

---

I. *Ueber die Definition des Tones, nebst daran geknüpfter Theorie der Sirene und ähnlicher tonbildender Vorrichtungen; von G. S. Ohm.*

---

1) Als ich vor Kurzem meine früheren Untersuchungen über Combinationstöne und Stöße in's Reine zu bringen mir vornahm, trat mir plötzlich eine nicht unerhebliche Bedenklichkeit entgegen. Ich hatte nämlich dabei stets als ausgemachte Sache vorausgesetzt, daß die Bestandtheile eines Tones, dessen Schwingungsmenge  $m$  seyn soll, die Form  $a \cdot \sin 2\pi mt$  oder  $a \cdot \cos 2\pi mt$  einhalten müssen, worin  $t$  die Zeit und  $a$  die Schwingungsweite für die aufeinander folgenden Tonelemente bezeichnen, und umgekehrt, daß eine Succession von Eindrücken auf unser Ohr, welche ununterbrochen die hier aufgestellte Form einhält, auch nothwendig die Empfindung eines Tons bewirken müsse. Aber Savart's und Cagniard Latour's Einführung von besondern Tonerregungsweisen scheint jene aus alter Zeit herstammende Voraussetzung aus ihrer sichern Position vertreiben zu wollen, wie wenigstens die Worte von mehrern, uns wohl bekannten Akustikern anzudeuten scheinen. Röber drückt sich hierüber im Repertorium der Physik Bd. III, S. 30. wörtlich so aus: „Zu diesem Zwecke sey es erlaubt die bekannten Versuche Savart's und Cagniard de Latour's zur Erzeugung der Töne zu berühren. Suchen wir das Gemeinschaftliche dieser Versuche, sowohl derjenigen von Savart über die tiefsten und höchsten hörbaren Töne, als derjenigen von Cagniard Latour, welche den Gebrauch der Sirene betreffen, so finden wir, daß die Erzeugung des Tones nur durch die regelmäßige Wieder-

kehr irgend eines auf das Gehör einwirkenden Impulses bedingt wurde, wobei in allen Fällen dieselbe Abhängigkeit der Höhe des Tones von der Zahl der in einer Secunde erfolgenden Impulse statt findet. Dieser Impuls erscheint in den angeführten Versuchen entweder als Binomium einer Verdichtung und Verdünnung, oder als bloße Verdichtung, und insbesondere zeigt die Untersuchung Savart's über die tiefsten hörbaren Töne, daß die Entfernung der beiden Maxima eines Binomiums keineswegs abhängt von der Dauer der einzelnen Impulse, oder mit andern Worten, von der Entfernung der Maxima zweier aufeinander folgenden Binomien: wonach also die gewöhnliche Erzeugung musikalischer Töne, wo die verschiedenen Maxima der Verdichtung und der Verdünnung alle in gleichen Zeitintervallen einander folgen, nur als ein besonderer Fall der allgemeinen Wiederholung eines aus einer Verdichtung und Verdünnung zusammengesetzten Impulses betrachtet werden muß.“ Und weiterhin (S. 53) sagt er: „Erst nachdem ich die vorige Darstellung abgegeben, lernte ich die genannte Abhandlung Seebeck's kennen, in welcher aus gleichen Gründen, wie im Vorigen, das Wesen des Tones als die regelmäßige Wiederkehr irgend eines Impulses erklärt, und nachgewiesen wird, daß die sachgemäße Bezeichnung der Höhe eines Tones in der Angabe der Zahl der wiederholten einfachen oder zusammengesetzten Impulse; nicht aber in der gewöhnlichen Angabe der Verdichtungen und Verdünnungen bestehe.“

2) Seitdem sind durch Seebeck in Poggendorff's Annalen, Bd. LIII S. 417 u. folg. Erfahrungen an der Sirene bekannt gemacht worden, durch welche sogar die Gleichheit der Zeitintervalle, in denen die einzelnen Impulse aufeinander folgen, als unwesentlich zur Bildung des Tones hingestellt zu werden scheint. Seebeck selbst wenigstens zieht aus ihnen (a. a. O. S. 423) folgenden Schluss: „Man sieht aus diesen Versuchen, daß das Ge-

hörorgan einerseits die Fähigkeit besitzt, ein System von Impulsen in zwei oder drei Systeme von isochronen Impulsen zu zerlegen; daß es aber andererseits auch durch einen nur einigermaßen angenäherten Isochronismus den Eindruck einer bestimmten Tonhöhe empfängt, wie vom vollkommenen Isochronismus.“ Da diese Seebeckschen Versuche alles in sich enthalten, was an Thatsachen gegen die alte Definition des Tones vorgebracht werden kann, und meine gegenwärtige Abhandlung im Grunde nichts weiter als ein fortlaufender Commentar derselben ist, so werde ich zur Bequemlichkeit der Leser, weil es auf geringem Raum geschehen kann, deren Ergebnisse hersetzen und im weiteren Verlaufe hierher verweisen.

a) Man richte gegen eine Löcherreihe der Sirene zwei Röhren von den beiden entgegengesetzten Seiten her, senkrecht gegen die Scheibe, und zwar so, daß wenn die eine sich vor einem Loche befindet, auch die andere einem Loche gegenüber sey. Bläst man mit *einer* dieser Röhren gegen die in Umdrehung befindliche Scheibe, so geben sie, jede einzeln, denselben Ton; bläst man aber mit beiden zugleich, so verschwindet der Ton, und man hört nur, oder fast nur, das Sausen, welches das Durchströmen der Luft verursacht. Stellt man dagegen die Röhren so auf, daß ihre Stöße nicht gleichzeitig, sondern alternirend erfolgen, so hört man den ursprünglichen Ton, und zwar verstärkt.

b) Wenn man auf eine Scheibe concentrisch zwei Löcherreihen setzt, von denen die eine doppelt so viel Löcher hat als die andere, so giebt sie die Octave von dem Tone der letztern, und man hört, wenn beide gleichzeitig angeblasen werden, in der Regel auch beide Töne zugleich. Nur wenn das Anblasen von den beiden entgegengesetzten Seiten her, und zwar so erfolgt, daß jeder Luftstoß des tiefern Tones mit einem des höhern genau zusammen-

trifft, verschwindet der höhere Ton und man hört den tiefern allein.

- c) Wenn eine Reihe schnell aufeinander folgender Impulse nicht isochronisch zum Ohre gelangen, sondern so, daß die Zwischenzeit zwischen je zweien abwechselnd  $t$  und  $t'$  beträgt, so tritt ein Ton auf als ob die Zwischenzeit  $t+t'$  wäre, und wenn  $t$  und  $t'$  nicht zu sehr verschieden von einander sind, so hört man zugleich noch einen Ton von der Schwingungsdauer  $\frac{t+t'}{2}$ , also die höhere Octave des erstern. Dabei machte Seebeck die Bemerkung, daß der höhere oder der tiefere Ton mehr hervortönt, je nachdem die Werthe  $t$  und  $t'$  einander gleicher oder ungleicher waren.
- d) Wenn eine Reihe von Stößen so auf einander folgen, daß die Zwischenzeiten von je dreien abwechselnd  $t$ ,  $t'$  und  $t''$  sind, so hört man den Ton von der Schwingungsdauer  $t+t'+t''$ , und zugleich auch, wenn die drei Zwischenräume nicht zu ungleich sind, den Ton von der Schwingungsdauer  $\frac{t+t'+t''}{3}$ , wobei wiederum die Bemerkung gemacht wurde, daß der höhere oder der tiefere Ton um so mehr hervortrat, je gleicher oder ungleicher die drei Zwischenzeiten  $t$ ,  $t'$  und  $t''$  einander waren.
- e) Läßt man die Abstände zwischen den Löchern in unregelmäßiger Folge wechseln, doch so, daß sie sich nicht zu sehr von einem Mittelwerth entfernen, so hört man nur *einen*, mehr oder weniger unvollkommenen Ton, dessen Höhe jenem Mittelwerthe entspricht.
- f) Wenn bei den sub c beschriebenen Versuchen  $t'$  ein Vielfaches von  $t$  war, wurde zwar stets noch der Ton von der Schwingungsdauer  $t+t'$  gehört,

aber anstatt des Tones  $\frac{t+t'}{2}$  kam jetzt der Ton

von der Schwingungsdauer  $t$  zum Vorschein.

g) Wenn  $t'$  zwar viel größer als  $t$  aber nicht ein Vielfaches von  $t$  war, so schien es Seebeck, daß neben dem Tone  $t+t'$  theils ebenfalls der der Schwingungsdauer  $t$  entsprechende Ton vorhanden sey, theils auch wohl ein noch höherer, dem gemeinsamen Maasse von  $t$  und  $t'$  entsprechender Ton schwach mitklinge; jedoch haben ihm die Resultate seiner Beobachtungen hierüber noch einigen Zweifel gelassen.

h) Wurden die Zwischenzeiten von je drei Impulsen abwechselnd  $t$ ,  $t$  und  $t'$  gemacht, so wurde jederzeit der Ton von der Schwingungsdauer  $t$  gehört,  $t$  mochte kleiner oder größer als  $t'$  seyn.

3) Durch die eben mitgetheilten, auf Erfahrungen gestützten Aeufserungen sachverständiger Männer über das eigentliche Element des Tones scheint alles früher in dieser Hinsicht festgesetzte umgestoßen zu werden, ohne daß etwas Anderes mit Zuverlässigkeit dafür hingestellt worden wäre. Es kam mir vor als forderten sie zu einer neuen Definition des Tones auf; indessen der alten Regel eingedenk, daß zur Erklärung einer Naturbegebenheit keine andern Ursachen anzunehmen seyen, als welche nothwendig und hinreichend sind, und meiner Individualität nach wenig geneigt, das zuvor wohl Erworbene in Folge des Anreizes eines als neu sich ankündigenden Besitzthumes sogleich fahren zu lassen, stellte ich den Versuch an, ob nicht die Definition des Tones, wie sie von unsern Vorfahren auf uns übergegangen ist, alles in sich enthalte, was zur vollständigen Erklärung der neuen Thatsachen nothwendig und hinreichend ist. In Folge dieser Probe aber wurde die althergebrachte Definition des Tones auf eine Weise, die mir der Veröffentlichung

werth zu seyn scheint, in ihr volles Recht wieder eingesetzt, wie ich nun zeigen werde, indem ich an ihrer Hand in das Dunkel der Seebeckschen Versuche einzudringen unternehme; und mit ihrer Hilfe Schritt um Schritt das eigentliche Verständniß derselben zu bewirken gedenke. Jene alte Definition des Tones aber formulire ich so:

- a) Es müssen die zur Bildung eines Tones von der Schwingungsmenge  $m$  erforderlichen Eindrücke in Intervallen von der Länge  $\frac{1}{m}$  hinter einander hergehen, und in jedem dieser Intervalle fortdauernd die Form  $a \cdot \sin 2\pi(mt + p)$  entweder ganz rein in sich tragen, oder diese Form muß wenigstens als ein reeller Bestandtheil aus jenen Eindrücken abgeschieden werden können:
- b) Diese Formen, sie mögen in den einzelnen Eindrücken rein enthalten, oder daraus abscheidbar seyn, müssen sich unmittelbar aneinander dergestalt anschließen, daß die beiden zu gleich liegenden Stellen gehörigen Schwingungsphasen in zwei aufeinander folgenden Intervallen immer ein und dasselbe Verhältniß zu einander beibehalten, oder mit andern Worten, es muß die GröÙe  $p$  in allen stets einen und denselben Werth erhalten.
- c) Die GröÙe  $a$  muß dabei entweder stets positiv oder stets negativ bleiben; denn eine Umkehrung des Vorzeichens von  $a$  ist gleichbedeutend mit einer Aenderung im Werthe von  $p$ , weil  $-a \cdot \sin 2\pi(mt + p) = +a \cdot \sin 2\pi(mt + p \pm \frac{1}{2})$  ist.

Es versteht sich übrigens von selbst, obschon dies in vorstehender Definition nicht ausdrücklich ausgesprochen worden ist, daß zur Wahrnehmbarkeit der Höhe eines Tones die Unveränderlichkeit des Werthes  $p$  nur in so viel aufeinander folgenden Tonwellen erfordert wird, als unser Gehörorgan zur Habhaftwerdung dieser

Höhe verlangt. In der That, wenn durch irgend ein Mittel, nachdem so viele Tonwellen vorübergegangen sind, daß das Ohr die Höhe des Tones zu bestimmen im Stande war, plötzlich der Werth von  $p$  ein anderer würde, und auch jetzt wieder so lange andauerte, daß das Ohr bei sonst gleichen Umständen wieder dieselbe Höhe zu erfassen vermöchte, so würde ihm dadurch offenbar kein Anlaß zur Abänderung seines Urtheils über die Höhe des empfundenen Tons gegeben; es müßte ihn, zum wenigsten in Bezug auf Höhe, als unverändert anerkennen.

4) Als Mittel der Beurtheilung, ob in einem gegebenen Eindruck die Form  $a.\sin 2\pi(mt+p)$  als reeller Bestandtheil enthalten sey oder nicht, gebrauche ich das durch seine vielfachen und wichtigen Anwendungen berühmt gewordene Theorem von Fourier, welches in folgendem besteht. Bezeichnet  $F^{(t)}$  irgend eine continuirliche oder discontinuirliche Function von  $t$ , welche ganz beliebige, jedoch reelle Werthe von  $t=-l$  bis  $t=+l$  hat, so ist zwischen diesen Gränzen von  $t$  stets:

$$F^{(t)} = A_0 + A_1 \cdot \cos \pi \frac{t}{l} + A_2 \cdot \cos \pi \frac{2t}{l} + A_3 \cdot \cos \pi \frac{3t}{l} + \dots \\ + B_1 \cdot \sin \pi \frac{t}{l} + B_2 \cdot \sin \pi \frac{2t}{l} + B_3 \cdot \sin \pi \frac{3t}{l} + \dots$$

und es stellen  $A_0$ ,  $A_1$  und  $B_1$ ,  $A_2$  und  $B_2$ ,  $A_3$  und  $B_3$  u. s. f. lauter von  $t$  unabhängige Gröfsen vor, welche aus nachstehenden Gleichungen gefunden werden:

$$A_0 = \frac{1}{2l} \int F^{(t)} \cdot dt$$

$$A_1 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \cos \pi \frac{t}{l} \cdot dt \text{ und } B_1 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \sin \pi \frac{t}{l} \cdot dt$$

$$A_2 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \cos \pi \frac{2t}{l} \cdot dt \text{ und } B_2 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \sin \pi \frac{2t}{l} \cdot dt$$

$$A_3 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \cos \pi \frac{3t}{l} \cdot dt \text{ und } B_3 = \frac{1}{l} \int F^{(t)} \cdot \sin \pi \frac{3t}{l} \cdot dt$$

u. s. f.

u. s. f.

während alle Integrale von  $t=-l$  bis  $t=+l$  zu neh-

men sind. Für den Fall, daß es Strecken zwischen diesen Gränzen gibt, innerhalb welcher die Function  $F^{(v)}$  anhaltend Null wird, kann man, wie in die Augen springt, für jedes der vorstehenden Integrale die Summe von mehreren andern, denselben Ausdruck in sich enthaltenden, nehmen, von welchen sich jedes aber nur über die Strecke ausdehnt, innerhalb welcher die Function  $F^{(v)}$  nicht Null wird.

Stellen wir uns nun unter  $F^{(v)}$  irgend einen zur Zeit  $t$  auf unser Ohr gemachten Eindruck vor, so giebt uns obige, Fourier's Theorem enthaltende Gleichung zu verstehen, daß dieser Eindruck zerlegbar ist in die Partialindrücke  $A_0, A_1 \cdot \cos \pi \frac{t}{l} + B_1 \cdot \sin \pi \frac{t}{l}, A_1 \cdot \cos \pi \frac{2t}{l} + B_2 \cdot \sin \pi \frac{2t}{l}, A_3 \cdot \cos \pi \frac{3t}{l} + B_3 \cdot \sin \pi \frac{3t}{l}$  u. s. f. Der erste  $A_0$  bringt keine Schwingung zu Stande, sondern eine bloße Aenderung in der Stellung der schwingenden Theile, die andern alle aber enthalten Schwingungen in sich, welche die Theile des schwingenden Körpers um jene neue Stellung herum machen. Der Ausdruck  $A_1 \cdot \cos \pi \frac{t}{l} + B_1 \cdot \sin \pi \frac{t}{l}$  liefert eine Schwingung, die dem Tone angehört, dessen Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$  ist; der andere  $A_2 \cdot \cos \pi \frac{2t}{l} + B_2 \cdot \sin \pi \frac{2t}{l}$  liefert eine Schwingung, welche dem Tone angehört, dessen Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  ist; der Theil  $A_3 \cdot \cos \pi \frac{3t}{l} + B_3 \cdot \sin \pi \frac{3t}{l}$  liefert eine Schwingung, welche dem Tone angehört, dessen Schwingungsmenge  $\frac{3}{2l}$  ist u. s. f., wie man sogleich ersieht, wenn man den oben der Definition des Tones zu Grunde gelegten Ausdruck  $a \cdot \sin 2\pi(mt + p)$  auf die Form  $a \cdot \sin 2\pi p \cdot \cos 2\pi mt + a \cdot \cos 2\pi p \cdot \sin 2\pi mt$  bringt, und in

Erwägung zieht, daß er successive in die hier vorhandenen übergeht, wenn man der Reihe nach setzt:

$$m = \frac{1}{2l}, \quad a.\sin 2\pi p = A_1 \quad \text{und} \quad a.\cos 2\pi p = B_1,$$

$$m = \frac{2}{2l}, \quad a.\sin 2\pi p = A_2 \quad \text{und} \quad a.\cos 2\pi p = B_2,$$

$$m = \frac{3}{2l}, \quad a.\sin 2\pi p = A_3 \quad \text{und} \quad a.\cos 2\pi p = B_3,$$

u. s. f.,

woraus man findet in Bezug auf die erste Schwingung

$$tg 2\pi p = \frac{A_1}{B_1} \quad \text{und} \quad a^2 = A_1^2 + B_1^2,$$

in Bezug auf die zweite Schwingung

$$tg 2\pi p = \frac{A_2}{B_2} \quad \text{und} \quad a^2 = A_2^2 + B_2^2,$$

in Bezug auf die dritte Schwingung

$$tg 2\pi p = \frac{A_3}{B_3} \quad \text{und} \quad a^2 = A_3^2 + B_3^2,$$

u. s. f. Ist uns sonach eine Aufeinanderfolge von Eindrücken gegeben, von denen jeder über eine Zeit von derselben Länge  $2l$  sich hinzieht, und wollen wir erfahren, ob in dieser Succession von Eindrücken der Ton enthalten sey, dessen Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$  ist, so haben

wir nur für jeden der gegebenen Eindrücke die ihm entsprechenden Werthe von  $A_1$  und  $B_1$  aufzusuchen, so dann aus ihnen den Werth von  $p$  mittelst der Gleichung

$$tg 2\pi p = \frac{A_1}{B_1} \quad \text{herzuleiten, wofür man unserer Definition}$$

des Tones gemäß überall nur einen und denselben Werth muß setzen können. Ist dieß und hat man diesen Werth von  $p$  ein für alle Mal in unabänderlicher Weise festgesetzt, so kann man aus der Gleichung  $a^2 = A_1^2 + B_1^2$  den Werth von  $a$  herholen. Weil aber durch diese Gleichung das Vorzeichen von  $a$  unbestimmt gelassen wird, worauf doch unserer Definition zur Folge die weitere Un-

tersuchung des Tones hingewiesen wird, so muß man eine der Gleichungen

$$a \cdot \sin 2\pi p = A_1 \text{ und } a \cdot \cos 2\pi p = B_1$$

zu Rathe ziehen, welche zu erkennen geben, daß bei einem unabänderlich festgestellten Werth von  $p$  die GröÙe  $a$  so lange ihr Vorzeichen nicht ändert, als  $A_1$  und  $B_1$  es nicht ändern. Durch ein ganz ähnliches Verfahren läßt sich entscheiden, ob in denselben Eindrücken die Töne von der Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$ ,  $\frac{3}{2l}$  u. s. f. enthalten sind oder nicht.

5) Nun wollen wir zur Anwendung der in vorstehenden Nummern gegebenen allgemeinen Formeln auf die oben in 2) beschriebenen, von Seebeck an der Sirene angestellten, merkwürdigen Versuche schreiten. Nehmen wir zuvörderst an, daß in jedem der unmittelbar hintereinander liegenden Zeitintervalle von der Länge  $2l$  ein Eindruck von der Form  $\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda}$  vorfalle, machen aber zur Bedingung, daß jeder Eindruck von solcher Form nur von  $t=0$  bis  $t=2\lambda$  andauere, wodurch nichts anders gesagt ist, als daß jeder dieser Eindrücke entweder nur eine Verdichtung oder nur eine Verdünnung in sich trage <sup>1)</sup>, so wird in diesem Falle, wenn wir die Zeit von dem Beginn des Eindrucks an zählen,  $F^{(t)} = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda}$ , und hat eigentliche Werthe bloß von  $t=0$  bis  $t=2\lambda$ , an allen andern Stellen desselben Intervalls ist  $F^{(t)} = 0$ ; legen wir hingegen den Ursprung der Zeit in die Mitte des Eindrucks, so wird jetzt

1) Es ist hier der größern Einfachheit halber zwar nur eine besondere jedoch entschieden einseitige Form der Verdichtung oder Verdünnung der Betrachtung zu Grund gelegt worden, es läßt sich aber die Untersuchung ganz in derselben Weise völlig allgemein und mit dem gleichen Erfolge durchführen, wozu nichts weiter als ein größerer Raum gefordert wird, den zu sparen ich mich verpflichtet hielt.

$F^{(t)} = \alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t+\lambda}{4\lambda} = \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{t}{4\lambda}$ , und hat eigentliche Werthe bloß von  $t = -\lambda$  bis  $t = +\lambda$ ; legen wir endlich den Ursprung der Zeit in die Mitte des Intervalls und die Mitte des Eindrucks in die Entfernung  $\theta$  von jener Mitte des Intervalls, so wird jetzt  $F^{(t)} = \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{t-\theta}{4\lambda}$ , und hat eigentliche Werthe bloß von  $t = \theta - \lambda$  bis  $t = \theta + \lambda$ . Fassen wir den Eindruck in dieser letzteren Beziehung auf, so hat man hinsichtlich seiner, in Beziehung auf den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$  ist, wobei  $i$  eine beliebige ganze, positive Zahl vorstellt (nach 4)

$$A_i = \frac{\alpha}{l} \cdot \int \cos 2\pi \frac{t-\theta}{4\lambda} \cdot \cos 2\pi \frac{it}{2l} \cdot dt$$

und

$$B_i = \frac{\alpha}{l} \cdot \int \cos 2\pi \frac{t-\theta}{4\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{it}{2l} \cdot dt,$$

und es sind die Integrale bloß von  $t = \theta - \lambda$  bis  $t = \theta + \lambda$  zu nehmen. Integriert man zwischen diesen Gränzen, so erhält man zunächst

$$A_i = \frac{2\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \left( \cos 2\pi \frac{(\theta+\lambda)i}{2\lambda} + \cos 2\pi \frac{(\theta-\lambda)i}{2l} \right)$$

und

$$B_i = \frac{2\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \left( \sin 2\pi \frac{(\theta+\lambda)i}{2l} + \sin 2\pi \frac{(\theta-\lambda)i}{2l} \right),$$

und diese Ausdrücke gehen, wenn man die Summen der Sinuse und Cosinuse in Producte umwandelt, über in:

$$A_i = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta i}{l}$$

und

$$B_i = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta i}{l}.$$

Aus diesen für  $A_i$  und  $B_i$  gefundenen Werthen er-

giebt sich, zufolge der (in 4) eingeführten Bezeichnungen, zunächst

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \cotg \pi \frac{\theta i}{l}$$

und sodann

$$a = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l},$$

welcher letztere Werth für  $\lambda i = \frac{1}{2}l$  in  $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{l}$  übergeht.

Für den Ton, dessen Schwingungsdauer  $2l$  ist, hat man, weil für ihn  $i=1$  ist

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \cotg \pi \frac{\theta}{l}$$

und

$$a = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda}{l}.$$

Hat also  $\theta$  in allen Intervallen denselben Werth, d. h. liegt die Mitte des Eindrucks in allen Intervallen gleichweit von deren Mitte und immer nach derselben Seite hin ab, so nimmt auch  $p$  in allen Intervallen stets einen und denselben Werth an; es ist mithin ein Ton von der Schwingungsdauer  $2l$  wirklich vorhanden, dessen Schwingungsweite durch den Werth von  $a$  gegeben ist, vorausgesetzt daß  $a$  in den aufeinander folgenden Intervallen ein und dasselbe Vorzeichen erhält. Nimmt hingegen  $\theta$  in den aufeinander folgenden Intervallen stets andere Werthe an, so ändert sich auch von Intervall zu Intervall der Werth von  $p$ , und es kann dann, der (in 3) aufgestellten Definition des Tons zufolge, der Ton von der Schwingungsdauer  $2l$  keine Existenz erhalten. Da die Möglichkeit des hier erwähnten Tones auch noch davon abhängt, ob das Vorzeichen von  $a$  wandelbar ist oder nicht, so müssen wir noch auf die Umstände, von welchen diese Wandelbarkeit abhängt, unser Augenmerk richten. Zuvörderst überzeugt man sich leicht, daß das Verhältniß zwischen  $\lambda$  und  $l$  auf das Vorzeichen von  $a$

keinen Einfluss hat, denn in dem Augenblicke, wo der Factor  $\cos \pi \frac{\lambda}{l}$  sein Vorzeichen ändert, welches geschieht, wenn  $\lambda$  die Gränze  $\frac{1}{2}l$  überschreitet, ändert es auch der Divisor  $l^2 - 4\lambda^2$ , und diese beiden gleichzeitig auftretenden Aenderungen in den Theilen bringen keine Aenderung im Ganzen hervor. Da zudem  $\lambda$  und  $l$  ihrer Natur nach nur positive Gröfsen seyn können, so hängt das Vorzeichen von  $a$  lediglich von dem von  $\alpha$  ab: es hat mithin  $a$  stets dasselbe Vorzeichen, so lange die in den einzelnen Intervallen auftretenden Eindrücke von derselben Art sind, es ändert hingegen sein Vorzeichen, so wie von einem Intervall zum nächsten die darin vorkommenden Eindrücke von entgegengesetzter Art sind. Wir sind so zu nachstehenden Sätzen gelangt:

- α) Eindrücke, welche in Intervallen von der Länge  $2l$  wiederkehren, erzeugen einen Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$ , wenn die in den aufeinander folgenden Intervallen liegenden Eindrücke in jedem Intervalle eine und dieselbe Stellung behaupten und wenigstens immer so lange von derselben Art bleiben, als unser Gehörorgan hintereinander hergehende Tonwellen zur Erfassung des Tones verlangt.*
- β) Eindrücke, welche in Intervallen von der Länge  $2l$  wiederkehren, erzeugen keinen Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$ , wenn entweder die Stellung der Eindrücke oder deren Art von Intervall zu Intervall eine Abänderung erleidet.*

Was die Schwingungsweite dieses Tones und seine dadurch bedingte Stärke anlangt, so hängt sie in allen Fällen, wie der vorstehende für  $a$  gefundene Ausdruck zu erkennen giebt, ab von der Gröfse von  $\alpha$ , d. h. von der Stärke der Eindrücke, welcher sie proportional ist,

und noch außerdem, wiewohl in einem zusammengesetzten Verhältnisse, von dem Quotienten  $\frac{\lambda}{l}$ , d. h. von der relativen Gröfse der Eindrücke; jener Ton tritt daher, ohne dafs seine Höhe sich ändert, mit veränderlicher Stärke auf, wenn eines dieser Elemente von Intervall zu Intervall eine Abänderung erleidet.

6) Als zweite Anwendung der oben gegebenen allgemeinen Formeln wollen wir den Fall betrachten, wo in jedem Intervall von der Länge  $2l$  zwei Eindrücke statt finden, von denen der eine die Form  $\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda}$ , der andere die Form  $\alpha' \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda'}$  hat, und jener nur von  $t=0$  bis  $t=2\lambda$ , dieser nur von  $t=0$  bis  $t=2\lambda'$  andauert, wobei  $t$  vom Anfang des Eindrucks ab gerechnet wird. Bezeichnen wir die Entfernung von der Mitte des Intervalls bis zur Mitte des ersten Eindrucks durch  $\theta$ , die bis zur Mitte des zweiten Eindrucks durch  $\theta'$ , und legen wir den Anfangspunkt der Zeit in die Mitte des Intervalls, so gilt bei der Aufsuchung von  $A_i$  und  $B_i$  hier von jedem dieser beiden Ausdrücke ganz dasselbe, was in der vorigen Nummer von dem einen dort vorgekommenen nachgewiesen worden ist; es wird daher hier, den (in 4) gegebenen Entwicklungen gemäß, jede der beiden Gröfsen  $A_i$  und  $B_i$  eine Summe aus zwei Theilen seyn, von denen der eine mit dem dort für  $A_i$  und  $B_i$  erhaltenen Ausdruck völlig identisch ist, und der andere aus diesem sich herleiten läfst dadurch, dafs man  $\alpha'$ ,  $\lambda'$  und  $\theta'$  setzt, wo in ihm  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\theta$  steht. Man erhält daher in unserm jetzigen Falle:

$$A_i = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta i}{l} \\ + \frac{4\alpha'\lambda' l}{\pi(l^2 - 4\lambda'^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda' i}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta' i}{l}$$

und

$$B_i = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta i}{l} \\ + \frac{4\alpha'\lambda' l}{\pi(l^2 - 4\lambda'^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda' i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l}.$$

Wir wollen nun unsere weiteren Betrachtungen auf den Fall beschränken, wo  $\lambda = \lambda'$  ist, eine Bedingung, welche bei Versuchen an der Sirene stets sehr nahe eingehalten ist, und leicht ganz genau eingehalten werden kann. Unter dieser Einschränkung nehmen vorstehende für  $A_i$  und  $B_i$  gefundene Werthe folgende Gestalt an:

$$A_i = \frac{4\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot (\alpha \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cos \pi \frac{\theta' i}{l})$$

und

$$B_i = \frac{4\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot (\alpha \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \sin \pi \frac{\theta' i}{l}),$$

woraus man (gemäß 4) zunächst findet:

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \frac{\alpha \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cos \pi \frac{\theta' i}{l}}{\alpha \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \sin \pi \frac{\theta' i}{l}}.$$

Dieser für  $\operatorname{tg} 2\pi p$  gefundene Werth giebt zu erkennen, daß wenn auch  $\theta$  und  $\theta'$  in allen Intervallen dieselben Werthe beibehalten, darum doch noch nicht  $p$  in allen einen und denselben Werth annehme, daß vielmehr dazu noch ein unveränderlicher Werth des Quotienten

$\frac{\alpha}{\alpha'}$  erforderlich sey, wodurch die Möglichkeit der Bildung

des Tones im jetzigen Falle von der relativen Stärke der Eindrücke in den aufeinander folgenden Intervallen abhängig gemacht wird, was um so merkwürdiger ist, als die Bildung des Tones im vorigen Falle von der Stärke der Eindrücke in den aufeinander folgenden Intervallen gänzlich unabhängig blieb. Behalten jedoch nicht bloß

$\theta$  und  $\theta'$ , sondern auch der Quotient  $\frac{\alpha}{\alpha'}$  in allen Inter-

vallen einen und denselben Werth bei, so giebt dann obige Gleichung für  $p$  in allen Intervallen einen und denselben Werth her; es ist sonach die Hauptbedingung zur Bildung des hier gesuchten Tones vollständig erfüllt.

Fassen wir hier wieder den besondern Zustand ins Auge, wo alle Eindrücke einerlei Stärke besitzen, und unterscheiden wir dabei zwei Fälle:

Erstlich wenn die beiden in jedem Intervalle vorkommenden Eindrücke von derselben Art sind. In diesem Falle ist  $\alpha' = \alpha$ , so dafs man hat

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \frac{\cos \pi \frac{\theta i}{l} + \cos \pi \frac{\theta' i}{l}}{\sin \pi \frac{\theta i}{l} + \sin \pi \frac{\theta' i}{l}}$$

und nach gehöriger Reduction

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \cotg \pi \frac{(\theta + \theta') i}{2l},$$

und nun wird, wenn wir den zu diesem Fall gehörigen Werth von  $\alpha$  durch  $\alpha'$  bezeichnen,

$$\alpha' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \cos \pi \frac{(\theta - \theta') i}{2l},$$

welcher letztere Werth für  $\lambda = \frac{1}{2}l$  in  $\frac{\alpha}{i} \cos \pi \frac{(\theta - \theta') i}{2l}$  übergeht.

Zweitens wenn die beiden in jedem Intervalle vorkommenden Eindrücke von entgegengesetzter Art sind. In diesem Falle ist  $\alpha' = -\alpha$ , so dafs man hat

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \frac{\cos \pi \frac{\theta i}{l} - \cos \pi \frac{\theta' i}{l}}{\sin \pi \frac{\theta i}{l} - \sin \pi \frac{\theta' i}{l}},$$

und nach gehöriger Reduction

$$\operatorname{tg} 2\pi p = -\operatorname{tg} \pi \frac{(\theta + \theta') i}{2l},$$

und nun wird, wenn wir den zu diesem Falle gehörigen Werth von  $\alpha$  durch  $\alpha''$  bezeichnen,

$$a'' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \sin \pi \frac{(\theta - \theta')i}{2l},$$

welcher letztere Werth für  $\lambda i = \frac{1}{2}l$  in  $\frac{\alpha}{i} \cdot \sin \pi \frac{(\theta - \theta')i}{2l}$  übergeht.

Hieraus fließen nun folgende besondere Sätze:

I. Für den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$  ist, hat

man  $i=1$ , also ist für ihn

$$a' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta - \theta'}{2l}$$

und

$$a'' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta - \theta'}{2l};$$

dies zieht aber nach sich:

*α) Wenn in jedem der auf einander folgenden Zeitintervalle von der Länge 2l, zwei Eindrücke von gleicher Art, Form, Gröfse und Stellung vorkommen, so entsteht ein Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$ , der am stärksten ist, wenn beide*

*Eindrücke gleichzeitig oder um den Abstand 2l von einander entfernt vorkommen, um so schwächer wird, je mehr sich der Abstand beider Eindrücke von einander einerseits von Null und andererseits von 2l entfernt, und endlich ganz verschwindet, wenn dieser Abstand gleich der halben Länge des Intervalls wird.*

*β) Wenn in jedem der aufeinander folgenden Zeitintervalle von der Länge 2l zwei Eindrücke von gleicher Form, Gröfse und Stellung, aber von entgegengesetzter Art vorkommen, so entsteht ein*

*Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$ , der am stärksten ist, wenn der Abstand beider Eindrücke von einander dem halben Intervalle gleichkommt, der in dem Maaße schwächer wird, als dieser*

*Abstand gröfser oder kleiner wird, der endlich ganz verschwindet, wenn dieser Abstand Null oder gleich  $2l$  wird.*

II. Für den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  ist, hat

man  $i=2$ , also ist für ihn

$$a' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 16\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{2\lambda}{l} \cdot \cos \pi \frac{2(\theta - \theta')}{2l}$$

und

$$a'' = \frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 16\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{2\lambda}{l} \cdot \sin \pi \frac{2(\theta - \theta')}{2l};$$

dies zieht aber nach sich:

- $\alpha$ ) *Wenn in jedem der auf einander folgenden Zeitintervalle von der Länge  $2l$ , zwei Eindrücke von gleicher Art, Form, Gröfse und Stellung vorkommen, so entsteht ein Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$ , welcher am stärksten ist, wenn der Abstand beider Eindrücke von einander Null oder gleich  $l$ , oder auch gleich  $2l$  ist, der um so schwächer wird, je mehr sich dieser Abstand von einem der drei angegebenen Werthe entfernt, der endlich ganz verschwindet, wenn jener Abstand gleich  $\frac{1}{2}l$  oder gleich  $\frac{3}{2}l$  wird.*
- $\beta$ ) *Wenn in jedem der auf einander folgenden Zeitintervalle von der Länge  $2l$ , zwei Eindrücke von gleicher Form, Gröfse und Stellung, aber von entgegengesetzter Art vorkommen, so entsteht ein Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$ , der am stärksten ist, wenn der Abstand beider Eindrücke von einander  $\frac{1}{2}l$  oder  $\frac{3}{2}l$  ist, der um so schwächer wird, je mehr dieser Abstand sich von den genannten Gränzen entfernt, der endlich ganz verschwindet, wenn jener Abstand Null oder gleich  $l$ , oder auch gleich  $2l$  wird.*

Es verdient hierbei bemerkt zu werden, dafs gerade

in dem Falle, wo der unter I. bezeichnete Ton verschwindet in solcher Art, dafs doch noch zwei von einander geschiedene Eindrücke übrig bleiben, gerade der in II. beschriebene Ton seine grösste Stärke erreicht.

7) Als dritte Anwendung der oben gegebenen allgemeinen Formeln wollen wir den Einfluß *dreier* in jedem Intervalle von der Länge  $2l$  vorkommender Eindrücke untersuchen. Der eine dieser Eindrücke werde dargestellt durch  $\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda}$ , der andere durch  $\alpha' \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda'}$ ,

der dritte durch  $\alpha'' \cdot \sin 2\pi \frac{t}{4\lambda''}$ , und der erstere dauere nur von  $t=0$  bis  $t=2\lambda$ , der andere von  $t=0$  bis  $t=2\lambda'$ , der dritte von  $t=0$  bis  $t=2\lambda''$  an, wobei die Zeit  $t$  vom Anfange der Eindrücke hergenommen worden ist. Bezeichnen wir die Entfernung von der Mitte des Intervalls bis zur Mitte des ersten Eindrucks durch  $\theta$ , die bis zur Mitte des zweiten Eindrucks durch  $\theta'$ , die bis zur Mitte des dritten Eindrucks durch  $\theta''$ , und legen wir den Anfangspunkt der Zeit in die Mitte des Intervalls, so gilt bei der Aufsuchung von  $A_i$  und  $B_i$  hier von jedem der drei Ausdrücke ganz dasselbe, was in 5 von dem einen dort vorgekommenen nachgewiesen worden ist; es wird daher hier, den in 4 gegebenen Entwicklungen gemäß, jede der beiden Gröfsen  $A_i$  und  $B_i$  eine Summe aus drei Theilen seyn, von denen der eine mit dem dort für  $A_i$  und  $B_i$  erhaltenen Ausdruck völlig identisch ist, und die andern beiden aus diesem sich herleiten lassen, dadurch dafs man  $\alpha'$ ,  $\lambda'$ ,  $\theta'$  und  $\alpha''$ ,  $\lambda''$ ,  $\theta''$  setzt, wo dort  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\theta$  steht. Man erhält daher in unserm jetzigen Falle:

$$\begin{aligned} A_i = & \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta i}{l} \\ & + \frac{4\alpha'\lambda' l}{\pi(l^2 - 4\lambda'^2 i'^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda' i'}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta' i'}{l} \\ & + \frac{4\alpha''\lambda'' l}{\pi(l^2 - 4\lambda''^2 i''^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda'' i''}{l} \cdot \cos \pi \frac{\theta'' i''}{l}, \end{aligned}$$

und

$$B_i = \frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta i}{l} \\ + \frac{4\alpha'\lambda' l}{\pi(l^2 - 4\lambda'^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda' i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l} \\ + \frac{4\alpha''\lambda'' l}{\pi(l^2 - 4\lambda''^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda'' i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\theta'' i}{l}.$$

Beschränken wir uns auch hier wieder auf den Fall, wo  $\lambda = \lambda' = \lambda''$ , und bezeichnen der Kürze halber

$$\frac{4\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \text{ durch } \mathfrak{A}_i, \text{ so wird}$$

$$A_i = \mathfrak{A}_i \cdot \left( \alpha \cdot \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cdot \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \alpha'' \cdot \cos \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)$$

und

$$B_i = \mathfrak{A}_i \cdot \left( \alpha \cdot \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \alpha'' \cdot \sin \pi \frac{\theta'' i}{l} \right),$$

und als Folge davon (gemäß 4)

$$tg 2\pi p = \frac{\alpha \cdot \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cdot \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \alpha'' \cdot \cos \pi \frac{\theta'' i}{l}}{\alpha \cdot \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \alpha' \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \alpha'' \cdot \sin \pi \frac{\theta'' i}{l}}.$$

Dieser Werth von  $tg 2\pi p$  giebt zu erkennen, dafs wenn  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  in allen Intervallen stets die gleichen Werthe beibehalten, auch  $p$  stets einerlei Werth annehmen wird, wenn  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  in jedem Intervall ein und dasselbe Verhältnifs zu einander behaupten; es können mithin nur dann Töne aus den 3 in jedem Intervalle einerlei Stellung einnehmenden Eindrücken hervorgehen, wenn deren Stärke von Intervall zu Intervall die gleiche bleibt, oder von Intervall zu Intervall in demselben Verhältnisse sich abändert.

Fassen wir jetzt wieder den besondern, bei den Versuchen statt findenden Zustand ins Auge, wo alle Eindrücke einerlei Stärke besitzen, und unterscheiden wir dabei zwei Fälle:

Erstlich, wenn die 3 in jedem Intervalle vorkom-

menden Eindrücke überall von derselben Art sind. In diesem Falle ist  $\alpha'' = \alpha' = \alpha$ , so daß man hat

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \frac{\cos \pi \frac{\theta i}{l} + \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l}}{\sin \pi \frac{\theta i}{l} + \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l}},$$

und nun wird (nach 4), wenn wir den zu diesem Fall gehörigen Werth von  $a$  durch  $a'$  bezeichnen

$$a' = \alpha \mathfrak{A}_i. \sqrt{\left\{ \left( \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 + \left( \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 \right\}}.$$

Zweitens, wenn einer von den 3 Eindrücken, wir nehmen an der zu  $\theta'$  gehörige, den beiden andern entgegengesetzt ist. In diesem Falle ist  $\alpha'' = -\alpha' = \alpha$ , weswegen man hat

$$\operatorname{tg} 2\pi p = \frac{\cos \pi \frac{\theta i}{l} - \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l}}{\sin \pi \frac{\theta i}{l} - \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l}},$$

und nun wird, wenn wir den zu diesem Falle gehörigen Werth von  $a$  durch  $a''$  bezeichnen

$$a'' = \alpha \mathfrak{A}_i. \sqrt{\left\{ \left( \cos \pi \frac{\theta i}{l} - \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 + \left( \sin \pi \frac{\theta i}{l} - \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 \right\}}.$$

Setzen wir der Einfachheit wegen

$$\begin{aligned} & \left( \cos \pi \frac{\theta i}{l} + \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 \\ & + \left( \sin \pi \frac{\theta i}{l} + \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 = R' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left( \cos \pi \frac{\theta i}{l} - \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 \\ & + \left( \sin \pi \frac{\theta i}{l} - \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l} \right)^2 = R'', \end{aligned}$$

so hängt die aus der Veränderlichkeit von  $\theta, \theta', \theta''$ , d. h. aus der Aenderung in der Stellung der Eindrücke hervorgehende Aenderung in der Gröſſe der Schwingungsweite sowohl, als in der Stärke des Tones in beiden Fällen bezüglich von den Gröſſen  $R'$  und  $R''$  ab, und jene Elemente erhalten mit diesen Gröſſen zugleich ihre größten oder kleinsten Werthe; um also die Fälle kennen zu lernen, in welchen die Stärke der Töne am größten oder am kleinsten wird, dürfen wir nur die größten und kleinsten Werthe von  $R'$  und  $R''$  aufsuchen. Zu diesem Ende wollen wir den Abstand der beiden äußersten Elemente in jedem Intervalle durch  $2\delta$  bezeichnen, und die Grenzen der Intervalle so wählen, daß ihre Mitte mitten zwischen jene beiden Eindrücke fällt; bezeichnen wir nun noch den Abstand des dritten Eindrucks von dieser Mitte durch  $\delta'$ , so ist  $\theta = -\delta$ ,  $\theta' = \delta'$  und  $\theta'' = \delta$ . Dieser Bezeichnung gemäß wird

$$R' = 4 \cdot \left( \cos \pi \frac{i\delta}{l} \right)^2 + 4 \cdot \cos \pi \frac{i\delta}{l} \cdot \cos \pi \frac{i\delta'}{l} + 1$$

und

$$R'' = 4 \cdot \left( \cos \pi \frac{i\delta}{l} \right)^2 - 4 \cdot \cos \pi \frac{i\delta}{l} \cdot \cos \pi \frac{i\delta'}{l} + 1$$

Die Bedingungen, unter welchen  $R'$  ein Größtes oder Kleinstes werden kann, sind:

$$\sin \pi \frac{i\delta}{l} \left( 2 \cos \pi \frac{i\delta}{l} + \cos \pi \frac{i\delta'}{l} \right) = 0$$

und

$$\cos \pi \frac{i\delta}{l} \cdot \sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0.$$

Die letztere verlangt, daß entweder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  oder  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  sey. Ist  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$ , so giebt die erstere  $\cos \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ ; ist aber  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ , so giebt die erstere

$\cos \pi \frac{i\delta}{l} \pm \frac{1}{2} = 0$ , je nachdem  $\frac{i\delta'}{l}$  eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, oder auch  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$ . Ist  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  und zugleich  $\cos \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ , so wird  $R' = 1$  und erhält weder einen größten noch einen kleinsten Werth; ist aber  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  und zugleich  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = \mp \frac{1}{2}$ , je nachdem  $\frac{i\delta'}{l}$  eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, so wird  $R' = 0$  und erhält einen kleinsten Werth; ist endlich  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  und zugleich  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$ , so wird  $R' = 9$ , wenn  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  beide gerade oder beide ungerade ganze Zahlen sind, und erhält jetzt seinen größten Werth; dagegen erhält in diesem Falle  $R'$  weder einen größten noch einen kleinsten Werth, wenn von den beiden ganzen Zahlen  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  die eine gerade, die andere ungerade ist, in welchem Falle wieder  $R' = 1$  wird.

In gleicher Weise sind die Bedingungen, unter welchen  $R''$  ein Größtes oder Kleinstes wird

$$\sin \pi \frac{i\delta}{l} \cdot \left( 2 \cos \pi \frac{i\delta}{l} - \cos \pi \frac{i\delta'}{l} \right) = 0$$

und

$$\cos \pi \frac{i\delta}{l} \cdot \sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0.$$

Die letztere verlangt, daß entweder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  oder  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  sey. Ist  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$ , so giebt die erstere  $\cos \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ ; ist aber  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ , so giebt die erstere

$\cos \pi \frac{i\delta}{l} = \pm \frac{1}{2}$ , je nachdem  $\frac{i\delta'}{l}$  eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, oder auch  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$ . Ist  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  und zugleich  $\cos \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ , so erlangt  $R''$  weder einen größten noch einen kleinsten Werth; ist hingegen  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  und  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = +\frac{1}{2}$ , wenn  $\frac{i\delta'}{l}$  gerade ist, oder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = -\frac{1}{2}$ , wenn  $\frac{i\delta'}{l}$  ungerade ist, so erlangt  $R''$  in beiden Fällen einen kleinsten Werth und es ist  $R'' = 0$ ; ist endlich  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  und zugleich  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$ , so wird  $R'' = 9$  und erlangt einen größten Werth, wenn von den beiden ganzen Zahlen  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  die eine gerade die andere ungerade ist; sind dagegen  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  beide gerade oder beide ungerade ganze Zahlen, so wird  $R'' = 1$ , und nimmt dann weder einen größten noch einen kleinsten Werth an.

Aus vorstehenden Betrachtungen folgt:

- α) Wenn die drei in jedem Intervalle von der Länge  $2l$  vorkommenden Eindrücke gleichartig sind, so verschwindet der Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$ , wenn  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  und entweder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = -\frac{1}{2}$  im Falle  $\frac{i\delta'}{l}$  eine gerade ganze Zahl ist, oder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = +\frac{1}{2}$  im Falle  $\frac{i\delta'}{l}$  eine ungerade ganze Zahl ist; dagegen erlangt jener Ton seine größte Stärke, wenn  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  und zugleich  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$

ist, in dem Falle wo die ganzen Zahlen  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

- $\beta$ ) Wenn die drei in jedem Intervalle von der Länge  $2l$  vorkommenden Eindrücke ungleichartig sind, so verschwindet der Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$ , wenn  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  und entweder  $\cos \pi \frac{i\delta}{l} = +\frac{1}{2}$  im Falle  $\frac{i\delta'}{l}$  eine gerade ganze Zahl ist, oder  $\cos \pi \frac{i\delta'}{l} = -\frac{1}{2}$  im Falle  $\frac{i\delta'}{l}$  eine ungerade ganze Zahl ist; dagegen erlangt jener Ton seine größte Stärke, wenn  $\sin \pi \frac{i\delta}{l} = 0$  und zugleich  $\sin \pi \frac{i\delta'}{l} = 0$  ist, in dem Falle, wo von den beiden ganzen Zahlen  $\frac{i\delta}{l}$  und  $\frac{i\delta'}{l}$  die eine gerade, die andere ungerade ist.

8) Bringen wir diese allgemeinen Resultate in Anwendung auf jeden der einzelnen Töne, so finden wir:

- I. In Beziehung auf den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{1}{2l}$  ist.

- $\alpha$ ) Wenn die 3 Eindrücke gleichartig sind: dafs er verschwindet, wenn die Eindrücke um ein Drittheil des ganzen Intervalls von einander entfernt liegen; dafs er dagegen am stärksten hervortritt, wenn alle drei Eindrücke in einem einzigen von dreifacher Stärke zusammenfließen.
- $\beta$ ) Wenn die drei Eindrücke ungleichartig sind: dafs er verschwindet, wenn die beiden gleichartigen Eindrücke um ein Drittheil des ganzen Intervalls von einander abstehen, und der ungleichartige mitten zwischen ihnen liegt; dafs er da-

gegen am stärksten hervortritt, wenn die gleichartigen Eindrücke in einen einzigen von doppelter Stärke zusammenfließen, während der ungleichartige um das halbe Intervall von diesem entfernt liegt.

II. In Beziehung auf den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  ist.

α) Wenn die drei Eindrücke gleichartig sind: dafs dieser Ton verschwindet, wenn zwei Eindrücke um ein oder zwei Drittheile des ganzen Intervalls von einander entfernt liegen und der dritte in die Mitte zwischen diesen beiden fällt, oder wenn zwei davon um ein Sechstel oder fünf Sechstel des ganzen Intervalls von einander abstehen, während der dritte um ein Viertel des ganzen Intervalls von ihrer Mitte entfernt ist; dafs er dagegen am stärksten hervortritt, wenn alle drei Eindrücke in einander fallen, oder wenn zwei davon in einen zusammenfließen, und der dritte von diesem um die Hälfte des Intervalls absteht.

β) Wenn die drei Eindrücke ungleichartig sind: dafs dieser Ton verschwindet, wenn die beiden gleichartigen Eindrücke um ein Sechstel oder um fünf Sechstel des ganzen Intervalls von einander abstehen, und der ungleichartige mitten zwischen jenen liegt, oder wenn die beiden gleichartigen Eindrücke um ein Drittel oder um zwei Drittel des ganzen Intervalls von einander entfernt stehen, während der ungleichartige um ein Viertel des Intervalls von der Mitte dieser beiden abliegt; dafs er dagegen am stärksten hervortritt, wenn die beiden gleichartigen Eindrücke in einen zusammenfließen, und der ungleichartige um ein Viertel des Intervalls von diesen absteht, oder wenn die gleichartigen Eindrücke um die Hälfte des Intervalls von einander ab-

stehen, während der ungleichartige mitten zwischen diese hinein fällt.

III. In Beziehung auf den Ton, dessen Schwingungsmenge  $\frac{3}{2}l$  ist.

- α) Wenn die drei Eindrücke gleichartig sind: daß dieser Ton verschwindet, wenn zwei von diesen Eindrücken um zwei, oder vier, oder acht Neuntel des ganzen Intervalls von einander abstehten, und der dritte mitten zwischen diese beiden fällt, oder um ein Drittel des Intervalls von deren Mitte abliegt, oder wenn zwei davon um ein oder fünf, oder sieben Neuntel des Intervalls von einander abstehten, während der dritte um ein Sechstel, oder um die Hälfte des Intervalls von der Mitte dieser abliegt; daß er dagegen am stärksten hervortritt, wenn entweder alle drei Eindrücke zusammenfallen, oder wenn zwei davon zusammenfallen und der dritte um ein oder zwei Drittel des Intervalls von diesen absteht, oder auch wenn alle drei um ein Drittel des Intervalls von einander abliegen, endlich noch, wenn zwei davon um ein Drittel des Intervalls von einander abliegen, und der dritte um die Hälfte des Intervalls von der Mitte jener absteht, oder wenn zwei davon zusammenfallen, und der dritte um die Hälfte des Intervalls von diesen abliegt.*
- β) Wenn die drei Eindrücke ungleichartig sind: daß dieser Ton verschwindet, wenn die beiden gleichartigen Eindrücke um ein, oder fünf, oder sieben Neuntel des Intervalls von einander abliegen, und der ungleichartige in die Mitte zwischen diese fällt, oder um ein Drittel des Intervalls von dieser Mitte absteht, oder wenn die beiden gleichartigen Eindrücke um zwei, oder vier, oder acht Neuntel des Intervalls von einander abliegen, und der ungleichartige Eindruck*

*um ein Sechstel oder die Hälfte des Intervalls von deren Mitte absteht; dafs er dagegen am stärksten hervortritt, wenn die beiden gleichartigen Eindrücke entweder zusammenfallen oder um zwei Drittel des Intervalls von einander abste-  
hen, während der ungleichartige um ein Sechstel oder um die Hälfte des Intervalls von deren Mitte absteht, oder wenn die gleichartigen Eindrücke um ein Drittel des Intervalls von einander abste-  
hen, oder um das ganze Intervall aus einander rücken, während der ungleichartige Eindruck in deren Mitte liegt, oder von ihr um ein Drittel des Intervalls absteht.*

9) Die in Vorstehendem für einen, zwei und drei Eindrücke erhaltenen Resultate, in Bezug auf deren geringere oder gröfsere Fähigkeit einen Ton zu erzeugen, tragen so viel Reiz in sich, dafs ich nicht zweifle, man werde durch den Versuch ihre allgemeine Gültigkeit erproben. Gerade dieserwegen fühle ich mich bewogen, noch einige allgemeine Betrachtungen darüber hinzuzufügen, welche zu kennen dem Experimentator von Nutzen seyn dürfte. Um diess mit Leichtigkeit thun zu können, bin ich gezwungen, ein Paar mathematischer Hilfssätze vor auszuschicken. Zuvor sehr bekannter trigonometrischer Relationen hat man sowohl

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \dots + \cos(a+(n-1)x) \\ &= \frac{\cos\left(a+(n-1)\frac{x}{2}\right) \cdot \sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned} & \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \dots + \sin(a+(n-1)x) \\ &= \frac{\sin\left(a+(n-1)\frac{x}{2}\right) \cdot \sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Diese geben zu erkennen, daß so oft  $n\frac{x}{2}$  gleich  $\pi$  oder gleich  $2\pi$  oder gleich  $3\pi$  u. s. f. ist, die vorstehenden Summen von Cosinussen oder Sinussen stets Null seyn werden, weil dann  $\sin n\frac{x}{2} = 0$  ist. Diefß führt zu folgendem Satze:

a) *Wenn die Winkel einer Summe von lauter Cosinussen oder lauter Sinussen eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz der so vielte Theil von  $2\pi$  oder  $4\pi$  oder  $6\pi$  u. s. f. ist, als die Summe Glieder hat, so wird diese Summe Null.*

Dieser Satz erleidet jedoch eine Ausnahme, welche eintritt, wenn  $\frac{x}{2}$  selbst gleich  $\pi$  oder  $2\pi$  oder  $3\pi$  u. s. f.

ist, denn dann wird sowohl  $\sin n\frac{x}{2}$  als  $\sin \frac{x}{2}$  der Null gleich, es nehmen daher jetzt obige Summen die Form  $\frac{0}{0}$  an, und geben, wenn man ihre Werthe den bekannten Regeln gemäß aufsucht,

$$\frac{n \cdot \cos\left(a + (n-1)\frac{x}{2}\right) \cdot \cos n\frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \quad \text{für die Cosinusreihe}$$

$$\frac{n \cdot \sin\left(a + (n-1)\frac{x}{2}\right) \cdot \cos n\frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \quad \text{für die Sinusreihe,}$$

so oft  $\frac{x}{2}$  einen der Werthe  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$  ... annimmt.

Hieraus fließt folgender besondere Satz:

b) *So oft  $\frac{x}{2}$  ein Vielfaches von  $\pi$  wird, nimmt obige Summe der Cosinusreihe stets den Werth  $n \cdot \cos a$ , und obige Summe der Sinusreihe nimmt unter den gleichen Umständen jedesmal den Werth  $n \cdot \sin a$  an.*

10) Fassen wir nun den allgemeineren Fall in's Auge,

wo gleich groſſe und gleichartige Eindrücke von derselben Form in einem Intervalle von der Länge  $2l$  in beliebiger Anzahl, die wir durch  $n$  bezeichnen wollen, vorkommen, so läßt sich schon aus dem in 5, 6 und 7 Vorgekommenen ohne Mühe entnehmen, dafs man in diesem Falle haben werde:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \left( \cos \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \cos \pi \frac{\theta_2 i}{l} \right. \\ &\quad \left. + \cos \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \cos \pi \frac{\theta_n i}{l} \right) \\ \text{und} \\ B_i &= \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \left( \sin \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \sin \pi \frac{\theta_2 i}{l} \right. \\ &\quad \left. + \sin \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \sin \pi \frac{\theta_n i}{l} \right) \end{aligned} \right\} (\S)$$

wenn wir, wie schon in 7 geschehen ist, der Kürze halber

$$\frac{4\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} = \mathfrak{A}_i$$

setzen, und durch  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n$  die Entfernungen der auf einander folgenden Eindrücke von der Mitte jenes Intervalls bezeichnen. Bilden nun die ihrer Gröſſe nach geordneten Zahlen  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots, \theta_n$  eine arithmetische Reihe, deren Differenz  $d$  seyn mag, so thun dieſs auch die in obigen für  $A_i$  und  $B_i$  gegebenen Ausdrücken vorkommenden Winkel; man kann daher (nach 9) die hier vorkommenden Summen der Cosinuse und Sinuse angeben, und findet so

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\cos \frac{i\pi}{l} \left( \theta_1 + (n-1) \frac{d}{2} \right) \cdot \sin \frac{i\pi}{l} \cdot \frac{nd}{2}}{\sin \frac{i\pi}{l} \cdot \frac{d}{2}} \\ \text{und} \\ B_i &= \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\sin \frac{i\pi}{l} \left( \theta_1 + (n-1) \frac{d}{2} \right) \cdot \sin \frac{i\pi}{l} \cdot \frac{nd}{2}}{\sin \frac{i\pi}{l} \cdot \frac{d}{2}} \end{aligned} \right\} (\S)$$

Diese Ausdrücke gehen, wenn der Abstand der Eindrücke von einander, nämlich  $d, = \frac{2l}{n}$  ist, über in:

$$A_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\cos\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{i\pi(n-1)}{n}\right) \cdot \sin i\pi}{\sin \frac{i\pi}{n}}$$

und

$$B_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\sin\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{i\pi(n-1)}{n}\right) \cdot \sin i\pi}{\sin \frac{i\pi}{n}}$$

und zeigen, daß unter solchen Umständen  $A_i$  und  $B_i$  Null werden, wenn nicht  $i=n$  oder ein Vielfaches von  $n$  ist, in welchem Falle man nach dem in 9 Gesagten

$A_i = \alpha n \cdot \mathfrak{A}_i \cos \frac{i\pi\theta_1}{l}$  und  $B_i = \alpha n \cdot \mathfrak{A}_i \sin \frac{i\pi\theta_1}{l}$  erhält. Hieraus ergibt sich der nachstehende Satz:

- a) *Wenn die in jedem Intervalle vorkommenden  $n$  Eindrücke um den  $n$ ten Theil des Intervalls von einander abstehen, so kann aus ihnen kein anderer Ton entstehen, als die, deren Schwingungsmengen  $\frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \frac{3}{d}$  u. s. f. sind, wobei  $d$  den Abstand zweier Eindrücke von einander vorstellt.*

Man könnte hiernach versucht werden, Roeber's oben in 1 mitgetheilte, und offenbar zu weite Definition des Tones dahin zu beschränken, daß die beliebigen Impulse nicht solche seyn dürfen, welche selbst wieder in aequidistante und unter einander gleiche Impulse zerlegt werden können; allein schon die in 6 und 7 untersuchten Fälle haben uns gezeigt, daß außerdem noch in vielen andern Fällen der Ton unmöglich werden könne. Im Allgemeinen wird bei  $n$ gleichartigen und gleichen Eindrücken der Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$  in so

vielen Fällen unmöglich, als sich verschiedene naturgemäße Werthe für  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  angeben lassen, welche den beiden Bedingungen

$$0 = \cos \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \cos \pi \frac{\theta_2 i}{l} + \cos \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \cos \pi \frac{\theta_n i}{l}$$

und

$$0 = \sin \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \sin \pi \frac{\theta_2 i}{l} + \sin \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \sin \pi \frac{\theta_n i}{l}$$

genügen, während einer von jenen Werthen als gegeben angesehen wird. Man kann nämlich anstatt der beiden vorstehenden Bedingungen auch die eine

$$0 = \left( \cos \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \cos \pi \frac{\theta_2 i}{l} + \cos \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \cos \pi \frac{\theta_n i}{l} \right)^2 \\ + \left( \sin \pi \frac{\theta_1 i}{l} + \sin \pi \frac{\theta_2 i}{l} + \sin \pi \frac{\theta_3 i}{l} \dots + \sin \pi \frac{\theta_n i}{l} \right)^2$$

setzen, und dieser die nachstehende Form geben:

$$0 = \cos \pi \frac{(\theta_1 - \theta_1)i}{l} + \cos \pi \frac{(\theta_2 - \theta_1)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_3 - \theta_1)i}{l} \dots + \cos \pi \frac{(\theta_n - \theta_1)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_1 - \theta_2)i}{l} + \cos \pi \frac{(\theta_2 - \theta_2)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_3 - \theta_2)i}{l} \dots + \cos \pi \frac{(\theta_n - \theta_2)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_1 - \theta_3)i}{l} + \cos \pi \frac{(\theta_2 - \theta_3)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_3 - \theta_3)i}{l} \dots + \cos \pi \frac{(\theta_n - \theta_3)i}{l} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ + \cos \pi \frac{(\theta_1 - \theta_n)i}{l} + \cos \pi \frac{(\theta_2 - \theta_n)i}{l} \\ + \cos \pi \frac{(\theta_3 - \theta_n)i}{l} \dots + \cos \pi \frac{(\theta_n - \theta_n)i}{l},$$

welche durch den bloßen Anblick zu erkennen giebt, dafs in der That nur  $n-1$  unabhängige Gröfsen im Bereiche

reiche jener Bedingungen liegen, welches daher kommt, dafs die  $n$  Eindrücke, ohne ihre relative Stellung zu verändern, in dem Intervalle beliebig verschoben werden können.

Wenn zwar nicht alle  $n$  Eindrücke um den  $n$ ten Theil des Intervalls von einander abstehen, aber doch  $m$  davon um den  $m$ ten Theil des Intervalls, so ist die Summe der auf diese sich beziehenden Cosinuse und Sinuse in den Ausdrücken für  $A_i$  und  $B_i$  Null, so lange nicht  $i=m$  oder ein Vielfaches von  $m$  ist; ist aber  $i=m$  oder ein Vielfaches von  $m$ , so ist die Summe der auf sie sich beziehenden Cosinuse gleich  $m \cdot \cos \pi \frac{\theta' i}{l}$ ,

und die Summe ihrer Sinuse gleich  $m \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l}$ , wenn man unter  $\theta'$  den kleinsten der zu ihnen gehörigen Werthe von  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$  versteht. Hieraus fließt folgender Satz:

- b) *Wenn unter den  $n$  gleichen und gleichartigen Eindrücken des Intervalls von der Länge  $2l$ , eine Gruppe von  $m$  Eindrücken sich vorfindet, welche um die Strecke  $\frac{2l}{m}$  von einander abstehen, so kann diese bei der Untersuchung aller jener Töne, deren Schwingungsmenge nicht  $\frac{m}{2l}$ , oder  $\frac{2m}{2l}$ , oder  $\frac{3m}{2l}$  u. s. f. ist, ganz aufser Acht gelassen werden, weil sie nur auf die hier angezeigten Töne einen Einfluss hat; und bei der Untersuchung dieser Töne kann man in den Ausdrücken für  $A_i$  und  $B_i$  anstatt der Summe der auf jene Eindrücke sich beziehenden Cosinuse einfach  $m \cdot \cos \pi \frac{\theta' i}{l}$ , so wie anstatt der Summe der Sinuse einfach  $m \cdot \sin \pi \frac{\theta' i}{l}$  schreiben, unter  $\theta'$  den kleinsten der zu ihnen gehörigen Werthe von  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$  verstanden.*

Dieser Satz giebt in vielen Fällen eine große Vereinfachung der Behandlung an die Hand, und ist anwendbar nicht nur wenn eine, sondern auch wenn mehrere Gruppen von der beschriebenen Art vorhanden sind.

Nun wollen wir den Fall betrachten, wo die ihrer Größe nach geordneten  $n$  Werthe  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$  zwar wieder eine arithmetische Reihe bilden, ihr Unterschied  $d$  aber nicht wie eben  $\frac{2l}{n}$ , sondern  $\frac{2l}{p}$  ist, wobei  $p$  eine ganze Zahl vorstellt, die größer als  $n$  ist. In diesem Falle hat man in den Ausdrücken (Q)  $\frac{1}{p}$  für  $d$  zu setzen, weshalb sie werden:

$$A_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\cos\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{i\pi(n-1)}{p}\right) \cdot \sin\frac{i\pi n}{p}}{\sin\frac{i\pi}{p}}$$

und

$$B_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\sin\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{i\pi(n-1)}{p}\right) \cdot \sin\frac{i\pi n}{p}}{\sin\frac{i\pi}{p}}.$$

So oft also  $i=p$  oder ein Vielfaches von  $p$  ist, wird gleichzeitig  $\sin\frac{i\pi n}{p}=0$  und  $\sin\frac{i\pi}{p}=0$ , es tritt also der in 9. b. angezeigte Fall ein, d. h. es wird

$$A_i = n\alpha \cdot \mathfrak{A}_i \cdot \cos\frac{i\pi\theta_1}{l}, \quad B_i = n\alpha \cdot \mathfrak{A}_i \cdot \sin\frac{i\pi\theta_1}{l},$$

und hierin liegt nachstehender Satz:

- c) Wenn die  $n$  gleichen und gleichartigen Eindrücke des Intervalls von der Länge  $2l$  in dem Abstände  $d$  von einander liegen, und es ist  $2l = (n+m)d$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl vorstellt, so geben diese  $n$  Eindrücke die Töne von der Schwingungsmenge  $\frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \frac{3}{d}, \dots$  gerade so, als ob  $n+m$  solcher

*Eindrücke das Intervall erfüllten, nur mit einer in dem Verhältniß  $\frac{n}{n+m}$  verminderten Schwingungsweite. Ausser diesen Tönen können aber auch noch alle übrigen zu diesem Intervalle gehörigen Töne, obschon mit verhältnißmäßig geringerer Stärke, zu Stande kommen.*

Wenn unter den hier obwaltenden Umständen  $n$  und  $p$  einen gemeinschaftlichen Theiler  $q$  haben, so wird  $\sin \frac{i\pi n}{p} = 0$  jedesmal, wenn nur  $i$  ein Vielfaches von

$\frac{p}{q}$  oder  $\frac{p}{q}$  selbst ist, aber  $\sin \frac{i\pi}{p}$  wird nicht Null, so oft dieses Vielfache nicht zugleich auch ein Vielfaches von  $p$  oder  $p$  selbst ist; es tritt dann der in 9. a. besprochene Fall ein, wodurch man zu folgendem Satze geführt wird:

*d) Ist alles wie in c., haben aber  $m$  und  $n$  den gemeinschaftlichen Theiler  $q$ , so gilt alles dort Gesagte, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt alle jene Töne, deren Schwingungsmengen  $\frac{1}{dq}$  oder ein*

*Vielfaches davon sind, ohne zugleich auch  $\frac{1}{d}$  oder ein Vielfaches davon zu seyn, durchaus nicht entstehen können.*

Zuletzt wollen wir noch den Fall untersuchen, wo die ihrer Größe nach geordneten  $n$  Werthe  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$  zwar wieder eine arithmetische Reihe bilden, deren Unterschied aber nicht wie eben  $\frac{2l}{p}$ , sondern  $\frac{2lr}{p}$  ist, wobei  $r$  und  $p$  relative Primzahlen vorstellen, und  $p$  größer als  $nr$  seyn muß. In diesem Falle hat man in den Ausdrücken ( $\S$ )  $\frac{r}{p}$  für  $\frac{d}{2l}$  zu setzen, weshalb sie werden:

$$A_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\cos\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{ir\pi(n-1)}{p}\right) \cdot \sin\frac{irn\pi}{p}}{\sin\frac{ir\pi}{p}}$$

und

$$B_i = \alpha \mathfrak{A}_i \cdot \frac{\sin\left(\frac{i\pi\theta_1}{l} + \frac{ir\pi(n-1)}{p}\right) \cdot \sin\frac{irn\pi}{p}}{\sin\frac{ir\pi}{p}}.$$

So oft also  $i$  gleich  $p$  oder ein Vielfaches von  $p$  ist, wird gleichzeitig sowohl  $\sin\frac{irn\pi}{p} = 0$  als  $\sin\frac{ir\pi}{p} = 0$ , es tritt also der in 9. b. behandelte Fall auf, d. h. es wird

$$A_i = n\alpha \cdot \mathfrak{A}_i \cdot \cos\frac{i\pi\theta_1}{l}, \quad B_i = n\alpha \cdot \mathfrak{A}_i \cdot \sin\frac{i\pi\theta_1}{l},$$

und hierin spricht sich folgender Satz aus:

- e) Wenn die  $n$  gleichen und gleichartigen Eindrücke des Intervalls von der Länge  $2l$  in dem Abstände  $rd'$  aus einander liegen, und es ist  $2l = (nr + m)d'$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl vorstellt, die mit  $r$  keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so geben diese  $n$  Eindrücke alle jene Töne, deren Schwingungsmengen  $\frac{1}{d'}, \frac{2}{d'}, \frac{3}{d'} \dots$  sind, gerade so als ob  $nr + m$  solcher Eindrücke in dem Abstände  $d'$  das Intervall erfüllten, jedoch mit einer in dem Verhältniß  $\frac{n}{nr + m}$  verminderten Schwingungsweite. Außer diesen Tönen können aber auch noch alle übrigen zu diesem Intervalle gehörigen Töne, ob schon nur mit verhältnißmäßig geringerer Stärke, zu Stande kommen.

Wenn unter den hier obwaltenden Umständen  $n$  und  $p$  einen gemeinschaftlichen Theiler  $q$  haben, so wird  $\sin\frac{irn\pi}{p} = 0$  jedesmal, wenn nur  $i$  gleich  $\frac{p}{q}$  oder ein

Vielfaches von  $\frac{p}{q}$  ist, aber  $\sin \frac{ir\pi}{p}$  wird nicht Null, so oft dieses Vielfache nicht zugleich  $p$  oder ein Vielfaches von  $p$  ist; es tritt dann der in 9. a. verhandelte Fall ein, wodurch man auf nachstehenden Satz stößt:

f) *Ist alles wie in e., haben aber  $m$  und  $n$  den gemeinschaftlichen Theiler  $q$ , so gilt noch alles dort Gesagte, nur mit dem Unterschiede, daßs jetzt alle jene Töne, deren Schwingungsmengen  $\frac{1}{d'q}, \frac{2}{d'q}, \frac{3}{d'q}, \dots$  sind, ohne zugleich auch  $\frac{1}{d'}$  oder ein Vielfaches davon zu seyn, durchaus nicht entstehen können.*

11) Es ließen sich ähnliche Sätze, wie die in voriger Nummer, auch für solche Fälle aufstellen, wo Eindrücke von entgegengesetzter Art in dem Intervalle von der Länge  $2l$  vorkommen; es wird indessen zweckmäßiger seyn, anstatt ihrer folgende sehr einfache aufzustellen, die sie entbehrlich machen.

Zuvörderst springt in die Augen, daßs da, wo alle in dem Intervalle vorkommenden Eindrücke von derselben Form und Gröfse sind, und es gesellt sich zu ihnen ein neuer von derselben Form und Gröfse, dessen Abstand von der Mitte des Intervalls  $\theta$  seyn mag; so fügt dieser neu hinzugekommene Eindruck in die zu  $\alpha\mathfrak{A}$  gehörigen Factoren der Ausdrücke ( $\S$ ) entweder die Theile  $+\cos \pi \frac{\theta i}{l}$  und  $+\sin \pi \frac{\theta i}{l}$  oder die Theile  $-\cos \pi \frac{\theta i}{l}$  und  $-\sin \pi \frac{\theta i}{l}$  hinzu, je nachdem er von der einen oder von der entgegengesetzten Art ist. Kommen also zwei neue von derselben Form und Gröfse, aber von entgegengesetzter Art hinzu, deren Abstand von der Mitte des Intervalls der gleiche ist, d. h. welche an einer und derselben Stelle liegen, so sind die in jenen Factoren vor-

fallenden Aenderungen jetzt  $\cos \pi \frac{\theta i}{l} - \cos \pi \frac{\theta i}{l}$  und  $\sin \pi \frac{\theta i}{l} - \sin \pi \frac{\theta i}{l}$ , d. h. die Ausdrücke ( $\S$ ) werden durch das Hinzukommen von zwei solchen neuen Eindrücken durchaus nicht verändert. Hieraus folgt der Satz:

- a) *Es ist unter allen Umständen erlaubt, zu den schon vorhandenen Eindrücken eines Intervalls zwei neue gleiche und entgegengesetzte Eindrücke hinzuzufügen, wenn man nur beiden eine und dieselbe Stelle anweist; und eben so kann man da, wo sich unter besondern Umständen zwei gleiche und entgegengesetzte, auf dieselbe Stelle sich beziehende Eindrücke herausstellen, diese unbeschadet aller Resultate aus der Betrachtung weglassen.*

Wichtiger als der vorstehende Satz sind folgende Eigenschaften entgegengesetzter Eindrücke:

- b) *Man kann anstatt eines Eindrucks von bestimmter Art, dessen Abstand von der Mitte des Intervalls  $\theta$  ist, bei der Aufsuchung des Tones' von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$ , so oft  $i$  eine ungerade Zahl ist, den entgegengesetzten von derselben Form und GröÙe setzen, dessen Entfernung von der Mitte des Intervalls  $l+\theta$  oder  $-l+\theta$  ist; denn man hat stets*

$$\cos \pi \frac{(\pm l + \theta)i}{l} = -\cos \pi \frac{\theta i}{l}$$

und

$$\sin \pi \frac{(\pm l + \theta)i}{l} = -\sin \pi \frac{\theta i}{l},$$

so oft  $i$  eine ungerade Zahl ist.

- c) *Man kann anstatt eines Eindrucks von bestimmter Art, dessen Abstand von der Mitte des Intervalls  $\theta$  ist, bei der Aufsuchung des Tones von der*

Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$ , so oft  $i$  das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, den entgegengesetzten von derselben Form und Gröfse setzen, dessen Abstand von der Mitte des Intervalls  $\frac{1}{2}l + \theta$  oder  $-\frac{1}{2}l + \theta$  ist; denn man hat stets

$$\cos \pi \frac{(\pm \frac{1}{2}l + \theta)i}{l} = -\cos \pi \frac{\theta i}{l}$$

und

$$\sin \pi \frac{(\pm \frac{1}{2}l + \theta)i}{l} = -\sin \pi \frac{\theta i}{l},$$

wenn  $i$  eine doppelte ungerade Zahl ist.

- d) Endlich kann man allgemein anstatt eines Ein-drucks von bestimmter Art, dessen Abstand von der Mitte des Intervalls  $\theta$  ist, bei der Aufsuchung des Tones von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$ , so oft  $i$  ein Product aus  $2^m$  in eine ungerade Zahl ist, wobei  $m$  eine ganze positive Zahl vorstellt, den entgegengesetzten von derselben Form und Gröfse setzen, dessen Entfernung von der Mitte des Intervalls  $\frac{l}{2^m} + \theta$  oder  $-\frac{l}{2^m} + \theta$  ist, denn man hat stets

$$\cos \pi \frac{(\pm \frac{l}{2^m} + \theta)i}{l} = -\cos \pi \frac{\theta i}{l}$$

und

$$\sin \pi \frac{(\pm \frac{l}{2^m} + \theta)i}{l} = -\sin \pi \frac{\theta i}{l},$$

wenn  $i$  ein Product aus  $2^m$  in eine ungerade Zahl ist.

Um sich von der Wirksamkeit der hier unter *b.* und *c.* aufgestellten Sätze einen klaren Begriff zu verschaffen, darf man nur mit ihrer Hilfe alle in 6 und 7 unter dem Buchstaben  $\beta$  stehenden Sätze aus denen unter  $\alpha$  gegebenen herleiten, oder umgekehrt.

12) Es liegt mir jetzt noch ob, den Nachweis zu liefern, wie die in 2 mitgetheilten Seebeck'schen Versuche aus Vorstehendem ihre Erklärung schöpfen.

Was die dort unter *a.* und *b.* hingestellten anlangt, so ergeben sie sich unmittelbar aus 5. *α.* und 5. *β.* und aus 6. I. *β.*, wenn man damit 11. *α.* in Verbindung bringt, und dabei die Schwingungsrichtungen als gleich oder nahe gleich annimmt, weil unsere Betrachtungen nur diesen Fall im Auge behielten.

Was die unter 2. *c.* stehenden Versuche betrifft, so finden sie in 6. I. *α.* und 6. II. *α.* ihre vollständige Erklärung, denn nicht nur ist dort die Ursache des gleichzeitigen Auftretens der beiden Töne  $t+t'$ , und  $\frac{t+t'}{2}$  aufgedeckt, sondern zugleich auch der Wechsel in der Stärke beider Töne nachgewiesen worden.

Was die unter 2. *d.* stehenden Versuche angeht, so finden diese in 8. I. *α.*, 8. II. *α.* und 8. III. *α.* ihren Grund; denn dort ist das Auftreten der beiden Töne  $t+t'+t''$  und  $\frac{t+t'+t''}{3}$  unter den bei den Versuchen obwaltenden Umständen dargethan, und auch der Wechsel in der relativen Stärke beider Töne bei veränderter Stellung der Löcher findet sich erklärt, und was die Abwesenheit des Tones  $\frac{t+t'+t''}{2}$  betrifft, so kann diese nicht befremden,

da dieser Ton nur sehr schwach sich zeigen kann, indem die Umstände des Versuches zu weit von den Bedingungen seiner größten Stärke abliegen, als daß er nicht in seiner tiefen Octave verloren gehen sollte, wie weiter unten noch ausführlicher dargethan werden wird.

Der unter 2. *e.* verzeichnete Versuch ist für unsere Darlegung der Sache von besonderem Interesse. Nach unserer Definition des Tones nämlich kann hier, wo die Löcher regellos, jedoch so gestellt sind, daß ihr Abstand sich nicht sehr von einem Mittelwerth entfernt, nur die

ganze LÖcherreihe als Intervall gedacht werden, weil nur sie sich regelmäfsig wiederholt, darum können, wenn man sich obige für 2 und 3 Eindrücke in jedem Intervalle gültigen Betrachtungen auf so viele Eindrücke ausgedehnt denkt, als Löcher in der ganzen LÖcherreihe sind, aufser dem Tone, dessen Schwingungsmenge jenem mittlern Abstände entspricht, noch alle die auftreten, deren Schwingungsmengen  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n}$  von jener sind, wenn  $n$  die

Anzahl der Löcher in der ganzen Reihe vorstellt. Offenbar kann ein Theil von diesen Tönen schon ihrer allzu grofsen Tiefe halber nicht gehört werden, und die dem höchsten Tone näher liegenden können wegen der Regellosigkeit in der Stellung der Löcher nicht wohl zu Stande kommen; denn wenn an einer Stelle der Reihe die Löcher von ihrer gleichen Entfernung abweichen, und eine solche Stellung annehmen, wobei je zwei die tiefere Octave bilden müßten, wenn die gleiche Stellung periodisch sich fort erhielte, wird diese Möglichkeit sogleich wieder durch einen Wechsel in der Stellung aufgehoben und vielleicht durch den Anfang eines andern tiefern Tones ersetzt, wenn z. B. je drei Löcher von da ab einerlei Stellung annehmen, der sich aber seinerseits eben so wenig wie der vorige erhalten kann. Es kann sich jeder solche tiefere Ton dem Ohre nur andeuten, aber nicht zur Klarheit bringen; nur der höchste eine Ton macht hiervon eine Ausnahme, weil für ihn die Bedingung der Entstehung und Erhaltung stets vorhanden ist. So erklärt sich das isolirte Auftreten dieses einen Tons, und sogar dessen von Seebeck ihm zugeschriebene Unvollkommenheit wird durch die Aufeinanderfolge von sich verdrängenden Anfängen der tiefern Töne begreiflich. Auf solche Weise stellt sich dieser Versuch gewissermafsen als Zeuge für unsere Definition des Tones, der Annahme gegenüber, dafs kein vollständiger Synchronismus der Tonwellen zur Entstehung des Tones er-

forderlich sey; denn wenn der höchste Ton sich bilden kann trotz des ungleichen Abstandes der Löcher, warum sollte der um eine Octave tiefere sich nicht bilden können, trotz der ungleichen Stellung von je zwei und zwei Löchern, wenn man die Entstehung des erstern aus einem Nichtsynchronismus seiner Bestandtheile erklären wollte? Oder ist vielleicht die Ungleichheit von je zwei zu je zwei Löchern größer, als die von einem Loch zum andern?

Die unter 2. *f.* beschriebenen Erscheinungen sind eine nothwendige Folge der in 10. *c.* entwickelten Eigenschaften von Eindrücken, welche die in diesen Versuchen gewählte Stellung einnehmen.

Hinsichtlich der in 2. *g.* erwähnten Versuche hegt Seebeck selber noch einige Zweifel, weshalb auch wir auf sie kein großes Gewicht legen können. Das Erscheinen desjenigen Tones, welcher dem gemeiusamen Maafse von  $t$  und  $t'$  entspricht, ist durch die in 10. *e.* entzifferte Eigenschaft solcher Eindrücke aufgeklärt, aber das Auftreten des der Schwingungsdauer  $t$  entsprechenden Tones, wenn  $t'$  kein Vielfaches von  $t$  ist, und die Anordnung der Löcher in jedem Felde der Scheibe völlig die gleiche war, bleibt unerklärt, wenn nicht etwa auch hier der sogleich zu besprechende Umstand eintritt.

Was endlich den in 2. *h.* niedergelegten Versuch angeht, dessen Gelingen unter allen Umständen von Seebeck ausdrücklich hervorgehoben wird, so ist dieser zwar auch nicht in unsern aufgestellten Formeln enthalten, aber er kann nichts desto weniger im Sinne unserer Definition des Tones gedeutet werden. Man erinnere sich hier an den bekannten Savart'schen Versuch, wo derselbe den Ton durch die Zähne eines Rades sich bilden liefs, und nach und nach einen immer größern Theil der Zähne von dem Rade wegnahm, bis endlich nur noch zwei zunächst bei einander stehende Zähne im Rade übrig blieben, dessen ungeachtet aber fortwährend denselben Ton vernahm, wenn das Rad stets mit derselben Geschwin-

digkeit umgedreht wurde. Savart schloß daraus, daß zwei einander folgende Stöße oder Schläge hinreichend sind, einen vergleichbaren Ton zu bilden, oder, um deutlicher zu reden, daß zwei auf einander folgende Tonwellen dem Ohre zur Bestimmung der Höhe dieses Tones genügen. Dieser von Savart aus dem erwähnten Versuche gezogene Schluß ist unserer Herleitung solcher Töne zufolge nicht zulässig, weil bei diesem Savart'schen Versuche sowohl, als bei jenen von Seebeck angestellten Versuchen, welche in 2. f. beschrieben stehen, der beobachtete Ton *ganz unabhängig von der Anzahl von auf einander folgenden Tonwellen, welche das Ohr zur Erfassung seiner Höhe nöthig hat, sich zeigen muß*, wie unmittelbar aus 10. c. sich entnehmen läßt. Was aber jener Savart'sche Versuch noch ganz unerledigt gelassen hat, das scheint durch die in Rede stehenden, unter 2. h. und vielleicht auch 2. g. beschriebenen Versuche Seebeck's zur Gewissheit erhoben werden zu können. In der That kann hier im Allgemeinen so wenig wie in 2. g. der Ton *t* sich bilden in regelrechter Weise; wenn er nun aber doch gehört wird, so würde sich dadurch sein Heraustreten aus der Regel laut genug ankündigen. Ein solches Heraustreten aus der Regel fände aber statt, wenn jede Gruppe der gleichweit aus einander liegenden Eindrücke für sich einen Ton zu liefern im Stande wäre, so daß das Ohr diese einzelnen, nicht unter sich zu einem Ton streng verbundenen Töne von einerlei Höhe in sich aufnähme; etwa so, wie wenn ein und derselbe Ton von zwei Instrumenten zugleich in unser Ohr gelangt, so zwar daß immer das eine ihn giebt unmittelbar vor oder nach dem Aufhören des andern.

13) Ich kann diese Abhandlung nicht schließen, ohne zuvor noch ein Paar Worte über die Stärke der auf sirrenische Weise entstehenden Töne hinzuzufügen. Zuerst verdient eine bei so sich bildenden Tönen stets vorhandene Eigenthümlichkeit unsere volle Aufmerksamkeit. Ge-

hen wir auf 6 zurück, wo zwei in jedem Intervalle vorkommende Eindrücke untersucht worden sind, und bestimmen wir die Schwingungsweite des Tones von der Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  für den Fall, wo er am stärksten ist, so finden wir sie

$$\frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 16\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{2\lambda}{l},$$

also gerade so groß, wie sie sich aus 5 für den Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  ergeben hätte, wenn in dem Intervalle von der Länge  $2l$  nur ein Eindruck vorhanden gewesen wäre, dessen  $\alpha$  aber die doppelte Größe von dem der beiden vorigen Eindrücke angenommen hätte. Gehen wir auf 7 zurück, wo drei in jedem Intervalle vorkommende Eindrücke untersucht worden sind, und bestimmen wir die Schwingungsweite des Tones von der Schwingungsmenge  $\frac{3}{2l}$  für den Fall, wo er am stärksten ist, so finden wir sie, weil in diesem Falle, wie dort gezeigt worden ist,  $R'$  sowohl als  $R''$  den Werth 9 annimmt

$$3\alpha \cdot \mathfrak{A}_3 \text{ oder } \frac{12\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 36\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{3\lambda}{l},$$

also gerade so groß, wie sie sich aus 5 für den Ton von der Schwingungsmenge  $\frac{3}{2l}$  ergeben hätte, wenn in dem Intervalle von der Länge  $2l$  nur ein Eindruck vorhanden gewesen wäre, dessen  $\alpha$  aber die dreifache Größe von dem der drei vorigen Eindrücke angenommen hätte. Eben so erhalten wir hier für die Schwingungsweite des Tones, dessen Schwingungsmenge  $\frac{2}{2l}$  ist, in dem Falle, wo er seine größte Stärke erlangt, den Werth

$$3\alpha \cdot \mathfrak{A}_2 \text{ oder } \frac{12\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 16\lambda^2)} \cdot \cos \pi \frac{2\lambda}{l},$$

also gerade so groß, wie sie sich aus 5 ergeben hätte,

wenn in dem Intervalle von der Länge  $2l$  nur ein Eindruck vorhanden gewesen wäre, dessen  $\alpha$  aber die dreifache Gröfse von dem der drei Eindrücke angenommen hätte. Diese Eigenthümlichkeit ist allgemein und hängt von der Form der Eindrücke keineswegs ab; sie läßt sich so aussprechen:

- a) *Wenn in einem Intervalle von der Länge  $2l$ , beliebig aber in jedem Intervalle gleich gestellte Eindrücke von einerlei Form und Gröfse vorkommen, so kann die Schwingungsweite des daraus hervorgehenden Tones von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$  die des Tones von der gleichen Schwingungsmenge nie übersteigen, welcher aus einem einzigen Eindrucke hervorginge, der jene  $n$  Eindrücke als Summe in sich vereinigte.*

Dieser Satz, welcher sich auch leicht aus den in 10 gegebenen allgemeinen Formeln ableiten läßt, giebt zu erkennen, daß sich die Grenze der Stärke, mit welcher die Töne aus beliebig gruppirten Eindrücken hervorgehen können, immer leicht aus der Stärke der Töne von gleich weit von einander abstehenden Eindrücken entnehmen läßt, weshalb wir diese letztere Abhängigkeit vorzugsweise ins Auge zu fassen haben.

Stehen die Eindrücke gleich weit von einander ab, und ist dieser Abstand gleich  $2l$ , so ist nach 5 die Schwingungsweite des aus diesen Eindrücken hervorgehenden Tones von der Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$

$$\frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l}.$$

Ist nun  $\lambda i$  sehr klein in Vergleich zu  $l$ , so kann man ohne fühlbaren Fehler 1 für  $\cos \pi \frac{\lambda i}{l}$  und  $l^2$  für  $l^2 - 4\lambda^2 i^2$  setzen, dann aber wird sie

$$\frac{4\alpha\lambda}{\pi l}.$$

Hieraus fließt folgender Satz:

- b) *Wenn die gleich weit von einander abstehenden gleichartigen Eindrücke sehr kurz sind in Vergleich zu diesem Abstand, so haben vom tiefsten Tone aufwärts alle höhern, so lange wenigstens als  $i\lambda$  noch sehr klein in Vergleich zu  $l$  bleibt, dieselbe Schwingungsweite als der tiefere. Diefs zieht aber nach sich, daß in einem solchen Falle die höhern Töne bis zu einer gewissen Weite hin um so stärker werden müssen, je höher sie sind, und daß alle diese den Grundton an relativer Stärke weit überragen müssen <sup>1)</sup>.*

Ist aber  $\lambda = \frac{1}{2}l$ , so wird diese Schwingungsweite, wie schon in 5 bemerkt worden ist,

$$\frac{\alpha}{2i}$$

Diefs giebt nachstehenden Satz:

- c) *Ist die Länge der gleich weit von einander abstehenden gleichartigen Eindrücke gleich der halben Länge des Intervalls, so stehen die Schwingungsweiten aller daraus hervorgehenden Töne im umgekehrten Verhältniß zu ihren Schwingungsmengen. Diefs zieht nach sich, daß unter solchen Umständen alle Töne, tiefe und hohe, einerlei relative Stärke besitzen.*

Ist endlich  $\lambda = l$ , so wird die Schwingungsweite

$$\frac{4\alpha}{\pi(i^2 - 1)}.$$

Hieraus folgt der Satz:

- d) *Ist die Länge der gleichweit von einander abstehenden gleichartigen Eindrücke gleich der ganzen Länge des Intervalls, so nimmt die Stärke der*

1) Es läßt sich nämlich zeigen, daß Töne von ungleicher Höhe einerlei relative Stärke besitzen, wenn die Producte aus ihrer Schwingungsweite in ihre Schwingungsmenge bei allen gleich groß sind, wie ich in meiner Arbeit über Combinationstöne darlegen werde.

*Töne mit ihrer Höhe rasch ab und der tiefste überschreitet die höhern ganz und gar.*

Diese letztere Bedingung trägt ohne Zweifel eine physische Unmöglichkeit in sich, wenigstens bei der hier angenommenen Form der Eindrücke, allein als Grenzbestimmung kann man nichts desto weniger dem Satze *d.* eine allgemeine Gültigkeit beilegen.

Noch will ich die Stärke der Töne für den Fall ermitteln, wo zwei gleiche, aber entgegengesetzte Eindrücke in dem Intervalle so liegen, daß sie an einer Stelle, deren Entfernung von der Mitte des Intervalls  $\delta$  ist, an einander gränzen. Für diesen Fall giebt uns der in 6 für  $a''$  aufgefundene Werth, weil jetzt  $\theta = \delta + \lambda$ ,  $\theta' = \delta - \lambda$  ist, als Schwingungsweite des Tones, dessen Schwingungsmenge  $\frac{i}{2l}$  ist,

$$\frac{8\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4l^2i^2)} \cdot \cos \pi \frac{\lambda i}{l} \cdot \sin \pi \frac{\lambda i}{l}$$

oder

$$\frac{4\alpha\lambda l}{\pi(l^2 - 4\lambda^2 i^2)} \cdot \sin 2\pi \frac{\lambda i}{l},$$

woraus zuvörderst folgt, *daß die Wirkung solcher Eindrucks-paare von ihrer Stellung in dem Intervalle unabhängig ist.*

Ist nun  $\lambda i$  sehr klein in Vergleich zu  $l$ , so wird  $\sin 2\pi \frac{\lambda i}{l}$  und damit auch die Schwingungsweite des Tones sehr nahe Null. Diefes führt zu nachstehendem Satz:

- e) *Wenn die an einander hängenden entgegengesetzten Eindrücke sehr kurz sind in Vergleich zu der Länge des Intervalls, so verschwinden alle tiefern Töne bis dahin wo  $\lambda i$  in ein merkliches Verhältniß zu  $l$  zu treten anfängt.*

Ist dagegen  $\lambda = \frac{1}{2}l$ , so wird jene Schwingungsweite allemal Null, den einen Fall ausgenommen, wo zugleich

$l^2 - 4\lambda^2 i^2 = 0$ , d. h.  $1 - i^2 = 0$ , oder  $i = 1$  ist, in welchem Falle sie  $\alpha$  wird. Diefß giebt folgenden Satz:

*f) Wenn die an einander hängenden entgegengesetzten Eindrücke das ganze Intervall ausfüllen, so verschwinden alle höhern Töne ganz und gar, und der tiefste hat zur Schwingungsweite  $\alpha$ .*

Dieses letztere Resultat war leicht vorauszusehen, weil die so angeordneten entgegengesetzten Eindrücke eine vollständige und unvermischte Tonwelle ausmachen.

14) Die in voriger Nummer stehenden Betrachtungen habe ich in der Absicht beigefügt, um noch eine Seite der höchst interessanten Seebeck'schen Versuche besprechen zu können. Dieser Gelehrte drückt sich in Poggendorff's Ann. Bd. LIII. S. 422, wo er von den aus zwei Eindrücken in jedem Intervalle hervorgehenden Tönen spricht, über deren Stärke wörtlich so aus: „Ich hatte auf eine Scheibe 60 Löcher gesetzt, deren Abstände abwechselnd  $5^\circ$  und  $7^\circ$  betrug, und an dieser denselben Ton wahrgenommen, wie auf einer andern Reihe derselben Scheibe, welche 30 Löcher, sämmtlich in Abständen von je  $12^\circ$ , enthielt. Bei einer Wiederholung dieses Versuchs schien es mir, daß der erstere Ton sich von dem letztern durch eine schwache Beimischung seiner höhern Octave unterschied, was besonders merklich wurde, wenn man beide Reihen unmittelbar nach einander anblies. Um dieß deutlicher wahrzunehmen, setzte ich auf eine Scheibe vier Löcherreihen, nämlich 1) 18 Löcher in Abständen von je  $20^\circ$ ; 2) 36 Löcher in Abständen von je  $10^\circ$ ; 3) 36 Löcher, deren Abstände abwechselnd  $9\frac{1}{2}$  und  $10\frac{1}{2}$  Grad betrug, und 4) 36 Löcher abwechselnd  $9$  und  $11^\circ$  von einander entfernt. Es gab also die zweite Reihe die Octave von dem Tone der ersten; die dritte Reihe aber, so wie die vierte, gab diese beiden Töne zugleich, wobei auf der dritten der höhere, auf der vierten der tiefere mehr hervortrat.“ Und auf der folgenden Seite, wo Seebeck die aus drei Eindrücken

drücken in jedem Intervalle hervorgehenden Töne bespricht, heisst es: »Eine Scheibe mit 36 Löchern, deren Abstände  $9\frac{1}{2}$ , 10,  $10\frac{1}{2}$ ;  $9\frac{1}{2}$ , 10,  $10\frac{1}{2}$ ; etc. Grade betrogen, liefs beim Anblasen oder Anschlagen zwei Töne erkennen; der höhere hatte dieselbe Höhe, als ob die Löcherabstände sämmtlich  $10^\circ$  betrügen, der andere schwächere war um eine Duodecime tiefer, also von einer drei Mal gröfseren Schwingungsdauer. Eine andere Reihe, wo die Abstände der Löcher 9, 10, 11; 9, 10, 11; etc. Grade betrogen, gab dieselben beiden Töne, aber den tiefern stärker als den höhern.

Wir wollen nun die aus vorstehenden Erfahrungsdaten fließenden Consequenzen aufsuchen. Vergleichen wir die auf zwei Eindrücke in jedem Intervalle sich beziehenden Versuche mit dem in 6 für diesen Fall aufgestellten Werth von  $a'$ , und fassen wir dabei vorzugsweise den Factor  $\cos \pi \frac{(\theta - \theta')i}{2l}$  in's Auge, so erhalten wir da, wo die Löcher abwechselnd  $5^\circ$  und  $7^\circ$  abstanden,  $\frac{\theta - \theta'}{2l} = \frac{5}{11}$ , da wo dieser Abstand abwechselnd  $9^\circ$  und  $11^\circ$  betrug, wird  $\frac{\theta - \theta'}{2l} = \frac{9}{25}$ , endlich wird da, wo er abwechselnd  $9\frac{1}{2}^\circ$  und  $10\frac{1}{2}^\circ$  betrug,  $\frac{\theta - \theta'}{2l} = \frac{19}{44}$ . Diefshalb wird  $\cos \pi \frac{(\theta - \theta')i}{2l}$  in Bezug auf den tiefern Ton, für welchen  $i=1$  ist, in den drei verschiedenen Fällen bezüglich

$$\cos 75^\circ, \quad \cos 81^\circ \quad \text{und} \quad \cos 85\frac{1}{2}^\circ$$

$$\text{d. h. } 0,259, \quad 0,156 \quad \text{und} \quad 0,078;$$

der gleiche Factor erhält aber bei dem höhern Ton, für welchen  $i=2$  ist, in den drei verschiedenen Fällen bezüglich folgende Werthe

$$\cos 150^\circ, \quad \cos 162^\circ \quad \text{und} \quad \cos 171^\circ$$

$$\text{d. h. } -0,866, \quad -0,951 \quad \text{und} \quad -0,988.$$

Man sieht hieraus, daß dieser Factor, abgesehen von dem Vorzeichen, worauf hier nichts ankommt, bei dem höhern Tone stets größer als bei dem tiefern ist, aber im erstern Falle nur circa  $3\frac{1}{2}$  mal, im zweiten  $6\frac{1}{5}$  mal und im dritten  $12\frac{7}{10}$  mal.

Vergleichen wir die auf drei Eindrücke in jedem Intervalle sich beziehenden Versuche mit den in 7 für diesen Fall erhaltenen Formeln, und fassen wir dabei vorzugsweise den auf die Stellung der Eindrücke sich beziehenden Factor von  $a'$ , von welcher

$$\sqrt{\left[\left(\cos \pi \frac{\theta i}{l} + \cos \pi \frac{\theta' i}{l} + \cos \pi \frac{\theta'' i}{l}\right)^2 + \left(\sin \pi \frac{\theta i}{l} + \sin \pi \frac{\theta' i}{l} + \sin \pi \frac{\theta'' i}{l}\right)^2\right]}$$

oder in Folge der dort eingeführten einfachern Bezeichnungen

$$\sqrt{4 \cdot \left(\cos \pi \frac{\delta i}{l}\right)^2 + 4 \cdot \cos \pi \frac{\delta i}{l} \cdot \cos \pi \frac{\delta' i}{l} + 1},$$

ist, wo  $\delta$  denselben Abstand der äußersten Eindrücke von einander, und  $\delta'$  den Abstand des mittlern von deren Mitte vorstellt. Nehmen wir, was stets erlaubt ist, die Gränzen des Intervalls mitten durch die kürzesten Abstände gehend an, so wird da, wo die Löcher abwechselnd 9, 10 und

11 Grad von einander entfernt lagen,  $\frac{\delta}{l} = \frac{2}{30}$  und  $\frac{\delta'}{l} = \frac{1}{30}$ ,

hingegen da, wo die Löcher abwechselnd  $9\frac{1}{2}$ , 10 und

$10\frac{1}{2}$  Grade betrugen, wird  $\frac{\delta}{l} = \frac{4}{60}$  und  $\frac{\delta'}{l} = \frac{1}{60}$ , mithin

wird jener Factor bei dem tiefsten Tone, für welchen  $i=1$  ist, im ersten Falle

$$\sqrt{4 \cdot (\cos 126^\circ)^2 + 4 \cdot \cos 126^\circ \cdot \cos 6^\circ + 1}, \text{ oder } 0,207$$

im andern Falle

$$\sqrt{4 \cdot (\cos 123^\circ)^2 + 4 \cdot \cos 123^\circ \cdot \cos 3^\circ + 1}, \text{ oder } 0,101;$$

für den Ton, der um eine Octave höher ist, für welchen also  $i=2$  ist, wird jener Factor im ersten Falle

$\sqrt{4.(\cos 252^\circ)^2 + 4.\cos 252^\circ.\cos 12^\circ + 1}$ , oder 0,416  
im andern Falle

$\sqrt{4.(\cos 246^\circ)^2 + 4.\cos 246^\circ.\cos 6^\circ + 1}$ , oder 0,138  
endlich für den Ton, der um eine Duodecime höher als  
der tiefste ist, für welchen also  $i=3$  ist, wird jener  
Factor im ersten Falle

$\sqrt{4.(\cos 378^\circ)^2 + 4.\cos 378^\circ.\cos 18^\circ + 1}$ , oder 2,870  
im andern Falle

$\sqrt{4.(\cos 369^\circ)^2 + 4.\cos 369^\circ.\cos 9^\circ + 1}$ , oder 2,968

Man sieht hieraus, daß dieser Factor bei den höhern<sup>f</sup>  
Tönen stets größer als bei den tiefern ist; bei der Octave  
nämlich ist er im erstern Falle circa 2mal, im andern  
Falle dagegen nur  $1\frac{1}{3}$ mal so groß als bei dem tiefsten  
Tone; bei der Duodecime aber ist er im ersten Falle  
fast 14mal, im andern Falle mehr als 29mal so groß  
als bei dem tiefsten Tone.

Vorstehende Versuchsdaten geben zu ein Paar nied-  
lichen Folgerungen Anlaß, womit ich die gegenwärtige  
Abhandlung zu beschließen gedenke. Es geht nämlich  
aus den Versuchen, wo zwei Eindrücke in jedem Inter-  
valle lagen, hervor, daß die Octave von gleicher Stärke  
mit dem Grundton auftritt, wenn der von der Stellung  
der Eindrücke abhängige Factor bei ihr zwischen 6mal  
und 13mal größer wird als bei dem Grundton; aus den  
Versuchen, wo drei Eindrücke in jedem Intervalle lagen,  
geht aber hervor, daß hier derselbe Factor bei der Octave  
nur  $1\frac{1}{3}$ mal bis 2mal so groß war als bei dem Grund-  
ton, daß er also hier 3 bis 10mal kleiner war, als zur  
Gleichheit in der Stärke beider Töne erfordert wird. Da  
aber die Schwingungsweite des Tones jenem Factor pro-  
portional ist, so folgt weiter, daß bei letzteren Versu-  
chen die relative Stärke der Octave zwischen 9 und 100  
mal geringer war, als die des Grundtones, weshalb man  
sich eben nicht zu wundern braucht, daß bei diesen letz-  
teren Versuchen die Octave sich nicht hören liefs. Fer-

ner, weil die Gleichheit in der Stärke der Töne, den vorstehenden Versuchen zufolge, bei der Octave einen zwischen 6 und 13 mal, bei der Duodecime einen zwischen 14 und 29 mal so grofsen Factor als bei dem Grundtone verlangt, die relative Gleichheit zweier Töne aber aus theoretischen Gründen nur dann eintritt, wenn die Producte aus den Schwingungsweiten in den Schwingungsmengen gleich sind, so mufs der andere zu  $a'$  gehörige, von der Länge der Eindrücke abhängige Factor bei der Octave zwischen 12 und 26, bei der Duodecime dagegen zwischen 42 und 87 mal kleiner seyn als bei dem Grundton; diefs zieht aber, zufolge der in voriger Nummer aufgestellten Sätze  $b$ ,  $c$  und  $d$ , nach sich, dafs bei obigen Versuchen der Werth von  $\lambda$  gleich  $l$ , oder doch nahehin gleich  $l$  gewesen seyn müsse, weil erst an dieser letzteren Gränze die so eben genannten Factoren bei der Octave und bei der Duodecime sich zu einander wie 8 zu 3 verhalten. Damit stimmt auch der Umstand überein, dafs Seebeck in solchen Fällen, wo die Löcher gleich weit von einander abstanden, nie einen der höhern Töne beobachtet hat. Folglich — so will es der strenge Schluß — haben die in Seebeck's Versuchen, aus jedem einzelnen Loche hervorgegangenen Eindrücke eine Zeit angedauert, welche dem ganzen Intervalle von einem Loch zum andern entweder völlig, oder doch wenigstens sehr nahe gleich kommt. So befremdend diese Folgerung auch beim ersten Blick erscheint, da die Durchmesser der Löcher in Seebeck's Scheiben nicht oft über  $\frac{1}{10}$  von ihrem gegenseitigen Abstände betragen haben können, so natürlich wird sie bei näherer Ueberlegung. In der That ist nicht wohl anzunehmen, dafs durchaus keine Einwirkung mehr auf das Loch vorhanden sey, so wie die Mündung der anblasenden Röhre an dem Loche vorüber und hinter die Scheibe getreten ist, da sie doch selbst an dieser Stelle noch eine Luftbewegung bewirkt, deren Einfluß sich

zweifelsohne bis zu dem Loche hin erstrecken wird. Dafs dem so sey, davon kann man sich durch folgenden ganz einfachen Versuch überzeugen. Man mache in eine Blechtafel eine kreisrunde Oeffnung von etwa 2 Linien Durchmesser, und stelle vor diese Oeffnung in der Entfernung von  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{2}$  Zoll die Flamme einer Kerze auf, hinter die Oeffnung aber in einem seitlichen Abstände von  $\frac{1}{2}$  Zoll und darüber bringe man in einer senkrechten Stellung gegen die Tafel die anblasende Röhre an, so wird man jedesmal, so oft man mit dem Munde einen Luftstofs durch die Röhre treibt, die Flamme sich bewegen sehen, sie wird nach dem Loche hingezogen, und dadurch eine schiefe Richtung anzunehmen veranlaßt werden. Aber selbst wenn man annehmen wollte, dafs die Wirkung der Blaseröhre durch das Loch hindurch völlig abgeschnitten sey, so wie beide an einander vorübergegangen sind, wird man nichts desto weniger zugestehen müssen, dafs hier, wo die Eindrücke so rasch auf einander folgen, jede einzelne, aus einem solchen Vorübergang hervorgegangene und gegen das Ohr hin fortschreitende Luftwelle, auf die doch eigentlich alles ankommt, ihre Wirkung auf das Ohr nicht wird beendigt haben können, bevor die folgende daselbst ihren Eintritt beginnt. — Am Schlusse dieser Abhandlung will ich noch erwähnen, dafs sich *mit grosser Leichtigkeit*, und nicht ohne Gewinn für die tiefere Einsicht in den Gegenstand, aus den in ihr aufgestellten, der hier gewählten besondern Form der Eindrücke entsprechenden, Resultaten diejenigen Zahlbestimmungen, welche Eindrücken *von ganz beliebiger Form* angehören, zusammensetzen lassen.

---