

Über die Störungen der Planetoiden und Kometen durch die Anziehung des Planetoidenringes.

Von Dr. A. Wilkens.

Die vorliegende Abhandlung untersucht die durch die Gesamtmasse der Planetoiden des Sonnensystems hervorgerufenen Ungleichheiten in der Bewegung der Planetoiden selbst, der periodischen und der parabolischen Kometen. Herr Harzer hat bereits 1895 in der Leipziger Preisschrift über »die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten« auf die Wichtigkeit einer Rücksichtnahme des störenden Einflusses des Planetoidenringes auf die Bewegungsverhältnisse im Sonnensystem hingewiesen. Er findet unter der Annahme, daß die bisher unerklärten Abweichungen zwischen der Beobachtung und Theorie des Mars der störenden Wirkung des Planetoidenringes zur Last zu legen sind, die Gesamtmasse der Planetoiden zu 1 : 2000000 der Sonnenmasse, also zum anderthalbfachen Betrage der Marsmasse. Da die gefundene Masse von einer Größenordnung ist, welche einen Zweifel über die Realität eines durch die Beobachtung nachweisbaren störenden Einflusses beseitigen muß, so wird man in allen genaueren Rechnungen im Bereich der Störungstheorie die von jenem Ringe herrührenden Ungleichheiten in Rücksicht zu ziehen haben. Für die großen Planeten außer Mars bleiben die Störungen sehr klein, aber für die Planetoiden selbst und für die dem Ringe nahe kommenden periodischen und parabolischen Kometen können die Störungen beträchtliche Größen erreichen.

1. Mit Herrn Harzer mache ich die vorderhand kaum durch eine bessere Hypothese zu ersetzende Annahme, daß die Masse der Planetoiden in ihrer Gesamtheit als eine homogene Masse aufgefaßt wird, die über einen Kreisring verteilt ist, dessen halbe große Achse einer mittleren Bewegung von 800" entspricht, d. h. einer Größe, welche sich als das Mittel der mittleren Bewegungen aller bisher bekannten Planetoiden ergeben hat. Herr Poincaré gibt dann in seinen »Leçons sur le Potentiel Newtonien« für das Potential des Ringes für einen beliebigen Punkt des Raumes das folgende elliptische Integral 1. Gattung:

$$\Omega = k^2 M_0 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \psi + M^2 \sin^2 \psi}}$$

wo m der Minimal- und M der Maximalabstand des angezogenen Punktes vom Kreisringe ist, ferner M_0 die Ringmasse und k^2 die Gaußsche Konstante. Der angezogene

Punkt möge nun in der Ebene und im Inneren des Kreisringes liegen, z. B. in P_i .

Da der Ausdruck für $m\Omega$ nur von $\frac{m}{M}$ abhängt, so hat er denselben Wert für den inneren Punkt P_i und den äußeren P_a , die in bezug auf den Kreisring in Inversion stehen. Beziehen sich die gestrichelten Buchstaben auf den Punkt P_a , so wird dann

$$\frac{m'}{M'} = \frac{m}{M}$$

und demnach $m'\Omega' = m\Omega$.

Folglich erhalten wir das Ringpotential für einen äußeren Punkt, sobald wir dasselbe für einen inneren Punkt kennen und umgekehrt.

Bezeichnen wir den Sonnenabstand des Planetoiden P_i mit r , den Kreisradius mit a' , so erhalten wir für das Potential im inneren Punkt P_i :

$$\Omega_i = M_0 k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a'^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Ist r' der heliozentrische Abstand des äußeren Punktes P_a , so ist

$$rr' = a'^2, \quad \text{also } r = \frac{a'^2}{r'}$$

und mithin das Potential im Punkte P_a :

$$\Omega_a = M_0 k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{r'^2 - a'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Ω_i und Ω_a sind also dadurch voneinander unterschieden, daß der Radiusvektor des angezogenen Punktes mit a' vertauscht ist. Da das Potential nur vom Radiusvektor r abhängt, so ist die Flächengeschwindigkeit d. h. der Parameter p der oskulierenden Ellipsen konstant.

2. Für die Störungen der elliptischen Elemente bestehen nun die bekannten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e n a^2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial e} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M} \\ \frac{dM}{dt} &= -\frac{2\sqrt{a}}{k} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e k \sqrt{a}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial e} - \frac{3}{a^2} \int \frac{\partial \Omega}{\partial M} dt\end{aligned}$$

wo M die mittlere Anomalie, ϖ die Perihellänge und n die mittlere Bewegung bedeuten. Da die Integration nach der Zeit die Entwicklung der rechten Seiten in Reihen nach den Exzentrizitäten veranlassen würde, wodurch die beabsichtigte Berechnung der Störungen für sehr große Exzentrizitäten bis zu $e = 1$ ausgeschlossen würde, so wird statt der Zeit t die wahre Anomalie w als unabhängige Variable eingeführt,

$$\begin{aligned}\frac{da}{dw} &= \frac{2 a^3 (1-e^2) e \sin w}{(1+e \cos w)^2} M_0 \cdot \mathcal{F} \\ \frac{de}{dw} &= + \frac{a^2 (1-e^2)^2 \sin w}{(1+e \cos w)^2} M_0 \cdot \mathcal{F} \\ \frac{d\varpi}{dw} &= - \frac{a^2 (1-e^2)^2 \cos w}{e (1+e \cos w)^2} M_0 \cdot \mathcal{F} \\ \frac{dM}{dw} &= - \frac{2 a^2 (1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos w)^3} M_0 \cdot \mathcal{F} + \frac{a^2 (1-e^2)^{5/2}}{e} \frac{\cos w}{(1+e \cos w)^2} M_0 \cdot \mathcal{F} - \frac{3 e a^2 (1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos w)^2} \int \frac{\sin w \cdot dw}{(1+e \cos w)^2} M_0 \cdot \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Führen wir jetzt zuerst die Integration für kleine, planetarische Exzentrizitäten durch, wobei wir Reihenentwicklungen nach e vornehmen dürfen, so erhalten wir bei Beschränkung auf die Glieder niedrigsten Grades für die Störungen:

$$\begin{aligned}\Delta a &= -2 a \alpha^3 e \cos w M_0 \cdot \mathcal{F}' \\ \Delta e &= -\alpha^3 \cos w M_0 \cdot \mathcal{F}' \\ \Delta \varpi &= -\frac{\alpha^3}{e} \sin w M_0 \cdot \mathcal{F}' - \frac{3}{2} \alpha^3 (\mathcal{F}' + \alpha^2 \mathcal{F}'') w \cdot M_0 \\ \Delta M &= \frac{\alpha^3}{e} \sin w M_0 \cdot \mathcal{F}' - 2 \alpha^3 M_0 \cdot \mathcal{F}' \cdot w\end{aligned}$$

wo

$$\alpha = \frac{a}{a'} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}' = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2 \pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^3}, \quad \mathcal{F}'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2 \pi} \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^5}$$

Die große Achse a und die Exzentrizität e erleiden also nur periodische Störungen, während M und ϖ auch säkularen Änderungen unterworfen sind.

Die Periodizität der Exzentrizität e führt in Verbindung mit der Konstanz des Parameters p auf eine für die Anziehung eines Ringes charakteristische Eigenschaft der Bewegung des angezogenen Punktes; nach Tisserand, *Traité de Mécanique céleste* Tome I, pag. 122 ist nämlich die Gleichung des Hamiltonschen Hodographen der Keplerschen Bewegung in rechtwinkligen Koordinaten mit der Sonne als Anfangspunkt und der Apsidenlinie als x -Achse:

$$x^2 + \left(y - e \frac{k \sqrt{1+m}}{Vp} \right)^2 = \frac{k^2 (1+m)}{p}.$$

Für das vorliegende Problem ist also der oskulierende Hodograph, wie in der ungestörten Bewegung, ein Kreis,

die weiterhin noch durch den Radiusvektor r ersetzt werden wird. Aus dem Flächensatze folgt:

$$dt = \frac{r^2}{k \sqrt{p}} dw$$

so daß die Differentialgleichungen der Elemente für einen inneren Punkt mit Rücksicht auf die Relationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial r} &= M_0 k^2 \cdot \mathcal{F}, & \mathcal{F} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{r \sin^2 \varphi}{V(a'^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^3} \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos w \\ \frac{\partial r}{\partial M} &= \frac{a e \sin w}{\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}$$

in das folgende System übergehen:

der aber während der gestörten Bewegung einen konstanten Radius hat und dessen Mittelpunkt eine periodische Bewegung vollführt.

3. Die Ausdrücke der Störungen der elliptischen Elemente versagen, wenn die Exzentrizität e sehr klein wird; $\Delta \varpi$ und ΔM werden dann wegen des Nenners e sehr groß und sinnlos. Diese Kalamität wird indes durch die Einführung der Harzer-Poincaréschen Elemente, also durch

$$\begin{aligned}\lambda &= k \sqrt{a}, & \xi &= \sqrt{k \sqrt{a} (1 - \sqrt{1-e^2})} \cos \varpi \\ \lambda &= M + \varpi, & \eta &= -\sqrt{k \sqrt{a} (1 - \sqrt{1-e^2})} \sin \varpi\end{aligned}$$

beseitigt, wo λ die mittlere Länge bedeutet und ξ und η wesentlich $\sqrt{k \sqrt{a} e \cos \varpi}$ resp. $-\sqrt{k \sqrt{a} e \sin \varpi}$ sind.

λ und λ brauchen wir nicht zu integrieren, weil wir den Ausdruck für Δa beibehalten können, da für sehr kleine

Exzentrizitäten in Δa keine Schwierigkeit eintritt und ferner nach obigem in

$$\Delta \lambda = -\frac{1}{2} \alpha^3 (\gamma M_0 \mathcal{F}' + 3 \alpha^2 M_0 \mathcal{F}'')$$

die lästigen Terme in $\frac{1}{e}$ sich fortheben. Für ξ und η bestehen nun die kanonischen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$$

$$x = -\frac{\xi}{V\Delta} \cos \lambda + \frac{\eta}{V\Delta} \sin \lambda + \frac{\xi^2}{\Delta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\lambda \right) + \frac{\eta^2}{\Delta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\lambda \right) + \frac{\xi\eta}{\Delta} \sin 2\lambda + \dots$$

Die Entwicklung von $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ nach x ergibt:

$$a \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$$

wo

$$\gamma_0 = k^2 M_0 \frac{\alpha^2}{a'} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 + 3k^2 M_0 \frac{\alpha^4}{a'} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5}$$

so daß wir schließlich für ξ und η die folgenden linearen Differentialgleichungen mit in der Zeit t periodischen Koeffizienten erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \beta_1 (\xi \sin 2\lambda + \eta \cos 2\lambda) + \beta_2 \eta + \beta_3 \sin \lambda \\ \frac{d\eta}{dt} &= \beta_1 (\xi \cos 2\lambda - \eta \sin 2\lambda) - \beta_2 \xi + \beta_3 \cos \lambda \end{aligned}$$

Da nun $\lambda = \lambda_0 + n t$, so folgt bei Einführung von λ statt t als unabhängige Variable das System:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\lambda} &= \alpha_1 (\xi \sin 2\lambda + \eta \cos 2\lambda) + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \sin \lambda \\ \frac{d\eta}{d\lambda} &= \alpha_1 (\xi \cos 2\lambda - \eta \sin 2\lambda) - \alpha_2 \xi + \alpha_3 \cos \lambda \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) + c_2 \sin(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \\ y &= \frac{x'}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta} = -\frac{\varepsilon}{\delta} - c_1 \sqrt{\frac{\zeta}{\delta}} \sin(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) + c_2 \sqrt{\frac{\zeta}{\delta}} \cos(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \end{aligned}$$

wo c_1 und c_2 die beiden Integrationskonstanten bezeichnen.

Da nun $\xi = x \sin \lambda + y \cos \lambda$ und $\eta = x \cos \lambda - y \sin \lambda$, und in erster Annäherung $\sqrt{\frac{\zeta}{\delta}} = 1 - \alpha_1$, so folgt

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\delta} \cos \lambda + c_1 \sin(1 - \sqrt{\delta \zeta}) \lambda + c_2 \cos(1 - \sqrt{\delta \zeta}) \lambda + c_1 \alpha_1 \sin(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \cos \lambda + c_2 \alpha_1 \cos(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \cos \lambda$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\delta} \sin \lambda + c_1 \cos(1 - \sqrt{\delta \zeta}) \lambda - c_2 \sin(1 - \sqrt{\delta \zeta}) \lambda - c_1 \alpha_1 \sin(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \sin \lambda + c_2 \alpha_1 \cos(\sqrt{\delta \zeta} \lambda) \sin \lambda$$

wo

$$\alpha_1 = \frac{k^2 M_0}{n \Delta} \frac{\alpha^2}{a'} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} - 3 \alpha^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{V(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} \right)$$

$$1 - \sqrt{\delta \zeta} = \frac{2\gamma_0 + \gamma_1}{2n\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\gamma_0}{n\sqrt{\Delta}}$$

wenn wir uns auf die Glieder 1. Ordnung der Masse M_0 beschränken.

Setzen wir mit Leverrier: $r = a(1+x)$, wo x Funktion von λ, ξ, η ist, so folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = a \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{dt} = -a \frac{\partial \Omega}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Das im 1. Bande der »Annales de l'observatoire de Paris« als Funktion von e und M entwickelte x lautet nun als Funktion unserer kanonischen Elemente bis zu den Gliedern 2. Grades:

$$\begin{aligned} \text{wo} \quad \alpha_1 &= \frac{\beta_1}{n} = \frac{\gamma_0 - \frac{1}{2}\gamma_1}{n\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{n} = \frac{\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_1}{n\Delta}, \\ \alpha_3 &= \frac{\beta_3}{n} = \frac{\gamma_0}{n\sqrt{\Delta}} \end{aligned}$$

und wo ich mir in n die bereits ermittelten Störungen einbezogen denke. Wir können nun diese Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten in solche mit konstanten Koeffizienten transformieren, die sofort integrierbar sind, indem wir nämlich den Punkt ξ, η auf ein bewegliches Koordinatensystem x, y beziehen, also mittels der Substitution:

$$\xi \sin \lambda + \eta \cos \lambda = x$$

$$\xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda = y$$

Die dann gewonnenen Differentialgleichungen lauten:

$$x' = \delta y + \varepsilon, \quad y' = -\zeta x$$

wo $\delta = 1 + \alpha_1 - \alpha_2$, $\varepsilon = \alpha_3$, $\zeta = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$

und

$$x' = \frac{dx}{d\lambda}, \quad y' = \frac{dy}{d\lambda}$$

Aus diesen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten folgt nun:

$$x'' = \delta y = -\delta \zeta x$$

Sind ξ und η bekannt, so ergeben sich ϖ und e aus den Relationen:

$$\operatorname{tg} \varpi = -\frac{\eta}{\xi} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{A}.$$

4. Ich gehe jetzt zur Herleitung der Störungen für einen äußeren Punkt über. Ist r der heliozentrische Abstand des äußeren Punktes, so ist das Potential:

$$\mathcal{Q} = M_0 k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{V r^2 - a'^2 \sin^2 \varphi}$$

Mithin ist die radiale Kraftkomponente:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r} = -M_0 k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{r d\varphi}{V (r^2 - a'^2 \sin^2 \varphi)^3}$$

Die Störungen ergeben sich dann aus den folgenden Relationen:

$$\gamma_0 = -\frac{k^2 M_0}{a} \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3},$$

und

$$\alpha_1 = -\frac{k^2}{n A} \frac{M_0}{\pi} \frac{1}{a} \left(\int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} + 3 \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} \right).$$

5. Vor der numerischen Anwendung auf die Bewegung der Planetoiden müssen wir uns ein Mittel zur schnellen Berechnung der hypergeometrischen Integrale verschaffen. Zwar hat Gylden jene Integrale für seine Theorie der Planetenbewegungen tabuliert, aber nur bis $\log \alpha = 9.85$, während wir jene Integrale von $\log \alpha = 9.88$ ab brauchen werden, so daß wir für unser vorliegendes Problem eine grade für hohe Werte von α zugemünzte schnelle Berechnungsmethode und zwar auf Grund der Jacobischen ϑ -Funktionen entwickeln müssen. Bekanntlich ist das elliptische Integral 1. Gattung

$$K = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V 1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0, q)$$

wo ϑ_3 die Jacobische ϑ -Funktion ist, deren Argument hier

$$\mathcal{F}' = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{4}{\alpha^2 (1 - \alpha^2)} q \vartheta_3' (0, q) V \left(\frac{\pi}{2K} \right)^3$$

wo ϑ_3' aus der außerordentlich schnell konvergierenden Ableitung von $\vartheta_3(0, q)$ zu berechnen ist. Hat man jene Tafeln nicht zur Hand, so kann man sich der in A. N. 3974 angegebenen Tafeln bedienen, oder schließlich q auswerten mittels der Relation

$$q = -\mathfrak{M} \pi \frac{\mu(1, \sqrt{1 - \alpha^2})}{\mu'(1, \alpha)}$$

$$\frac{d^2 K}{d\alpha^2} = 3\alpha^2 \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} + \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} = \pi (\vartheta_3 \vartheta_3' q'' + (\vartheta_3' q')^2 + \vartheta_3 \vartheta_3'' q'^2)$$

$$\Delta a = 2 a e \cos w M_0 \cdot \mathcal{F}'$$

$$\Delta e = \cos w M_0 \cdot \mathcal{F}'$$

$$\Delta \varpi = \frac{\sin w}{e} M_0 \cdot \mathcal{F}' + \frac{3}{2} (\mathcal{F}' + \mathcal{F}'') w \cdot M_0$$

$$\Delta M = -\frac{\sin w}{e} M_0 \cdot \mathcal{F}' + 2 w M_0 \cdot \mathcal{F}'$$

wo jetzt:

$$\mathcal{F}' = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3}$$

$$\mathcal{F}'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5}$$

und

$$\alpha = \frac{a'}{a} < 1.$$

Für den Fall sehr kleiner Exzentrizitäten, wo wieder ξ und η einzuführen sind, haben wir zu setzen:

$$\gamma_1 = \gamma_0 - \frac{2 k^2 M_0}{a} \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^5}$$

gleich 0 und deren Modul gleich q ist, und wo $\vartheta_3(0, q)$ definiert ist durch

$$\vartheta_3(0, q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots$$

Differentiation ergibt:

$$\frac{dK}{d\alpha} = \alpha \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{V (1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} = \pi \vartheta_3 \frac{d\vartheta_3}{dq} \frac{dq}{d\alpha}$$

Da nun, wie ich in einem früheren Aufsatz in den A. N. Nr. 3974 gezeigt habe, die Ableitung

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{2}{\alpha (1 - \alpha^2)} \frac{q}{\vartheta_3^4(0, q)}$$

so wird unser hypergeometrisches Integral:

wo \mathfrak{M} der Modul der Briggschen Logarithmen und μ, μ' die Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittel der angegebenen Argumente sind; K resp. ϑ_3 findet man dann durch die oben angegebene Reihenentwicklung, die ja zu den am schnellsten konvergierenden Reihen der Analysis gehört.

Um \mathcal{F}'' berechnen zu können, müssen wir K zweimal differenzieren:

wo ϑ_3' und ϑ_3'' Ableitungen nach q , während q' und q'' Ableitungen nach α definieren, und zwar ist

$$q'' = \left[-2 \frac{1-3\alpha^2}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} q \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 + 4 \frac{q}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^4 - 16 \frac{q^2 \vartheta_3'}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2K} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{2q'}{\alpha(1-\alpha^2)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{K^2} - q \frac{\pi^2}{K^2} \vartheta_3' \sqrt{\frac{\pi}{2K}} \right).$$

ϑ_3'' ergibt sich analog ϑ_3' aus der Differentiation von ϑ_3 . Mithin ist

$$\mathcal{F}'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 \varphi \, d\varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} = \frac{2}{3\alpha^2} (\vartheta_3 \vartheta_3' q'' + (\vartheta_3' q')^2 + \vartheta_3 \vartheta_3'' q'^2) - \frac{1}{3\alpha^2} \mathcal{F}'.$$

Die der Bewegung des äußeren Punktes entsprechenden Integrale \mathcal{F}_1' und \mathcal{F}_1'' findet man folgendermaßen; es ist in diesem Falle:

$$\mathcal{F}_1' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi) + \alpha^2 \sin^2 \varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^3} d\varphi = \frac{2}{\pi} K + \alpha^2 \mathcal{F}'.$$

Analog ergibt sich

$$\mathcal{F}_1'' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \alpha^4 \sin^4 \varphi + \alpha^4 \sin^4 \varphi}{V(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^5} d\varphi = \frac{2}{\pi} K + 2\alpha^2 \mathcal{F}' + \alpha^4 \mathcal{F}''$$

wodurch \mathcal{F}_1' und \mathcal{F}_1'' auf die oben berechneten \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' reduziert sind.

6. Wenden wir jetzt die Lösung des Problems für kleine Exzentrizitäten auf die Bewegung der Planetoiden an, so erhalten wir die folgenden Tafeln, wo wir K und q mit $\theta = \arcsin \alpha$ als Argument aus Herrn Lucien Lévy's »Précis élémentaire des fonctions elliptiques« entnehmen:

θ	$\log \alpha$	$\log K$	$\log q$	$\log q'$	$\log q''$	$\log \vartheta_3'$	$\log \vartheta_3''$	$\log \mathcal{F}'$	$\log \mathcal{F}''$	$\log \mathcal{F}_1'$	$\log \mathcal{F}_1''$
50°	9.8843	0.2868	8.7405	9.4755	0.0511	0.3013	8.8613	0.1232	0.3979	0.3035	0.5625
55	9.9134	0.3085	8.8391	9.5715	0.2654	0.3016	9.0584	0.2303	0.5910	0.3866	0.7269
60	9.9375	0.3338	8.9335	9.6862	0.5157	0.3021	9.2472	0.3582	0.8273	0.4891	0.9332
65	9.9573	0.3634	9.0255	9.8256	0.8140	0.3031	9.4313	0.5133	1.1188	0.6179	1.1958
70	9.9730	0.3987	9.1175	9.9992	1.1807	0.3049	9.6153	0.7065	1.4871	0.7844	1.5380
75	9.9849	0.4422	9.2123	0.2253	1.6544	0.3085	9.8051	0.9579	1.9727	1.0099	2.0019
80	9.9934	0.4988	9.3152	0.5448	2.3223	0.3161	0.0115	1.3133	2.6675	1.3416	2.6807
85	9.99834	0.5834	9.4396	1.0888	3.4634	0.3359	0.2535	1.9194	3.86574	1.9288	3.8690
86	9.99894	0.6078	9.4705	1.2633	3.8309	0.3439	0.3271	2.1140	4.25318	2.1205	4.2553
87	9.99940	0.6374	9.5057	1.4878	4.3045	0.3551	0.4003	2.3646	4.75242	2.3686	4.75360
88	9.99974	0.6760	9.5480	1.8041	4.9726	0.3723	0.4903	2.7174	5.45644	2.7194	5.45699
89	9.99993	0.7352	9.6056	2.3450	6.1161	0.4044	0.6186	3.3199	6.66032	3.3205	6.66044

Für die inneren Planetoiden bringen wir die Störungen auf die Form:

$$\Delta(\log a) = a_1 e \cos w$$

$$\Delta e = e_1 \cos w$$

$$\Delta \varpi = \varpi_1 \frac{\sin w}{e} + \varpi_2 w$$

$$\Delta M = M_1 \frac{\sin w}{e} + M_2 w$$

wo $a_1, e_1, \varpi_1, \varpi_2, M_1, M_2$ konstante Faktoren sind, die nur von α und der Ringmasse M_0 abhängig sind; ich setze

$M_0 = \frac{\varepsilon}{2000000}$ und gebe dann jene Faktoren in Einheiten

der 7. Dezimale an; dann wird

$$a_1 = -10 \mathfrak{M} \alpha^3 \mathcal{F}' \varepsilon$$

$$e_1 = -5 \alpha^3 \mathcal{F}' \varepsilon$$

$$\varpi_1 = e_1$$

$$\varpi_2 = \frac{3}{2} e_1 - \frac{15}{2} \alpha^5 \mathcal{F}'' \varepsilon$$

$$M_1 = -e_1 = -\varpi_1$$

$$M_2 = 2e_1 = 2\varpi_1$$

wo \mathfrak{M} der Modul der Briggs'schen Logarithmen. Der stets hinzugefügte Faktor ε berücksichtigt die in Zukunft vorgenommene Verbesserung der Masse des Planetoidenringes,

die ich momentan mit Herrn Harzer zu $\frac{1}{2000000}$ ansetze.

Wir erhalten nun für die Koeffizienten die Tafel:

θ	a_1	e_1	ϖ_1	ϖ_2	a_1	e_1	ϖ_1	ϖ_2
50°	— 38	— 38	0.06168	— 0.1948	+ 98	+ 108	+ 0.20758	+ 0.11688
55	4	5	0.0953	0.367	11	12	0.2512	0.1602
60	6	7	0.1528	0.735	13	15	0.3181	0.2405
65	11	12	0.2504	1.619	18	21	0.4278	0.4093
70	18	21	0.4353	4.133	26	30	0.6277	0.8375
75	36	41	0.8435	13.480	44	51	1.0550	2.2828
80	85	98	2.0265	69.682	95	110	2.2648	10.340
85	357	410	8.4690	1126.8	369	424	8.753	154.32
86	561	645	13.311	— 2757.8	573	660	13.610	374.02
87	1001	1153	23.779	—	1015	1168	24.097	+ 1174.4
88	2261	2604	53.705	—	2276	2620	54.047	—
89	— 9067	— 10439	— 215.33	—	+ 9084	+ 10458	+ 215.72	—

Da $M_1 = -\varpi_1$ und $M_2 = 2\varpi_1$, so brauchen wir M_1 und M_2 nicht besonders zu tabulieren.

Zur Berechnung der Koeffizienten für einen äußeren Punkt sind in den Formeln für den inneren Punkt überall die Vorzeichen zu vertauschen, ferner die Koeffizienten α^3 und α^5 zu unterdrücken und \mathcal{F}' , \mathcal{F}'' durch \mathcal{F}_1' , \mathcal{F}_1'' zu ersetzen. Die so erhaltenen Faktoren a_1 , e_1 , ϖ_1 , ϖ_2 sind dann oben in die Tafel für den inneren Punkt rechts angefügt. An den mit einem Strich versehenen Stellen werden die Störungsbeträge außerordentlich groß, so daß es bedenklich erscheint, dieselben zu tabulieren; an jenen Stellen verliert unsere Lösung, die ja nur eine erste Annäherung an die Wahrheit darstellt, den Sinn; in Wirklichkeit sind die an jenen Stellen vorhandenen Störungen durchaus normal, indem ja die Beobachtungen keine derartigen abnormen Abweichungen zeigen. An diesen kritischen Stellen hat man, streng genommen, das Potential der störenden Wirkung der in der Nähe des gestörten Körpers befindlichen Planetoiden aufzustellen und zwar entweder nach der Methode von Laplace oder deren Erweiterung durch Herrn Strömgren. Für

nicht gar zu nahe bei $n = 800''$ gelegene Planetoiden wird aber unsere Lösung eine durchaus brauchbare Annäherung geben und die obige Tafel zur Auswertung der Störungen von Nutzen sein.

7. Ich will jetzt die Störungen betrachten, welche die Bahnen großer Exzentrizität, also die periodischen und parabolischen Kometen, von seiten des Planetoidenringes erleiden.

Statt der Ungleichheiten von a und e werden wir zweckmäßiger im vorliegenden Falle die Ungleichheiten der Perihelidistanz q und wie früher von e berechnen. Da $q = a(1-e)$, so erhalten wir zunächst für q die Differentialgleichung:

$$\frac{dq}{dw} = -\frac{r^2 q^2}{p} \sin w \mathcal{F} M_0$$

in welche ich jetzt den Radiusvektor r als unabhängige Variable einführen will, und zwar mittels der Relation:

$$dw = \frac{p}{e r^2 \sin w} dr$$

so daß im Falle eines inneren Punktes:

$$\frac{dq}{dr} = -\frac{q^2}{e} \mathcal{F} M_0 = -M_0 \frac{q^2}{e} \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{r \sin^2 \varphi}{V(a'^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^3} d\varphi.$$

Die Integration ergibt für Δq die geschlossene Form:

$$\Delta q = -M_0 \frac{q^2}{e} \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{V a'^2 - r^2 \sin^2 \varphi} = -M_0 \frac{q^2}{e a'} \frac{2}{\pi} \left[K\left(\frac{r}{a'}\right) \right]_{r_1}^{r_2}$$

wo K , wie früher, das elliptische Integral 1. Gattung fixiert. Analog findet man Δe , ebenfalls in geschlossener Form integriert, mittels:

$$\Delta e = M_0 \frac{p}{e a'} \frac{2}{\pi} \left[K\left(\frac{r}{a'}\right) \right]_{r_1}^{r_2}.$$

Zur Vervollständigung gebe ich auch noch Δa :

$$\Delta a = \frac{4}{\pi} M_0 \frac{a^2}{a'} \left[K\left(\frac{r}{a'}\right) \right]_{r_1}^{r_2}$$

wo a und e wegen der Konstanz der Flächengeschwindigkeit $p = \text{konst.}$ durch die Relation $(1-e^2)\Delta a = 2ea\Delta e$ aneinander gebunden sind. Bei der Wahl von r als unab-

hängige Variable sind also die dimensional Variablen a , q und ebenso e für alle Exzentrizitäten geschlossen integrierbar; für die Winkelvariablen ϖ und M ist dies aber nicht der Fall. Wir erhalten nämlich ein Integral, das in der Integrationsvariablen r von komplizierter Transzendenz ist, so daß uns nur der Weg der numerischen Integration offen steht und zwar auf Grund der Formeln auf pag. 51. Für den Fall des äußeren Punktes erhalten wir analog

$$\Delta q = -\frac{M_0 q^2}{e r} \frac{2}{\pi} \left[K\left(\frac{a'}{r}\right) \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$\Delta e = \frac{M_0 p}{e r} \frac{2}{\pi} \left[K\left(\frac{a'}{r}\right) \right]_{r_1}^{r_2}$$

und

$$\Delta a = 4 \frac{M_0}{\pi} \frac{a^2}{r} \left[K\left(\frac{a'}{r}\right) \right]_{r_1}^{r_2}$$

wo Δq , Δe , Δa umgekehrt proportional r sind, wie es auch sein muß. Ist $r_1 > r_2$, so ist

$$K\left(\frac{r_1}{a'}\right) > K\left(\frac{r_2}{a'}\right), \text{ aber } K\left(\frac{a'}{r_1}\right) < K\left(\frac{a'}{r_2}\right)$$

also auch

$$\frac{1}{r_1} K\left(\frac{a'}{r_1}\right) < \frac{1}{r_2} K\left(\frac{a'}{r_2}\right)$$

so daß bei wachsendem Abstände von der Sonne die Störungen im Falle eines inneren Punktes positiv, im Falle eines äußeren Punktes aber negativ sind, während für q das Umgekehrte gilt.

Aus der Tatsache, daß e nur periodischen Störungen unterworfen ist, müssen wir im Hinblick auf die Bewegungsanomalie des Enckeschen Kometen, bestehend in einer säkularen Abnahme der Exzentrizität und ebenso der großen Achse, den Schluß ziehen, daß die Anziehung des Planetoidenringes unter Voraussetzung der Annäherung, die wir oben

untersucht haben, jene Ungleichheit nicht zu erklären vermag; ich habe mich ferner aus den Untersuchungen Backlunds in seinen »Calculs et recherches sur la comète d'Encke« davon überzeugt, daß der Parameter p zwar für eine Revolution bis auf geringe Abweichungen konstant bleibt, daß dies aber für mehrere Revolutionen nicht mehr der Fall ist. Möglich wäre aber noch, daß die Störungen, welche der Enckesche Komet jedesmal bei seinem Durchgange durch eine mehr oder weniger dicht gedrängte Schar von Planetoiden erleidet, eine Erklärung seiner Bewegungsanomalie schaffen könnten; befindet sich doch der Enckesche Komet nur während eines Jahres außerhalb des Bereiches der Planetoiden, während er sich innerhalb 2.3 Jahre durch den Planetoidenring hindurchbewegt, ohne im Aphel die obere Grenze des Abstandes der Planetoiden von der Sonne zu erreichen.

Um schließlich noch den Fall parabolischer Kometen zu erledigen, hat man in die Formeln für Δq und Δe etc.: $e = 1$ und $p = 2q$ zu substituieren, ferner aber statt ΔM die Störung der Perihelzeit ΔT auszuwerten mittels der Relation:

$$\frac{dT}{dw} = - \frac{r^4 M_0 \mathcal{F}}{k \sqrt{2q}} \left(1 - 5 \sin^2 \frac{w}{2} + 8 \sin^4 \frac{w}{2} - \frac{16}{3} \sin^6 \frac{w}{2} \right) = \frac{r^2}{k \sqrt{2q}} \frac{dT}{dt}$$

wo man entweder nach w oder t mechanisch integrieren kann und wo man für \mathcal{F} das eine oder das andere Integral zu setzen hat, je nachdem der Komet sich innerhalb oder außerhalb des Planetoidenringes befindet.

Wien-Ottakring, 1905 März 28.

Alexander Wilkens.

Photometrische Messungen der Sterne R Coronae Bor. und 60.1905 Ophiuchi

am Astronomischen Institut Heidelberg-Königstuhl.

Herr G. van Biesbroeck, welcher seit einiger Zeit am hiesigen Institut tätig ist, hat von R Coronae Bor. seither die nachfolgenden photometrischen Messungen erhalten. Das benutzte Instrument ist das am 8-Zöller angebrachte Zöllnersche Photometer und die Beobachtungen sind alle in der üblichen Weise angestellt. Die ersten Tage können nicht den gleichen Grad der Sicherheit beanspruchen als die späteren, da der Beobachter noch nicht lange vorher mit photo-

metrischen Arbeiten begonnen hatte. Doch dürfte die Helligkeitsabnahme im Anfang sicher verbürgt sein. Die benutzten Vergleichsterne sind die von Pickering angegebenen und ihre Helligkeiten den Harvard Annals XXXVII p. 168 entnommen. Hr. van Biesbroeck macht hierbei auf die konstanten Unterschiede zwischen den Helligkeiten aus den Sternen p und q bzw. r , s aufmerksam, indem daraus folgen würde, daß der Stern p etwa 0.2 Größenklassen zu hell angesetzt ist.

R Coronae Borealis.

1905	M. Z. Kgst.	Helligkeit aus						Mittel
		n	o	p	q	r	s	
Mai	11	11 ^h 15 ^m	—	—	10.03	10.23	—	10.13
	23	12 12	—	—	—	—	11.10 ±	11.10 ±
	29	12 29	—	—	—	10.87	10.86	10.86
	30	11 30	—	—	10.14	10.64	10.40	10.48
	31	11 47	—	—	10.11	10.26	—	10.19
Juni	1	11 8	—	—	10.06	10.17	—	10.16
	3	11 30	—	10.14	9.97	10.25	10.31	10.17
	4	12 2	—	10.05	9.86	10.17	10.20	10.08
	8	12 51	—	—	9.61	—	9.99	9.80
	10	11 20	9.70	9.72	9.73	9.91	—	9.76
	12	11 56	9.67	9.58	9.56	9.73	—	9.64
	13	12 18	9.45	9.52	9.47	9.70	—	9.54
	16	12 12	9.41	9.37	9.53	—	—	9.44