

**5. Über den Einfluß von Wänden
auf die Bewegung einer Kugel in einer
reibenden Flüssigkeit¹⁾;
von Rudolf Ladenburg.**

Fällt eine Kugel unter dem Einfluß der Schwere in einer reibenden Flüssigkeit, so ist nach einer Berechnung von G. G. Stokes²⁾ die Kugelgeschwindigkeit nur abhängig von dem Auftrieb und dem Radius der Kugel und der inneren Reibung der Flüssigkeit, vorausgesetzt, daß diese Geschwindigkeit genügend klein und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist. Praktisch kann eine solche Beziehung jedoch nur als erfüllt angesehen werden, wenn die Bewegung der Kugel weder durch benachbarte andere Kugeln gestört wird noch durch Wände, die die Flüssigkeit begrenzen. So zeigten Experimente³⁾ in zylindrischen, beiderseitig geschlossenen Gefäßen noch einen merklichen hemmenden Einfluß der Wände, als die Dimensionen der Gefäße die der Kugel um fast das 100fache übertrafen, und es schien mir deshalb wichtig, den Einfluß solcher Begrenzungen auch theoretisch zu berechnen.

Ich möchte auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Korn meinen aufrichtigen Dank sagen, der mir den Weg zur Ausrechnung zeigte und mich bei der Ausführung in liebenswürdigster Weise unterstützte.

Man kann den Einfluß beliebiger Flächen auf die Bewegung eines Körpers in einer reibenden Flüssigkeit nach H. A. Lorentz⁴⁾ durch Superposition der Zustände bestimmen,

1) Die Resultate vorliegender Arbeit sind zum Teil schon in der Münchner Dissertation des Verf. (Leipzig 1906) enthalten und bilden eine theoretische Ergänzung zu der Mitteilung des Verf. „Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck“ Ann. d. Phys. 23. p. 287. 1907.

2) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 8. p. 287; 9. p. 8. 1850.

3) R. Ladenburg, l. c.

4) H. A. Lorentz, Zittingsverl. Akad. van Wet. 5. p. 168. 1896; neu bearb.: „Abhandl. über theor. Phys.“ 1¹. p. 23 ff. 1906 (Teubners Verlag). Dieselbe Methode findet sich bereits bei G. G. Stokes, Cambr. Phil. Soc. 8. 1843.

die durch Reflexion („Zurückwerfung“) der ursprünglichen Bewegung an den Flächen und an dem Körper selbst entstehen. Sind die Dimensionen des Körpers unendlich klein und geht die Bewegung vom Körper selbst aus, so genügt¹⁾ die Kenntnis der ersten Reflexion von jenen Flächen; ist der Körper z. B. eine Kugel, so kann man¹⁾ aus der Geschwindigkeit, die infolge der ursprünglichen Bewegung und jener ersten Reflexion bei Abwesenheit der unendlich kleinen Kugel an ihrem Mittelpunkt herrschen würde, den Widerstand berechnen, den die Kugel bei ihrer Bewegung erfährt.

Bei der Bewegung einer Kugel in einer geschlossenen Röhre wäre also die Reflexion der für den unendlichen Raum geltenden Bewegung von einem begrenzten Zylinder zu berechnen; da ich hierbei auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieß, habe ich mich auf die Berechnung und Superposition der Geschwindigkeiten beschränken müssen, die durch Reflexion von einem unendlich langen Zylinder und von zwei unendlich ausgedehnten Ebenen entstehen, deren Abstand gleich der Röhrenlänge ist. Diese vereinfachenden Annahmen scheinen mir aber bereits eine beträchtliche Annäherung an die wahren Versuchsbedingungen zu liefern, da die Geschwindigkeiten, die die unendlich kleine Kugel hervorruft, auch in endlicher Entfernung unendlich klein¹⁾ sind.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen der stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit lauten²⁾, wenn man die Glieder vernachlässigt, die Quadrate oder Produkte von Geschwindigkeiten enthalten, und wenn keine äußeren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken:

$$(1) \quad k \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad k \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad k \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteile in Richtung der Koordinatenachsen X, Y, Z , k den Reibungskoeffizienten und p den Druck bedeuten und die Flüssigkeit

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

2) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorl. über Mechanik, 4. Aufl. p. 376 ff. 1897, oder H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

als unbegrenzt vorausgesetzt ist. Bewegt sich in dieser Flüssigkeit eine Kugel vom Radius R in Richtung der negativen Z -Achse mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a , so genügen den Differentialgleichungen (1) und (2), wenn der Mittelpunkt der Kugel Koordinatenanfangspunkt und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist, die Funktionen¹⁾:

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{xz}{E^5} - \frac{3}{4} a R \frac{xz}{E^3}, \\ v_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{yz}{E^5} - \frac{3}{4} a R \frac{yz}{E^3}, \\ w_1 = \frac{a R^3}{4} \left(\frac{3x^2}{E^5} - \frac{1}{E^3} \right) - \frac{3}{4} a R \left(\frac{x^2}{E^3} + \frac{1}{E} \right), \\ p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^3} + \text{konst.}, \end{cases}$$

wobei

$$E^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gesetzt ist.

Um nun zunächst die Reflexion dieser Bewegung von einem unendlich langen Zylinder zu berechnen, dessen Achse mit der Z -Achse zusammenfalle und dessen Querschnittsradius ϱ sei, führe ich in der XY -Ebene die Polarkoordinaten r und ϑ ein und setze

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt} = s.$$

Berücksichtige ich, daß in diesem Falle $d\vartheta/dt$ offenbar Null ist und setze noch zur Abkürzung für eine beliebige Funktion φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = D \varphi,$$

so wird

$$\Delta \varphi = D \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2},$$

und durch Vernachlässigung der Glieder mit R^3 in den Gleichungen (3) gehen die Gleichungen (1), (2) und (3) über in

$$(1a) \quad \begin{cases} Ds - \frac{s}{r^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ Dw = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2a) \quad \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{s}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

1) G. Kirchhoff, l. c., oder H. A. Lorentz, l. c.

$$(3a) \quad \begin{cases} s_1 = -\frac{3}{4} a R \frac{r z}{E^3}, \\ w_1 = -\frac{3}{4} a R \left(\frac{z^2}{E^3} + \frac{1}{E} \right), \\ p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^3} + \text{konst.}, \\ E^2 = r^2 + z^2. \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, neue Lösungen — im folgenden durch den Index 2 charakterisiert — der Differentialgleichungen (1a) und (2a) zu finden, die den Bedingungen genügen:

$$(4) \quad \begin{cases} (s_2)_{r=e} = -(s_1)_{r_i=e}, \\ (w_2)_{r=e} = -(w_1)_{r=e} \quad \text{und} \\ (s_2)_{z=\pm\infty} = (w_2)_{z=\pm\infty} = 0, \end{cases}$$

da dann offenbar der Zustand 2 die gesuchte, durch Reflexion an der Zylinderwand entstandene, Bewegung darstellt.

Zu diesem Zwecke führe ich die Besselschen oder Zylinderfunktionen erster und zweiter Art 0^{ter} Ordnung, $J(\Theta)$ und $K(\Theta)$, ein, die partielle Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$(5a) \quad \frac{d^2 z}{d\Theta^2} + \frac{1}{\Theta} \frac{dz}{d\Theta} + z = 0$$

sind und nach Heine¹⁾ darstellbar in der Form:

$$(5b) \quad J(\Theta) = 1 - \frac{\Theta^2}{2^2} + \frac{\Theta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\Theta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

und

$$(5c) \quad \begin{cases} K(\Theta) = -J(\Theta) \left(\ln \frac{\Theta}{2} + C \right) \\ - 2 \left[J_2(\Theta) - \frac{1}{2} J_4(\Theta) + \frac{1}{8} J_6(\Theta) - \dots \right]. \end{cases}$$

Hierbei sind $J_2, J_4 \dots$ die geraden Zylinderfunktionen erster Art höherer Ordnung und C , die sogenannte Gausssche²⁾ Konstante, hat den Wert³⁾

$$C = + 0,5772157.$$

1) Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1. p. 184 ff. und 2. p. 175. 1878.

2) K. F. Gauss, Ges. Werke III. p. 154, C hat den Wert von $-\psi_0$.

3) Heine (l. c.) schreibt zwar $-0,5772 \dots$, doch zeigt ein Vergleich mit der Originalliteratur (Gauss, l. c. und H. F. Weber, Borch.

Nun ergibt sich aus den Gleichungen (1a), daß

$$Dp = 0$$

ist; ist also p_2 der den Geschwindigkeiten s_2 und w_2 entsprechende Druck und λ eine von Null verschiedene Zahl, so kann man für p_2 den Ansatz machen:

$$p_2 = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin \lambda z J(i\lambda r) d\lambda,$$

wobei die Funktion $f(\lambda)$ noch näher zu bestimmen ist. Dann läßt sich zeigen¹⁾, daß die Gleichungen (1a) befriedigt werden durch die Funktionen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{r}{2} f(\lambda) J(i\lambda r) + G(\lambda) J'(i\lambda r) \right] \sin \lambda z d\lambda \\ \text{und} \\ w_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{ir}{2} f(\lambda) J'(i\lambda r) + H(\lambda) J(i\lambda r) \right] \cos \lambda z d\lambda; \end{array} \right.$$

hierin ist

$$J'(i\lambda r) \text{ für } \frac{\partial J(i\lambda r)}{\partial (i\lambda r)}$$

gesetzt und $G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ sind zunächst willkürliche Funktionen. Da aber s_2 und w_2 den zwei Bedingungsgleichungen (4) und der Kontinuitätsgleichung (2a) zu genügen haben, werden die drei Funktionen $f(\lambda)$, $G(\lambda)$ und $H(\lambda)$ eindeutig bestimmbar. Wie sich zeigen wird, genügt im vorliegenden Falle die Kenntnis von $H(\lambda)$, und aus jenen drei Gleichungen ergibt sich¹⁾, wenn man

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Journ. f. Math. 75. p. 85. 1878), daß C positiv ist. Bei imaginären Werten des Argumentes ist nach Heine (l. c.) in der Darstellung für $K(\Theta)$ der Ausdruck $\frac{\pi}{2} i J(\Theta)$ zu addieren, so daß i im Argumente des Logarithmus fortfällt.

1) Zur genaueren Durchführung der Rechnung vgl. die Dissertation des Verf. p. 79—90.

durch den Ausdruck¹⁾

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(i\lambda r) \cos \lambda z d\lambda$$

ersetzt,

$$(7) \quad H(\lambda) = \frac{3}{2} R a \left[\frac{K(i\lambda \varrho)}{J(i\lambda \varrho)} - \frac{1}{2} \frac{1 + 2 \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho} \frac{1}{J(i\lambda \varrho)}}{J^2(i\lambda \varrho) + J'^2(i\lambda \varrho) + 2 J(i\lambda \varrho) \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho}} \right].$$

Wie in der Einleitung auseinandergesetzt, handelt es sich nun lediglich um die Berechnung der Werte, die s_2 und w_2 bei Abwesenheit der Kugel am Kugelmittelpunkte, d. h. am Koordinatenanfangspunkte besitzen: für $r = z = 0$ folgt aus den Gleichungen (6)

$$(s_2) = 0, \\ (w_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H(\lambda) d\lambda = \frac{R}{\varrho} a \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(i\lambda \varrho) d(\varrho \lambda),$$

wenn ich die Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (7) abkürzend durch $\varphi(i\lambda \varrho)$ bezeichne.

Zur zahlenmäßigen Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \varphi(i\lambda \varrho) d(\varrho \lambda)$$

habe ich in meiner Dissertation²⁾ mit Benutzung der unendlichen Reihen (Gleichung (5b) und (5c)) die Werte von

$$J(i\lambda \varrho), \quad J'(i\lambda \varrho), \quad \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho} \quad \text{und} \quad K(i\lambda \varrho)$$

für gewisse, geeignet scheinende Werte des Argumentes berechnet, aus ihnen jedesmal $\varphi(i\lambda \varrho)$ zusammengesetzt und so das bestimmte Integral nach der Simpsonschen Regel ausgewertet. Bei der Zusammensetzung von $\varphi(i\lambda \varrho)$ ist jedoch ein Rechenfehler unterlaufen, so daß sich statt der in der Dissertation³⁾ gegebenen Zahlen der Wert von $\varphi(i\lambda \varrho)$

1) Vgl. Heine, l. c.

2) Dissertation des Verf. p. 124—126.

3) p. 126.

für	$\lambda \varrho = \frac{1}{3}$	zu	2,79
„	„	$= \frac{1}{4}$	„ 2,00
„	„	$= \frac{1}{2}$	„ 1,35
„	„	$= 1$	„ 0,67
„	„	$= 2$	„ 0,21
„	„	$= 4$	„ 0,014 ergibt,

und damit wird

$$\int_0^{\infty} \varphi(i \lambda \varrho) d(\varrho \lambda) = 2,45$$

und

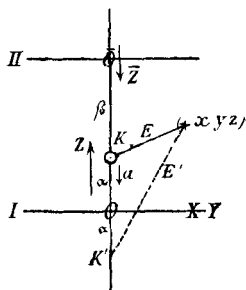
$$(w_2) = 2,4 \frac{R}{\varrho} a ;$$

d. h. unter dem Einfluß eines unendlich langen Zylinders vom Querschnittsradius ϱ würden sich die Flüssigkeitsteile am Mittelpunkt der Kugel mit der Geschwindigkeit $2,4 (R/\varrho) a$ in der der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung — die Kugelgeschwindigkeit war in Richtung der negativen Z -Achse vorausgesetzt (p. 449) — bewegen und die relative Geschwindigkeit zwischen Kugel und Flüssigkeit würde den Wert

$$a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right)$$

annehmen.

Um ferner den Einfluß zu berechnen, den zwei einander parallele, unendlich ausgedehnte Ebenen auf die Bewegung einer Kugel zwischen ihnen ausüben, kann man die Methode verwenden, die H. A. Lorentz¹⁾ zur Berechnung der „Zurückwerfung“ von einer senkrecht zur Kugelbewegung liegenden Ebene angegeben hat. Legt man die XY -Ebene in jene reflektierende Ebene, bezeichnet mit α den momentanen Abstand der Kugel von jener Ebene, mit E' die Entfernung eines Punktes (x, y, z) von demjenigen Punkte K' (vgl. Figur), der zum Kugelmittelpunkte K bezüglich der Ebene symmetrisch liegt und läßt wie bisher die Richtung der Kugelgeschwindig-



1) H. A. Lorentz, l. c.

keit mit der negativen Z -Richtung zusammenfallen, so erhält man für die allein in Betracht kommende z -Komponente der reflektierten Geschwindigkeit den Wert¹⁾

$$w_3 = \frac{3}{4} R a \left\{ \frac{1}{E'} + \frac{z^2 + \alpha^2}{E'^3} + \frac{6 \alpha z (z + \alpha)^2}{E'^5} \right\},$$

wobei

$$E'^2 = x^2 + y^2 + (z + \alpha)^2$$

ist, und diese Bewegung würde am Mittelpunkte der Kugel eine der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile von der Größe

$$(w_3)_{x=y=0 \atop z=\alpha} = \frac{9}{8} \frac{R}{\alpha} a$$

hervorrufen.

Befindet sich nun auf der anderen Seite der Kugel im Abstände β eine zweite Ebene (II), so würde diese offenbar am Kugelmittelpunkte zu einer Geschwindigkeit

$$(w_3)' = \frac{9}{8} \frac{R}{\beta} a,$$

als Reflexion der ursprünglichen Bewegung, Veranlassung geben.²⁾ Daneben ist aber offenbar auch die Zurückwerfung des Zustandes 3 von der Ebene II zu berücksichtigen. Um bei deren Berechnung die Lorentzsche Methode unmittelbar zu verwenden, habe ich die XY -Ebene in die Ebene II verlegt und die Richtung der Z -Achse umgedreht (\bar{Z} -Achse). Dann erhalte ich am Kugelmittelpunkte die reflektierte Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile

$$(\bar{v}_4) = \left(\frac{9}{8} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{9}{8} \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^3} \right) R a,$$

welche diesmal mit der Richtung der Kugelgeschwindigkeit zusammenfällt, also den Widerstand, den die Kugel erfährt, verkleinert. Derselbe Wert würde sich aus Symmetriegründen für die Zurückwerfung des Zustandes 3' von der Ebene I ergeben. Reflektiert man weiter die Bewegung 4 an der Ebene I,

1) Vgl. H. A. Lorentz, l. c. p. 40.

2) Daß sich die Kugel von dieser Ebene fortbewegt, ändert, wie die Rechnung von Lorentz zeigt, auch nichts an dem Vorzeichen der reflektierten Geschwindigkeit.

so erhält man an der Stelle des Kugelmittelpunktes die Geschwindigkeit:

$$(w_5) = \left(\frac{17}{18} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{19}{27} \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2} \right) R a$$

und denselben Wert offenbar für die entsprechende Reflexion an der Ebene II. Wie man sieht, werden die reflektierten Geschwindigkeiten allmählich kleiner, aber nicht von einer höheren Ordnung unendlich klein; doch genügt, wie sich zeigen wird, die durch die berechneten Reflexionen erreichte Genauigkeit.

Ich komme nun zur Bestimmung des Widerstandes. Bewegt sich die Kugel von einem Punkte

$$z = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\alpha + \beta),$$

wobei $\gamma > 1$, bis zu einem Punkte

$$z = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

in Richtung der negativen Z-Achse, so ist der mittlere Wert der durch die einzelnen Reflexionen hervorgerufenen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteile¹⁾, wenn man $\alpha + \beta = h$ setzt, infolge der ersten beiden Reflexionen:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h}{\gamma} \int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma} h} [(w_3) + (w_3')] dz &= \frac{\gamma}{\gamma-2} \frac{1}{h} \int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma} h} \frac{9}{8} R a \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{h-z} \right) dz \\ &= a \frac{R}{h} \frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1); \end{aligned}$$

infolge der ersten und zweiten Reflexionen

$$a \frac{R}{h} \left[\frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{3\gamma^2} \right],$$

und infolge der ersten, zweiten und dritten Reflexionen

$$a \frac{R}{h} \left[\frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{3\gamma^2} + \frac{70}{27} - \frac{38}{27} \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{3\gamma^2} \right].$$

Um diese Beträge wird also die Geschwindigkeit der Kugel relativ zur Flüssigkeit vergrößert und dementsprechend auch der Widerstand, den die Kugel erfährt.

1) Bei dieser Berechnung ist die durch Variation des Widerstandes bewirkte geringe Änderung der Kugelgeschwindigkeit vernachlässigt.

Um nun die Ergebnisse meiner Experimente¹⁾ mit dieser Berechnung zu vergleichen, ist hierin für γ 3,5 zu setzen, da die verwendeten Gefäße 24 cm lang waren und die Kugelgeschwindigkeit während der mittleren 10 cm beobachtet wurde. Aus obigen Formeln folgt dann für die Zusatzgeschwindigkeit

$$4,83 \frac{R}{h} a \quad \text{bez.} \quad 2,05 \frac{R}{h} a \quad \text{bez.} \quad 4,27 \frac{R}{h} a,$$

so daß sich der zu benutzende Wert durch geometrische Interpolation zu $3,3 (R/h) a$ ergibt. Berücksichtigt man noch die nächsten Reflexionen, so erhält man einen nicht merklich verschiedenen Wert, so daß in der Tat die hier gegebene Berechnung der drei Reflexionen ausreicht. Werden nur je 2,4 cm an den Enden der Gefäße von der Beobachtung ausgeschlossen²⁾, so ist $\gamma = 10$ zu setzen, und man erhält als Zusatzgeschwindigkeit als Mittel den Wert $4,5 (R/h) a$.

Fasse ich also nun den Einfluß des unendlich langen Zylinders und der zwei Ebenen zusammen, d. h. superponiere ich direkt die betreffenden Zusatzgeschwindigkeiten, so erhält der Widerstand³⁾, den die Kugel erleidet, statt

$$6\pi k R a$$

den Wert

$$6\pi k R a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right) \left(1 + 3,3 \frac{R}{h} \right),$$

und dieser Ausdruck gleich

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (s - \sigma)$$

— dem Auftrieb der unter dem Einfluß der Schwere fallenden Kugel — gesetzt, liefert an Stelle des „Stokesschen Gesetzes“

$$\bar{k} = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a}$$

die Gleichung

$$(8) \quad k = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right) \left(1 + 3,3 \frac{R}{h} \right)},$$

1) Dissertation des Verf. p. 55, Tab. IV b, die zur Berechnung der Reibungskoeffizienten p. 59 verwendet wurde.

2) Diesem Falle entsprechen die Resultate der Tab. IV a; da R/h im Mittel 0,005 ist, ergibt die Theorie, daß in diesem Falle die Kugelgeschwindigkeit im Mittel etwa 1 Proz. kleiner sein muß als in jenem, in Übereinstimmung mit den Experimenten.

3) H. A. Lorentz. l. c. p. 29.

die für einen oben und unten durch ebene Flächen begrenzten Zylinder vom Radius ϱ und der Höhe h gelten soll, falls die Kugelgeschwindigkeit a im mittleren Drittel der Röhre gemessen wird.

In der Tat werden nun meine experimentell erhaltenen Resultate durch diese Gleichung (8) befriedigend dargestellt: Folgende Tabelle enthält die aus jenen Fallversuchen abgeleiteten Werte des Reibungskoeffizienten (C.G.S.), berechnet nach der unkorrigierten Stokesschen Gleichung (\bar{k}) und nach der Gleichung (8) (k); die Dimensionen der verwendeten Kugeln und Röhren und die Werte der beobachteten Geschwindigkeiten finden sich in den zitierten Mitteilungen.

Tabelle.

$\frac{R}{\varrho}$	$\frac{R}{h}$	\bar{k}	k
$\frac{1}{11,1}$	$\frac{1}{121}$	1681	1348
$\frac{1}{14,7}$	$\frac{1}{160}$	1600	1346
$\frac{1}{20,0}$	$\frac{1}{121}$	1515	1318
$\frac{1}{22,2}$	$\frac{1}{241}$	1515	1349
$\frac{1}{26,6}$	$\frac{1}{160}$	1491	1340
$\frac{1}{29,4}$	$\frac{1}{320}$	1490	1362
$\frac{1}{35,3}$	$\frac{1}{121}$	1456	1328
$\frac{1}{40,1}$	$\frac{1}{241}$	1447	1344
$\frac{1}{46,9}$	$\frac{1}{160}$	1438	1338
$\frac{1}{53,0}$	$\frac{1}{320}$	1424	1349
$\frac{1}{70,7}$	$\frac{1}{241}$	1415	1348
$\frac{1}{93,5}$	$\frac{1}{320}$	1396	1347

Während die aus den Fallversuchen mit verschiedenen großen Kugeln und in verschiedenen weiten Gefäßen nach der Stokesschen Gleichung berechnete „Reibungskonstante“ zwischen 1681 und 1396 variiert, erhält man nach der neuen Gleichung (8) den nahe konstanten Wert

$$\begin{array}{r} 1343 \\ \pm 22, \end{array}$$

und nach der Poiseuilleschen Methode hatte sich für dieselbe Flüssigkeit

$$\begin{array}{r} 1325 \\ \pm 15 \end{array}$$

ergeben.

Cambridge, April 1907.

(Eingegangen 22. April 1907.)
