

Ueber die Determinante, deren Elemente die Quadrate der sechszehn Verbindungslinien der Eckpunkte zweier beliebiger Tetraeder sind.

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

I.

Das Product der Volumina zweier beliebiger Tetraeder P und Π kann bekanntlich als rationale Function der Quadrate der sechszehn Verbindungslinien der Eckpunkte der beiden Tetraeder und zwar in Determinantenform ausgedrückt werden. Sind nämlich $E_1 E_2 E_3 E_4$ und $E_1 E_2 E_3 E_4$ die Ecken von P und Π und bezeichnet man das Quadrat der Strecke $E_i E_k$ durch e_{ik} so ist, wie bekannt,

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 288 E_1 E_2 E_3 E_4 \cdot E_1 E_2 E_3 E_4.$$

Aus dieser Gleichung leitet man, indem man beide Tetraeder congruiren lässt, u. A. unmittelbar die Gleichung her, welche das Volumen eines Tetraeders durch seine sechs Kanten ausdrückt. Der betreffenden Formel steht aber bekanntlich eine andere von *Crelle* (math. Aufs.), *Joachimsthal* (Bd. 40 d. J.), *v. Staudt* (Bd. 47 d. J.) behandelte gegenüber, mittelst welcher das Product Pr (wo r der Halbmesser der dem P umschriebenen Kugel) durch die sechs Kanten des Tetraeders ausgedrückt wird. Zu dieser letzteren Formel lässt sich aber, wie ich sogleich zeigen werde, ebenfalls eine allgemeinere finden, vermöge welcher, wenn ρ der Radius der dem Π umschriebenen Kugel ist, das Product $Pr \cdot \Pi \rho$ (in ähnlicher Weise, wie das Product $P\Pi$ in obiger Gleichung) durch eine aus den Quadraten jener sechszehn Linien gebildete Determinante und durch den Winkel, unter welchem sich die beiden Kugeln schneiden, in einfachster Weise ausgedrückt werden kann. Nennen wir nämlich diesen Winkel φ , so behaupten wir, dass

$$(2.) \quad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 576Pr. IIq. \cos \varphi.$$

Nehmen wir, um dies zu beweisen, ein rechtwinkliges Coordinatensystem an und nennen x_i, y_i, z_i die Coordinaten von E_i ; ξ_i, η_i, ζ_i die Coordinaten von E_i , seien endlich a, b, c und α, β, γ die Coordinaten der Mittelpunkte C und I' der dem P und II umschriebenen Kugeln, so erhalten wir zunächst für das Quadrat der Centralen CI' die Gleichung

$$(3.) \quad (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2 = r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho \cos \varphi.$$

Ferner ist

$$(4.) \quad (x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2 + (z_i - \zeta_k)^2 = e_{ik},$$

$$(5.) \quad (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2 = r^2,$$

$$(5^*.) \quad (\xi_k - \alpha)^2 + (\eta_k - \beta)^2 + (\zeta_k - \gamma)^2 = \varrho^2.$$

Durch Addition von (3.) und (4.), ferner von (5.) und (5*.), und nachherige Subtraction erhält man

$$(6.) \quad (x_i - \alpha)(\xi_k - \alpha) + (y_i - \beta)(\eta_k - \beta) + (z_i - \gamma)(\zeta_k - \gamma) + r\varrho \cos \varphi = -\frac{1}{2} e_{ik}.$$

Letztere Gleichung bildet das Schema für sechszehn Gleichungen, welche man erhält, wenn man den Indices allmählig sämtliche Werthe von 1 bis 4 ertheilt. Aus diesen sechszehn Gleichungen ergibt sich aber unter Benutzung des Multiplicationstheorems für Determinanten, die nachfolgende

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e_{11} & -\frac{1}{2}e_{12} & -\frac{1}{2}e_{13} & -\frac{1}{2}e_{14} \\ -\frac{1}{2}e_{21} & -\frac{1}{2}e_{22} & -\frac{1}{2}e_{23} & -\frac{1}{2}e_{24} \\ -\frac{1}{2}e_{31} & -\frac{1}{2}e_{32} & -\frac{1}{2}e_{33} & -\frac{1}{2}e_{34} \\ -\frac{1}{2}e_{41} & -\frac{1}{2}e_{42} & -\frac{1}{2}e_{43} & -\frac{1}{2}e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r \cos \varphi & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & z_1 - \gamma \\ r \cos \varphi & x_2 - \alpha & y_2 - \beta & z_2 - \gamma \\ r \cos \varphi & x_3 - \alpha & y_3 - \beta & z_3 - \gamma \\ r \cos \varphi & x_4 - \alpha & y_4 - \beta & z_4 - \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho & \xi_1 - \alpha & \eta_1 - \beta & \zeta_1 - \gamma \\ \varrho & \xi_2 - \alpha & \eta_2 - \beta & \zeta_2 - \gamma \\ \varrho & \xi_3 - \alpha & \eta_3 - \beta & \zeta_3 - \gamma \\ \varrho & \xi_4 - \alpha & \eta_4 - \beta & \zeta_4 - \gamma \end{vmatrix}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} r\varrho \cos \varphi.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich aber ohne Weiteres die Gleichung (2.); und zwar erhalten wir aus der letzteren durch Benutzung von (1.) zugleich die nachfolgende

$$(7.) \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{2rq \cos \varphi} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

III.

Die Gleichung (2.) giebt zunächst folgenden bemerkenswerthen Satz:
Drehen sich zwei Tetraeder auf beliebige Weise um die als unbeweglich gedachten Mittelpunkte der ihnen umschriebenen Kugeln, so behält die Determinante

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix}$$

beständig denselben Werth.

Lassen wir ferner beide Tetraeder congruiren, indem wir $e_{ik} = e_{ki}$, $e_{ii} = 0$, $\cos \varphi = -1$ setzen, so erhalten wir aus (2.) die schon oben erwähnte bekannte Gleichung

$$(8.) \quad \begin{vmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{12} & 0 & e_{23} & e_{24} \\ e_{13} & e_{23} & 0 & e_{34} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} & 0 \end{vmatrix} = -576P^2r^2,$$

in welcher sich bekanntlich die Determinante in vier Factoren zerlegen lässt. Ebenso giebt auch die Formel (7.) einen Ausdruck für den Radius der dem P umschriebenen Kugel.

Setzen wir in (2.) $\cos \varphi = +1$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die äussere Berührung, setzen wir $\cos \varphi = -1$, die für die innere Berührung der beiden Kugeln. Durch Verbindung von (2.) mit (8.) erhält man so eine Bedingungsgleichung, welche sämtliche acht und zwanzig Verbindungslinien der acht Punkte $E_1E_2E_3E_4$, $E_1E_2E_3E_4$ enthält. Bezeichnen wir nämlich durch ∂_{ik} das Quadrat von E_iE_k , und durch ∂'_{ik} das Quadrat von E_iE_k , so heisst diese Gleichung

$$(9.) \quad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 0 & \partial_{12} & \partial_{13} & \partial_{14} \\ \partial_{12} & 0 & \partial_{23} & \partial_{24} \\ \partial_{13} & \partial_{23} & 0 & \partial_{34} \\ \partial_{14} & \partial_{24} & \partial_{34} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \partial'_{12} & \partial'_{13} & \partial'_{14} \\ \partial'_{12} & 0 & \partial'_{23} & \partial'_{24} \\ \partial'_{13} & \partial'_{23} & 0 & \partial'_{34} \\ \partial'_{14} & \partial'_{24} & \partial'_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lassen wir in (2.) E_1 mit E_1 , E_2 mit E_2 , E_3 mit E_3 , nicht aber E_4 mit E_4 zusammenfallen und setzen $\cos \varphi = -1$, so erhalten wir in Verbindung mit (8.) eine Bedingungsgleichung dafür, dass die fünf Punkte $E_1 E_2 E_3 E_4 E_4$ auf der Oberfläche einer Kugel liegen. Diese Gleichung enthält nur die zehn Verbindungslinien jener fünf Punkte und muss daher mit der von *Cayley* für diesen Fall gefundenen Bedingungsgleichung dem Wesen nach übereinstimmen, obwohl sie der äusseren Form nach von ihr verschieden ist.

III.

Als der bemerkenswerthe unter den besonderen Fällen, welche die Gleichung (2.) umfasst, erscheint derjenige, in welchem $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Wir erhalten dann den Satz: *Sind die beiden den Tetraedern P und Π umschriebenen Kugeln orthogonal, so ist die Determinante*

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

und umgekehrt: *ist diese Determinante = 0, so sind die beiden Kugeln orthogonal.* Das letztere folgt daraus, dass in dem Product $Pr \cdot \Pi q \cdot \cos \varphi$ einer der beiden Factoren Pr und Πq nur dann gleich Null sein kann, wenn die Ecken des betreffenden Tetraeders in einem Kreise liegen, (denn liegen die vier Ecken in einer Ebene und nicht in einem Kreise, so ist zwar das betreffende Tetraeder gleich Null, dagegen der Radius der Kugel unendlich gross, das Product Pr aber hat dann immer noch einen endlichen Werth). Liegen aber die vier Ecken in einem Kreise, so lässt sich durch letzteren doch stets eine Kugel legen, welche der anderen orthogonal ist.

Bezeichnen wir nun den Coefficienten von e_{ik} in der Entwicklung der Determinante

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} \text{ durch } \epsilon_{ik}, \text{ so ist beispielsweise}$$

$$\varepsilon_{12} = - \begin{vmatrix} e_{21} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix},$$

folglich mit Berücksichtigung von (6.) (wenn man dort $\cos \varphi = 0$ setzt) und mit Anwendung des Multiplicationsgesetzes für Determinanten

$$\frac{1}{8}\varepsilon_{12} = \begin{vmatrix} x_2-\alpha & y_2-\beta & z_2-\gamma \\ x_3-\alpha & y_3-\beta & z_3-\gamma \\ x_4-\alpha & y_4-\beta & z_4-\gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1-a & \eta_1-b & \zeta_1-c \\ \xi_3-a & \eta_3-b & \zeta_3-c \\ \xi_4-a & \eta_4-b & \zeta_4-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Demnach ist

$$\varepsilon_{12} = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot C E_1 E_3 E_4 = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot C E_3 E_4 E_1.$$

Eben solche Ausdrücke erhält man für die übrigen ε und zwar ist

$$(10.) \begin{cases} -\varepsilon_{11} = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot C E_2 E_3 E_4, & -\varepsilon_{21} = 288 E_1 I E_3 E_4 \cdot C E_2 E_3 E_4, \\ -\varepsilon_{12} = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot E_1 C E_3 E_4, & -\varepsilon_{22} = 288 E_1 I E_3 E_4 \cdot E_1 C E_3 E_4, \\ -\varepsilon_{13} = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot E_1 E_2 C E_4, & -\varepsilon_{23} = 288 E_1 I E_3 E_4 \cdot E_1 E_2 C E_4, \\ -\varepsilon_{14} = 288 I E_2 E_3 E_4 \cdot E_1 E_2 E_3 C, & -\varepsilon_{24} = 288 E_1 I E_3 E_4 \cdot E_1 E_2 E_3 C \end{cases} \quad \text{etc. etc.}$$

übereinstimmend mit dem bekannten Satze, wonach, wenn die Determinante verschwindet, sein muss

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \varepsilon_{13} : \varepsilon_{14} = \varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \varepsilon_{23} : \varepsilon_{24} = \text{etc.}$$

Vorstehendes kann als Grundlage für die Untersuchung desjenigen Coordinatensystems dienen, in welchem, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 die Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes E im Raume von den vier festen Punkten E_1, E_2, E_3, E_4 sind, die Gleichung einer beliebigen Fläche durch eine *homogene* Function der x ausgedrückt wird. Nach einem bekannten Satze (von *Bodenmiller*, bewiesen u. A. von *Möbius*, *Schlömilch* und *Chasles*) giebt es in einer Ebene immer zwei (reelle oder imaginäre) Punkte von der Beschaffenheit, dass ihre Entfernungen von drei festen Punkten derselben Ebene sich wie drei beliebige gegebene Zahlen verhalten, und zwar liegen diese beiden Punkte mit dem Mittelpunkt des durch jene drei festen Punkte gehenden Kreises in gerader Linie und der eine derselben ist der Pol des anderen (im *Plückerschen* Sinne). Ein entsprechender Satz gilt auch für den Raum, nämlich für vier feste Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 und die durch sie gelegte Kugel, und es würden sonach bestimmten Werthen von x_1, x_2, x_3, x_4 nach obiger Coordinatenbestimmung im Allgemeinen immer zwei Punkte, ein ausserhalb

und ein innerhalb liegender, entsprechen, von denen der eine aus dem anderen immer leicht bestimmt werden kann.

Dies vorausgeschickt, so folgt aus dem Obigen, dass durch eine *homogene Gleichung des ersten Grades*, etwa

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = 0$$

in obigem Coordinatensystem *eine Kugel vorgestellt* wird, welche der durch $E_1E_2E_3E_4$ gehenden Kugel *orthogonal* ist. Aus den oben für die ε gefundenen Werthen folgt nun, dass die Constanten A_1, A_2, A_3, A_4 in demselben Verhältnisse stehen, wie die Tetraeder $\Gamma E_2E_3E_4, \Gamma E_3E_4E_1, \Gamma E_4E_1E_2, \Gamma E_1E_2E_3$ und somit diese Constanten weiter nichts sind, als die Coordinaten des Mittelpunktes der orthogonalen Kugel nach dem gewöhnlichen Coordinatensystem. Eine allgemeine Untersuchung, insbesondere derjenigen Oberflächen, welche nach diesem Coordinatensystem durch eine homogene Function zweiten Grades vorgestellt werden, dürfte um so interessantere Resultate versprechen, als aus dem Obigen hervorgeht, dass, wenn wir auch hier den Dualismus in Betreff der Oberflächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse zur Geltung bringen, die Oberflächen zweiter Klasse nach unserm Coordinatensystem mit den Oberflächen zweiter Ordnung nach dem gewöhnlichen System übereinstimmen würden.

Schliesslich bleibe nicht unerwähnt, dass, wenn wir E_4 zum Mittelpunkt der durch $E_1E_2E_3E_4$ gehenden Kugel machen, so dass also die durch $E_1E_2E_3E_4$ gehende der anderen orthogonale Kugel in die Ebene eines grössten Kreises ausartet, die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0$$

in folgende

$$(11.) \quad \begin{vmatrix} 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} \end{vmatrix} = 0$$

übergeht. Letzteres ist also die Bedingung dafür, dass die Punkte $E_1E_2E_3$ in der Ebene eines grössten Kreises der durch $E_1E_2E_3E_4$ gelegten Kugel liegen.

IV.

Aus der Gleichung (2.) lassen sich auch interessante Relationen, welche das Product der sinus zweier Raumwinkel und die ihnen umschriebenen normalen Kegel betreffen, ableiten. Um auch hier wieder das Hauptresultat voranstellen zu können, wollen wir durch $E_1 E_2 E_3$ und $E_1 E_2 E_3$ die beiden dreiseitigen Ecken bezeichnen, deren Kanten einen beliebigen Punkt O des Raumes mit $E_1 E_2 E_3$, $E_1 E_2 E_3$ verbinden; ferner werde der Winkel $E_i O E_k$ durch e_{ik} bezeichnet, und durch r' und φ' die Winkel, welche die Achsen der jenen beiden Ecken umschriebenen geraden Kegel mit den Seiten der letzteren bilden. Wir behaupten dann, dass analog der Gleichung (2.)

$$(12.) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos e_{11} & \cos e_{12} & \cos e_{13} \\ 1 & \cos e_{21} & \cos e_{22} & \cos e_{23} \\ 1 & \cos e_{31} & \cos e_{32} & \cos e_{33} \end{vmatrix} = \sin E_1 E_2 E_3 \tan g r' \cdot \sin E_1 E_2 E_3 \tan g \varphi' \cdot \cos \psi,$$

wo ψ der Winkel ist, unter welchem sich die beiden Kegel schneiden.

Lassen wir nämlich in der Gleichung (2.) die Punkte E_4 und E_4 mit O zusammenfallen und sei O der Mittelpunkt einer Kugel, deren Radius = 1 und auf deren Fläche sich die Punkte $E_1 E_2 E_3 E_1 E_2 E_3$ befinden, so verwandelt sich die auf der linken Seite der Gleichung (2.) stehende Determinante, wenn man in derselben die letzte Horizontal- und Verticalreihe zur ersten Horizontal- und Verticalreihe macht, in

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{11} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{12} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{13} \\ 1 & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{21} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{22} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{23} \\ 1 & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{31} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{32} & 4 \sin^2 \frac{1}{2} e_{33} \end{vmatrix}.$$

welche durch eine leichte Reduction auf die Form

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos e_{11} & \cos e_{12} & \cos e_{13} \\ 1 & \cos e_{21} & \cos e_{22} & \cos e_{23} \\ 1 & \cos e_{31} & \cos e_{32} & \cos e_{33} \end{vmatrix}$$

gebracht wird. Die Gleichung (2.) hat somit schon folgende Form angenommen:

$$(13.) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos e_{11} & \cos e_{12} & \cos e_{13} \\ 1 & \cos e_{21} & \cos e_{22} & \cos e_{23} \\ 1 & \cos e_{31} & \cos e_{32} & \cos e_{33} \end{vmatrix} = 144 Pr. \Pi q \cdot \cos \varphi,$$

und es bleibt nur noch übrig, den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck umzuformen. Denke man sich daher durch $OE_1E_2E_3$ und $OE_1E_2E_3$ normale Kegel mit der Spitze O gelegt, und bezeichne die Winkel, welche die Achsen OB und OB derselben mit den Seiten bilden, durch r' und φ' ; sei ferner OF eine der beiden Durchschnittslinien der Kegel, so ist zunächst, da die Mittelpunkte C und I' der beiden durch $OE_1E_2E_3$ und $OE_1E_2E_3$ gehenden Kugeln in OB und OB liegen, der Winkel $COI' = 180^\circ - \varphi$, und folglich

$$(14.) \quad -\cos \varphi = \cos r' \cos \varphi' - \sin r' \sin \varphi' \cos \psi.$$

Verbindet man nun C und I' mit der Mitte M von OF , so sind COM und $I'OM$ rechtwinklige Dreiecke, und es ist somit, da $CO = r$, $I'O = \varrho$, $OM = \frac{1}{2}$ ist,

$$(15.) \quad r = \frac{1}{2 \cos r'}, \quad \varrho = \frac{1}{2 \cos \varphi'}.$$

Aus (14.) und (15.) folgt somit, dass

$$(16.) \quad 4r\varrho \cos \varphi = -1 + \tan r' \tan \varphi' \cos \psi.$$

Ausserdem aber ist $PII = 36 \sin E_1 E_2 E_3 \sin E_1 E_2 E_3$, welche Gleichung mit (16.) und (13.) zusammengestellt, die Gleichung (12.) giebt.

Die letztere wäre somit bewiesen, und es lässt sich auch aus ihr, gerade so wie (7.) aus (2.), eine Gleichung herleiten, in welcher die Sinus der Raumwinkel nicht mehr vorkommen. Nach *v. Staudt* ist nämlich

$$\begin{vmatrix} \cos \epsilon_{11} & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ \cos \epsilon_{21} & \cos \epsilon_{22} & \cos \epsilon_{23} \\ \cos \epsilon_{31} & \cos \epsilon_{32} & \cos \epsilon_{33} \end{vmatrix} = \sin E_1 E_2 E_3 \cdot \sin E_1 E_2 E_3.$$

Dies in Verbindung mit (12.) giebt

$$(17.) \quad \begin{vmatrix} 1 - \tan r' \tan \varphi' \cos \psi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos \epsilon_{11} & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ 1 & \cos \epsilon_{21} & \cos \epsilon_{22} & \cos \epsilon_{23} \\ 1 & \cos \epsilon_{31} & \cos \epsilon_{32} & \cos \epsilon_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir leiten schliesslich aus (12.) und (17.) folgende Resultate her:

1) Lässt man die beiden Raumwinkel congruiren, so erhält man aus (17.)

$$(18.) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos^2 r'} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ 1 & \cos \epsilon_{12} & 1 & \cos \epsilon_{23} \\ 1 & \cos \epsilon_{13} & \cos \epsilon_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und aus (12.)

$$(19.) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ 1 & \cos \epsilon_{12} & 1 & \cos \epsilon_{23} \\ 1 & \cos \epsilon_{13} & \cos \epsilon_{23} & 1 \end{vmatrix} = -\sin^2 E_1 E_2 E_3 \cdot \tan^2 r'.$$

2) Bezeichnen wir durch \mathfrak{d}_{ik} und \mathfrak{d}'_{ik} die Winkel $E_i OE_k$ und $E_i OE'_k$, so erhalten wir aus (12.) in Verbindung mit (19.) die der (9.) entsprechende Bedingungsgleichung für die Berührung der beiden Kegel

$$(20.) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos \epsilon_{11} & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ 1 & \cos \epsilon_{21} & \cos \epsilon_{22} & \cos \epsilon_{23} \\ 1 & \cos \epsilon_{31} & \cos \epsilon_{32} & \cos \epsilon_{33} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos \mathfrak{d}_{12} & \cos \mathfrak{d}_{13} \\ 1 & \cos \mathfrak{d}_{12} & 1 & \cos \mathfrak{d}_{23} \\ 1 & \cos \mathfrak{d}_{13} & \cos \mathfrak{d}_{23} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos \mathfrak{d}'_{12} & \cos \mathfrak{d}'_{13} \\ 1 & \cos \mathfrak{d}'_{12} & 1 & \cos \mathfrak{d}'_{23} \\ 1 & \cos \mathfrak{d}'_{13} & \cos \mathfrak{d}'_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Die beiden Kegel schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$(21.) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos \epsilon_{11} & \cos \epsilon_{12} & \cos \epsilon_{13} \\ 1 & \cos \epsilon_{21} & \cos \epsilon_{22} & \cos \epsilon_{23} \\ 1 & \cos \epsilon_{31} & \cos \epsilon_{32} & \cos \epsilon_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Insbesondere liegen die Geraden OE_1 und OE_2 mit der Achse des durch OE_1 , OE_2 , OE_3 gehenden Kegels in einer Ebene, wenn

$$(22.) \begin{vmatrix} 1 & \cos \epsilon_{11} & \cos \epsilon_{12} \\ 1 & \cos \epsilon_{21} & \cos \epsilon_{22} \\ 1 & \cos \epsilon_{31} & \cos \epsilon_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Indem ich diese Betrachtungen schliesse, bemerke ich noch, dass ich, um nicht durch Weitschweifigkeit zu ermüden, die analogen Betrachtungen für die Ebene unterlassen habe.