

Коначан увод у бесконачност: како је Ахил стигао корњачу и још две приче

Предраг Пејовић

05.11.2025. 20:42:15

1 Увод

Овај текст је настао као последица разговора које је аутор текста водио са једним својим делимичним колегом и драгим пријатељем. Колега је професор, али је по образовању социолог, па смо често водили лингвистичке расправе у којима је аутор овог текста заступао ставове да је термин „друштвена наука“ оксиморон, док је термин „природна наука“ плеоназам. Поштовани колега је имао супротно мишљење. Феномен наших разговора је био у томе што се у процесу закључивања никада ни у чему нисмо слагали, али би се око закључка увек потпуно сложили. За разлику од саговорника, сматрам да је за тај феномен објашњење дала математичка логика, по којој двострука негација даје афирмацију, $\neg(\neg(A)) = A$. Додуше, у нашим разговорима је био већи број негација, али би на крају увек испао паран, а како смо причали без ограда онда се то може записати без заграда, на пример као $\neg\neg\neg\neg\neg\neg A = A$. Уосталом, за ово није потребна математичка логика, довољно је искуство из породичног живота где је потребно да паран број пута кажете „не“, па де буде протумачено као „да“. Зато вам и постављају иста питања паран број пута, мада се обично већ код првог парног броја (за неупућене то је 2) прогласи закључак, ефикасности ради. А боље је и „да“ у руци него „да“ на грани, нема потребе да неки неваљали непаран број поквари закључак.

У једном од бројних интервјуа које је мој пријатељ дао, а које ја углавном са задовољством слушам, све док не почне да се меша у науке (да не користим поменути плеоназам), као потпуно периферан појам се јавило питање бесконачности и наше схватање или несхватање тог појма. Јасно је да љубитељ математике, а посебно инфинитезималног рачуна, гледа на појам бесконачности другачије од оних који нису превелики љубитељи математике. Као особа склона математици, аутор овог текста се баш закачио за тај периферан појам, за бесконачност, иако је могао да се фокусира и на друге, актуелније, али сродне, теме из тог интервјуа, попут нашег европског пута. Различити људи различито виде шта је битно. И тако се овај текст бави појмом бесконачности у математици, онако како тај појам види корисник математике, инжењер. Мада, текст је и дубоко емоционалан, аутор воли математику и сматра да је њено изучавање и још више разумевање јако лепо, пријатно, важно, а уз то и забавно. Када читате историју математике упознаћете се са стварним личностима које су много необичније од ликова које књижевници могу да измисле.

На крају увода, ваља рећи да је циљ текста да забави читаоца макар делом онолико колико се аутор забавио пишући га. Математика је толико необична и забавна, као и математичари који су је откривали или стварали, како год да гледате на порекло математичких знања, да је био потребан заиста велик напор образовног система да огади математику ђацима. Аутор је склон мишљењу да је образовни систем у случају драгог колеге успео у свом великом подухвату. Конкретно, за такав трагичан исход аутор је

склон да оптужи трауму принудног писања мастилом на часовима математике, како је реализација наставе у датом случају захтевала. Да није било тога, ценећи пријатеља, мислим да би он постао изванредан математичар или макар велики и искрени љубитељ математике.

2 Трка Ахила и корњаче

Прву причу из овог текста је својим делима иницирао Зенон из Елеје [1]. Зенон је био филозоф, па је у оквиру своје струке налазио логичке доказе за разне физичке појаве, а за нашу причу су битни његови докази против кретања. Наиме, Зенон је сматрао да је кретање немогуће. Ружна чињеница да се кретао је била од мањег значаја. Уосталом, коме треба веровати, ружним чињеницама или својим лепим идејама? Један од примера аргумената против кретања је популарно приказан кроз трку Ахила [2] и корњаче [3].

Ахил је јунак из грчке митологије, из света идеја, снажан и брз. Корњача је спора. Како би њихова трка била по данашњим мерилима равноправна, корњачи је дата предност на почетку трке. Идеја коју је Зенон проповедао доказивала је да Ахил никада неће стићи корњачу. Размишљање је било једноставно: да би Ахил стигао корњачу мора прво да стигне на место у коме је она у датом тренутку времена. Док он стигне на то место, она ће му мало измаћи. И тако до бескраја, корњача ће увек измицати Ахилу, он је никада неће стићи. Пише ли то „до бескраја“? Да, бесконачност улази у нашу причу. Никада је неће стићи? До када је то никада? До бесконачности?

Решење овог проблема, квантитативно, ниво је другог разреда средње школе, такво је искуство аутора овог текста, тада је први пут чуо за Зенона и његове парадоксе, а тада је научио и сабирање геометријског реда. Оно што заиста јесте забавно је постављање приоритета. Пошто је и много млађој деци од другог разреда средње школе јасно да ће Ахил и стићи и престићи корњачу, то је експериментално искуство сваког човека, чак и споријег од митског Ахила, поставља се питање како је могуће да наведена аргументација буде третирана као доказ да је кретање немогуће, уместо да се постави питање где је пропуст у размишљању? Тако је то у науци, често дивну теорију сруши нека ружна чињеница. Ако решите да игноришете чињенице како би сачували веру у дивну теорију, то је проблем ваше перцепције реалности. Има и лекова и лекара за то, делимично ефикасних. Мада, има и мишљења по којима је веровање важније од чињеница.

2.1 Математички модел

Математички модел језиком математике, једначинама и квантитативно, описује појаву коју разматрамо. Физичку појаву пресликава у Платонов свет идеја [4]. Повољно је да математички модел разматраног процеса буде најједноставнији могући, али мора да буде довољно прецизан да опише појаву на потребном нивоу детаља, да се предвиђања математичког модела слажу са експерименталним резултатима. Математика треба да предвиди будућност. И то тачно. У супротном, решавање математичког модела неће донети никакав вредан резултат. Математичко моделовање захтева знање и разумевање код особе која математички модел прави, треба да исправно перципира реалност, природне појаве које преводи у језик математике како би их квантитативно анализирао и предвидео будућност. Често је математичко моделовање најкреативнији део решавања проблема, али и најтежи, посебно за људе којима је крајњи интелектуални домет спровођење алгоритама, рад по скупу правила која им је неко дао. Такви људи су често омиљени сарадници. Алгоритме данас спроводе машине, од настанка рачунара је тако. Тиме је омиљеним сарадницима опала популарност, али и тржишна вредност.

Наш математички модел, довољан за опис проблема, сматраће да се Ахил и корњача тркају дуж идеално правог пута на коме ће свако место бити одређено координатом x , бројем. Ахила и корњачу ћемо сматрати за материјалне тачке, занемарићемо физичке димензије великог Ахила и мале корњаче. Ни Ахил ни корњача нису материјалне тачке, а ни пут није идеално прав, али ћемо сматрати да њихову позицију у тренутку времена t карактерише координата једне тачке, $x_a(t)$ за Ахила и $x_k(t)$ за корњачу. Ово је довољно прецизан модел за потребе наше приче. Када кажете да вам треба још 20 километара до неког града не улазите у детаље колико до тог града треба предњем, а колико задњем бранику вашег аутомобила. Мада, има људи са истанчаним смислом за небитно који би на тој разлици инсистирали. На крају, кад трка почне, сматраћемо да се Ахил креће брзином v_a која се не мења, а корњача брзином v_k , која се такође не мења. Нити је Ахил одмах кренуо са v_a , него се убрзавао до v_a , а исто важи и за корњачу и њено v_k . Ипак, овај математички модел ће бити довољно добар да предвиди исход који нас занима, место сусрета Ахила и корњаче. Ако не верујете, измерите. Није битно што се ваш експериментални модел Ахила неће звати Ахил. И ово је процес математичког моделовања, апстракције и генерализације, да схватите да име тркача који је човек неће утицати на тренутак сусрета са безименом корњачом, већ брзина. Не може баш свако да лако раздвоји битно од небитног, зато се математичко моделовање учи.

Трка Ахила и корњаче почиње тако што је у $t = 0$ Ахил на координати $x_a = 0$, док је корњача, због равноправности учесника у трци, на координати $x_k = d$, где је d предност која је корњачи као споријој дата. Нека комисија је одлучила колико је d , није неки уставни или сличан суд дисквалификовао Ахила као бржег. Ко, зашто, како и када је одлучио колико је d нама је свеједно, битно је да корњача у почетку трке има предност d и да тај број некако знамо.

Математички модел који је овде описан речима се веома лако решава. Координата или позиција Ахила се у времену мења као

$$x_a(t) = v_a t \quad (1)$$

док је координата корњаче одређена као

$$x_k(t) = d + v_k t. \quad (2)$$

Постоји кинематика тачке која се предаје по школама различитог нивоа, тема ближа математици него физици.

Да ли описани математички модел каже све што нас занима? Да видимо прво шта овај математички модел каже за тренутак и место сусрета Ахила и корњаче.

2.2 Сусрет

Када ће Ахил стићи корњачу? У тренутку t_s и координати x_s када се Ахил и корњача по једначинама њиховог кретања нађу на истом месту, x_s ,

$$x_s = x_a(t_s) = x_k(t_s) \quad (3)$$

што даје једначину по тренутку сусрета t_s

$$v_a t_s = d + v_k t_s \quad (4)$$

који се из горње линеарне једначине са једном непознатом лако одређује као

$$t_s = \frac{d}{v_a - v_k}. \quad (5)$$

Замена тренутка $t = t_s$ у једначину кретања било Ахила било корњаче, у оба случаја даје исти резултат за x_s

$$x_s = \frac{v_a}{v_a - v_k} d. \quad (6)$$

Дакле, сазнали смо када и где ће Ахил сустићи корњачу. Па у чему је онда проблем?

Ова математика је тачно она коју је аутор овог текста написао у другом разреду средње школе на табли, на часу (марксистичке) филозофије када је тема био Зенон и његови парадокси. Овако решен математички модел нам говори све о кретању Ахила и корњаче. Искуство и експеримент кажу да ће се срести, тачно како решење и предвиђа, ко нормалан би помислио да Ахил неће стићи и престићи корњачу? Учило се то на физици још у основној школи, а обнављало у математички формалнијем облику, са уведеним координатним системом, у првом разреду средње школе. Тако се учило некада, а могло је и боље. Зачуђујуће, професорка филозофије је била изненађена решењем које одговара поделементарном знању физике и математике. Проблем је што различите области међусобно не комуницирају. Аутора овог текста је прича о Зенону заувек одвојила од филозофије као наставног предмета и усмерила ка математици и физици, што и није било тешко постићи.

2.3 Пут до сусрета

Ипак, да анализирамо Зенонове аргументе и сагледамо где је погрешио када је, иако покретан, тврдио да је кретање немогуће.

Како је Ахил стигао корњачу? Прво, морао је да стигне у тачку у којој је корњача била на почетку трке, означимо је са

$$x_1 = d. \quad (7)$$

Да би стигао до те тачке, Ахил треба да пређе растојање

$$\Delta x_1 = x_1 - 0 = d \quad (8)$$

јер му је полазна координата нула. Овако компликовано записивање је изабрано да би се увеле координате и сагледала правилност даљег развоја догађаја.

Да би прешао растојање Δx_1 Ахилу је потребно време

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_a} = \frac{d}{v_a}. \quad (9)$$

Тренутак времена у коме ће се Ахил наћи на месту на коме је претходно била корњача, то је x_1 , рачунато од почетка трке, је

$$t_1 = 0 + \Delta t_1 = \Delta t_1 = \frac{d}{v_a} \quad (10)$$

пошто трка почиње у $t = 0$. Опет компликовање да би се сагледала правилност даљих догађаја.

Док је Ахил пристизао у тачку x_1 , корњача није стајала, већ му је измакла за

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = v_k \Delta t_1 = \frac{v_k}{v_a} d. \quad (11)$$

Одавде се добија друга тачка у коју Ахил мора да стигне пре него што ће престићи корњачу, то је

$$x_2 = x_1 + \Delta x_2 = d + v_k \Delta t_1 = d + \frac{v_k}{v_a} d = d \left(1 + \frac{v_k}{v_a} \right) \quad (12)$$

Да би од тачке x_1 Ахил стигао до тачке x_2 потребно му је време

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_a} = \frac{v_k}{v_a^2} d = \frac{v_k}{v_a} \Delta t_1 \quad (13)$$

које одређује тренутак другог доласка Ахила у претходну позицију корњаче

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = \Delta t_1 + \frac{v_k}{v_a} \Delta t_1 = \Delta t_1 \left(1 + \frac{v_k}{v_a} \right) = \frac{d}{v_a} \left(1 + \frac{v_k}{v_a} \right) \quad (14)$$

Међутим, корњача и даље не мирује, током Δt_2 је побегла Ахилу за додатних

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = v_k \Delta t_2 = \frac{v_k^2}{v_a^2} d \quad (15)$$

а тиме је и поставила нову координату у коју ће Ахил морати да стигне не би ли је прстигао,

$$x_3 = d \left(1 + \frac{v_k}{v_a} + \frac{v_k^2}{v_a^2} \right) \quad (16)$$

Да би стигао у новозадату тачку, Ахилу је потребно време

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta x_3}{v_a} = \frac{v_k^2}{v_a^3} d \quad (17)$$

и он ће се у тој тачки наћи

$$t_3 = \frac{d}{v_a} \left(1 + \frac{v_k}{v_a} + \frac{v_k^2}{v_a^2} \right) \quad (18)$$

од почетка трке.

Наш проблем већ постаје досадан. Уочава се правилност. Да би Ахил прешао растојање Δx_n како би дошао на место на коме је корњача претходно била, Ахилу је потребно време

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{v_a}. \quad (19)$$

За то време, корњача побегне за

$$\Delta x_{n+1} = v_k \Delta t_n. \quad (20)$$

Одавде је, када из претходне две једначине елиминишемо Δt_n добија се

$$\Delta x_{n+1} = \frac{v_k}{v_a} \Delta x_n \quad (21)$$

а то важи за $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ до бесконачности (математичари ово воле да напишу као $n \in \mathbb{N}$), а почели смо са

$$\Delta x_1 = d. \quad (22)$$

Даље се трка одвија сама по себи:

$$\Delta x_2 = \frac{v_k}{v_a} \Delta x_1 = \frac{v_k}{v_a} d \quad (23)$$

$$\Delta x_3 = \frac{v_k}{v_a} \Delta x_2 = \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^2 d \quad (24)$$

$$\Delta x_4 = \frac{v_k}{v_a} \Delta x_3 = \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^3 d \quad (25)$$

Табела 1: Места на којима је корњача била и на која је Ахил стизао.

време	Ахил	корњача
$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$x_1 = d$
t_1	x_1	x_2
t_2	x_2	x_3
t_3	x_3	x_4
\vdots	\vdots	\vdots

или по уоченој правилности у општем облику

$$\Delta x_n = \frac{v_k}{v_a} \Delta x_{n-1} = \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^{n-1} d \quad (26)$$

је растојање за које корњача бежи Ахилу, а он је стиже за

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{v_a} = \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^{n-1} \frac{d}{v_a}. \quad (27)$$

Сваки пут ће Ахил стићи у тачку у којој је претходно била корњача, а она ће му увек измаћи. Управо то је и основ Зеноновог парадокса који указује да Ахил никада неће стићи корњачу, сваки пут она помало измакне. Додуше, квантитативна анализа која узима у обзир чињеницу да је Ахил бржи од корњаче, $v_a > v_k$, указује да је сваки пут корњача побегла све мање, $\Delta x_1 > \Delta x_2 > \Delta x_3 \dots$, као и да је Ахилу сваки пут било потребно све мање времена да се нађе на месту где је она раније била, $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 \dots$. Ахил ипак сустиже корњачу. Хоће ли је коначно стићи или ће му она заувек (до бесконачности) бежати? Да би одговорили на ово питање, мораћемо из домена физике прећи у домен математике, мада им је граница прилично замагљена, као да су у Шенгенској зони. Већ до сада смо имали мало физике и пуно математике, ако уопште може да се раздвоји шта је математика, а шта физика.

2.4 Трка се наставља ...

У претходном одељку смо направили квантитативни математички модел долазака Ахила на место на коме је корњача претходно била. Увели смо тренутке t_n у којима Ахил долази на место x_n на коме је корњача претходно била, како је приказано у табели 1. Када би Ахил стигао у x_n корњача би већ побегла у x_{n+1} , као што се и види из табеле 1.

Претпоставимо да пратимо кретање Ахила, једноставнији су му индекси, у кораку n нашег модела он је у тренутку t_n на координати x_n . Знамо да је

$$t_n = 0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots + \Delta t_n \quad (28)$$

што математичари воле да пишу као

$$t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad (29)$$

и да је

$$x_n = 0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n \quad (30)$$

што математичари воле да пишу као

$$x_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i. \quad (31)$$

Заменимо сада резултате из претходног одељка, па из (27) добијамо

$$t_n = \frac{d}{v_a} \left(1 + \frac{v_k}{v_a} + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^{n-1} \right) \quad (32)$$

док из (26) добијамо

$$x_n = d \left(1 + \frac{v_k}{v_a} + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^{n-1} \right). \quad (33)$$

Опет је презентација резултата важна, да се лако уочи да у једначинама (32) и (33) постоји бар један заједнички члан, збир у загради. Тај збир је тема која се опет проучавала у другом разреду средње школе, зове се геометријски ред [5] и његов збир се може написати у једноставнијем облику, а како ће се показати тај облик ће нам пуно тога рећи о бесконачности. Стога, сада ваља освежити знање средњошколске математике, тема је сабирање геометријског реда.

2.5 Сабирање геометријског реда

Претходно поменути геометријски ред, „оно у загради“ у једначинама (32) и (33) ћемо звати S_n , што ћемо дефинисати као

$$S_n = 1 + \frac{v_k}{v_a} + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_k}{v_a} \right)^i. \quad (34)$$

Индекс n у S_n треба да нам означи до ког n се сабирање врши, то може бити 5, 10, 1000, више милијарди, или више милиона милијарди. У принципу исто, али у пракси врло различито. У свету идеја исто, али у физичком свету веома различито.

Ипак, да поједноставимо запис још мало, стално нам се јавља $\frac{v_k}{v_a}$, па је згодно да тај однос који је неки број означимо једноставније, са

$$q = \frac{v_k}{v_a}. \quad (35)$$

Како су брзине и Ахила и корњаче позитивне, нико не трчи уназад, те како је Ахил бржи од корњаче, што се у математици каже $v_a > v_k$, важиће

$$0 < q < 1. \quad (36)$$

Сада наш збир (34) добија једноставнији запис

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i \quad (37)$$

који ће нам олакшати сабирање које би било јако незгодно за велике бројеве n .

Сада је време да уведемо типичан математички трик који је свима очигледан онда када им га неко покаже, током чега се прави важан и јако паметан, чиме додатно одбија ученике од математике. Прво помножимо (37) са q , па добијамо

$$q S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n. \quad (38)$$

Па шта са тим? Полако, одузмите га од (37) и десиће се чудо, јако добра ствар

$$S_n - q S_n = 1 - q^n \quad (39)$$

сви чланови редова (37) и (38) ће да се потру (или како се то популарно каже „да се пократе“) осим два! Остало је још само да одредимо S_n , за то је потребно решити линеарну једначину са једном непознатом. Неки нижи разред основне школе, али треба идентификовати проблем када има више општих бројева, S_n који је непознат, док су q и n познати. Изражени у општим бројевима не разврставају се лако као познати или непознати ако нисте увежбани, не види се одмах. Без много напора добија се

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (40)$$

Тако смо уштедели пуно труда око сабирања. Све на шта нам број „сусрета“ n утиче је садржано у члану q^n и нигде више. Управо то ће нам бити важно.

2.6 Граница

Ако сте мислили да математика другог разреда средње школе стаје код сабирања геометријског реда, заборавили сте математику другог разреда средње школе баш на најужбудљивијем и најзанимљивијем месту, на месту где у нашу причу улази бесконачност.

Како је Чехов говорио [6], ако је наглашено у одељку 2.5, у једначини (36) да је $0 < q < 1$, ту чињеницу ваља искористити у некој једначини до краја текста. За почетак, слажемо ли се да је

$$1 > q > q^2 > q^3 > q^4 > q^5 > \dots > 0 \quad (41)$$

односно да са растом n број q^n опада, али да никада неће пасти испод нуле? То је један монотонно опадајући низ бројева, ограничен са доње стране. Да, па шта са тим, зашто је то важно? Зато што такав низ има граничну вредност, има лимес, како се то учило у поменутом другом разреду средње школе,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad (42)$$

Овако написано, без образложења, имаће ефекат који је математика другог разреда средње школе оставила на већину ученика: побегли су од математике главом без обзира. Да апсурд буде већи, баш на најзанимљивијем месту, на месту где су Лајбниц [7] и Њутн [8] отворили нове хоризонте математике увођењем бесконачности и инфинитезималног рачуна [9], баш на месту где је римски војник прекинуо научни рад Архимеда [10] који је јако близу стигао са својом применом метода исцрпљивања [11], не ученика него бројева. Управо је та грана математике, инфинитезимални рачун, који се данас популарно зове математичка анализа [12], нашла огромну примену у техници и битно утицала на свет у коме живимо. Ред је да поменемо и да је ране радове на тему метода исцрпљивања имао и Еуклид из Александрије [13], оснивач аксиоматске геометрије.

Шта је основа инфинитезималног рачуна? Управо оно што означава знак ∞ , а то је бесконачност [14] која је централна тема овог текста. Шта нам каже једначина (42)? Каже нам да ма како мали позитиван број ε изаберете, можете да одредите минималну вредност n за коју је $q^n < \varepsilon$. Вероватно желите да знате за које вредности n можете да смањите q^n испод ε , па да вам дам резултат, за

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log q}. \quad (43)$$

Успут, и логаритми су се некада учили у другом разреду средње школе, добро је било школство, мада увек може боље. Само одређивање n је била тема предмета Математичка анализа у трећем разреду, усмерено образовање, математичко-техничка струка, Математичка гимназија.

Табела 2: Ахилев пут и сусрет са корњачом.

време	Ахил	корњача
0	0	$x_1 = d$
t_1	x_1	x_2
t_2	x_2	x_3
t_3	x_3	x_4
\vdots	\vdots	\vdots
t_∞	x_∞	x_∞

Какво је практично значење горњих разматрања, какве везе имају са Ахилевим проблемом јурења корњаче? Знамо колико је S_n , каже нам то формула (40). Заменимо сада тај резултат у формуле за t_n и x_n , па добијемо

$$t_n = \frac{d}{v_a} S_n \quad (44)$$

и

$$x_n = d S_n \quad (45)$$

где су t_n и x_n тренутак и место на коме је Ахил n -ти пут стигао на место на коме је претходно била корњача. Колико ће се то пута догодити? Док се Ахил не умори, под претпоставком да је корњача спора али неуморна? Како повећавамо n тако се Ахил не умара превише, јер је q^n све мање и мање. Може ли n да буде бесконачно? Може, тада је q^n практично нула, $q^n \rightarrow 0$. Нама је то q^n само кварило резултат увођењем коначног броја долазака на место на коме је корњача била. Када бесконачно пута Ахил дође на то место он ће заиста сустићи корњачу. Оно што Зенон није знао је чињеница да збир бесконачно сабирака може да буде коначан, а баш тако је у нашем случају

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \quad (46)$$

па када се замени колико је q добија се

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{v_k}{v_a}} = \frac{v_a}{v_a - v_k}. \quad (47)$$

Коначно, за тренутак у коме Ахил стиже корњачу добијамо

$$t_\infty = \frac{d}{v_a} \frac{v_a}{v_a - v_k} = \frac{d}{v_a - v_k} \quad (48)$$

а то ће да се деси на месту

$$x_\infty = d \frac{v_a}{v_a - v_k}. \quad (49)$$

Дакле, Ахил ипак стиже корњачу, на коначном растојању од почетка трке, за коначно време од почетка трке. Да би је стигао, морао је бесконачно пута да прође кроз место на коме је корњача већ била. Тако су се Ахил и корњача коначно први пут срели након што је бесконачно пута Ахил прошао кроз њен траг.

Да завршимо сада табелу 1 са редом (у математици се то каже врста) који је фото финиш, а то је последњи ред у табели 2. На том месту је Ахил стигао корњачу. Крај.

Оно што Зенон из Елеје није знао је то да збир бесконачно бројева може да буде коначан. Нека вам уплаћују нулу на рачун у банци бесконачно пута и никада се нећете обогатити, тривијалан пример. Из незнања математике Зенон је закључио да је кретање немогуће, упркос чињеници да се кретао. Кретање је сматрао за привид, али није посумњао да је његово закључивање привид, да је погрешно. Помињана перцепција реалности.

2.7 Да ли је могло једноставније?

Сада је време за анализу и закључке. Имамо два приступа решењу проблема, један је плитак, средњошколски, дао је t_s (5) и x_s (6) у пар редова рачуна, други је дубокоуман, филозофски, дао је t_∞ (48) и x_∞ (49) путем кроз бесконачност, мада коначним. Увидом у резултате и њиховим поређењем се закључује да је

$$t_\infty = t_s = \frac{d}{v_a - v_k} \quad (50)$$

и

$$x_\infty = x_s = d \frac{v_a}{v_a - v_k}. \quad (51)$$

Дакле, резултати су исти. Један метод је био једноставан, други компликован, али филозофски, садржајан. Рекао нам је нешто о бесконачности. Видели смо да сабирање бесконачно бројева може да да коначан резултат, у шта многи не могу да поверују, иако је чињеница. Други разред средње школе, некада. Тадашњи ђаци су коментарисали „зашто једноставно кад може компликовано?“ Нису ни слутили каква будућност долази.

3 Геометрија, дијагонала квадрата: још једно јављање бесконачности у античкој Грчкој, опасно по живот

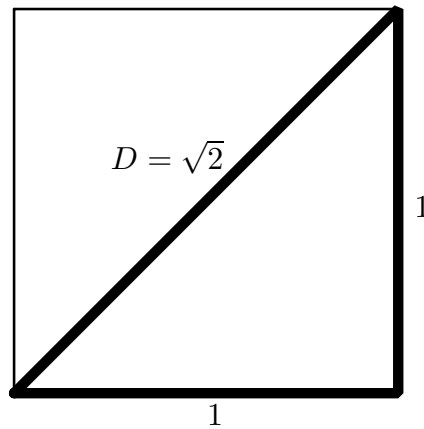
Када сагледамо претходни пример и видимо колико су грчки филозофи умели да закомпликују ствари, не чуди што су измислили демократију. Ипак, задржаћемо се у области математике и анализирати случај убиства Хипаса из Метапонта [15] за кога легенда каже да је био жртва верске нетолеранције питагорејаца [16].

3.1 Судбина једног математичара

Питагорејци су данас најпознатији по томе што су у зони културног утицаја западне цивилизације изумели вегетаријанство [17], док су мање познати по Питагориној теореми [18]. Обичаји питагорејаца попут [16]: „забрана једења боба, избегавање кретања главном улицом, избегавање стајања изнад одрезака властитих ноктију, избегавање остављања трагова лонца у пепелу, забрана седења на мерици за жито“ указују на склоност тог друштва ка математици. За нашу другу причу је од значаја математичка делатност верске заједнице питагорејаца који су веровали да је све број. Вероватно и јесте тако, економија то тврди, али постојао је проблем: питагорејци су знали само за целе бројеве и за разломке, односе целих бројева. Уз то, биће нам потребна и поменута Питагорина теорема [18].

У неким превазиђеним наставним програмима, о чему сведочи Бранислав Нушић у својој Аутобиографији [19], учило се „квадрат од хипотенузе, то зна свако дете, раван је квадратима од обе катете“. Данас се математика мање учи, а ова прича ће вам показати како математика може да буде опасна по живот, те је треба опрезно изучавати и у складу са могућностима избегавати. Од наслеђа питагорејаца у актуелном систему вредности ваља задржати вегетаријанство, такав је квалитет меса. И никако да не остављате трагове лонца у пепелу!

Опасно сазнање Питагорине теореме водило је Хипаса у пропаст, а да тога није био свестан. Хипас је замислио један квадрат приказан на слици 1. Квадрат је имао страницу чија је дужина била један, у неким јединицама неког мерног система који је у време питагорејаца био актуелан. Где је страница, ту је и дијагонала, приказана на слици 1. Хипас, као прави математичар, поставио је себи судбоносно питање: колико је



Слика 1: Квадрат, дијагонала и правоугли троугао.

дуга дијагонала? Зваћемо ту дужину D . Питагорина теорема која се односи на троугао са слике означен подебљаним линијама каже

$$D^2 = 1^2 + 1^2 = 2. \quad (52)$$

Хипас је исправно уочио правоугли троугао који чине дијагонала квадрата и две његове странице, исправно је применио теорему свог учитеља Питагоре и добио је

$$D = \sqrt{2}. \quad (53)$$

Овде би многи математичари стали сматрајући да је проблем решен. Вероватно би и Хипас стао да је знао куда ће га радозналост одвести, али није стао, па се питао који је то број D ? Цео број није, $D = 1$ је премало јер је $1^2 = 1$, $D = 2$ је превише јер је $2^2 = 4$. Наш тражени број D је ту негде, између 1 и 2, само га треба пронаћи. Да пробамо разломке? Нека је $D = \frac{a}{b}$. Данашњи математичари би ставили и додатну претпоставку, да су a и b узајамно прости, да немају заједничке чиниоце, а све како би разломак био у најједноставнијој форми, да се не може скраћивати. Дакле,

$$D^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}. \quad (54)$$

Ово значи да је a^2 паран број јер је

$$a^2 = 2b^2. \quad (55)$$

Када непаран број подигнете на квадрат, добијете непаран број, на пример $1^2 = 1$. Када паран број подигнете на квадрат, добијете паран број, на пример $2^2 = 4$. Како је a^2 паран број, онда је и a паран број, па се може написати као $a = 2c$. Ово нас даље води ка

$$a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \quad (56)$$

а ово се може лепо скратити са 2 на

$$2c^2 = b^2. \quad (57)$$

Дакле, b^2 је паран број, па и b мора бити паран број. Овде би данашњи математичари већ прекинули разматрање јер су дошли до контрадикције са полазним ставом да су a и b међусобно прости, а показали су да су оба броја парни, дакле имају заједнички фактор 2, полазна претпоставка нас води у контрадикцију. Ипак, ми ћемо истрајати и покушати да сагледамо какав би то разломак $\frac{a}{b}$ био.

Будимо упорни као Хипас, нека је b паран број, $b = 2d$. Куда нас то води? У проблеме, у бесконачне проблеме, буквално бесконачне. Дакле,

$$2c^2 = b^2 = (2d)^2 = 4d^2 \quad (58)$$

што се опет лепо скраћује са 2 на

$$c^2 = 2d^2 \quad (59)$$

из чега закључујемо да је и c паран број!

Даље знате, увешћемо e које ће показати да је d паран број, исто ће бити и за e , f , g , h , ... прича се понавља до бескраја. Потрошићемо сва слова која знамо, а свако ће представљати паран број. Дакле, наш разломак $D = \frac{a}{b}$ је однос два бесконачна броја који се бесконачно пута може скраћивати са два. Ово је заиста бесконачан проблем. А Хипасу је био више него бесконачан проблем, окончао му је живот. Може ли нешто бити веће од бесконачног? Сачекајте, видећете да може, постоје и мање и веће бесконачности.

Хипас своје сазнање није крио, ту је погрешно. Веровао је у демократски дијалог. Саопштио је своје откриће питагорејцима. Откриће да дужина дијагонале квадрата није разломак је била јерес која је ударила у саме темеље веровања да је све број. Питагорејци су антиципирали будућност: применили су средњовековне методе обрачуна са математичком реформацијом. Судећи по [20]: „Питагорејска секта је међу својим догмама имала да је свет у суштини математички и да се све у њему може представити односом бројева. Бројеви који се нису могли представити тако су по њима били ван ума (лат. ratio) односно ван памети, па их је неко тако и назвао, ирационални (грчки алогон, што додуше може значити и оно о чему не треба причати). Хипас је, изгледа, неком ван братства испричао о свом открићу. Побеснела браћа су га уљудно позвала на крстарење и на пучини бацили преко палубе.“ Тако је несрећни Хипас открио ирационалне бројеве и изгубио живот. Наружио је веру да је све број. Можда све и јесте број, али питагорејци нису знали за ирационалне бројеве, нису знали довољно математике да би подупрли своја уверења. Хипас је могао да им прошири видике, али јерес сазнања се не опрашта. Дужина дијагонале очигледно постоји, а карактерише је некакав број. Питагорејци нису знали какав. Цену њиховог незнања платио је Хипас. Указао им је на незнање. Неопростиво!

Утеха онима који су пали из математике јер нешто нису знали може да буде судбина математичара који је страдао јер је нешто сазнао. Ипак, наведени злочин против математике је тековина античких времена. Данас можете да откријете у математици било шта, никога то неће занимати, ни на фејсбуку, ни на инстаграму. Од значаја су само економске импликације математике. Дошло је до раздвајања математике и државе, а и математика није више што је некада била, веру су у математици потпуно потиснули сумња и докази. „O tempora, o mores!“ [21].

3.2 Колико је дугачка дијагонала квадрата?

Питање из овог наслова је крајње практично. Претпоставите да имате посао да направите заставу Шкотске [22] и да вам је неко бесплатно дао плаво платно за подлогу, а да треба да купите белу пантљику да извучете дијагонале. Како је Шкотска у питању, штеди се, нећете да купите више него што треба. Колико пантљике да купите за две или четири дијагонале, за једну или обе стране? Дакле, треба да знате колико је дуга дијагонала. Није баш квадрат, али слично је, математичке слободе. Проблеми сродни теми која је упропастила Хипаса имају практичну примену.

Дијагонала квадрата са слике 1 је $D = \sqrt{2} \approx 1.41$, али је само приближно тако. Програм GNU Octave ће вам рећи 1.414213562373095, али је и то само приближно. Програм Mathematica може да рачуна на колико год ви то хоћете цифара, може да каже 1.414213562373095048801688724209698078569671875377, али је и даље то само приближно.

Колико год да је велик коначан број децимала, то је и даље само приближно, нема краја, бесконачно је тих децимала. За потребе мерења пантљике, ако је застава метар са метар, приближна дијагонала од 141 cm маши за мање од пола сантиметра, дакле и за Шкотске појмове је довољно прецизна, неће се превише бацити. Штавише малко ће и да фали, али неће да се примети, идеално! Ипак, ако сте математичар ви тежите апсолутној истини, а она овде није коначна. Теорија ирационалних бројева је утемељена тек у деветнаестом веку [20]. Несрећни Хипас је поставио проблем који више од две хиљаде година није решен. Питагорејци су проблем бацили у море, заједно са Хипасом. Проблем је испливао, Хипас није. Страх од математике је оправдан! Неуништива је.

Дакле, колико је дуга дијагонала квадрата? Та дужина може да се представи децималним бројем, али тај број нема краја, има бесконачно децимала и те децимале никада не почињу да се периодично понављају, као у $\frac{1}{3} = 0.3333333333$ или у забавнијем примеру $0.9999999999 \dots = 3 \times \frac{1}{3} = 1$. Ово је све што нам овде треба од теорије ирационалних бројева. А то нам је потребно за следећу причу о још једном математичару који није имао среће, који је показао да нису све бесконачности исте, иако су бесконачне, који је створио дивну математику. Био је то Георг Кантор [23].

3.3 Каквих све бројева има?

У претходном одељку је описано како је Хипас открио ирационалне бројеве. Како се бројеви деле и каквих све бројева има? Шта су то ирационални бројеви, бројеви који ће бити главни јунаци и у следећем поглављу?

Подела бројева, попут подела живих бића у биологији, има много. У основној школи се прво деле на једноцифрене, двоцифрене, троцифрене ... Ипак, ова подела није нама значајна, основно својство тих првих бројева са којима се деца срећу јесте да су то природни бројеви. Природни бројеви се користе за бројање. Први природан број је 1, а сваки природан број за 1 већи од неког природног броја је опет природан број. Даље знате, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Докле тако? До бесконачности. Бесконачности? Да, нема краја, можете да бројите колико год хоћете или можете. Граматика има и појам „редни број“ и ставља им тачку на крај, као одликовање. То је природан број који служи баш за бројање, додељује се неком објекту, попут ученика који је трећи по висини у разреду. Дакле, то су и даље природни бројеви, па нека их граматика зове како хоће. А сада да направимо мали излет у Платонов свет идеја: да замислимо скуп свих природних бројева, све природне бројеве спаковане у неку фиоку. Тај скуп је у математици јако значајан, зове се скуп природних бројева и означава се са \mathbb{N} . А колико има природних бројева? Бесконачно, али ту бесконачност уместо уобичајеног знака за бесконачност ∞ у данашње доба означавамо са \aleph_0 , што се чита „алеф нула“. За сада изгледа небитно, али су књиге о тој бесконачности писане, попут јако добре књиге „Мистерија алефа“ [24].

Следећи допринос врстама бројева, након природних бројева, дало је банкарство које је усавршило појам дуга. Тако су настали цели бројеви: то су природни бројеви, а уз њих и негативне вредности свих природних бројева и нула. Баш посебан проблем је био додавање нуле у бројеве [25]. Био је то велик напредак и ментални скок. Са друге стране, нула је антипод нашој теми, бесконачности, а као све супротности имају и заједничке особине. Скуп целих бројева је исто значајан, па се зато означава са \mathbb{Z} . Колико има целих бројева? Два пута колико природних и један више, да урачунамо и нулу? Дакле, $2\aleph_0 + 1$? Није баш сасвим тако, то јесте део приче, али није цела прича, за сада звучи логично. Још је рано да о томе причамо, али је и \aleph_0 нека врста броја, трансфинитни број. Са њима се рачуна другачије, много другачије, ...

Из канци банкара се враћамо питагорејцима, њихово „све је број“ је обухватало природне бројеве и њихове односе. Ти односи се данас популарно зову разломци, то су

односи два природна броја, $\frac{a}{b}$. Наравно, и они постоје као негативни, банкари су се одмах проширили и на разломљене дужнике. Додајте ту и нулу, али ти дугови и нула нису били у центру пажње питагорејаца, банкарство у то доба још није било развијено. Банкарство је тек у овом веку у пуном сјају дошло у Грчку да развије математичку мисао. Са тим искуством, изгледа да је Питагора на неки начин био у праву што га негативни бројеви нису привлачили. Они су се у пракси показали као опаснији од ирационалних бројева које је Хипас открио, али банке нико није смео да баца са палубе. Скуп свих рационалних бројева се обично означава са \mathbb{Q} . Колико има рационалних бројева? Природан у имениоцу, природан у бројиоцу, све могуће комбинације. Уз то, негативна верзија сваког разломка, па још и нула у бројиоцу, било који природан број у имениоцу. Дакле, $2\aleph_0^2 + \aleph_0$? Изгледа логично, али није баш сасвим тако, трансфинитни бројеви имају своје законе, они су виша класа. Иначе, рационалним бројевима је кумовала породица ирационалних бројева, о којима приче следе. Названи су „рационални“ да буду похваљени што нису ирационални.

Шта су сад поменути ирационални бројеви? Да би њих дефинисали, прво да видимо шта су то реални бројеви. Сетимо се питања дужине дијагонале квадрата и шкотске заставе. Има ли дијагонала квадрата дужину? Има је. Шта је карактерише? Неки број. Да ли је тај број реалан, да ли је та дужина реална? Јесте. Да ли исто важи и за страницу јединичног квадрата, са страницом дужине 1, који је Хипасу дошао главе? Да. Да ли је пола те странице опет реална дужина? Јесте. Све те дужине су реални бројеви. И природни бројеви, и разломци, и ирационални бројеви. Банкари су одмах проширили делатност, па су и негативне верзије ових бројева постали реални бројеви, све може бити дуг, а додата је и нула. Скуп реалних бројева се обично означава са \mathbb{R} . Колико има реалних бројева? Овде озбиљни проблеми озбиљно почињу. Зли језици тврде да је бројање ирационалних бројева математичара који се тиме бавио коштало рационалности. Ипак, далеко је отишао током тог бројања и открио је дивну математику. Био је то Георг Кантор [23].

Коначно, шта су то ирационални бројеви? То су реални бројеви који нису рационални. Звучи логично. Типични примери су $\sqrt{2}$ и π . Колико има ирационалних бројева? Више него рационалних, видећете. Па и овај закључак, да има више ирационалних од рационалних звучи рационално, чак и кад су бројеви у питању. Ипак, нису ни ирационални бројеви јединствена класа, има и код њих фракцијских борби. Постоји виша класа ирационалних бројева, трансцендентни бројеви, типичан пример је јако познат π , али и мање позната константа e , а има их још јако пуно. Штавише та виша класа је бројнија од ниже класе алгебарских ирационалних бројева. Навикли сте се да причамо о броју бројева, а знамо да их има бесконачно?

За причу о бесконачностима којом се овај текст бави, поменули смо довољно врста бројева. Ипак, није ред да не поменемо комплексне бројеве, чији се скуп означава са \mathbb{C} , који су посебно леп појам из Платоновог света идеја. Ти бројеви су по необичности надмашили чак и Хипасове ирационалне бројеве. Порекло воде из једног чудног броја, кога нема у до сада описаним врстама, а то је $\sqrt{-1}$. То делује као потпуна измишљотина јер нема реалног броја који дигнут на квадрат даје -1 . Тачно, зато је и измишљен имагинарни број i , име му само каже, који је дефинисан тако да је $i^2 = -1$. Ако мислите да је ово само плод маште доконих математичара који нема никакве везе са реалним светом, грешите страшно. Комплексни бројеви, који послују са i , имају јако велике примене, а од фундаменталног значаја су у анализи електричних кола наизменичне струје. Кад упалите светло знајте да је некада неко рачунао са комплексним бројевима како би вам то омогућио. Само, из својих разлога електроинжењери тај број не зову i него j , што је по форми (не)битно другачије, али значи исто. Комплексни бројеви су тек направили револуцију и невероватне резултате, од комплексне анализе [26] до Манделбротовог скупа [27]. Једна од невероватних особина комплексних бројева је да се они не могу уредити, код њих влада равноправност, не може се знати који је већи, а који је мањи. За сада банкари за њих нису показали велико

интересовање, макар не јавно, мада се сумња да у књигама често воде имагинарне бројеве. Из свог дуга изваде корен па тај дуг оде на имагинарну осу. Успут, колико има комплексних бројева?

Са комплексним бројевима се прича о бројевима не завршава. Толико овде, кога занима нека чита даље.

4 Како се мере бесконачности и још једна дијагонала

Ову необичну причу започећемо психологијом, а како то обично бива, започето на психологији завршава на психијатрији.

4.1 Како бројимо?

Да почнемо са психоанализом, у смислу да анализирамо бројање које је, неумњиво, психички процес, мада често има и мануелну компоненту. Замислите сада да чувате овце и да повремено треба да пребројите стадо које чувате, да видите бројно стање и проверите да ли вам је неки вук или неки комшија умањео имовину. У процесу бројања је битно да неку овцу не убројите више пута или да неку не прескочите. Како то да изведете? Једноставно, то и чобани знају: направите пресликавање стада које чувате на одговарајући подскуп скупа природних бројева. Да не компликујемо и не мистификујемо у духу најбоље традиције грчке филозофије коју су образовни систем и развој наставе математике неслућено усавршили, потребно је да некако поређате овце и доделите им бројеве: 1, 2, 3, ... Дакле, свака овца је добила свој број, редни број, а често кад бројите прстом, показним гестом, олакшавате себи процес додељивања бројева овцама, која је један, која је два, која је три ... Да генерализујемо: кад бројите неке објекте, било овце, било краве, било шрафове, сваком објекту доделите број, по реду, али од свих бројева за исход бројања је важан само један: последњи. Кад сте завршили бројање, тај последњи број је број објеката у вашем скупу, било то стадо оваца или кутија са шрафовима. Тај број је број елемената или кардинални број скупа, ако волите да мистификујете избором термина. Уопштавање и апстракција, за процес бројања била то овца или био то шраф, свеједно је, то је некакав објект, елемент скупа. Битно је да сваки објект бројите само једном, да му доделите тачно један природан број, по реду, повезали сте природан број и елемент вашег скупа који пребројавате. Објекте сте морали да поређате, да их организујете тако да знате који је први, који други, ... да би на крају био битан само последњи и број који му је додељен. Тако су природни бројеви по примени постали редни бројеви, а тим поводом им је наша граматика доделила тачке.

4.2 Бројање се наставља ...

Хајде да дубље уђемо у процес бројања. Имамо скуп оваца које чобан чува, нека их је на пример 11. Имамо подскуп скупа природних бројева који су мањи од 12, дакле то су бројеви $O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, то им је скуп, зове се O . Ако свакој овци успемо да доделимо тачно један број из скупа O ми смо их пребројали. Оваца има колико и бројева у скупу O , имају исти кардинални број. Тако чобан закључује да има 11 оваца. У најбољој традицији образовног система, бројање оваца је постало компликовано, да овако чобани уче никада овце пребројали не би. Срећом, не уче. Ипак, овај кратки увод садржи једну значајну идеју: ако имате два скупа и ако можете сваком елементу једног да доделите тачно један елемент другог, онда та два скупа имају исти број елемената. Изгледа очигледно, јасно, нормално? Сачекајте мало, само док бесконачност не уђе у причу.

Табела 3: Пребројавање парних бројева.

n	1	2	3	4	5	...
p	2	4	6	8	10	...

Претпоставимо сада да хоћете да пребројите парне бројеве, да видите колико их има. Парних бројева до 10 има 5, то су 2, 4, 6, 8, и 10. Природних бројева до 10 има тачно 10, природни бројеви броје сами себе. Колико парних бројева укупно има? Бесконачно. Природних? Бесконачно. Ако екстраполирамо закључивање из примера парних бројева до 10, парних бројева би било пола од бесконачно, али је и то опет бесконачно! У овом закључку се крије проблем који ће проширити видике математике на трансфинитне бројеве. Да ли пола скупа природних бројева има мање елемената од скупа природних бројева, да ли је пола од бесконачно мање од бесконачно или је свако бесконачно једнако бесконачно?

Вратимо се на Чехова, комплексни бројеви уведени у одељку 3.3 морају да буду искоришћени негде до краја текста. Сада је то место. Применимо исти метод: код комплексних бројева нисмо знали шта је $\sqrt{-1}$ па смо дефинисали $i = \sqrt{-1}$ и пратили куда нас то води даље, а одвело нас је јако далеко. Да кажемо да природних бројева има \aleph_0 , да тако назовемо тај број, па пратимо траг тог крштења и његов даљи животни пут.

Дакле, природних бројева сада има \aleph_0 , штагод то било. Ако у неком скупу сваком елементу одговара тачно један, један и само један природни број, ако можемо тај скуп да пребројавамо, онда он има исто елемената као и скуп природних бројева, то је уведени \aleph_0 . Да пробамо да пребројимо парне бројеве? Кога то занима? Има људи које то занима, неке људе занима чак и то да гледају утакмице па се нико не чуди. Да видимо шта ће да испадне? А испада нешто занимљиво. Сваком природном броју n одговара тачно један паран број p , веза је

$$p = 2n. \quad (60)$$

Са друге стране, сваком парном броју одговара тачно један природан број

$$n = \frac{p}{2} \quad (61)$$

како је то приказано у табели 3. Овим пребројасмо парне бројеве. Има их \aleph_0 , таман колико и природних бројева. Једно је бесконачно, пола од бесконачно је опет бесконачно, није сасвим логично, али није ни апсурдно.

Користећи исте методе и исту логику, закључићемо да исто колико природних и парних има и непарних бројева, а потом и целих бројева. За сада изгледа да су све бесконачности исте. Да пробамо са разломцима, они су дупло већи залогај. Два природна броја имају, један у имениоцу и један у бројиоцу. Има ли их \aleph_0^2 ? Или некако можемо да их пребројимо?

Рационални бројеви, а овде ћемо само позитивне рационалне бројеве разматрати, у духу питагорејаца, састоје се из два природна броја, имениоца и бројиоца, облика су $\frac{p}{q}$, где су p и q природни бројеви, то се отмено каже $p, q \in \mathbb{N}$. Ако хоћете да покријете баш све рационалне бројеве, пустите да је p цео број, $p \in \mathbb{Z}$, али то за ову причу сада није важно. Дакле, два природна броја дају разломак, па пошто је тако организоваћемо их у табелу каква је приказана у табели 4 лево. Изаберете p и q и добијете разломак, у врсти q и колони p се налази, у њиховом пресеку. Табела иде у два смера у бесконачност, на десно и на доле. Можемо ли како разломке да пребројимо? Да би их избројали, потребно је да их на неки начин поређамо тако да код бројања ниједан разломак не пребројимо више пута, као и да не прескочимо неки од њих. Па, како да бројимо? Редом! Нумерисање разломака можемо да изведемо како је приказано у табели 4 десно, бројањем по дијагоналама. Погледајте

Табела 4: Пребројавање рационалних бројева.

$q \setminus p$	1	2	3	4	...	$q \setminus p$	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$...	1	1	2	6	7	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$...	2	3	5	8	14	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$...	3	4	9	13	18	...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$...	4	10	12	19	25	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

како то иде, прва дијагонала има један разломак, $\frac{1}{1}$ који је нумерисан са 1, потом иде дијагонала од два члана, редни бројеви 2 и 3, потом дијагонала 4–5–6, потом 7–8–9–10 и тако даље. Избројасмо тако све позитивне разломке, испаде да и њих има \aleph_0 , а личило је на $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Још једно чудо аритметике трансфинитних бројева. Ако хоћете да убројите и све негативне рационалне бројеве, њих опет има $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Кад саберете, опет испадне \aleph_0 . Онда још да додате све нула разломке, са нулом у бројиоцу и свим природним бројевима у имениоцу, а и њих има \aleph_0 . Кад све саберете, опет \aleph_0 .

Ова прича о бројању бесконачних скупова већ постаје досадна, шта год да бројите испадне \aleph_0 , иако нисте изборна комисија. Ако је скуп пребројив, ако се његови елементи могу поређати на неки начин, увек ће резултат бити \aleph_0 . Па постоји ли нешто што није пребројиво? Постоји!

4.3 Аритметика трансфинитних бројева

Пре него што уведемо бесконачније бесконачности у ову причу, а све како би се оправдали за чудне и наоко апсурдне резултате рачунања са \aleph_0 , добро је да се вратимо у прошлост и видимо да чудна математика са \aleph_0 није нешто чему сличног није било раније. Посматрајмо једноставну једначину

$$x^4 = 1. \quad (62)$$

Колико је x ? Зависи где га тражите. Ако решење тражите међу природним бројевима, имате само једно решење, $x = 1$. Ако пустите банке на тржиште решења, укључите макар целе бројеве, а може и рационалне и реалне, у било ком од ових скупова посматрана једначина има два решења, $x = 1$ и $x = -1$, банкарци вам увек нуде дуг као решење. Ако сте маштовитији и укључите скуп комплексних бројева као место где тражите решење, наћи ћете четири решења, 1 , -1 , i и $-i$, појављују се и два чисто имагинарна решења, честа у свакодневном животу.

Какве смо чудне резултате у рачуну са \aleph_0 до сада добили? Из бројања парних бројева смо добили

$$\frac{1}{2}x = x \quad (63)$$

што у скупу реалних бројева даје решење $x = 0$. Из бројања целих бројева би добили

$$2x + 1 = x \quad (64)$$

што у скупу реалних бројева даје решење $x = -1$. Из бројања позитивних рационалних бројева смо добили

$$x^2 = x \quad (65)$$

што у скупу реалних бројева даје решење $x = 0$.

Ако скуп бројева где тражите могуће решење проширите са \aleph_0 , све три претходне једначине добијају \aleph_0 као могуће решење. Тако је то у животу, што више могућности то више решења. Наравоученије је да чудна математика са \aleph_0 није нешто први пут виђено у математици. Људи који нису навикли на дуг су били једнако згрожени негативним бројевима као решењем.

4.4 Колико има реалних бројева

Досадашња разматрања су нам за величину бесконачног скупа давала увек \aleph_0 . Постоји ли неки „бесконачнији“ скуп? Одговор на ово питање је дао Георг Кантор, кога смо до сада само овлаш поменули, а баш он је увео кардиналне бројеве и \aleph_0 , баш он је открио или створио сву ову математику. Дакле, можемо ли да поређамо реалне бројеве у низ и да их нумеришемо, да знамо који је први, који други и тако даље, до бесконачности? Ако можемо, нас ће и даље пратити \aleph_0 као кардинални број скупа. Неће бити тако.

Бројеви којима се сада бавимо су „дужине“, реални бројеви попут свих целих бројева, рационалних бројева, али је скуп обogaћен и ирационалним бројевима, попут $\sqrt{2}$ због кога је Хипас изгубио главу. Баш због тих бројева не можемо реалне бројеве ређати као разломке, а морамо и да користимо децимални запис броја, где морамо да допустимо бесконачан број децималних места ...

Да би представили доказ који је на неки начин круна овог текста, проблем ћемо за почетак посматрати у једноставнијој форми, посматраћемо све реалне бројеве од нула до један, на интервалу $x \in (0, 1)$. Све реалне бројеве можемо покрити тим интервалом, већи од један су бројеви $\frac{1}{x}$, онда додамо негативне вредности $-x$ и $-\frac{1}{x}$, као и још три броја $\{-1, 0, 1\}$ и имамо их све. Дакле, интервал нам покрива практично четвртину проблема, а за бесконачности то је све, научио нас је томе \aleph_0 .

Претпоставимо да је могуће уредити бројеве $x \in (0, 1)$. Ти бројеви почињу са „0.“ и настављају се са пребројиво бесконачно много цифара, оне се могу уредити, зна се која је која иза децималне тачке. Дакле, у складу са претпоставком могуће је формирати „ранг листу“ реалних бројева каква је приказана у табели 5. И сада ступа на сцену Канторова генијалност, чувени дијагонални аргумент. Покушаћемо да измислимо број који мора да буде у посматраном подскупу реалних бројева, а који сигурно није на листи. Тај број ће бити специфичан, почињаће као и сви бројеви из листе са „0.“, а онда ће на месту прве цифре имати цифру која се разликује од прве цифре првог броја са листе. За други број исто тако, само ћемо сада заменити другу цифру. И тако даље, \aleph_0 пута, за сваку цифру. Тај поступак је илустрован у табели 5, а једноставности ради замена цифара је формализована, свака цифра која се мења је добијена увећањем за један, са тим што се цифра 9 коју када увећате за 1 добијате 10 мења цифром нула. То је инкрементирање по модулу 10, тако се то у математици зове. У програмском језику Python се то каже $x = (x + 1) \% 10$. Какав је тај број који смо добили? Различит је од било ког броја у табели, сигурно је различит бар по цифри чији је редни број једнак редном броју броја из табеле са којим се пореди. Он није у табели, а морао би бити у табели. Претпоставка о пребројивости скупа реалних бројева нас води у апсурд. Реалних бројева има превише, они се не могу пребројати. Ово је била прва бесконачност већа од \aleph_0 .

Колико реалних бројева има? Претпоставимо сада да немамо бесконачно цифара у разматрању, \aleph_0 , већ само коначан број, A_0 . На место сваке децималне цифре претендује 10 кандидата, од 0 до 9. Да извртимо све могућности, имамо 10^{A_0} бројева. Ако исту логику екстраполирамо на \aleph_0 , имаћемо 10^{\aleph_0} бројева у посматраном подскупу реалних бројева. Само, тај број више није \aleph_0 , већи је, дођосмо до веће бесконачности. Да украсимо још мало, бројеви су могли да буду и у бинарном запису, не зависи садржај текста од величине слова.

Табела 5: Дијагонални аргумент.

редни број	...	n	$n + 1$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n	0. ...	1	4 ...	
$n + 1$	0. ...	2	9 ...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
?	0. ...	2	0 ...	

Тада се још лакше цифре мењају, 0 постаје 1, а 1 постаје 0. Колико би тада било бројева који не могу да се поређају? 2^{\aleph_0} . И то је прва већа бесконачност коју је Георг Кантор успео да пронађе. Додајте на \aleph_0 било који број, добићете \aleph_0 . Помножите \aleph_0 било којим коначним бројем, добићете \aleph_0 . Помножите \aleph_0 са самим собом, дигните га на квадрат, опет је резултат \aleph_0 . Али, 2^{\aleph_0} је већа бесконачност, \aleph_1 . Да ли је то прва следећа бесконачност, питање је које је мучило Кантора, а решено је доста година после његовог одласка у бесконачност. Уз аксиом избора, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Ово је тема која је била планирана за следеће поглавље, али пошто је текст већ предуг, још једног веома специфичног математичара, Курта Гедела [28], ћемо оставити за неку следећу верзију овог текста ако икада буде написана, што рационално није у изгледу. Стога, ако вас тема занима, читајте даље сами, има шта да се прочита. Ако Курт Гедел не може да вас забави, насмеје и растужи, не знам ко може.

И где нас је довео Георг Кантор? Показао је да постоје различите бесконачности, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, бесконачност бесконачнија од \aleph_0 . Само, пазите се математичке индукције, неки разред средње школе, постоји и $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$ и тако даље, \aleph_0 пута. Има бесконачно различитих бесконачности, свака следећа већа од оне претходне, све бесконачнија. Ни бесконачност није што је некад била. Георг Кантор је то открио.

4.5 Пар речи о Георгу Кантору, судбина још једног математичара

Овде укратко изложена прича о трансфинитним бројевима и различитим нивоима бесконачности је везана за открића једног математичара, Георга Кантора. Открио је дивну математику. Наравно, ако откривате нешто ново нисте добродошли, поткопавате пирамиду ауторитета, па је био нападан од стране колега са свих страна, а предњачио је у нападима математичар склон банкарству Леополд Кронекер [29]. Завист је увек и свуда била ендемска болест академских кругова. Кантор је тешко подносио нападе колега. Ипак, судећи по [23]: „Оштре критике су праћене каснијим похвалама. Године 1904. Краљевско друштво га је наградило Силвестер медаљом, што је највиша част која се може доделити за математички рад. Претпоставља се да је Кантор веровао да га је његова теорија о трансфинитним бројевима повезивала са Богом. Дејвид Хилберт га је бранио од критика познатом изјавом „Нико нас не може протерати из раја који је Кантор створио“. “ Међутим, да цитирамо исти извор, [23]: „Кантор је патио од хроничне депресије до краја свог живота, због тога је у неколико наврата био изузет из наставе и више пута је био затваран у разним санаторијумима. Од једног универзитета у Шкотској је 1912. добио почасни докторат, али због болести није могао лично да преузме диплому. Пензионисао се 1913, живео је у сиромаштву, а једно време је био и неухрањен. Јавна прослава његовог 70. рођендана је била отказана због рата. Умро је 6. јануара 1918. у санаторијуму где

је провео последњу годину свог живота.“ Прошао је на неки начин боље од Архимеда и Хипаса, али не можемо рећи да је прошао добро. Прича о бројању започета у психологији завршила је на психијатрији. Нама је остала дивна математика коју је открио.

5 Закључак

Ово је била прича о Платоновом свету идеја. О свету који јако утиче на наше животе, а не примећујемо га јер није материјалан. Сваки пут када нешто бројимо, сваки пут када нешто рачунамо, сваки пут када нешто одбацимо као небитно у нашем моделу стварности, ми улазимо у свет идеја. У том свету постоји бесконачност. Она је омогућила Ахилу, јунаку из света идеја, да стигне корњачу. Она омогућава нама из материјалног света да стигнемо материјалне корњаче, ако немамо преча посла до да их јуримо. Она је дошла главе Хипасу јер је увидео да се разломак не може скраћивати бесконачно много пута са два, да то баш и није неки разломак. Она је омогућила Лајбницу и Њутну да изграде инфинитезимални рачун на коме сва данашња техника почива. Она је заинтересовала Георга Кантора да је проучава и омогућила му открије да има више различитих бесконачности, не само једна. Штавише, да има бесконачно много различитих бесконачности, свака бесконачнија од претходне. Кантора више нема, али нематеријалне идеје остају, не рђају, не труну, не кваре се.

Овај текст су иницирали шaljиви разговори двојице колега из потпуно различитих струка, са различитим погледом на математику, а још више од тога са различитим емотивним ставом према математици. Аутор је очекивао да ће текст завршити у веселом тону, како је и започео, да ће то бити још једна шала на рачун „непријатељске“ струке. Судбине Хипаса и историјски још ближег Кантора су радост поквариле. Открили су дивне ствари, а због тих открића су их колеге, у најбољем случају, одбациле. Да су мудро ћутали и бавили се свакодневним тривијалностима, вероватно би боље прошли. У том случају, свако од нас које то занима би морао да открива бесконачности за себе. Не би било дивова на чија рамена би могли да се попнемо како би видели даље.

Литература

- [1] Зенон из Елеје, Википедија, приступљено 23.10.2025.
- [2] Ахил, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [3] Корњача, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [4] Платонова теорија идеја, Википедија, приступљено 04.11.2025.
- [5] Геометријски ред, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [6] Чеховљева пушка, Википедија, приступљено 01.11.2025.
- [7] Готфрид Вилхелм Лајбниц, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [8] Исак Њутн, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [9] Математичка анализа, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [10] Архимед, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [11] Метод исцрпљивања, Википедија, приступљено 24.10.2025.

- [12] Математичка анализа, Википедија, приступљено 29.10.2025.
- [13] Еуклид, Википедија, приступљено 29.10.2025.
- [14] Бесконачност, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [15] Хипас из Метапонта, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [16] Питагорејци, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [17] Вегетаријанство, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [18] Питагорина теорема, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [19] Бранислав Нушић, Аутобиографија, приступљено 24.10.2025.
- [20] Ирационалан број, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [21] О tempora, о mores!, Википедија, приступљено 25.10.2025.
- [22] Застава Шкотске, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [23] Георг Кантор, Википедија, приступљено 24.10.2025.
- [24] Amir D. Aczel, *The mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the search for infinity*. Simon and Schuster, 2001.
- [25] Charles Seife, *Zero: The biography of a dangerous idea*. Penguin, 2000.
- [26] Комплексна анализа, Википедија, приступљено 30.10.2025.
- [27] Манделбровтов скуп, Википедија, приступљено 30.10.2025.
- [28] Курт Гедел, Википедија, приступљено 27.10.2025.
- [29] Леополд Кронекер, Википедија, приступљено 28.10.2025.