

# Proyecto Final: Modelos de Varianza Condicional: ARCH , GARCH , etc. - Series de Tiempo

Luis E. Ascencio G.

26 de mayo de 2022

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Heteroscedasticidad y Hechos Estilizados
- 3 Modelos ARCH
- 4 Modelos GARCH
- 5 Extensiones a modelos GARCH
  - Modelos IGARCH
  - Modelos Log-GARCH
  - Modelos Asimétricos
    - Modelos EGARCH
    - Log-GARCH Asimétricos
    - Modelos Threshold GARCH
- 6 Ejemplos y Aplicaciones
- 7 Bibliografía

# Introducción

## Antecedentes Históricos

los modelos de **Heteroscedasticidad** Condicional Autorregresivos o **Modelos de Varianza Condicional Variable Autoregresivos** que en la literatura se puede encontrar con las siglas **ARCH** (**Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**) y su generalización los modelos **GARCH** (**Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**), son un tipo de modelos propuestos por el economista **Robert Fry Engle III** quien fue galardonado con el premio Nobel de Economía en el 2003 ([Eng82]) (publicado en 1982) al cual le sucedió una tesis que dio lugar a un artículo de **Tim Bollerslev** ([Bol86]) que generalizó los modelos **ARCH** dando lugar a los modelos **GARCH**.

# Introducción

## Heteroscedasticidad

- 1 Las series de tiempo suelen tener un supuesto de **Homoscedasticidad** (Varianza constante)
- 2 Muchas series en la vida real no presentan **Homoscedasticidad**.
- 3 En series de tiempo financieras, economía, teoría de riesgo, etc... se presenta un comportamiento asociado a la **Heteroscedasticidad**.
- 4 La **Heteroscedasticidad** se puede caracterizar o definir a partir de lo que se conoce como *Condición de Heteroscedasticidad*:

$$Var(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots) \neq \text{Constante}.$$

# Introducción

## Hechos Estilizados

En la literatura se pueden encontrar muchos artículos y referencias asociadas a los **Hechos Estilizados**, la mayoría suelen citar a Benoit Mandelbrot [Man63] quien fue uno de los primeros en describir este tipo de fenómenos en su artículo **The Variation of Certain Speculative Prices**

### Definición

#### **Algunos Hechos Estilizados:**

- i) **No estacionariedad:** *Las trayectorias asociadas a series temporales financieras suelen estar muy cercanas a paseos aleatorios sin intersección.*
- ii) **Casi ausencia de autocorrelacion para las variaciones:** *Las series de tiempo financiera presentan variaciones pequeñas de autocorrelaciones, haciéndolas cercanas al ruido blanco.*
- iii) **Clusters de Volatilidad (Volatility Clustering):** *Valores grandes de retornos en valor absoluto aparecen en clusters. Dicho de otra formar, las series financieras presenta periodos de alta volatilidad y periodos de baja volatilidad.*

# Introducción

## Hechos Estilizados

### Definición

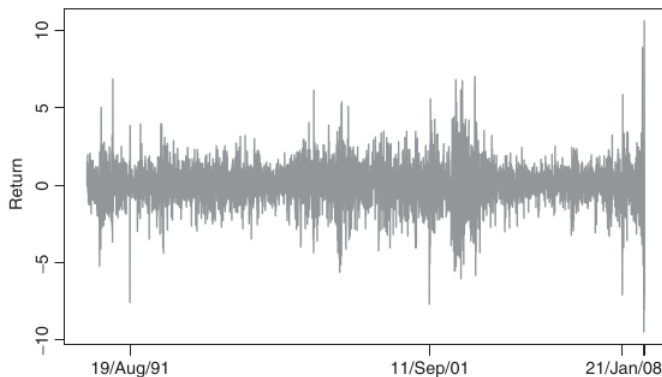
#### **Algunos Hechos Estilizados:**

- iv) **Distribución con Colas Pesadas:** Cuando se dibuja la distribución empírica asociada a los valores de una serie temporal se puede apreciar que su comportamiento no es sub gaussiana, es decir presenta colas más pesadas y una forma de cuantificarla es mediante la curtosis.
- v) **Autocorrelacion del cuadrado de los errores:** El cuadrado de los errores ( $\epsilon_t^2$ ) están fuertemente correlacionados, lo cual significa que las series financieras no son ruido blanco.
- vi) **Otros:** Hay otras propiedades que se comentan en la literatura, entre ellas esta la estacionalidad, es decir que las series de tiempo financieras son afectadas por fines de semana, fechas festivas y estaciones de años u otras tales como Leverage effects, Colas Pesadas aun Condicionando, Asimetria en tiempos de escala, lento decaimiento de la autocorrelacion, Aggregational Gaussianity.

Se pueden consultar las siguientes referencias [Con01] y [FZ10, Pagina 7,8 y 9].

# Introducción

## Hechos Estilizados



**Figure 1.2** CAC 40 returns (March 2, 1990 to October 15, 2008). August 19, 1991, Soviet Putsch attempt; September 11, 2001, fall of the Twin Towers; January 21, 2008, effect of the subprime mortgage crisis; October 6, 2008, effect of the financial crisis.

# Modelos ARCH (1)

## Definición

### **Modelo ARCH(1):**

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **ARCH(1)** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2$ .

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots \}$  y  $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ .

El modelo anterior captura algunas de las características presentes en lo que respecta a los **hechos estilizados** y la **Heteroscedasticidad**. Una representacion alternativa de  $\epsilon_t^2$  fue dada por Pantula, S.

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_1^i \prod_{j=1}^i \eta_{t-j}$$



# Modelos ARCH

## Propiedades

### Modelo ARCH(1):

- 1) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$  Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es estacionaria.
- 2) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1}) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{P}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2$  y  $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$ . Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es no correlacionada, sin embargo los  $\epsilon_t$ 's no son independientes.
- 3) La serie de tiempos  $\epsilon_t$  es **Leptocúrtica** pues  $\frac{\mathbb{E}(\epsilon_t^4)}{Var(\epsilon_t)^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} > 3$  es decir la distribución empírica de  $\epsilon_t$  tiene colas más pesadas que una distribución normal.
- 4) La serie de tiempos  $\epsilon_t^2$  satisface un modelo AR(1).

# Modelos ARCH( $q$ )

## Definición

### **Modelo ARCH( $q$ ):**

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **ARCH( $q$ )** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$ .

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots \}$  y  $\sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$  con  $\alpha_j > 0 \forall j$ .

# Modelos ARCH( $q$ )

## Propiedades

### Modelo ARCH( $q$ ):

- 1) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j}$ . Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es estacionaria.
- 2) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1}) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{P}_{t-1}) = \sigma_t^2$  y  $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$ . Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es no correlacionada.
- 3) Si la serie de tiempos  $\epsilon_t$  cumple  $1 - \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j\right)^2 > 1 - 3 \sum_{j=1}^q \alpha_j^2 > 0$  entonces  $\frac{\mathbb{E}(\epsilon_t^4)}{Var(\epsilon_t)^2} > 3$ , es **Leptocúrtica**, es decir la distribución empírica de  $\epsilon_t$  tiene colas más pesadas que una distribución normal.
- 4) La serie de tiempos  $\epsilon_t^2$  satisface un modelo AR( $q$ ).

# Modelos ARCH( $q$ )

## Propiedades

### ***Ventajas de modelos ARCH( $q$ ):***

- 1) *Los modelos ARCH presentan **Heteroscedasticidad**.*
- 2) *Permiten modelar la **Volatilidad**.*
- 3) *La distribución empírica de la serie tiene colas pesadas.*
- 4) *La serie  $(\epsilon_t)$  es estacionaria.*

## Propiedades

### ***Desventajas de modelos ARCH( $q$ ):***

- 1) *Los modelos ARCH son bastante restrictivos.*
- 2) *Efectos simétricos de los Shocks.*
- 3) *Poco parsimonioso, es decir se necesitan muchos retardos para capturar adecuadamente el comportamiento de un serie temporal.*

# Modelos GARCH(p,q)

## Definición

### Modelo GARCH(p,q):

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **GARCH(p,q)** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$ .

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots \}$  y  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$  con  $\beta_i, \alpha_j > 0 \forall i, j$ .

En términos de operador de **Lag L** podemos expresar

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 = \alpha_0 + B(\mathbf{L})\sigma_t^2 + A(\mathbf{L})\epsilon_t^2$$

con

$$B(\mathbf{L}) = \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{L}^i \quad y \quad A(\mathbf{L}) = \sum_{j=1}^q \alpha_j \mathbf{L}^j$$

# Modelos GARCH(p,q)

## Modelo ARCH( $\infty$ )

Una representacion alternativa de los modelos **Modelos GARCH** se da al considerar que  $1 - B(\mathbf{L})$  tiene un polinomio característico con todas sus raíces fuera del circulo unitario, con lo cual serian invertible en consecuencia tenemos el siguiente modelo **ARCH( $\infty$ )**.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + B(\mathbf{L})\sigma_t^2 + A(\mathbf{L})\epsilon_t^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_t^2 = (1 - B(\mathbf{L}))^{-1}(\alpha_0 + A(\mathbf{L})\epsilon_t^2)$$

# Modelos GARCH(p,q)

## Propiedades

### Modelo GARCH(p,q):

- 1) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$  y  $Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-B(1)-A(1)}$ . Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es estacionaria.
- 2) La serie de tiempo  $\epsilon_t$  cumple que  $\mathbb{E}(\epsilon_t|\mathcal{P}_{t-1}) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_s) = 0$  y  $\mathbb{E}(\epsilon_t^2|\mathcal{P}_{t-1}) = \sigma_t^2$ . Es decir la serie temporal  $\epsilon_t$  es no correlacionada.
- 3) La serie de tiempos  $\epsilon_t^2$  satisface un modelo **ARMA(r,p)** con  $r = \max\{p, q\}$ .

# Modelos GARCH(p,q)

## Demostración

Para el inciso (3), consideremos la siguiente variable aleatoria  $v_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$  de donde al despejar y expresar  $\sigma_t^2$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\epsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + v_t = \alpha_0 + B(\mathbf{L})\sigma_t^2 + A(\mathbf{L})\epsilon_t^2 + v_t \\ &= \alpha_0 + B(\mathbf{L})(\epsilon_t^2 - v_t) + A(\mathbf{L})\epsilon_t^2 + v_t \\ &= \alpha_0 + (B(\mathbf{L}) + A(\mathbf{L}))\epsilon_t^2 + (1 - B(\mathbf{L}))v_t\end{aligned}$$

De donde podemos notar que el operador  $(B(\mathbf{L}) + A(\mathbf{L}))$  es de orden  $r = \max\{p, q\}$  sobre el operador de **Lag**  $\mathbf{L}$  para la parte autoregresiva y para la parte de medias móviles tenemos que  $(1 - B(\mathbf{L}))$  es de orden  $p$ , de donde podemos concluir que  $\epsilon_t^2$  satisface un modelo **ARMA(r,p)** con errores  $v_t$ .

Finalmente notemos que si el operador  $B(\mathbf{L}) = 0$  entonces recuperamos un modelo **AR(q)** para el modelo **ARCH(q)** y en particular si  $q = 1$  verificamos la propiedad (4)-0.1





# Modelos GARCH(p,q)

## Propiedades

### ***Ventajas de modelos GARCH(q):***

- 1) *Los modelos GARCH presentan **Heteroscedasticidad**.*
- 2) *Permiten modelar la **volatilidad**.*
- 3) *La serie  $(\epsilon_t)$  es estacionaria.*

## Propiedades

### ***Desventajas de modelos GARCH(q):***

- 1) *Los modelos GARCH tienen restricciones.*
- 2) *Efectos simétricos de los Shocks.*
- 3) *Hay inconvenientes para garantizar la varianza condicional positiva y existencia de momentos de orden superior.*

# Modelos GARCH(p,q)

## Comentarios

- i) Engle en [Eng82] y [BH93] comentan en sus artículos que no existe una expresión para la **Kurtosis**, sin embargo en [FZ10] en el capítulo 2.4.1 se dan teoremas (algo técnicos) para la existencia de momentos de orden superior y en el capítulo 2.4.2 expresiones para la kurtosis.
- ii) En [FZ10] el teorema 2.4 en la página se dan condiciones necesarias y suficientes para la estacionariedad estricta para los modelos **GARCH** (se omiten aquí por ser demasiado técnicas).
- iii) La condición  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$  es suficiente para garantizar que la serie de tiempo  $\epsilon_t$  sea estacionaria de segundo orden. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [FZ10, Teorema 2.5, página 34].
- iv) En [Eng82] y [BH93] se sugiere que una estrategia adecuada para la estimación de parámetros para los modelos **GARCH** es mediante el método de **Quasi Maximum Likelihood**, sin embargo también es posible hacer uso del método de mínimos cuadrados para los modelos **ARCH**.
- v) El poder asociar a los modelos **GARCH** un modelo **ARMA** nos permite utilizar las herramientas desarrolladas para estos modelos para poder hacer predicciones, estimación de parámetros y pruebas de hipótesis, etc. permitiendo adaptar la Metodología de Box-Jenkins.

## Extensiones a modelos GARCH

Robert Engle comenta en [Eng04] que después del nacimiento de los modelos **ARCH** y **GARCH** han surgido un gran número de extensiones a los modelos, los cuales vienen casi acompañados con todas las letras del abecedario como AARCH, APARCH, FIGARCH, FIEGARCH, STARCH, SWARCH, GJR-GARCH, TARCH, MARCH, NARCH, SNPARCH, SPARCH, SQGARCH, CESGARCH, ComponentARCH, AsymmetricComponentARCH etc.

Existen algunas extensiones naturales que se pueden proponer a los modelos **GARCH**, sin embargo unas de las más populares son las que incorporan asimetrías entre las cuales están los modelos **EGARCH(Exponencial GARCH)** propuesto por Daniel B. Nelson en [Nel91], **Log-GARCH Asimétricos** propuesto varios autores o los modelos **TGARCH** propuestos por R. Rabemananjara y J. M. Zakoian [RZ93], estos modelos introducen ciertos términos al modelo **GARCH** o **Log-GARCH** para obtener un comportamiento asimétrico.

## Extensiones a modelos GARCH

Los modelos **IGARCH** son una extensión natural a los modelos **GARCH** es considerar la propiedad (3)-0.1 del modelo **GARCH** nos permite relacionar el modelo a un modelo **ARMA** considerando  $\epsilon_t^2$  y  $v_t$ .

$$\epsilon_t^2 = \alpha_0 + (B(\mathbf{L}) + A(\mathbf{L}))\epsilon_t^2 + (1 - B(\mathbf{L}))v_t \Rightarrow (1 - (B(\mathbf{L}) + A(\mathbf{L})))\epsilon_t^2 = (1 - B(\mathbf{L}))v_t$$

De donde el modelo **GARCH(p,q)** se relaciona a un modelo **ARMA(r,p)** con  $r = \max\{p, q\}$ , si el polinomio característico del operador  $(1 - (B(\mathbf{L}) + A(\mathbf{L})))$  tiene raíces unitarias entonces podemos asociar un modelo **ARIMA** al modelo **GARCH(p,q)**.

# Modelos Log-GARCH

Los modelos **Log-GARCH** fueron propuesto por John Geweke [Gew86], Milhøj, A. [Mil87] y Pantula, S. [Pan86] de manera independiente.

## Definición

### **Modelo Log-GARCH( $p, q$ ):**

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **Log-GARCH( $p, q$ )** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ln(\epsilon_{t-j}^2)$$

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots \}$ .

# Modelos Log-GARCH

Los modelos **Log-GARCH** presentan las siguientes características

- 1) Se garantiza volatilidad positiva, es decir  $\sigma_t > 0$ .
- 2) Los parámetros del modelo puede tomar cualquier valor  $\beta_i, \alpha_j, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ .
- 3) Invarianza bajo las transformaciones de potencia.
- 4) Los modelos **Log-GARCH** permiten una representación como modelo **ARMA**.

Para más información al respecto de estos modelos se pueden consultar las siguientes referencias [FWZ13], [Suc13] y [Suc18].

# Modelos EGARCH

## Definición

### **Modelo EGARCH(p,q):**

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **EGARCH(p,q)** si y sólo si

1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .

2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \alpha_j g(\eta_{t-j})$$

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots \}$  y la función  $g(*)$  es de la forma

$$g(\eta_{t-j}) = \theta \eta_{t-j} + \gamma [|\eta_{t-j}| - E[\eta_{t-j}]]$$

Con  $\alpha_0, \beta_i, \alpha_j, \theta, \gamma \in \mathbb{R}$  constantes.

# Modelos EGARCH

## Propiedades

### ***Propiedades Modelos EGARCH:***

1) *La volatilidad tiene la siguiente forma*

$$\sigma_t^2 = e^{\alpha_0} \prod_{i=1}^p \sigma_{t-i}^{2\beta_i} \prod_{j=1}^q \exp(\alpha_j g(\eta_{t-j}))$$

2) *La propiedad de asimetría depende de  $\theta$  y  $\gamma$ .*

3) *Admite una descripción como un modelo ARMA.*



# Modelos EGARCH

## Teorema

### **Estacionariedad de los Modelos EGARCH(p,q):**

Supongamos que  $g(\eta_t)$  es distinto a 0 casi seguramente y que los polinomios  $\alpha(z) = \sum_{j=1}^q \alpha_j z^j$  y  $\beta(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i z^i$  no tienen raíces en común, con  $\alpha(z) \neq 0$ . Entonces el modelo **EGARCH(p,q)** admite una solución estrictamente estacionario si y solo si las raíces del polinomio  $\beta(z)$  están fuera del círculo unitario. Esta solución es tal que  $E[\ln(\epsilon_t^2)]^2 < \infty$  siempre que  $E[\ln(\eta_t^2)]^2 < \infty$  y  $E[g^2(\eta_t)] < \infty$ . Si además,

$$\prod_{i=1}^{\infty} E \exp(|\lambda_i g(\eta_t)|) < \infty$$

Donde  $\lambda_i$  se define por  $\alpha(L)/\beta(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i$  entonces  $\epsilon_t$  es ruido blanco con varianza

$$E(\epsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = e^{\alpha_0^*} \prod_{i=1}^{\infty} g_{\eta}(\lambda_i)$$

Donde  $\alpha_0^* = \alpha_0/\beta(1)$  y  $g_{\eta}(x) = E[\exp(xg(\eta_t))]$ .

La demostración del teorema anterior se pueden consultar en [FZ10, Pagina 248] que corresponde a [FZ10, Teorema 10.1].

# Modelos EGARCH

## Teorema

### ***Momentos de los Modelos EGARCH(p,q):***

*Sea  $m$  un entero positivo. Bajo las condiciones del teorema 3.1 y si*

$$\mu_{2m} = E(\eta_t^{2m}) < \infty, \quad \prod_{i=1}^{\infty} E(\exp(|m\lambda_i g(\eta_t)|)) < \infty$$

*Entonces  $(\epsilon_t^2)$  tiene momentos de orden  $m$  dados por*

$$E(\epsilon_t^{2m}) = \mu_{2m} e^{m\alpha_0^*} \prod_{i=1}^{\infty} g_{\eta_t}(m\lambda_i)$$

Nuevamente la demostración del teorema se pueden consultar en [FZ10, Pagina 249] que corresponde a [FZ10, Teorema 10.2].

# Log-GARCH Asimétricos

## Definición

### **Modelo Log-GARCH( $p,q$ ) Asimétrico:**

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **Log-GARCH( $p,q$ )** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \mathbb{1}_{\epsilon_{t-j} > 0} + \alpha_j - \mathbb{1}_{\epsilon_{t-j} \leq 0}) \ln(\epsilon_{t-j}^2)$$

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots \}$ .

# Log-GARCH Asimétricos

Algunas de las propiedades del modelo **Log-GARCH Asimétrico** son

- 1) Sin restricciones sobre los valores de los parámetros del modelo.
- 2) Asimetrías que dependen de los coeficientes  $(\alpha_j + \mathbb{1}_{\epsilon_{t-j} > 0} + \alpha_j - \mathbb{1}_{\epsilon_{t-j} \leq 0})$ .
- 3) Invarianza bajo las transformaciones de potencia.
- 4) Los modelos **Log-GARCH Asimétrico** admiten una representación **ARMA**.

Respecto a las condiciones necesarias y suficientes para la estacionariedad y la existencia de momentos de orden superior para este modelo podemos consultar [FWZ13] donde se encuentran los teoremas y demostraciones respectivas.

# Modelos Threshold GARCH

Definamos

$$\epsilon_t^+ = \max(\epsilon_t, 0) \quad \epsilon_t^- = \min(\epsilon_t, 0)$$

Con lo que los los **Modelos Threshold GARCH** se definen como sigue

## Definición

**Modelos Threshold GARCH**( $p, q$ ):

Un proceso  $\epsilon_t$  sigue un modelo **Threshold GARCH** si y sólo si

- 1)  $\epsilon_t = \eta_t \sigma_t$ , tal que  $\eta_t \sim NID(0, 1)$ .
- 2)  $\epsilon_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ , dado que

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \epsilon_{t-j}^+ - \alpha_j - \epsilon_{t-j}^-)$$

Donde  $\mathcal{P}_{t-1} = \text{spam} \{ \epsilon_{t-1}, \sigma_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \sigma_{t-2}, \dots \}$ .

# Modelos Threshold GARCH

Una variante a los modelos **Threshold GARCH** son los modelos **GJR-GARCH** donde se considera

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \gamma_j \epsilon_{t-j}^2 \mathbb{1}_{\epsilon_{t-j} > 0})$$

# Series de Tiempo Financieras

## Definición

### **Log Return:**

Sea  $p_t$  el precio de un activo en el tiempo  $t$ , se definen los **log return** como

$$\epsilon_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}).$$

La serie  $\epsilon_t$  normalmente es muy parecida a la serie de tiempo de la variación de precios relativos

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$

Dado que  $\epsilon_t \approx \ln(1 + r_t)$ .

# Riesgo

- 1 En finanzas, el riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas.
- 2 El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros, ante movimientos adversos de los factores que determinan su precio.
- 3 A mayor incertidumbre mayor riesgo.
- 4 Existen distintos tipos de riesgos, **Riesgo de crédito**, **Riesgo de mercado**, **Riesgo operacional**, **Riesgo de liquidez** etc...
- 5 Una de las medidas de riesgo más populares en instituciones financieras son los **VaR (Value at Risk)** (Valor en Riesgo).
- 6 En 1993 el Banco JP Morgan publicito su método RiskMetrics para el calculo de **VaR** para un portafolio.



# Riesgo

- 1 Consideremos un portafolio cuyo valor en el tiempo  $t$  es  $V_t$ .
- 2 Considere un **Periodo o Horizonte** de tiempo, la perdida se denota como  $L_{t,t+h} = -(V_{t+h} - V_t)$
- 3 La distribución de  $L_{t,t+h}$  es conocida como **Distribución de Perdidas**(Condicional o no).
- 4 Se define el  $VaR$  de un activo financiero como el valor de perdida aceptable en el horizonte  $t$  con probabilidad  $\alpha$  como

$$\alpha = P(L_{t,t+h} \leq VaR_{t,h}) = 1 - P(L_{t,t+h} > VaR_{t,h})$$

- 5 Dado un nivel de confianza  $\alpha \in (0, 1)$  el VaR de un portafolio con nivel de confianza  $\alpha$  esta dado por

$$VaR_{t,h}(\alpha) = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L_{t,t+h} \leq l) \geq 1 - \alpha\}$$

# RiskMetrics

## Definición

Supongamos que  $L_t | \mathcal{P}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$  y considerando  $L_{t-1,t} = L_t$ , donde

$$L_t = \ln(p_t/p_{t-1}) = \eta_t \sigma_t$$

con

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \epsilon_{t-1}^2$$

Donde  $\lambda \in (0, 1)$ .

Como podemos notar este modelo se puede estudiar como un **IGARCH(1,1)**. Para más información al respecto de este modelo consultar [FZ10] Sección 12.3.3 Estimation Methods, RiskMetrics Model, pagina 334.



A. Bera and M. Higgins, "Arch models: Properties, estimation and testing," *Journal of Economic Surveys*, vol. 7, no. 4, pp. 305–366, Dec. 1993. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.1993.tb00170.x>



T. Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, apr 1986. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)



R. Cont, "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues," *Quantitative Finance*, vol. 1, no. 2, pp. 223–236, feb 2001. [Online]. Available: <http://rama.cont.perso.math.cnrs.fr/pdf/empirical.pdf>



R. F. Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation," *Econometrica*, vol. 50, no. 4, p. 987, jul 1982. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2307/1912773>



R. Engle, "Risk and volatility: Econometric models and financial practice," *American Economic Review*, vol. 94, no. 3, pp. 405–420, may 2004. [Online]. Available: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/0002828041464597>



C. Francq, O. Wintenberger, and J.-M. Zakoïan, "GARCH models without positivity constraints: Exponential or log GARCH?" *Journal of Econometrics*, vol. 177, no. 1, pp. 34–46, nov 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2013.05.004>



C. Francq and J.-M. Zakoian, *GARCH models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2010. [Online]. Available: <http://christian.francq140.free.fr/Christian-Francq/book-GARCH.html>



J. Geweke, "Commet," *Econometric Reviews*, vol. 5, no. 1, pp. 57–61, jan 1986. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/07474938608800097>



B. Mandelbrot, "The variation of certain speculative prices," *The Journal of Business*, vol. 36, no. 4, p. 394, jan 1963. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1086/294632>



A. Milhøj, "Multiplicative parametrization of arch models." *Research Report 101, University of Copenhagen: Institute of Statistics*, 1987.



D. B. Nelson, "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach," *Econometrica*, vol. 59, no. 2, p. 347, mar 1991. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2307/2938260>



S. Pantula, "Modelling the persistence of conditional variance: A comment," *Econometric Reviews* 5, 71–73., 1986.



R. Rabemananjara and J. M. Zakoian, "Threshold arch models and asymmetries in volatility," *Journal of Applied Econometrics*, vol. 8, no. 1, pp. 31–49, jan 1993. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x>



A. Sucarrat, Genaro y Escribano, "The power log-garch model," *UC3M Working papers. Economics we1013*, Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Economía., 2013. [Online]. Available:  
<https://ideas.repec.org/p/cte/werepe/we1013.html>



G. Sucarrat, "The log-garch model via arma representations," *BI Norwegian Business School*, 2018. [Online]. Available:  
[https://mpira.ub.uni-muenchen.de/100386/1/MPRA\\_paper\\_100386.pdf](https://mpira.ub.uni-muenchen.de/100386/1/MPRA_paper_100386.pdf)