \Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2), & \dots & \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k), \\ + & - & + & & (-1)^k, \end{array}$$

wo jedes Größenpaar und das unter demselben stehende Zeichen auf gleiche Weise wie vorhin zusammengehören.

Da man bei der entgegengesetzten Annahme über die Zeichenzustände der Function  $\Phi_{2m}(x)$  auf folgende Zusammenstellung der Functionen und deren Zeichen geführt wird:

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{2m+1}(\alpha_1), & \Phi_{2m+1}(\alpha_2), & \Phi_{2m+1}(\alpha_3), & \dots & \Phi_{2m+1}(\alpha_k), \\ + & - & + & & (-1)^{k+1} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{2m-1}(\alpha_1) - \Phi_{2m-1}(a), & \Phi_{2m-1}(\alpha_2) - \Phi_{2m-1}(\alpha_1), & \Phi_{2m-1}(\alpha_3) - \Phi_{2m-1}(\alpha_2), & \dots & \Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(\alpha_k), \\ - & + & - & & (-1)^{k+1}, \end{array}$$

so folgt, daß in den Brüchen der Gleichungen (8.) die Zeichen der Zähler denen der Nenner entgegengesetzt sind; und da vor jedem dieser Brüche das Zeichen — steht, so ist der angekündigte Satz gerechtfertigt.

9. Aus dem im vorigen No. aufgestellten Satze erhält man zuerst folgende Ungleichheiten:

$$9. \quad \omega_0 < \nu_0, \quad \omega_1 < \nu_1, \quad \omega_2 < \nu_2, \quad \dots \quad \omega_k < \nu_k,$$

oder es sind sämmtliche, durch angenäherte Werthe der Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$  erlangten Incrementenwerthe gröfser als die unbekannten wahren Incrementenwerthe.

Ferner folgt aus demselben Satze und mit Zuziehung der Ungleichheiten (7.):

$$v_0 - \omega_0 < \frac{\omega_0}{2m}, \quad v_1 - \omega_1 < \frac{\omega_1}{2m}, \quad v_2 - \omega_2 < \frac{\omega_2}{2m}, \quad \dots \quad v_k - \omega_k < \frac{\omega_k}{2m},$$

daher wegen (9.) um so mehr

$$v_0 - \omega_0 < \frac{v_0}{2m}, \quad v_1 - \omega_1 < \frac{v_1}{2m}, \quad v_2 - \omega_2 < \frac{v_2}{2m}, \quad \dots \quad v_k - \omega_k < \frac{v_k}{2m};$$

woraus sich folgende Ungleichheiten ergeben:

$$\begin{aligned} 10. \quad \omega_0 > v_0 \left(1 - \frac{1}{2m}\right), \quad \omega_1 > v_1 \left(1 - \frac{1}{2m}\right), \quad \omega_2 > v_2 \left(1 - \frac{1}{2m}\right), \quad \dots \\ \dots \quad \omega_k > v_k \left(1 - \frac{1}{2m}\right). \end{aligned}$$

Diese Ungleichheiten geben die untern Grenzwerte und die in (9.) aufgestellten zeigen die obern Grenzwerte der Incremente  $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_k$  an. Aus den Unterschieden

$$\frac{v_0}{2m}, \quad \frac{v_1}{2m}, \quad \frac{v_2}{2m}, \quad \dots \quad \frac{v_k}{2m}$$

dieser äufsersten Grenzwerte ersieht man am besten, mit welcher Genauigkeit auch angenäherte Werthe von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$  zur Kenntniß der Incremente führen.

Ferner kann man mit Zuziehung der Ungleichheiten (10.) jedesmal eine Zahl finden, die numerisch kleiner als das kleinste der Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_k$  ist. In der That: es stelle  $v_p$  die kleinste der Gröfsen  $v_0, v_1, v_2, \dots v_k$  vor, so hat man, wenn die ihr unter den Incrementen  $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_k$  entsprechende Gröfse durch  $\omega_p$  ausgedrückt wird, nach (10.) folgende Ungleichheit:

$$\omega_p > v_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right).$$

Ist nun  $\omega_p$  die kleinste der Gröfsen  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_k$ , so stellt der Ausdruck rechter Hand vom Ungleichheitszeichen den angekündigten Zahlenwerth dar. Findet diese Annahme nicht Statt, sondern ist  $\omega_q$  das Minimum unter den Incrementen  $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_k$ , so sei  $v_q$  der diesem Minimum entsprechende Werth unter den Gröfsen  $v_0, v_1, v_2, \dots v_k$ . Dann wird man zuerst vermöge (10.) haben:

$$\omega_q > v_q \left(1 - \frac{1}{2m}\right).$$

Nach der Voraussetzung ist  $v_p < v_q$ , daher auch

$$\omega_q > v_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right).$$

Es ist also, wenn

$$11. \quad \omega = \omega_p \left(1 - \frac{1}{2m}\right)$$

gesetzt wird, diese GröÙe  $\omega$  kleiner als das kleinste der Incremente  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ , falls  $v_p$  die kleinste der durch Rechnung gefundenen GröÙen  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  ist.

10. Die in der vorhergehenden No. gewonnenen Resultate stützen sich sämtlich auf das Statthaben der Ungleichheiten (7.). Diese Ungleichheiten bezeichnen nur immer den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ , damit jene Resultate auch ihre volle Gültigkeit behalten. Wie die Beurtheilung des Genauigkeitsgrades vorzunehmen sei, erhellet aus den folgenden Betrachtungen. Heben wir eine dieser Ungleichheiten, z. B. die folgende

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) h_{p+1}^2 - \varphi_{2m+1}(\alpha_p) h_p^2}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} < \pm 1,$$

heraus, wo  $h_p$  und  $h_{p+1}$  die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln  $\alpha_p$  und  $\alpha_{p+1}$  bedeuten. Nach No. 8. haben die GröÙen  $\varphi_{2m+1}(\alpha_p)$  und  $\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1})$  Resultate mit entgegengesetzten Zeichen: wenn man daher

$$h_p > h_{p+1}$$

voraussetzt, so wird die vorige Ungleichheit um so eher bestehen, wenn man die folgende

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(\alpha_p)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} h_p^2 < \pm 1$$

zu realisiren sucht. Wird hier

$$\alpha_{p+1} = a_{p+1} \mp h_{p+1} \quad \text{und} \quad \alpha_p = a_p \mp h_p$$

gesetzt, wo  $a_{p+1}$  und  $a_p$  die angenäherten Werthe von  $\alpha_{p+1}$  und  $\alpha_p$  sind, so hat man, wenn die dritten Dimensionen der Fehler vernachlässigt werden:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(a_p)}{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)} h_p^2 < \pm 1.$$

Hieraus zieht man zur Beurtheilung des gröÙern der Fehler  $h_p$  und  $h_{p+1}$  folgende Ungleichheit:

$$h_p^2 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)}{\varphi_{2m+1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(a_p)} \right]^2.$$

Die GröÙen  $a_p$  und  $a_{p+1}$  sind immer bekannt; die Werthe von  $h_p$  und  $h_{p+1}$  lassen sich immer schätzen; findet daher die letzte Ungleichheit Statt, so

kann man zur Bestimmung der GröÙe  $v_p$  schreiten; im entgegengesetzten Falle muß man die Fehler  $h_p$  und  $h_{p+1}$  verringern, oder den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Wurzeln  $\alpha_p$  und  $\alpha_{p+1}$  zu erhöhen suchen.

Hat man sich für alle Werthe von  $p = 1$  bis  $p = k-1$  von der Richtigkeit dieser Ungleichheit überzeugt, so kann man zur Berechnung der GröÙen  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$  übergehen. Ferner hat man, ehe zur Berechnung von  $v_0$  geschritten wird, die Richtigkeit folgender Ungleichheit zu untersuchen:

$$h_1^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)}{\varphi_{2m+1}(a_1)} \right]^2,$$

und endlich, ehe man zur Berechnung von  $v_k$  übergeht, muß man folgende Ungleichheit

$$h_k^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)}{\varphi_{2m+1}(a_k)} \right]^2$$

herzustellen suchen.

11. Zum Schlusse wollen wir eine gedrängte Zusammenstellung aller gewonnenen Resultate geben.

Zuerst hat man nach Gleichung III.

$$1. \quad \int_a^b \Phi(x) dx =$$

$$\omega \left[ \frac{1}{2} \Phi(a) + \Phi(a + \omega) + \Phi(a + 2\omega) + \dots + \Phi(a + (n-1)\omega) + \frac{1}{2} \Phi(b) \right] \\ - Y_2 [\Phi_1(b) - \Phi_1(a)] \omega^2 + Y_4 [\Phi_3(b) - \Phi_3(a)] \omega^4 + \dots \\ \dots + (-1)^m Y_{2m} [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)] \omega^{2m},$$

wo  $n$  eine ganze positive Zahl und

$$2. \quad n\omega = b - a$$

ist. Um die GröÙe  $\omega$  anzugeben, damit der nach der obigen Gleichung bestimmte Werth des Integrals nur noch einen Fehler gestatte, der kleiner als eine gegebene GröÙe  $\epsilon_m$  ist, untersuche man, ob die Gleichung

$$3. \quad \Phi_{2m}(x) = 0$$

reelle, innerhalb  $a$  und  $b$  fallende Wurzeln habe, oder nicht.

Im letztern Falle setze man

$$4. \quad Y_{2m}^2 [\Phi_{2m-1}(b) - \Phi_{2m-1}(a)]^2 \omega^{4m} = \epsilon_m^2,$$

so ist der aus dieser Gleichung gefolgerte positive Werth von  $\omega$  der gesuchte.

Im erstern Falle bezeichne man die angenäherten Werthe der Wurzeln der Gleichung (3.) durch

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k,$$

so daß

$$a < a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_k < b.$$

Die numerischen Werthe der Fehler dieser Wurzeln seien in derselben Ordnung durch

$$h_1, h_2, h_3, \dots h_k$$

vorge stellt. Diese angenäherten Wurzelwerthe, sammt den zugehörigen Fehlern, müssen folgenden Bedingungen genügen:

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)}{\varphi_{2m+1}(a_1)} \right]^2, \\ h_2^4 \text{ oder } h_1^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)}{\varphi_{2m+1}(a_2) - \varphi_{2m+1}(a_1)} \right]^2, \\ h_3^4 \text{ oder } h_2^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a_2)}{\varphi_{2m+1}(a_3) - \varphi_{2m+1}(a_2)} \right]^2, \\ \dots \dots \dots \\ h_k^4 \text{ oder } h_{k-1}^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})}{\varphi_{2m+1}(a_k) - \varphi_{2m+1}(a_{k-1})} \right]^2, \\ h_k^4 < 4 \cdot \left[ \frac{\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)}{\varphi_{2m+1}(a_k)} \right]^2. \end{array} \right.$$

In den Ungleichheiten, wo zwei Nachbarsfehler vorkommen, ist jedesmal der numerisch grössere zu nehmen. Hat man diesen Bedingungen Genüge gethan, so schreite man zur Bestimmung der Grössen

$$v_0, v_1, v_2, \dots v_k$$

aus folgenden Gleichungen:

$$6. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)]^2 v_0^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)]^2 v_1^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a_2)]^2 v_2^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ \dots \dots \dots \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})]^2 v_{k-1}^{4m} = \varepsilon_m^2, \\ Y_{2m}^2 [\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)]^2 v_k^{4m} = \varepsilon_m^2. \end{array} \right.$$

Ist  $v_p$  die kleinste dieser Grössen, so ist, wenn

$$7. \quad \omega = v_p \left( 1 - \frac{1}{2m} \right)$$

gesetzt wird, die Grösse  $\omega$  die verlangte.

In der folgenden No. werden wir bei der Behandlung einiger speciellen Fälle jedesmal auf die in dieser No. aufgestellten und eigens bezeichneten Resultate hinweisen.

12. I. Es sei das Integral  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  zur Berechnung vorgelegt. Man hat also

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= e^{-x^2}, \\
\Phi_1(x) &= -2x e^{-x^2}, \\
\Phi_2(x) &= +2(2x^2 - 1)e^{-x^2}, \\
\Phi_3(x) &= -4x(2x^2 - 3)e^{-x^2}, \\
\Phi_4(x) &= +4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}, \\
\Phi_5(x) &= -8x(4x^4 - 20x^2 + 15)e^{-x^2}, \\
\Phi_6(x) &= +8(8x^6 - 60x^4 + 90x^2 - 15)e^{-x^2}, \\
\Phi_7(x) &= -16x(8x^6 - 84x^4 + 210x^2 - 105)e^{-x^2}, \\
\Phi_8(x) &= +16(16x^8 - 224x^6 + 840x^4 - 840x^2 + 105)e^{-x^2}, \\
\Phi_9(x) &= -32x(16x^8 - 288x^6 + 1512x^4 - 2520x^2 + 945)e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

u. s. w

Will man in der Gleichung (1.) mit dem Gliede, welches dem Zeiger  $m = 3$  entspricht, die Rechnung abbrechen, so suche man nach der Gleichung (3.) die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_8(x) = 0$$

auf. Diese Wurzeln können im gegenwärtigen Falle nur in der folgenden Gleichung vorkommen:

$$a. \quad 16x^8 - 224x^6 + 840x^4 - 840x^2 + 105 = 0.$$

Setzt man hier  $2x^2 = y$ , so hat man

$$y^4 - 28y^3 + 210y^2 - 420y + 105 = 0.$$

Diese Gleichung hat die vier Wurzeln reell und positiv. Dieselben sind zwischen 0 und 1, zwischen 2 und 3, zwischen 7 und 8, und endlich zwischen 17 und 18 enthalten. Bestimmt man die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel etwas näher, so überzeugt man sich, daß dieselbe zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  enthalten sei. Es liegen somit die positiven Wurzeln der vorgelegten Gleichung zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$ , zwischen 1 und  $1'224\dots$ , zwischen  $1'870\dots$  und 2, und endlich zwischen  $2'915\dots$  und 3. Setzen wir demnach

$$b. \quad a_1 = \frac{3}{10}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3,$$

wo also  $a_1, a_2, a_3, a_4$  angenäherte Werthe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung (a.) sind, so hat man

$$c. \quad h_1 < \frac{3}{10}, \quad h_2 < \frac{2'24}{10'00}, \quad h_3 < \frac{1'30}{10'00}, \quad h_4 > \frac{8'5}{10'00},$$

wo  $h_1, h_2, h_3, h_4$  die Fehler dieser angenäherten Werthe sind.

Setzt man diese Werthe von  $a_1, a_2, a_3, a_4$  in die Ungleichheiten (5.), so hat man:

$$h_1^2 < \frac{86'774568}{730'23829776},$$

$$h_2^2 < \frac{\frac{29}{e} + \frac{3}{10} \cdot \frac{86'774568}{e^{0'09}}}{\frac{335}{e} + \frac{3}{10} \cdot \frac{730'23829776}{e^{0'09}}},$$

$$h_3^2 < \frac{2 \cdot \frac{97}{e^4} + \frac{29}{e}}{2 \cdot \frac{721}{e^4} + \frac{335}{e}},$$

$$h_4^2 < \frac{813}{4239},$$

oder man muß

$$h_1^2 < 0'118 \dots \quad \text{oder} \quad h_1 < 0'34 \dots$$

$$h_2^2 < 0'106 \dots \quad - \quad h_2 < 0'32 \dots$$

$$h_3^2 < 0'095 \dots \quad - \quad h_3 < 0'30 \dots$$

$$h_4^2 < 0'191 \dots \quad - \quad h_4 < 0'43 \dots$$

haben. Nun finden diese Ungleichheiten nach (c) Statt; daher kann man mit den obigen Werthen von  $a_1, a_2, a_3, a_4$  die Rechnung beginnen. Setzt man also in (b.)  $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$  und berücksichtigt den in No. 3. angeführten Werth von  $Y_8$ , so hat man, da  $m = 4$  ist, wegen

$$\varphi_7(a_1) = 380'669, \quad \varphi_7(a_2) = -170'696,$$

$$\varphi_7(a_3) = +56'852, \quad \varphi_7(a_4) = -4'819$$

und wegen

$$\varphi_7(a) = 0, \quad \varphi_7(b) = 0$$

folgende Werthe für  $v_1, v_2, v_3, v_4$ :

$$v_0 = 0'365394 \dots$$

$$v_1 = 0'348859 \dots$$

$$v_2 = 0'389669 \dots$$

$$v_3 = 0'458744 \dots$$

$$v_4 = 0'630950 \dots$$

Da  $v_1$  den kleinsten Werth hat, so ist nach (7.)

$$\omega = v_1(1 - \frac{1}{8}) = 0'305251 \dots$$

Erklären wir uns für  $\omega = \frac{3}{10}$ , so hat man nach (1.)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \omega \left( \frac{1}{2} + e^{-\omega^2} + e^{-(2\omega)^2} + e^{-(3\omega)^2} + e^{-(4\omega)^2} + \dots \right).$$

Sämmtliche Glieder der Correctionsreihe gehen hier in Nullen über. Die Reihe innerhalb der Klammern dieser Gleichung ist so lange fortzusetzen, bis man auf Glieder, kleiner als  $\varepsilon_m$  oder  $\frac{1}{10^7}$ , stößt.

Mit Zuziehung einer siebenstelligen Logarithmentafel findet man wegen  $\log e = 0'43429448 \dots$  folgende Resultate:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2} = 0'5000000, & e^{-(7\omega)^2} = 0'0121552, \\
e^{-\omega^2} = 0'9139310, & e^{-(8\omega)^2} = 0'0031511, \\
e^{-(2\omega)^2} = 0'6976763, & e^{-(9\omega)^2} = 0'0006823, \\
e^{-(3\omega)^2} = 0'4448581, & e^{-(10\omega)^2} = 0'0001234, \\
e^{-(4\omega)^2} = 0'2369277, & e^{-(11\omega)^2} = 0'0000186, \\
e^{-(5\omega)^2} = 0'1053992, & e^{-(12\omega)^2} = 0'0000024, \\
e^{-(6\omega)^2} = 0'0391639, & e^{-(13\omega)^2} = 0'0000002.
\end{array}$$

Addirt man die Zahlen rechter Hand der Gleichheitszeichen, so ergibt sich:

$$2'9540894.$$

Diesen Zahlen-Ausdruck mit  $\omega = \frac{1}{10}$  multiplicirt, giebt

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 0'88622682 \dots$$

Bekanntlich ist der Werth dieses bestimmten Integrals  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , und wenn dieser Ausdruck in Zahlen gegeben wird, hat man

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0'88622692 \dots$$

Es differiren die zwei Werthe um  $\frac{1}{10^7} = \varepsilon_m$ . Diese Abweichung kann jedoch nur von der Unsicherheit herrühren, mit der man die siebente Decimalstelle in einer siebenstelligen Logarithmentafel findet.

II. Als zweites Beispiel legen wir uns das Integral  $\int_0^1 e^{-(x+\frac{1}{x})} dx$  zur Berechnung vor.

Es ist hier

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= e^{-(x+\frac{1}{x})}, \\
\varphi_1(x) &= -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})}, \\
\varphi_2(x) &= +\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})}, \\
\varphi_3(x) &= -\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5} - \frac{1}{x^6}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})}, \\
\varphi_4(x) &= +\left(1 - \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4} + \frac{32}{x^5} - \frac{12}{x^7} + \frac{1}{x^8}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})}, \\
\varphi_5(x) &= -\left(1 - \frac{5}{x^2} - \frac{20}{x^3} - \frac{50}{x^4} - \frac{60}{x^5} + \frac{50}{x^6} + \frac{180}{x^7} - \frac{115}{x^8} + \frac{20}{x^9} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{x^{10}}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})},
\end{aligned}$$

$$\varphi_6(x) = + \left( 1 - \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3} - \frac{105}{x^4} - \frac{240}{x^5} + \frac{200}{x^6} + \frac{540}{x^7} - \frac{1095}{x^8} - \frac{1080}{x^9} \right. \\ \left. + \frac{294}{x^{10}} - \frac{30}{x^{11}} + \frac{1}{x^{12}} \right) e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_7(x) = - \left( 1 - \frac{7}{x^2} - \frac{42}{x^3} - \frac{189}{x^4} - \frac{630}{x^5} - \frac{1295}{x^6} - \frac{420}{x^7} + \frac{5075}{x^8} + \frac{7140}{x^9} \right. \\ \left. - \frac{10521}{x^{10}} + \frac{3990}{x^{11}} - \frac{623}{x^{12}} + \frac{42}{x^{13}} - \frac{1}{x^{14}} \right) e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)},$$

u. s. w.

Will man in der Gleichung (1.) mit dem Gliede, dessen Zeiger  $m = 3$  ist, schließen, so suche man die zwischen 0 und 1 enthaltenen positiven Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_6(x) = 0$$

auf. Diese Wurzeln können nur in folgender Gleichung vorkommen;

$$a'. \quad 0 = 1 - \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3} - \frac{105}{x^4} - \frac{240}{x^5} - \frac{200}{x^6} + \frac{540}{x^7} + \frac{1095}{x^8} - \frac{1080}{x^9} \\ + \frac{294}{x^{10}} - \frac{30}{x^{11}} + \frac{1}{x^{12}}.$$

Setzt man hierin  $x = \frac{1}{y}$ , so ist zu untersuchen, ob die Gleichung

$$y^{12} - 30y^{11} + 294y^{10} - 1080y^9 + 1095y^8 + 540y^7 - 200y^6 - 240y^5 \\ - 105y^4 - 30y^3 - 6y^2 + 1 = 0$$

positive Wurzeln besitze, welche die Einheit übertreffen.

Man überzeugt sich nach dem Fourierschen Theorem (A.), daß die Gleichung nur 4 solche Wurzeln haben kann. Man findet dieselben auf gewöhnlichem Wege, zwischen 2 und 4, zwischen 4 und 5, zwischen 8 und 9, und zwischen 14 und 15 enthalten. Es liegen somit die verlangten Wurzeln der Gleichung (a') zwischen  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{3}$ , zwischen  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{5}$ , zwischen  $\frac{1}{8}$  und  $\frac{1}{9}$ , und zwischen  $\frac{1}{14}$  und  $\frac{1}{15}$ . Setzt man also

$$b'. \quad a_1 = \frac{1}{100}, \quad a_2 = \frac{1}{10}, \quad a_3 = \frac{1}{100}, \quad a_4 = \frac{1}{10},$$

so hat man

$$c'. \quad h_1 < \frac{1}{100}, \quad h_2 < \frac{1}{1000}, \quad h_3 < \frac{1}{100}, \quad h_4 < \frac{1}{10}.$$

Werden diese Werthe von  $a_1, a_2, a_3, a_4$  in die Ungleichheiten (5.) substituirt, so ergibt sich

$$(d'). \quad \begin{cases} h_1^2 < 0'000533 \dots & \text{oder} & h_1 < 0'023 \dots \\ h_2^2 < 0'000484 \dots & \text{oder} & h_2 < 0'022 \dots \\ h_3^2 < 0'000560 \dots & \text{oder} & h_3 < 0'023 \dots \\ h_4^2 < 0'002024 \dots & \text{oder} & h_4 < 0'0449 \dots \end{cases}$$

Diese Grenzwerte von  $h_1$  und  $h_2$  finden in der That, vermöge der Ungleichheiten ( $c'$ ), Statt. Hingegen ist erst zu zeigen nöthig, daß die Grenzwerte von  $h_3$  und  $h_4$  ebenfalls noch bestehen; denn die Ungleichheiten ( $c'$ ) zeigen  $h_3 < \frac{5}{1000}$ ; hieraus aber folgt noch nicht, daß  $h_3 < \frac{2}{1000}$  sei. Ein Gleiches gilt von  $h_4$ . Um über diesen Punkt ins Klare zu kommen, untersuche man etwas näher jene Wurzeln der Gleichung in  $y$ , die zwischen 4 und 5 und zwischen 2 und 3 liegen.

Da die erste dieser Wurzeln zwischen 4 und 5 liegt, so substituire man im Ausdrucke linker Hand vom Gleichheitszeichen  $y = 4$ ,  $y = 4\frac{1}{2}$ ,  $y = 5$ . Die Resultate dieser Substitutionen bekommen in gleicher Ordnung folgende Zeichen: —, —, +. Daher liegt die Wurzel zwischen  $4\frac{1}{2}$  und 5. Es hat mithin die Gleichung ( $a'$ ) eine zwischen  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{1}{3}$  enthaltene Wurzel, oder die Grenzen dieser Wurzel sind

$$0'222\dots \quad \text{und} \quad 0'2,$$

Es differirt also unsere Annahme  $a_3 = \frac{2}{10}$  um eine Größe, die kleiner als  $0'022\dots$  ist, oder man kann in den Ungleichheiten ( $c'$ )

$$h_3 < \frac{2}{1000}$$

voraussetzen; woraus die dritte der Ungleichheiten ( $d'$ ) gerechtfertigt erscheint.

Auf gleiche Weise habe ich mich überzeugt, daß die Annahme  $a_4 = \frac{4}{10}$  einen Fehler  $h_4$  hervorbringt, der kleiner als  $0'0444\dots$  ist; wodurch die Existenz der vierten dieser Ungleichheiten dargethan wird.

Nunmehr können wir zur Bestimmung von  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  aus den Gleichungen (6.) übergehen. Wir haben bei Gelegenheit der Ausmittelung der Ungleichheiten ( $d'$ ) folgende Resultate erhalten:

$$\begin{aligned} \Phi_5(a_1) &= 15705, & \Phi_5(a_2) &= -14110, \\ \Phi_5(a_3) &= 5531, & \Phi_5(a_4) &= -285. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\Phi_5(0) = 0, \quad \Phi_5(1) = 0,$$

Wenn daher, wie im vorhergehenden Beispiele,  $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$  angenommen und erwogen wird, daß vermöge der hier angegebenen Werthe von  $\Phi_5(a_1), \Phi_5(a_2), \dots$  die Größe  $v_1$  die numerisch kleinste sein muß, um deren Kenntniß einzig und allein es zu thun ist, so kann man die Größen  $v_0, v_2, v_3, v_4$  unbeachtet lassen und bloß aus der zweiten der Gleichungen (6.)

diese kleinste GröÙe  $v_1$  bestimmen. Man findet

$$v_1 = 0'06829 \dots$$

Daher nach (7.)

$$\omega = v_1(1 - \frac{1}{2}) = 0'05690 \dots$$

Setzen wir in (I.)  $\omega = \frac{1}{180} = \frac{1}{20}$ , so hat man

$$\int_0^1 e^{-(x + \frac{1}{x})} dx = \omega \left[ e^{-(\omega + \frac{1}{\omega})} + e^{-(2\omega + \frac{1}{2\omega})} + \dots + e^{-(19\omega + \frac{1}{19\omega})} + \frac{1}{2} e^{-2} \right] \\ - Y_2 \Phi_1(1) \omega^2 + Y_4 \Phi_3(1) \omega^4 - Y_6 \Phi_5(1) \omega^6.$$

Berechnet man die in der ersten Zeile innerhalb der Klammern enthaltenen Glieder mit 7 Decimalstellen, so findet sich:

$e^{-(\omega + \frac{1}{\omega})} = 0'0000000,$	$e^{-(11\omega + \frac{1}{11\omega})} = 0'0936508,$
$e^{-(2\omega + \frac{1}{2\omega})} = 0'0000411,$	$e^{-(12\omega + \frac{1}{12\omega})} = 0'1036571,$
$e^{-(3\omega + \frac{1}{3\omega})} = 0'0010954,$	$e^{-(13\omega + \frac{1}{13\omega})} = 0'1120891,$
$e^{-(4\omega + \frac{1}{4\omega})} = 0'0055166,$	$e^{-(14\omega + \frac{1}{14\omega})} = 0'1190072,$
$e^{-(5\omega + \frac{1}{5\omega})} = 0'0142642,$	$e^{-(15\omega + \frac{1}{15\omega})} = 0'1245145,$
$e^{-(6\omega + \frac{1}{6\omega})} = 0'0264279,$	$e^{-(16\omega + \frac{1}{16\omega})} = 0'1287350,$
$e^{-(7\omega + \frac{1}{7\omega})} = 0'0404721,$	$e^{-(17\omega + \frac{1}{17\omega})} = 0'1318000,$
$e^{-(8\omega + \frac{1}{8\omega})} = 0'0550232,$	$e^{-(18\omega + \frac{1}{18\omega})} = 0'1338400,$
$e^{-(9\omega + \frac{1}{9\omega})} = 0'0690985,$	$e^{-(19\omega + \frac{1}{19\omega})} = 0'1349796,$
$e^{-(10\omega + \frac{1}{10\omega})} = 0'0820850,$	$\frac{1}{2} e^{-2} = 0'0676676.$

Addirt man diese Zahlen-Ausdrücke und multiplicirt die Summe mit  $\omega = \frac{1}{20}$ , so erhält man:

$$0'072198245.$$

Ferner hat man wegen  $\Phi_1(1) = 0$ ,  $\Phi_5(1) = 0$  bloß das Glied:  $+ Y_4 \Phi_3(1) \omega^4$  zu berechnen und zur eben gefundenen Zahl hinzuzufügen. Dieser Zahlenwerth ist:

$$0'00000007048 \dots$$

Es beginnt also der Einfluß der Correctionsreihe erst in der neunten Decimalstelle und man hat

$$\int_0^1 e^{-(x+\frac{1}{x})} dx = 0'07219825 \dots$$

Wird die siebente Decimalstelle durch die achte corrigirt, so hat man

$$\int_0^1 e^{-(x+\frac{1}{x})} dx = 0'0721983.$$

Der bei diesem Resultate mögliche Fehler ist kleiner als  $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ . Aus der letzten Gleichung folgt auch die folgende:

$$\int_0^\infty e^{-(x+\frac{1}{x})} dx = 0'2797318;$$

welche denselben Genauigkeitsgrad besitzt.

Zürich, im October 1836.