

# Ecuaciones racionales: métodos de resolución y análisis didáctico

Mag. Prof. Nicolás Trías

Docente de Matemática del Consejo de Formación en Educación (CFE)

Docente de Matemática en Educación Secundaria (DGES)

Docente de Matemática en DGETP-UTU

ORCID: 0009-0008-1942-490X

Correo electrónico: nicolastrias2007@hotmail.com

Marzo 2013 – Montevideo, Uruguay

DOI: 10.5281/zenodo.18210539

## Resumen

En el presente artículo se expone un estudio introductorio y sistemático sobre las ecuaciones racionales, dirigido a estudiantes de educación secundaria y de formación docente. En este, se proponen definiciones fundamentales y algunas consideraciones teóricas, que son necesarias para la correcta resolución de una ecuación racional. Asimismo se presentan dos métodos clásicos de resolución, acompañados de ejemplos detalladamente explicados y resueltos. También se incluye una reseña histórica sobre el desarrollo de la teoría de las ecuaciones algebraicas, contextualizando el surgimiento del álgebra moderna. El enfoque del trabajo es divulgativo y didáctico, priorizando la claridad conceptual y la correcta interpretación del conjunto solución.

**Palabras clave:** ecuaciones racionales, álgebra elemental, resolución de ecuaciones, didáctica de la matemática.

## 1. Introducción histórica

El estudio de las ecuaciones algebraicas acompaña el desarrollo de la matemática desde la antigüedad. Los primeros tratamientos sistemáticos de ecuaciones de primer grado se deben a los matemáticos árabes, particularmente a Al-Juarismi, cuya obra *Al-jabr wal-muqabala* dio origen al álgebra. La incógnita era denominada *la cosa*, término que con el tiempo derivó en el uso de la letra  $x$ .

Durante el Renacimiento italiano se obtuvieron fórmulas generales para ecuaciones cúbicas y cuárticas gracias a Del Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari. Más adelante, Abel y Galois demostraron la imposibilidad de hallar fórmulas generales por radicales para ecuaciones de grado mayor que cuatro, dando origen a la teoría moderna de ecuaciones algebraicas.

En este contexto se sitúa el estudio de las ecuaciones racionales, que si bien pertenecen al álgebra elemental, requieren un tratamiento cuidadoso debido a las restricciones en su dominio.

## 2. Concepto de ecuación racional

Sean  $F(x)$  y  $G(x)$  dos expresiones algebraicas dependientes de una variable  $x$ . Se denomina **ecuación** a toda igualdad de la forma:

$$F(x) = G(x).$$

Una **ecuación racional** es aquella en la que al menos una de las expresiones es una fracción algebraica, es decir, un cociente de polinomios.

Resolver una ecuación racional implica determinar los valores de la variable que verifican la igualdad, excluyendo aquellos que anulan algún denominador. Estos valores excluidos constituyen las **restricciones del dominio**.

## 3. Consideraciones generales

1. El conjunto solución depende del sistema numérico considerado.
2. Si la ecuación contiene parámetros, las soluciones pueden depender de ellos.
3. Si una ecuación puede escribirse como  $P(x) = 0$ , donde  $P(x)$  es un polinomio, sus raíces coinciden con las del polinomio siempre que respeten el dominio.

## 4. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son **equivalentes** si poseen el mismo conjunto solución, independientemente de su forma algebraica.

Demostrar equivalencia implica probar:

- **(Directo)** Si dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución diremos que son equivalentes.

En efecto, sean  $(E_1)$  y  $(E_2)$  dos ecuaciones. Sea  $S$  el conjunto solución de  $(E_1)$  y  $H$  el conjunto solución de  $(E_2)$ . Si  $S = H$ , entonces  $(E_1)$  y  $(E_2)$  son equivalentes.

- **(Recíproco)** Si dos ecuaciones son equivalentes, estas tienen el mismo conjunto solución.

**Ejemplo (Directo).**

Sea la ecuación

$(E_1)$

$$\frac{x-1}{x+2} = 0.$$

En efecto

$$x-1=0 \quad \text{y} \quad x+2 \neq 0.$$

De aquí se obtiene:

$$x=1 \quad \text{y} \quad x \neq -2.$$

Luego,  $x=1$  satisface la ecuación  $(E_1)$ , por lo que el conjunto solución de  $(E_1)$  es  $S = \{1\}$

Sea  $(E_2)$  la ecuación  $5x-5=0$

Esta ecuación tiene como solución  $x=1$ , por lo que el conjunto solución  $H = \{1\}$

Observemos que si bien  $(E_1) \neq (E_2)$ , ambas tienen el mismo conjunto solución, por lo que

$$(E_1) \sim (E_2).$$

El recíproco es inmediato dado que si

$$(E_1) \sim (E_2)$$

adminten el mismo conjunto solución, por lo que si 1 es única solución de  $(E_1)$  también será solución única de  $(E_2)$ .

Esta noción permite simplificar ecuaciones sin alterar su conjunto solución.

## 5. Resolución de ecuaciones racionales

### 5.1. Primer método

**Pasos:**

1. Igualar la ecuación a cero.
2. Determinar restricciones.
3. Expresar la ecuación como un único cociente.
4. Igualar a cero el numerador.
5. Resolver y verificar.

#### Ejemplo 1

Sea la ecuación racional

$$(1) \quad \frac{x-1}{x+2} = 0$$

Observevemos que los valores que anulen al denominador se excluyen del conjunto solución por lo que la restricción es  $x \neq -2$ . Por otra parte resolver la ecuación anterior implicaría solamente resolver la ecuación

$$x-1 = 0 \cdot (x+2)$$

Expresión que se obtiene si multiplicamos a ambos miembros de la ecuación por  $(x+2)$  Por lo que alcanza con resolver la ecuación

$$(2) \quad x-1 = 0$$

Despejando  $x$  de la ecuación anterior se llega a que  $x = 1$  por lo que 1 es solución de (2).

Por ser ecuaciones equivalentes se tiene que la solución de (2) es la misma que la de (1), por lo tanto se tiene que el conjunto solución de (1) es

$$S = \{1\}$$

## 5.2. Segundo método

**Pasos:**

1. Determinar el dominio.
2. Hallar el m.c.d.
3. Eliminar denominadores.
4. Resolver la ecuación resultante.
5. Verificar soluciones.

### Ejemplo 2

Sea la ecuación

$$(3) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$$

Claramente las restricciones son:  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ .

Operando convenientemente dado que el m.c.d= $x.(x+1)$  al multiplicar en ambos miembros de la ecuación (3) por la expresión del m.c.d y operando convenientemente para simplificar obtenemos la ecuación equivalente (4)

$$(x+1) + x = x(x+1)$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Que al resolverla llegamos a que:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como ninguna de las soluciones coincide con las restricciones de la ecuación (3) podemos indicar que el conjunto solución de (3) es

$$S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

## 6. Eliminación de denominadores

Hay expresiones en las que al transformar la ecuación racional en otra equivalente donde se utilice como método la eliminación de los denominadores, es factible que se introduzcan en el conjunto solución las denominadas raíces extrañas, que no son realmente soluciones de la ecuación racional original. Por lo que siempre ante la duda es necesario verificar las soluciones obtenidas, descartando del posible conjunto solución las que coinciden con los valores restrictivos de la ecuación. A continuación veamos el siguiente ejemplo que confirma la falla del recíproco de la propiedad vista sobre las ecuaciones equivalentes.

### Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$\left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right) \left( \frac{x + 2}{x^2 - 1} + 2 \right) = 0$$

Llamemos  $A_1$  al primer factor y  $A_2$  al segundo.

$$A_1) \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0$$

Vemos que el valor restrictivo de  $A_1$  está en cero.

Operando convenientemente en  $A_1$  para eliminar el denominador obtenemos esta otra ecuación equivalente:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$$

Aplicando la propiedad Hankeliana vemos que tiene como raíces a 1 y 2 respectivamente.

Vimos que cero es un valor restrictivo de esta ecuación por la que la descartamos del posible conjunto solución. En definitiva  $A_1$  tiene como solución el conjunto  $S_1 = \{1, 2\}$

Sea

$$A_2) \quad \frac{x+2}{x^2-1} + 2 = 0$$

El denominador se anula para  $x = -1$  y para  $x = 1$ , siendo estos los valores restrictivos de  $A_2$

Operando convenientemente para eliminar el denominador obtenemos la siguiente ecuación equivalente

$$\frac{x+2+2x^2-2}{x^2-1} = 0 \iff x(2x+1) = 0$$

Aplicando la propiedad Hankeliana

La ecuación anterior admite como soluciones 0 y  $-\frac{1}{2}$ , descartando del conjunto solución de  $A_2$  los valores  $-1$  y  $1$ . Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es

$$S_2 = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Observemos que para el caso presentado 1 es solución de  $A_1$  pero no de  $A_2$  y 0 es solución de  $A_2$  pero no de  $A_1$  por las condiciones de restricción. Por lo que podemos decir que al operar con los denominadores para eliminarlos introducimos raíces extrañas en el conjunto solución. Por lo que si no las consideramos tenemos que el conjunto solución de la ecuación original es:

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

## 7. Conclusiones

Las ecuaciones racionales constituyen un contenido central del álgebra avanzada. Su estudio fortalece el razonamiento algebraico, la identificación de restricciones y la verificación crítica de soluciones. Desde una perspectiva didáctica, resulta fundamental enfatizar el análisis de la condición de existencia y la correcta interpretación del conjunto solución. Por lo que es necesario considerar siempre las restricciones y la verificación de los posibles candidatos a solución de la ecuación.

### Agradecimientos

Se agradece la colaboración de la estudiante Mariana Banchemo, de 2do SE de la Escuela Superior de Comercio “Villa Muñoz”, por su apoyo en la digitalización y organización inicial de los apuntes originales.

## Bibliografía

- Abel, N. H. (1826). *Mémoire sur les équations algébriques*. París.
- Cardano, G. (1545). *Ars Magna*. Núremberg.
- Galois, É. (1846). *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- Litvinenko, V., & Mordókovich, A. (1989). *Prácticas para resolver problemas de matemáticas: Álgebra y trigonometría*. Editorial Mir.
- Osín, L. (1966). *Introducción al análisis matemático*. Kapelusz.
- Tutoría de Matemática. (s.f.). *Ecuaciones racionales o fraccionarias*. Recuperado de <https://tutoriadematematica.com.ar/>