

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2632.

Die Störung der Uranusbahn durch den Jupiter.

Von A. Weiler.

I.

In Nr. 2626-27 habe ich die Störungen bestimmt, welche die Erdbahn durch den Jupiter erleidet. In dieser Aufgabe ist die Bahn des gestörten Planeten von der des störenden eingeschlossen. Um nachzuweisen, dass das System der Störungsgleichungen, welches ich in der Publ. XII d. A. G. aufgestellt habe, allgemein anwendbar ist, bedarf es noch der Lösung einer andern Aufgabe, in welcher die Bahn des störenden Planeten von der des gestörten eingeschlossen ist. Eine solche ist in der Ueberschrift gegeben.

Den Parameter der äusseren Bahn erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1),$$

und die Veränderlichen k_1 und h_1 sind durch die folgenden Störungsgleichungen zu bestimmen:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 + P_1 \right).$$

In denselben ist P_1 ein Glied der zweiten Ordnung, aber

$$(4') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 (1 - e_1^2) + \frac{f_1 e_1}{\lambda} \left(\frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \right)' + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + e_1 k_1^{1/2} q_1.$$

Diese Aufzeichnungen sind meinem Aufsatz in Nr. 2620-21, § 2 und § 5 entnommen.

Die Störungsfuction hat in allen diesen Störungsgleichungen den Factor $\lambda m \frac{p^2}{p_1^2}$, wo beiläufig $m = \frac{1}{1050}$

und $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{3.7}$ ist. Ferner kann $\lambda = \left(\frac{p}{p_1} \right)^{3/2}$, folglich

$\lambda m \frac{p^2}{p_1^2} = \frac{1}{1050 \cdot 97} = \frac{1}{102000}$ gesetzt werden. Hieraus

ist ersichtlich, dass die periodischen Störungen der Uranusbahn nur einige Bogensecunden ausmachen, und dass es zu deren Darstellung nur der mit r^2 und r^3 multiplicirten Glieder der Störungsfuction bedarf.

Der Winkel, welchen die Ebenen des Jupiters und des Uranus mit einander bilden, ist $\mathcal{F} = 42' = \frac{1}{82}$. Daher ist

q_1 ein Glied der ersten Ordnung, zu dessen Bestimmung die Störungsgleichung

$$(1') \quad \frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dr_1} r_1' + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2}$$

vorliegt. Lässt man hier die Glieder der zweiten Ordnung

ausser Acht, so ist $r_1' = \frac{dr_1}{dv_1} v_1'$; ferner $n_1 = \lambda p_{01}^2$ und

$\frac{ds}{du_1} \frac{n_1}{r_1^2} = \frac{ds}{dv_1} v_1'$. Die Störungsgleichung (1') geht dann über in:

$$\frac{1}{2} q_1' = \left(\frac{d\Omega}{dr_1} \frac{dr_1}{dv_1} + \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{dv_1} \right) v_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1'.$$

Die Bewegung der Apsidenlinie der gestörten Bahn habe ich mit ω_1 bezeichnet, und erhalte diese Veränderliche aus der Gleichung:

$$\omega_1 + \left(\frac{p_1}{r_1} + 1 \right) (k_1 \sin v_1 - h_1 \cos v_1) - h_1 e_1 = \omega_1.$$

Zur Bestimmung von ω_1 aber ist die folgende Störungsgleichung gegeben:

$-s = \cos(u - u_1)$ in die Störungsfuction einzusetzen. Nur in denjenigen Gliedern der Störungsfuction, welche auf die der Zeit proportionalen Störungen einwirken, ist anstatt des erwähnten einfachen Werthes

$$-s = \cos^{2/2} \mathcal{F} \cos(u - u_1)$$

zu setzen. Ferner ist zu beachten, dass von den säcularen Störungen nur diejenigen merklich sind, welche aus den mit $\cos(u - u_1)$ multiplicirten Gliedern der Störungsfuction hervorgehen. Man kann leicht zeigen, dass mit Bezug auf

die Werthe $e = \frac{1}{21}$ und $e_1 = \frac{1}{22}$ alle übrigen säcularen Störungen unmerklich bleiben, so lange die Störungen der ersten Ordnung von k_1 und h_1 den Betrag von 400" nicht überschreiten.

Die Entwicklung der Störungsfunction nach den positiven Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_1}$ gestaltet sich hier etwas weniger convergent als in der vorigen Aufgabe, wo $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{5.2}$ ist. Denn es ist hier das Verhältniss $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{3.7}$, folglich

$\frac{r^3}{r_1^3} = \frac{1}{50}$. Die in Nr. 2626 unter 4. erhaltene Entwicklung der Störungsfunction ist aber auch hier noch ausreichend, um die Störungen mit der Genauigkeit einer Bogensecunde bestimmen zu können.

Ich schreibe wieder die Entwicklung:

$$\Omega = m m_0 \lambda^2 r^2 \frac{p_{01}^3}{r_1^3} \left[\frac{1}{4} (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{9}{64} \frac{r^2}{r_1^2} (1 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{25}{256} \frac{r^4}{r_1^4} + \frac{35^2}{128^2} \frac{r^6}{r_1^6} \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{8} \frac{r}{r_1} + \frac{15}{64} \frac{r^3}{r_1^3} + \frac{175}{1024} \frac{r^5}{r_1^5} \right) \cos(u - u_1) + \frac{3}{4} \cos 2(u - u_1) - \frac{5}{8} \frac{r}{r_1} \cos 3(u - u_1) \right],$$

wo die mit $e^2 e_1^2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ multiplicirten Glieder nur in den der Zeit proportionalen Störungen von Einfluss sind. Der vorliegende Ausdruck ist weiter zu entwickeln nach den Vielfachen der beiden Anomalien ε und v_1 , und es ist hierbei zu beachten, dass unter den periodischen Störungen neben den von den Excentricitäten unabhängigen die mit der ersten Potenz von e oder von e_1 multiplicirten nur

für den Fall in Betracht kommen, dass sie unabhängig von ε als Functionen von v_1 allein gegeben sind.

2.

Um die Veränderlichen k_1 und h_1 als Functionen der beiden Anomalien ε und v_1 darzustellen, sind die Störungsgleichungen (2') und (3') in der folgenden Form zu schreiben:

$$(2') \quad -\lambda m_0 p_{01}^2 k_1' = \frac{\varepsilon'}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r}{a} \frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 \right)$$

$$(3') \quad \lambda m_0 p_{01}^2 h_1' = \frac{\varepsilon'}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{r}{a} \frac{r_1}{p_1} \cos v_1 \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 \right).$$

Es ist oben die Entwicklung der Störungsfunction nach den Vielfachen von $u - u_1$ gegeben, und daraus folgt:

$$r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} = -m m_0 \lambda^2 r^2 \frac{p_{01}^3}{r_1^3} \left[\frac{3}{4} (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{45}{64} \frac{r^2}{r_1^2} (1 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{175}{256} \frac{r^4}{r_1^4} + \frac{105^2}{128^2} \frac{r^6}{r_1^6} \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2} \frac{r}{r_1} + \frac{45}{32} \frac{r^3}{r_1^3} + \frac{175}{128} \frac{r^5}{r_1^5} \right) \cos(u - u_1) + \frac{9}{4} \cos 2(u - u_1) - \frac{5}{2} \frac{r}{r_1} \cos 3(u - u_1) \right],$$

wo bekanntlich $u - u_1 = \eta + v - v_1$, und $\eta = v - v_1$ zu setzen ist. Entwickelt man nach den Vielfachen von ε , und berücksichtigt in den von η unabhängigen Gliedern die Factoren $e^2 e_1^2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$, so entsteht:

$$\frac{r}{a} r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} = -m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{p_{01}^3}{r_1^3} \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \right) + \frac{45}{64} \frac{a^2}{r_1^2} (1 + 5 e^2 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{175}{256} \frac{a^4}{r_1^4} + \frac{105^2}{128^2} \frac{a^6}{r_1^6} \right. \\ + \frac{15}{4} \left(\frac{a}{r_1} + \frac{21}{16} \frac{a^3}{r_1^3} + \frac{105}{64} \frac{a^5}{r_1^5} \right) e \cos(\eta - v_1) - \frac{3}{2} \frac{a}{r_1} \cos(\eta + \varepsilon - v_1) \\ \left. + \frac{9}{4} \cos 2(\eta + \varepsilon - v_1) - \frac{45}{8} e \cos(2\eta + \varepsilon - 2v_1) - \frac{5}{2} \frac{a}{r_1} \cos 3(\eta + \varepsilon - v_1) \right].$$

Die säcularen Störungen von k_1 und h_1 ergeben sich aus denjenigen Gliedern der zweiten Zeile, welche Functionen von v_1 allein sind. Alle übrigen Glieder des vorliegenden Ausdrucks führen zu periodischen Störungen.

Die Veränderliche q_1 ist in Nr. 2626 unter 5. bestimmt worden, und man kann die folgende Gleichung schreiben:

$$\frac{r}{a} (q_1 - q_{01}) = m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{p_{01}^3}{r_1^3} \left(\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} e^2 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{9}{32} \frac{a^2}{r_1^2} (1 + 3 e^2 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) + \frac{25}{128} \frac{a^4}{r_1^4} + \frac{35^2}{2 \times 64^2} \frac{a^6}{r_1^6} \right) \\ + m m_1 a^2 \lambda^2 \frac{15}{8} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{7}{8} \frac{a^3}{p_1^3} + \frac{105}{128} \frac{a^5}{p_1^5} \right) e \cos(\eta - v_1) \\ + m m_0 a^2 \frac{\lambda^2 v}{1 - v} \frac{p_1^2}{r_1^2} \left(\frac{3}{4} \frac{a}{r_1} \cos(\eta + \varepsilon - v_1) - \frac{3}{2} \cos 2(\eta + \varepsilon - v_1) + \frac{5}{4} \frac{a}{p_1} \cos 3(\eta + \varepsilon - v_1) \right).$$

Man findet nun leicht die Beständigen f_1 und q_{01} mittelst des folgenden Ausdrucks:

$$\frac{r}{a} \left(f_1 (1 + e_1 \cos v_1)^{-2} + q_{01} (1 + e_1 \cos v_1)^{-3} \right) + \frac{r_1^3}{p_1^3} \frac{r}{a} \left(r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 - q_{01} \right).$$

Indem man die von η abhängigen Glieder ausser Acht lässt, alsdann in der nach den Vielfachen von ε gegebenen Entwicklung nur die von ε unabhängigen Glieder berücksichtigt, erhält man eine Function von v_1 allein. Man entwickle dieselbe nach den Vielfachen von v_1 , und setze die

beiden ersten Glieder dieser Entwicklung gleich Null. Auf diese Weise erhält man zwei Gleichungen, aus welchen die Beständigen f_1 und q_{01} bestimmt werden müssen.

Der gegebenen Vorschrift gemäss giebt man dem obigen Ausdruck die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & f_1 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) (1 - 2 e_1 \cos v_1) + q_{01} \left(1 + \frac{5}{2} e_1^2 \right) (1 + \frac{1}{2} e_1^2 - 3 e_1 \cos v_1) \\ & - m m_0 a^2 \lambda^2 \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{7}{2} e^2 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \right) + \frac{9}{64} \frac{a^2}{p_1^2} (3 + 19 e^2) (1 + \frac{1}{2} e_1^2 + 2 e_1 \cos v_1) (1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{125}{256} \frac{a^4}{p_1^4} (1 + 4 e_1 \cos v_1) + \frac{7 \cdot 35^2}{128^2} \frac{a^6}{p_1^6} (1 + 6 e_1 \cos v_1) \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll identisch gleich Null sein. Setzt man $2 e_1 \cos v_1 = 1$, so erhält man die Beständige q_{01} aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_{01} \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) = & - m m_0 a^2 \lambda^2 \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{7}{2} e^2 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \right) + \frac{9}{32} \frac{a^2}{p_1^2} (3 + 19 e^2) (1 + \frac{1}{4} e_1^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) \right. \\ & \left. + \frac{375}{256} \frac{a^4}{p_1^4} + \frac{7 \cdot 35^2}{64^2} \frac{a^6}{p_1^6} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man aber $3 e_1 \cos v_1 = 1 + \frac{1}{2} e_1^2$, so erhält man die Beständige f_1 . Es ist:

$$\begin{aligned} f_1 \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) = & m m_0 a^2 \lambda^2 \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{7}{2} e^2 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F} \right) + \frac{45}{64} \frac{a^2}{p_1^2} (3 + 19 e^2) (1 + \frac{1}{2} e_1^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}) \right. \\ & \left. + \frac{875}{256} \frac{a^4}{p_1^4} + \frac{63 \cdot 35^2}{128^2} \frac{a^6}{p_1^6} \right]. \end{aligned}$$

Diese Werthe der überzähligen Beständigen f_1 und q_{01} bewirken, dass die Störungsgleichung (3') keine der Zeit proportionalen Störungen giebt; dass ferner in den Werthen k_1 und h_1 alle die von den Vielfachen des Winkels η unabhängigen Glieder verschwinden, wenn dieselben nicht mit einer Excentricität multiplicirt sind. Insbesondere haben diejenigen Glieder von k_1 und h_1 , welche sich als Functionen von v_1 allein darstellen, den Factor e_1^2 .

Um nun auch den vollständigen Ausdruck

$$\frac{r_1}{p_1} \frac{r}{a} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 \right)$$

nach den Vielfachen von ε und v_1 zu entwickeln, schreiben wir unter Berücksichtigung der soeben erhaltenen Werthe f_1 und q_{01} die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{p_1} \frac{r}{a} \left(r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + q_1 - q_{01} \right) = & m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[-\frac{15}{8} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{p_1^3} + \frac{315}{128} \frac{a^5}{p_1^5} \right) e \cos(\eta - v_1) \right. \\ & \left. + \frac{6+3\nu}{4} \frac{a}{p_1} \cos(\eta + \varepsilon - v_1) - \frac{9+6\nu}{4} \cos 2(\eta + \varepsilon - v_1) + \frac{45}{8} e \cos(2\eta + \varepsilon - 2v_1) + \frac{10+5\nu}{4} \frac{a}{p_1} \cos 3(\eta + \varepsilon - v_1) \right]. \end{aligned}$$

Wird dies in die Störungsgleichungen (2') und (3') eingesetzt, und zur Abkürzung geschrieben:

$$A_1 = m \frac{p_0^2}{p_{01}^2} \cdot \frac{15}{16} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{p_1^3} + \frac{315}{128} \frac{a^5}{p_1^5} \right) \frac{e}{p_1},$$

so ergeben sich durch deren Integration die Werthe:

$$k_1 - k_{01} = -A_1 \cos \eta - m \frac{p_0^2}{p_{01}^2} \cdot \frac{15}{32} \frac{a}{p_1} e \cos(\eta - 2v_1) \\ + m v \frac{p_0^2}{p_{01}^2} \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[\frac{6+3v}{8} \frac{a}{p_1} \left(\cos(\eta + \varepsilon) - \frac{\cos(\eta + \varepsilon - 2v_1)}{1-2v} \right) - \frac{9+6v}{8} \left(\frac{\cos(2\eta + 2\varepsilon - v_1)}{2-v} - \frac{\cos(2\eta + 2\varepsilon - 3v_1)}{2-3v} \right) \right. \\ \left. + \frac{45}{16} e \left(\frac{\cos(2\eta + \varepsilon - v_1)}{1-v} - \frac{\cos(2\eta + \varepsilon - 3v_1)}{1-3v} \right) + \frac{10+5v}{8} \frac{a}{p_1} \left(\frac{\cos(3\eta + 3\varepsilon - 2v_1)}{3-2v} - \frac{\cos(3\eta + 3\varepsilon - 4v_1)}{3-4v} \right) \right]$$

$$h_1 - h_{01} = -A_1 \sin \eta + m \frac{p_0^2}{p_{01}^2} \cdot \frac{15}{32} \frac{a}{p_1} e \sin(\eta - 2v_1) \\ + m v \frac{p_0^2}{p_{01}^2} \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[\frac{6+3v}{8} \frac{a}{p_1} \left(\sin(\eta + \varepsilon) + \frac{\sin(\eta + \varepsilon - 2v_1)}{1-2v} \right) - \frac{9+6v}{8} \left(\frac{\sin(2\eta + 2\varepsilon - v_1)}{2-v} + \frac{\sin(2\eta + 2\varepsilon - 3v_1)}{2-3v} \right) \right. \\ \left. + \frac{45}{16} e \left(\frac{\sin(2\eta + \varepsilon - v_1)}{1-v} + \frac{\sin(2\eta + \varepsilon - 3v_1)}{1-3v} \right) + \frac{10+5v}{8} \frac{a}{p_1} \left(\frac{\sin(3\eta + 3\varepsilon - 2v_1)}{3-2v} + \frac{\sin(3\eta + 3\varepsilon - 4v_1)}{3-4v} \right) \right].$$

In diesen Gleichungen enthält die erste Zeile die säcularen Störungen und zugleich diejenigen periodischen Störungen, welche Functionen von v_1 allein sind. Die beiden andern Zeilen enthalten die von ε abhängigen periodischen Störungen. Die Integrationsbeständigen k_{01} und h_{01} müssen so bestimmt werden, dass die Veränderlichen k_1 und h_1 für den Zeitpunkt $v_1 = 0$ verschwinden.

3.

Um die Störungen der ersten Ordnung von ω_1 zu

erhalten, habe ich die Störungsgleichung (4') in der folgenden Form geschrieben:

$$-\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 (1 - e_1^2) + \frac{f_1 e_1}{\lambda} \left(\frac{r_1}{p_1} \sin v_1 \right) \\ (4') \quad + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 + e_1 k_1 \cdot 1/2 q_1$$

Wenn man die unter 2. erhaltenen Entwicklungen einsetzt, und zunächst nur die von η unabhängigen Glieder berücksichtigt, so ist:

$$\frac{r}{a} \left(2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} (q_1 - q_{01}) \right) \\ = -m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{p_{01}^3}{r_1^3} \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{5}{2} e^2 - 6 \sin^2 1/2 \mathcal{F} \right) + \frac{9}{64} \frac{a^2}{r_1^2} (7 + 41 e^2) (1 - 20 \sin^2 1/2 \mathcal{F}) + \frac{275}{256} \frac{a^4}{r_1^4} + \frac{15 \cdot 35^2}{128^2} \frac{a^6}{r_1^6} \right].$$

Multipliziert man dies mit $\frac{r_1^2}{p_1^2}$, entwickelt alsdann nach den Vielfachen von v_1 , und berücksichtigt nur die beständigen Glieder dieser Entwicklung, so findet man:

$$\frac{r_1^2}{p_1^2} \frac{r}{a} \left(2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} (q_1 - q_{01}) \right) \\ = -m m_0 a^2 \lambda^2 \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{5}{2} e^2 - 6 \sin^2 1/2 \mathcal{F} \right) + \frac{9}{64} \frac{a^2}{p_1^2} (7 + 41 e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 - 20 \sin^2 1/2 \mathcal{F} \right) + \frac{275}{256} \frac{a^4}{p_1^4} + \frac{15 \cdot 35^2}{128^2} \frac{a^6}{p_1^6} \right].$$

Ferner ergibt sich aus den unter 2. erhaltenen Werthen:

$$\left(f_1 (1 - e_1^2) + \frac{3}{2} q_{01} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) = -m m_0 a^2 \lambda^2 \left(\frac{9}{64} \frac{a^2}{p_1^2} (3 + 19 e^2) (1 - e_1^2 - 20 \sin^2 1/2 \mathcal{F}) + \frac{125}{128} \frac{a^4}{p_1^4} + \frac{21 \cdot 35^2}{128^2} \frac{a^6}{p_1^6} \right).$$

Theilt man die beiden nun vorliegenden Gleichungen durch $-\lambda m_0 p_{01}^2$, so findet man die Summe der beiden zur Linken stehenden Grössen:

$$B_1 = \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} \cdot \frac{3}{4} \left[1 + \frac{9}{2} e^2 - 6 \sin^2 1/2 \mathcal{F} + \frac{15}{8} \frac{a^2}{p_1^2} \left(1 + 8 e^2 + \frac{3}{4} e_1^2 - 20 \sin^2 1/2 \mathcal{F} \right) + \frac{175}{64} \frac{a^4}{p_1^4} + \frac{3 \cdot 35^2}{32^2} \frac{a^6}{p_1^6} \right].$$

Dies ist der Coefficient des mit v_1 multiplicirten Gliedes von $\omega_1 + \cos i_1 \vartheta$.

In allen den bei der Bestimmung von B_1 nicht verwendeten Gliedern der Störungsgleichung (4') hat man die Factoren $e^2 e_1^2 \sin^2 1/2 \mathcal{F}$ gleich Null zu setzen. Die mit

der ersten Potenz der Excentricität multiplicirten Glieder bleiben nur in dem Falle stehen, dass sie Functionen von v_1 allein sind. Entwickelt man die unter 2. gegebenen Ausdrücke nach den Vielfachen von v_1 , so entsteht die Gleichung:

$$\frac{r}{a} \left(f_1 (1 - e_1^2) + 2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} q_1 \right) = -\lambda^2 m_0 \dot{p}_{01}^2 B_1 \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} \\ - m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} \left[\frac{3}{4} e_1 \cos v_1 + \frac{75}{16} e \cos (\eta - v_1) + \frac{15}{16} \left(11 \frac{a}{\dot{p}_1} + \frac{189}{8} \frac{a^3}{\dot{p}_1^3} + \frac{35 \cdot 153}{128} \frac{a^5}{\dot{p}_1^5} \right) e e_1 \cos \eta \right. \\ \left. - \frac{24 + 9\nu}{8} \frac{a}{\dot{p}_1} \cos (\eta + \varepsilon - v_1) + \frac{18 + 9\nu}{4} \cos 2(\eta + \varepsilon - v_1) - \frac{45}{4} e \cos (2\eta + \varepsilon - 2v_1) + \frac{40 + 15\nu}{8} \frac{a}{\dot{p}_1} \cos 3(\eta + \varepsilon - v_1) \right]$$

Den säcularen Gliedern dieses Ausdrucks hat man eine Correction beizufügen, wegen der elementaren Glieder des Parameters. Die elementaren Glieder des Parameters ergeben sich aus der Gleichung:

$$\frac{\dot{p}_1^i}{\dot{p}_{01}^i} - 1 = i \frac{\dot{p}_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1).$$

Dementsprechend findet man die Correction von

$$2r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + \frac{3}{2} (q_1 - q_{01}) = m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{\dot{p}_1^3}{r_1^3} \left(\frac{9}{4} + \frac{5 \cdot 63}{64} \frac{a^2}{r_1^2} + \frac{7 \cdot 275}{256} \frac{a^4}{r_1^4} \right) \frac{\dot{p}_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1).$$

Dieselbe enthält die säcularen Glieder:

$$m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} \left(\frac{9}{4} + \frac{5 \cdot 63}{32} \frac{a^2}{\dot{p}_1^2} + \frac{21 \cdot 275}{256} \frac{a^4}{\dot{p}_1^4} \right) e_1 k_1.$$

Bei der Bestimmung der Correction der säcularen Glieder kommt noch der Ausdruck $e_1 k_1 \cdot \frac{1}{2} q_1$ in Betracht. Nun findet man, indem man nur die beständigen Glieder des Factors $\frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} \cdot \frac{1}{2} q_1$ berücksichtigt, den folgenden Werth:

$$\frac{1}{2} \frac{r_1^2}{\dot{p}_1^2} (q_1 - q_{01} + q_{01}) = -m m_0 a^2 \lambda^2 \left(\frac{45}{64} \frac{a^2}{\dot{p}_1^2} + \frac{175}{128} \frac{a^4}{\dot{p}_1^4} \right).$$

Multipliziert man dies mit $\frac{\dot{p}_1^2}{r_1^3} e_1 k_1$, und addirt das Product zu dem Vorausgehenden, so findet man die den säcularen Gliedern der Störungsgleichung (4') beizufügende Correction:

$$+ m m_0 a^2 \lambda^2 \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} \left(\frac{9}{4} + \frac{45 \cdot 13}{64} \frac{a^2}{\dot{p}_1^2} + \frac{175 \cdot 31}{256} \frac{a^4}{\dot{p}_1^4} \right) e_1 k_1.$$

Es ist darauf zu achten, dass die Veränderliche k_1

für den Zeitpunkt $v_1 = 0$ verschwinden soll. Man hat daher in die vorliegende Correction den Werth:

$$k_1 = -A_1 (\cos \eta - \cos \alpha)$$

einzusetzen. Zur Abkürzung schreibe man:

$$A_1 e_1 \left(\frac{9}{4} + \frac{45 \cdot 13}{64} \frac{a^2}{\dot{p}_1^2} + \frac{175 \cdot 31}{256} \frac{a^4}{\dot{p}_1^4} \right) = C_1.$$

Die Derivirte der Correction, welche die Veränderliche ω_1 durch die Substitution der elementaren Glieder des Parameters erleidet, ist dann:

$$+ \frac{m \dot{p}_0^2}{\dot{p}_{01}^2} \lambda \frac{\dot{p}_1^2}{r_1^2} C_1 A_1 (\cos \eta - \cos \alpha).$$

Das Integral dieses Ausdrucks geht aber, wenn man alle Glieder desselben streicht, welche als Störungen der zweiten Ordnung betrachtet werden können, in eine beständige Grösse über. Es folgt daraus, dass die elementaren Glieder des Parameters keinen Einfluss haben auf die Störungen der ersten Ordnung von ω_1 . Durch die Integration der Störungsgleichung (4') ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\omega_{01} - \omega_1 + \cos i_1 (\vartheta_0 - \vartheta) = -B_1 v_1 + \frac{m \dot{p}_0^2}{\dot{p}_{01}^2} \left[\frac{75}{16} e \sin (\eta - v_1) \right. \\ \left. - \frac{15}{16} \left(11 \frac{a}{\dot{p}_1} + \frac{189}{8} \frac{a^3}{\dot{p}_1^3} + \frac{35 \cdot 153}{128} \frac{a^5}{\dot{p}_1^5} \right) \frac{e e_1}{\beta} \sin \eta \right] \\ + \frac{\nu m \dot{p}_0^2 \dot{p}_1^2}{\dot{p}_{01}^2 r_1^2} \left[\frac{24 + 9\nu}{8} \frac{a}{\dot{p}_1} \frac{\sin (\eta + \varepsilon - v_1)}{1 - \nu} - \frac{18 + 9\nu}{8} \frac{\sin 2(\eta + \varepsilon - v_1)}{1 - \nu} + \frac{45}{4} \frac{e \sin (2\eta + \varepsilon - 2v_1)}{1 - 2\nu} + \frac{40 + 15\nu}{24} \frac{a}{\dot{p}_1} \frac{\sin 3(\eta + \varepsilon - v_1)}{1 - \nu} \right].$$

Die erste Zeile dieser Gleichung enthält die der Zeit proportionalen und diejenigen periodischen Störungen, welche Functionen von v_1 allein sind. Die zweite Zeile enthält die säcularen Störungen von ω_1 , die dritte Zeile die von ε abhängigen periodischen Störungen.

4.

Als Nullpunkt der Coordinaten ist bekanntlich der gemeinsame Schwerpunkt des Centralkörpers und der in der

inneren Bahn sich bewegenden Masse angenommen. Diese Annahme bewirkt, dass die Gerade, in welcher sich die beweglichen Ebenen der Bahnen schneiden, in einer unveränderlichen Ebene fortschreitet. Die unveränderliche Ebene ist als Coordinatenebene angenommen, und es folgt daraus, dass die aufsteigenden Knoten der beiden Bahnen jederzeit den Unterschied 180° haben. Sind i und i_1 die Winkel, welche die Ebenen der Bahnen mit der Coordinatenebene bilden, so ist $\mathcal{J} = i + i_1$ der Winkel, welchen die erstgenannten Ebenen mit einander bilden.

Zur Bestimmung der Neigung und des Knotens der gestörten Bahn hat man hier die Störungsgleichungen:

$$(5') \quad m n m_0 n_1 i_1' = c \sin i_1 \cos u_1 \sin n \frac{d\Omega}{ds}$$

$$(6') \quad m n m_0 n_1 \vartheta' = c \sin n_1 \sin u \frac{d\Omega}{ds}.$$

Nachdem man den Winkel i_1 aus der Gleichung (5') bestimmt hat, erhält man den Winkel i aus dem Flächenintegral:

$$m n \sin i = m_0 n_1 \sin i_1.$$

Lässt man die Störungen von n und n_1 in dieser Gleichung ausser Acht, so ergibt sich aus derselben das Verhältniss

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{m_0 \lambda p_{01}^2}{m p_0^2} = \frac{m_0}{m} \sqrt{\frac{p_{01}}{p_0}} = \frac{1}{11} \text{ beiläufig.}$$

Da nun $\mathcal{F} = 42'$ gegeben ist, so findet man den Winkel, welchen die Ebene der Jupitersbahn mit der unveränderlichen Ebene bildet, $i = 3'5$, dagegen den Winkel, welchen die Ebene der Uranusbahn mit derselben bildet, $i_1 = 38'5$.

Es ist aber leicht zu sehen, dass in dem begrenzten Zeitraum, für welchen die Störungen der ersten Ordnung ein auf eine Bogensekunde genaues Resultat geben, in den Coordinatenwerthen weder die periodischen noch die säcularen Störungen von i_1 und ϑ zum Ausdruck kommen. In diesem begrenzten Zeitraum können die Winkel i_1 i \mathcal{F} als beständige Grössen angenommen werden. Veränderlich ist nur das der Zeit proportionale Glied von ϑ . Dasselbe ist aber schon in der vorigen Aufgabe bestimmt worden. Setzt man zur Abkürzung

$$B_0 = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{a^2}{p_1^2} + \frac{175}{64} \frac{a^4}{p_1^4} \right),$$

so schreibt sich das in Nr. 2627 unter 9. erhaltene Integral der Störungsgleichung (6') in der Form:

$$\vartheta - \vartheta_0 = - \frac{\sin \mathcal{F}}{\sin i} m_0 v B_0 v_1 = - \frac{\sin \mathcal{F} m p_0^2}{\sin i_1 p_{01}^2} B_0 v_1.$$

Beachtet man auch in dem Werthe $\omega_1 - \omega_{01}$ nur das mit v_1 multiplicirte Glied, so folgt aus dem unter 3. erhaltenen Resultat:

$$\omega_1 - \omega_{01} + \cos i_1 (\vartheta - \vartheta_0) = \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} B_0 v_1.$$

Durch die Elimination von ϑ entsteht:

$$\omega_1 - \omega_{01} = \left(1 + \frac{\sin \mathcal{F} \cos i_1}{\sin i_1} \right) \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} B_0 v_1$$

$$\text{oder } \omega_1 - \omega_{01} = \left(1 + \frac{\sin i}{\sin i_1} + \cos \mathcal{F} \right) \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} B_0 v_1,$$

wo nun beiläufig $\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{1}{11}$, und $\cos \mathcal{F} = 1$ gesetzt werden

kann. Diesen Gleichungen zufolge ist die Bewegung des Knotens rückläufig, die Bewegung des Perihels nahezu doppelt so gross als die des Knotens, aber rechtläufig.

Unter 1. ist gegeben $\frac{\lambda m p_0^2}{p_{01}^2} = \frac{1}{102000}$. Daraus folgt nun

$$\omega_1 - \omega_{01} = \frac{1}{57000} \frac{v_1}{\lambda}.$$

Die Apsidenlinie der Uranusbahn vollendet hiernach ihre Umdrehung in dem Zeitraum von beiläufig 57000 Jupitersumläufen.

Die säcularen Störungen von k_1 und h_1 sind unter 2. bestimmt worden. Es hat sich ergeben $k_1 = -A_1 \cos \eta$, $h_1 = -A_1 \sin \eta$, wo $\eta = \alpha + \beta v_1$ ist. Die Grösse α ist eine Integrationsbeständige; der Coefficient β aber bestimmt sich aus der Störungstheorie. Wenn man in den Werthen $\omega - \omega_0$ und $\omega_1 - \omega_{01}$ nur die mit v_1 multiplicirten Glieder beachtet, so ist:

$$\beta v_1 = \omega - \omega_0 - \omega_1 + \omega_{01},$$

und dem Bisherigen zufolge:

$$\omega - \omega_0 = \left(1 + \frac{\sin i_1}{\sin i} + \cos \mathcal{F} \right) m_0 v B_0 v_1$$

$$\omega_1 - \omega_{01} = \left(1 + \frac{\sin i}{\sin i_1} + \cos \mathcal{F} \right) \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} B_0 v_1.$$

Aus einem Flächenintegral folgt $m_0 v = \frac{m p_0^2 \sin i}{p_{01}^2 \sin i_1}$. Setzt man $\cos \mathcal{F} = 1$, so findet man:

$$\beta = \left(1 - \frac{\sin i}{\sin i_1} \right) \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} B_0$$

der Winkel βv_1 wächst demnach von 0° bis 360° in dem Zeitraum von beiläufig 132000 Jupitersumläufen.

Da nun β bekannt ist, so kann man auch den Coefficienten A_1 der säcularen Störungen von k_1 und h_1 angeben. Unter 2. ist gegeben:

$$A_1 = \frac{m p_0^2}{p_{01}^2} \cdot \frac{15}{16} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{7}{4} \frac{a^3}{p_1^3} + \frac{315}{128} \frac{a^5}{p_1^5} \right) \frac{e}{\beta}.$$

Indem man den Werth β hier einsetzt, erhält man:

$$A_1 = \frac{\sin i_1}{\sin i_1 - \sin i} \cdot \frac{5}{4} \left(\frac{a}{p_1} - \frac{1}{8} \frac{a^3}{p_1^3} - \frac{5}{128} \frac{a^5}{p_1^5} \right) e.$$

Wenn verlangt wird, die Störungen der zweiten Ordnung sollen 0.8 Bogensekunden nicht überschreiten, so erhält man aus dieser Forderung zur Bestimmung des Zeitraums, für welchen die Störungen der ersten Ordnung die erwähnte Genauigkeit geben, die folgende Gleichung:

$$A_1^2 \sin^2 \beta v_1 = 0.8 = 0.000004.$$

Mit Rücksicht auf den obigen Werth A_1 geht dieselbe über in:

$$\frac{11}{8} \frac{a}{p_1} e \sin \beta v_1 = \frac{1}{56.5} \sin \beta v_1 = 0.002.$$

Wenn aber $\sin \beta v_1 = 0.113$ sein soll, so findet man $\beta v_1 = 6^\circ 5'$. Der Winkel βv_1 wächst von 0° bis 360° in dem Zeitraum von 13200 Jupitersumläufen, Derselbe erreicht daher den Werth $6^\circ 5'$ in dem Zeitraum von 2400 Jupitersumläufen. Ich habe in diesem Aufsatz die Störungen

der ersten Ordnung entwickelt, welche die Uranusbahn durch den Jupiter erleidet. Bleibt der Bogen βv_1 zwischen den Grenzen $\pm 6^\circ 5'$, so geben diese Entwicklungen die Genauigkeit einer Bogensekunde und gelten für den Zeitraum von beiläufig 4800 Jupitersumläufen.

Karlsruhe im April 1884.

August Weiler.

Osservazioni della Cometa 1884 II (Barnard)

fatte nel R. Osservatorio di Brera a Milano.

| 1884 | T. M. Milano | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | Confr. | α app. | $\log p.A$ | δ app. | $\log p.A$ | * |
|----------|--|-----------------------------------|----------------|--------|--|--------------------|---------------|------------|---|
| Sett. 20 | 7 ^h 41 ^m 56 ^s | +2 ^m 5 ^s 31 | —3' 23".3 | 8 | 19 ^h 39 ^m 20 ^s 21 | 7.816 | —27° 58' 5".9 | 0.927 | 1 |
| Ott. 11 | 7 16 9 | —1 39.82 | —1 11.7 | 12 | 20 52 40.54 | 8.474 _n | —20 22 57.6 | 0.905 | 2 |

Stelle di confronto.

| * | α 1884.0 | δ 1884.0 | Autorità |
|---|---|-----------------------|------------------------|
| 1 | 19 ^h 37 ^m 11 ^s 38 +3 ^s 52 | —27° 54' 56".2 +13".6 | AOe ₂ 19901 |
| 2 | 20 54 17.09 +3.27 | —20 22 4.9 +19.0 | AOe ₂ 21033 |

L'osservazione dell' 11 Ottobre era alquanto penosa. Il 20 Ottobre ho veduto la Cometa, ma non era più osservabile col nostro strumento di 8 pollici.

Osservatorio Reale di Brera a Milano 1884 Novembre 15.

G. V. Schiaparelli.

Beobachtungen des Cometen 1884 Wolf

auf der Sternwarte in Gohlis.

| 1884 | M. Z. Gohlis | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | Vergl. | α app. | $\log p.A$ | δ app. | $\log p.A$ | * |
|---------|--|------------------------------------|----------------|--------|--|------------|----------------|------------|---|
| Oct. 10 | 9 ^h 39 ^m 38 ^s | —0 ^m 19 ^s 72 | —15' 24".6 | 5 | 21 ^h 32 ^m 38 ^s 74 | 9.146 | +13° 54' 48".9 | 0.747 | 1 |
| 20 | 8 52 22 | —0 30.12 | —1 24.7 | 5 | 21 47 45.67 | 9.010 | + 8 8 56.0 | 0.734 | 2 |
| 23 | 9 35 19 | +0 43.34 | —13 44.6 | 14 | 21 53 5.95 | 9.243 | + 6 46 33.4 | 0.797 | 3 |
| 23 | 10 56 46 | —4 51.75 | + 7 58.6 | 6 | 21 53 12.00 | 9.433 | + 6 45 3.8 | 0.807 | 4 |
| Nov. 7 | 7 41 33 | +4 12.59 | + 5 26.1 | 10 | 22 23 37.00 | 8.619 | + 0 53 13.8 | 0.834 | 5 |
| 8 | 7 30 1 | —0 57.84 | + 1 45.1 | 20 | 22 25 51.02 | 8.453 | + 0 32 38.9 | 0.837 | 6 |

Mittlere Oerter der Vergleichsterne für 1884.0.

| * | α 1884.0 | δ 1884.0 | Autorität |
|---|---|----------------------|--------------------------------------|
| 1 | 21 ^h 32 ^m 55 ^s 21 +3 ^s 25 | +13° 9' 43".8 +29".8 | Glasg. 5534 |
| 2 | 21 48 12.58 +3.21 | + 8 9 52.6 +28.8 | » 5619 |
| 3 | 21 52 19.40 +3.21 | + 6 59 51.6 +28.4 | Schjell. 8949 |
| 4 | 21 58 0.49 +3.26 | + 6 36 36.9 +28.4 | » 8998 |
| 5 | 22 19 20.98 +3.13 | + 0 47 21.6 +26.1 | 1/2 (Schjell. 9166 + New 7 yr. 2563) |
| 6 | 22 29 45.68 +3.18 | + 0 30 27.9 +25.9 | Schjell. 9218 |

Bemerkungen.

Oct. 10. Beobachtung unsicher. Antritte nur am Rande des Gesichtsfeldes ($r = 829''.48$).

Oct. 20. $\Delta\delta$ unsicher. Comet erscheint als runde Nebelmasse mit centraler Verdichtung. Helligkeit 9. Gr.

Nov. 8. Beobachtung schwierig. Dunstige Luft. Comet als Nebelmasse ohne Andeutung von Kern. Helligkeit 10. Gr.

Leipzig-Gohlis 1884 Nov. 12.

W. Winkler.