

Обновление ‘tetrad’ и доказательство гипотезы Коллатца

E.Dyachenko

E-mail: dyachenko.eduard@gmail.com

20 сентября 2025 г.

Аннотация

В работе рассматривается обобщённый подход к исследованию динамики отображения $3x + 1$ (гипотеза Коллатца) с использованием авторской нотации и понятий, связанных с рациональными системами $\{p \sqcap q\}$. На их основании предложены рекуррентные преобразования базовой функции, алгоритмы для нечётных аргументов и методы композиции и декомпозиции траекторий.

Результаты оформлены в виде формальных доказательств, таблиц, алгоритмов и графических иллюстраций, что позволяет проследить взаимосвязь между теоретическими выкладками и наглядными представлениями.

Приземлённый анализ выполнен на примере числа 27, чья расчётная траектория полностью совпадает с последовательностью OEIS A008884 [13] и соответствует известному графу Collatz (рис. 5).

Полученные выводы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств отображений вида $kx + 1$ и их обобщений.

Также см. приложение [C] для определения ‘tetrad’ в пифагорейской традиции.

Содержание

1	Введение	2
2	Двоичное число и действия с ним	4
2.1	Представление двоичного числа	4
2.2	Определение сшивания	4
3	Преобразование Коллатца для двоично сшитых чисел	5
4	Эквивалентное преобразование функции	5
4.1	Ускоренное преобразование (только для нечётных)	6
5	Эквивалентное преобразование в накопительной модели	7
5.1	Накопительная схема	7
5.2	Двоичная интерпретация для накопительного преобразования и сшивания	7
6	Эквивалентность итераций	9
7	Эквивалентность накопительной и стандартной итераций	10
8	Оператор накопительной итерации	12
9	Позиционные записи числа	16
9.1	Вычитательная схема Хорнера и система $2 \sqcap 3$	16
9.2	Переход к системе $2 \sqcap 3$	16
9.3	Формула по модифицированному Хорнеру (H)	16
10	Система $\{2 \sqcap 3\}$, операции и убывающая мера	17
10.1	Базовые операции и их назначение	17
10.2	Элементарные числа и общая форма	18
10.3	Оператор Φ и каноническая форма	19
10.4	Убывающая мера и действие Φ	19
10.5	Достаточность конечной вложенной формы	20

Mathematics Subject Classification 2020: Primary 11B37, 11Y55; Secondary 37B99.

Key words and phrases: Collatz conjecture, pseudo-number systems, rational base numeration, continuous and discrete metrics

* Licence: Text is available under the Creative Commons NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

10.6	Примеры	20
10.6.1	Алгоритм получения v -разложения $A \in \mathbb{N}$ в виде суммы элементарных чисел	20
10.6.2	Пример: вход $A = 7$, выход $7_v = (11, 7, 4, 2, 1, 0)_v$	22
11	Система счисления $4 \sqcap 3$	22
11.1	Дробные позиции в системе q	24
11.2	Особые противоречия в системе q	25
11.3	Различие между потенциалом и позиционной длиной числа в системе q	26
12	Преобразование Φ в системе q	26
13	Расщепление шагов итерации в системе q	29
13.1	Масштаб и закреплённый остаток	29
13.2	Делитель $D(i)$	30
14	Преобразование потенциала оператором Φ	31
15	Потенциал и длина числа в системе q	31
16	Метрика L и её свойства	32
16.1	Отправная точка: анализ метрик длины в динамике преобразования Φ	34
16.2	Локально-глобальная интерпретация метрики L	34
16.3	Определение рамки и механика на масштабах	35
17	Длина числа в q при действии Φ	36
18	Определения для динамических понятий	36
19	Анализ поведения потенциала как функции	37
20	Сохранение длины L при преобразовании Φ	38
20.1	Переход к дискретной метрике и детерминированный дрейф	39
20.2	Формализация условия сохранения длины (дискретная метрика)	40
20.3	Предел свойства $4k + 3$	41
21	Теорема о достаточности, а также связь W_q и $(2 \sqcap 3)$ систем	43
22	Алгоритм преобразования от N_{10} до 1	45
23	Алгоритм преобразования	46
24	Пример работы алгоритма для числа 27	47
25	Заключительное следствие и критерий эквивалентности	49
26	Заключение	50
A	Позиционные записи в системе $4 \sqcap 3$	52
B	Шпаргалка: обратный ход в вычитательном представлении	54
C	Определение тетрады в пифагорейской традиции	55
D	Баланс сил: почти $8 \approx 9$	55

1 Введение

Базовая функция Коллатца определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3x+1}{2}, & x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad x \in \mathbb{N},$$

Текстовое описание операции Коллатца над произвольным положительным целым числом:

Если число чётное — разделите его на два. Если число нечётное — утройте его и прибавьте единицу.

Гипотеза Коллатца, или задача $3x + 1$, остаётся одной из самых известных нерешённых проблем элементарной математики. Её формулировка проста: начиная с любого натурального числа, если оно чётное — разделить его на два, если

нечётное — умножить на три и прибавить единицу, и повторять процесс, то, как предполагается, последовательность всегда достигает числа 1. Несмотря на кажущуюся тривиальность, эта задача на протяжении десятилетий привлекает внимание как профессиональных математиков, так и любителей, порождая множество подходов, обобщений и эвристических наблюдений.

В настоящей работе для построения однозначного рекурсивного преобразования Φ применяются рациональные системы счисления $\{p \sqcap q\}$. Такой формализм в системах $\{2 \sqcap 3\}$ и $\{4 \sqcap 3\}$, в сочетании с введением непрерывной и дискретной метрик длины, позволил получить рекуррентное преобразование, выделить ключевые структуры, выявить закономерности в поведении траекторий и — опираясь на строгие оценки отрицательного дрейфа в дискретной метрике — доказать их глобальную конечность. Отдельно подчеркнём, что в процессе был установлен и строго доказан *фундаментальный для теории чисел и смежных областей факт* полной представимости натуральных чисел в системе $\{2 \sqcap 3\}$, что имеет самостоятельную ценность.

Структура работы разбита на следующие блоки:

- разделы 3–9 — получение рекуррентного преобразования;
- разделы 10–16 — построение систем счисления и работа в них оператора Φ ;
- разделы 17–20 — определение и исследование метрик L и L_{disc} , вывод количественных оценок и теоремы о конечности траекторий;
- раздел 21 — доказательство эквивалентности каркасов как выполнение достаточных условий;
- разделы 23–24 — алгоритмы и их работа на известных примерах;
- заключение.

Remark 1.1 (Историческая справка о структуре работы). Построение настоящей теории шло не от заранее заданной схемы, а от поиска рабочего инструмента для описания траекторий. Первым шагом стало получение рекуррентной формулы, задающей эволюцию нечётной части числа. Уже на этом этапе была интуитивно выделена метрика M , однако она оказалась недостаточной для решения задачи в глобальном виде. Следующим естественным шагом стало переписывание рекурсии в позиционной форме — так возникла схема Горнера для системы $\{2 \sqcap 3\}$, позволившая разложить число на элементарные блоки. Лишь затем, в ходе анализа структуры этих блоков, был введён каркас $\{4 \sqcap 3\}$ и дискретные метрики длины, которые оказались более чувствительными к динамике и позволили формализовать ключевые свойства траекторий. Именно этот переход, подкреплённый строгим анализом в § 20, привёл к доказательству глобальной конечности траекторий, что и составляет основной результат работы.

Обозначения

$P(x)$ **Основная часть** двоичного числа — максимальная последовательность значащих битов, начинающаяся и заканчивающаяся на 1.

$R(x)$ **Хвост нулей** — все нули в конце двоичного представления, следующие за основной частью.

\sqcup Операция **сшивания** — объединение P с хвостом R .

$t(F)$ Показатель степени числа 2 в разложении $3F + 1$ для нечётного F .

t_i Сокращённая запись $t(F(i))$ — локальное число удалённых двоичных нулей на i -м шаге, то есть

$$t_i = v_2(3F(i) + 1).$$

$g(x, k)$ k -я итерация функции f : $g(x, 0) = x$, $g(x, k + 1) = f(g(x, k))$.

$F(x, i)$ Нечётная часть числа на i -м шаге ускоренного или накопительного преобразования.

$S(i)$ Состояние сшивания на шаге i : $S(i) := F(x, i) \sqcup R^{D(i)}$.

$k(i)$ Индекс нечётных членов траектории g :

$$k(i) = D(0) + \sum_{j=1}^i (1 + t(j)) = i + D(i).$$

Φ Оператор накопительной итерации:

$$\Phi(F, D) = \left(\frac{3F + 1}{2^{t(F)}}, D + t(F) \right).$$

$\Phi(i)$ Состояние $(F(x, i), D(i))$ на i -м шаге накопительной итерации.

[LOCK] Локальная нормировка по тождествам:

$$\frac{2^p}{3^q} = \frac{2^{p+1}}{3^{q+1}} + \frac{2^p}{3^{q+1}}, \quad -\frac{2^p}{3^q} = -\frac{2^{p+2}}{3^{q+1}} + \frac{2^p}{3^{q-1}}.$$

[SEAM] Операция «сшивания» двух нормированных записей с локальной нормировкой крайних блоков.

[UNSEAM] Обратная операция к [SEAM].

$E(i)$ Элементарный блок уровня i : $E(i) = \{\alpha(i), \beta(i)\}$, где $\alpha(i) = 2^{a(i)}$, $\beta(i) = 2^{b(i)}$.

A_v v -разложение числа A в виде суммы элементарных блоков.

ν Основание системы $2 \sqcap 3$: $\nu = \frac{1}{3}$.

q Основание системы $4 \sqcap 3$: $q = \frac{4}{3}$.

$\gamma(i)$ Цифра i -го разряда в системе q , принимает значения $\{0/3, 1/3, 2/3, 3/3\}$.

Разряд Позиция i в последовательности $\gamma(i)$, соответствующая множителю q^i .

Полуразряд Половина q -разряда, соответствующая множителю 2.

σ_q Сдвиг на один q -разряд вверх (добавляет два полуразряда).

σ_{fix} Фиксированный сдвиг в полуразрядах при смене масштаба ($\sigma_{\text{fix}} = +2$ для $q = \frac{4}{3}$).

A_q Позиционная запись числа A в системе q : $A_q = \sum_i \gamma(i) q^i$.

2 Двоичное число и действия с ним

2.1 Представление двоичного числа

Двоичное число можно представить в виде двух частей:

Основная часть (или фундаментальная часть) — максимальная последовательность значащих битов, начинающаяся и заканчивающаяся на 1. Обозначается $P(x)$.

Трейлинг нули — все нули в конце двоичного представления, которые следуют за основной частью. Обозначаются $R(x)$.

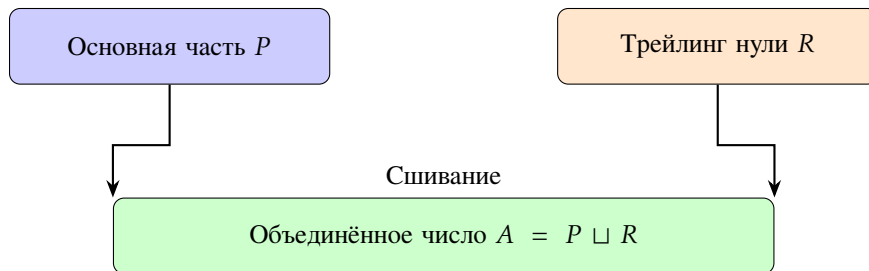
2.2 Определение сшивания

Сшивание — операция, при которой основная часть P дополняется хвостом нулей R , стоящих после неё в двоичной записи. Обозначается символом \sqcup :

$$A = P \sqcup R,$$

где:

- P — основная часть, начинающаяся и заканчивающаяся на 1.
- R — хвост нулей, следующий за P .



Примеры

1. $12_{10} = 1100_2: 11_2 \sqcup 00$ (основная часть P с хвостом R из двух нулей).
2. $20_{10} = 10100_2: 101_2 \sqcup 00$ (основная часть P с хвостом R из двух нулей).
3. $9_{10} = 1001_2: 1001_2$ (основная часть P без хвоста нулей R).
4. $8_{10} = 1000_2: 1_2 \sqcup 000$ (основная часть P с хвостом R из трёх нулей).

Theorem 2.1. Основная часть двоичного числа $P(x)$ всегда является нечётным числом.

Доказательство. Пусть N — натуральное число с двоичной записью $N = b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0$, где b_i — биты числа. По определению, $P(x)$ — это максимальная последовательность значащих битов, начинающаяся и заканчивающаяся на 1. В двоичной системе число нечётно тогда и только тогда, когда его последний бит равен 1. Так как P по определению оканчивается на 1, оно всегда нечётно. \square

3 Преобразование Коллатца для двоично сшитых чисел

Пусть натуральное число N представлено в виде

$$N = P \sqcup R \iff N = P \cdot 2^r,$$

где:

- P — **основная часть** (нечётное число, двоичная запись начинается и заканчивается на 1);
- R — **трейлинг нули**, длина $r = |R|$.

Чётный шаг ($r \geq 1$). Если N чётно:

$$f(N) = \frac{N}{2} = P \cdot 2^{r-1} \iff f(N) = P \sqcup (R \setminus \text{одного нуля}),$$

то есть $P' = P$, $r' = r - 1$.

Нечётный шаг ($r = 0$). Если N нечётно:

$$S = 3P + 1, \quad s = v_2(S) \text{ (число нулей в конце двоичной записи } S),$$

где $v_2(k)$ — показатель степени числа 2 в разложении k .

Тогда:

$$f(N) = \frac{3N+1}{2} = \frac{S}{2} = \left(\frac{S}{2^s}\right) \cdot 2^{s-1} \implies \begin{cases} P' = \frac{S}{2^s}, \\ r' = s - 1. \end{cases}$$

Здесь P' снова нечётно и является новой основной частью, а r' — длина нового хвоста.

Алгоритм в терминах $P \sqcup R$:

1. Если $r \geq 1$: $r \leftarrow r - 1$, P без изменений.
2. Если $r = 0$:
 - (a) $S \leftarrow 3P + 1$;
 - (b) $s \leftarrow v_2(S)$;
 - (c) $P \leftarrow S/2^s$;
 - (d) $r \leftarrow s - 1$.

Пример.

$$20_{10} = 10100_2 \implies P = 101_2 = 5, \quad r = 2$$

Чётный шаг: $P' = 101$, $r' = 1$; ещё шаг: $P'' = 101$, $r'' = 0$ (далее — нечётный ход).

4 Эквивалентное преобразование функции

Definition 4.1 (Функция f). Определим отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ правилом

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{если } x \text{ нечётное,} \\ x/2, & \text{если } x \text{ чётное.} \end{cases}$$

Таблица 1: Мини-траектории преобразования Коллатца в формате $P \sqcup R$

Шаг	N	Двоичная запись	P	R (длина r)
Пример 1: $N_0 = 12$				
0	12	1100_2	$11_2 = 3$	00 ($r = 2$)
1	6	110_2	$11_2 = 3$	0 ($r = 1$)
2	3	11_2	$11_2 = 3$	— ($r = 0$)
3	5	101_2	$101_2 = 5$	— ($r = 0$)
4	8	1000_2	$1_2 = 1$	000 ($r = 3$)
Пример 2: $N_0 = 9$				
0	9	1001_2	$1001_2 = 9$	— ($r = 0$)
1	14	1110_2	$111_2 = 7$	0 ($r = 1$)
2	7	111_2	$111_2 = 7$	— ($r = 0$)
3	11	1011_2	$1011_2 = 11$	— ($r = 0$)
4	17	10001_2	$10001_2 = 17$	— ($r = 0$)
Пример 3: $N_0 = 5$				
0	5	101_2	$101_2 = 5$	— ($r = 0$)
1	8	1000_2	$1_2 = 1$	000 ($r = 3$)
2	4	100_2	$1_2 = 1$	00 ($r = 2$)
3	2	10_2	$1_2 = 1$	0 ($r = 1$)
4	1	1_2	$1_2 = 1$	— ($r = 0$)

4.1 Ускоренное преобразование (только для нечётных)

Пусть

$$r_0 = \nu_2(x), \quad F(x, 0) = \frac{x}{2^{r_0}},$$

так что $F(x, 0)$ нечётно.

Для $i \geq 1$ определим:

$$a(i) = \nu_2(3F(x, i-1) + 1), \quad F(x, i) = \frac{3F(x, i-1) + 1}{2^{a(i)}},$$

где $F(x, i)$ снова нечётно.

Таким образом, ускоренная итерация убирает все деления на 2 за один шаг:

$$3F(x, i-1) + 1 = 2^{a(i)} \cdot F(x, i),$$

и $a(i)$ — это количество удалённых нулей в двоичной записи $3F + 1$.

Двоичное представление в ускоренном преобразовании

В двоичной системе умножение на 3 соответствует приписыванию множителя 11:

$$3F + 1 \equiv (11) \cdot F + 1.$$

Тогда:

$$(11) \cdot (F(x, i-1))_2 + 1 = (F(x, i))_2 \cdot 10^{a(i)},$$

то есть двоичная строка $(11) \cdot F + 1$ оканчивается ровно $a(i)$ нулями, которые удаляются для получения следующего нечётного члена $F(x, i)$.

Замечания

- Последовательность $\{a(i)\}$ в общем случае не монотонна.
- После t ускоренных шагов общее число удалённых делений на 2 равно $r_0 + \sum_{j=1}^t a(j)$.
- Аналогичные рекуррентные функции F можно записать и для других систем счисления $b \geq 2$, заменив 2 на b и используя $\nu_b(\cdot)$. Для двоичной системы удобно, что $3 = 11_2$.

Пример: $x = 9_{10} = 1001_2$

Здесь $r_0 = v_2(9) = 0$, поэтому $F(x, 0) = 9$.

i	$F(x, i-1)$	$F(x, i-1)_2$	$3F(x, i-1) + 1$	$a(i)$	$F(x, i)$
1	9	1001	28	2	7
2	7	111	22	1	11
3	11	1011	34	1	17
4	17	10001	52	2	13
5	13	1101	40	3	5
6	5	101	16	4	1

Проверка для первого шага в двоичной системе:

$$(11) \cdot 1001 + 1 = 11100 = 111 \cdot 10^2 \Rightarrow a(1) = 2, F(x, 1) = 111_2 = 7.$$

5 Эквивалентное преобразование в накопительной модели

Базовая функция и итерация

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, & x \text{ нечётное, } x \in \mathbb{N}, \\ \frac{x}{2}, & x \text{ чётное, } x \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x, k+1) = f(g(x, k)), \\ g(x, 0) = x. \end{cases}$$

5.1 Накопительная схема

Введём начальные величины:

$$D(0) = v_2(x), \quad F(x, 0) = \frac{x}{2^{D(0)}}, \quad F(x, 0) \text{ нечётно.}$$

Для каждого шага $i \geq 1$ определим:

$$t(i) = v_2(3F(x, i-1) + 1), \quad D(i) = D(i-1) + t(i), \quad F(x, i) = \frac{3F(x, i-1) + 1}{2^{t(i)}}, \quad F(x, i) \text{ нечётно.}$$

На шаге i мы приращаем суммарный хвост на $t(i)$ нулей (увеличивая $D(i)$), а нечётное ядро F обновляем по формуле.

5.2 Двоичная интерпретация для накопительного преобразования и сшивание

В двоичной системе:

$$(11) \cdot (F(x, i-1))_2 + 1 = (F(x, i))_2 \cdot 10^{t(i)}.$$

Накопительная модель согласуется с представлением через сшивание:

$$\boxed{\mathcal{S}(i) := F(x, i) \sqcup R^{D(i)}}$$

где $\mathcal{S}(i)$ — *состояние сшивания* на шаге i : основная часть $P(i) = F(x, i)$ (нечётная), а суммарный хвост нулей имеет длину $D(i)$. Это не буквальный член $g(x, k)$, а удобная инвариантная визуализация.

Свойства

- Для всех $i \geq 1$: $t(i) = v_2(3F(x, i-1) + 1) \geq 1$.
- Последовательность $D(i)$ строго возрастает:

$$D(0) < D(1) < D(2) < \dots,$$

тогда как локальные хвосты $t(i)$ могут колебаться.

- В двоичной интерпретации: на каждом нечётном шаге к суммарному хвосту приращается $t(i)$ нулей, а ядро F переопределяется, оставаясь нечётным.

Обычная рекурсия $g(x, k)$				Накопительная модель $F(x, i)$					
k	$g(x, k)$	$g \text{ (bin)}$	чёт/нечёт	i	$F(x, i)$	$F \text{ (bin)}$	$t(i)$	$D(i)$	$R^{D(i)}$ (хвост из $D(i)$ нулей)
0	x	$(x)_2$	—	0	F_0	$(F_0)_2$	—	$D(0)$	$0^{\times D(0)}$
1	g_1	$(g_1)_2$...	1	F_1	$(F_1)_2$	$t(1)$	$D(1)$	$0^{\times D(1)}$
2	g_2	$(g_2)_2$...	2	F_2	$(F_2)_2$	$t(2)$	$D(2)$	$0^{\times D(2)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Таблица 2: Сопоставление обычной рекурсии g и накопительной F с учётом $t(i)$, $D(i)$ и хвоста $R^{D(i)}$.

Обычная рекурсия $g(x, k)$				Накопительная модель $F(x, i)$					
k	$g(x, k)$	$g \text{ (bin)}$	чёт/нечёт	i	$F(x, i)$	$F \text{ (bin)}$	$t(i)$	$D(i)$	$R^{D(i)}$ (хвост из $D(i)$ нулей)
0	9	1001_2	нечёт	0	9	1001_2	—	0	0
1	14	1110_2	чёт	1	7	111_2	2	2	00
2	7	111_2	нечёт	2	11	1011_2	1	3	000
3	11	1011_2	нечёт	3	17	10001_2	1	4	0000
4	17	10001_2	нечёт	4	13	1101_2	2	6	000000
5	26	11010_2	чёт	5	5	101_2	3	9	$0^{\times 9}$
6	13	1101_2	нечёт	6	1	1_2	4	13	$0^{\times 13}$
7	20	10100_2	чёт	—	—	—	—	—	—

Таблица 3: Пошаговое сравнение g и накопительной F для $x = 9$ с учётом $t(i)$, $D(i)$ и хвоста $R^{D(i)}$.

Мини-траектория: $x = 9_{10} = 1001_2$

Здесь $D(0) = v_2(9) = 0$, $F(x, 0) = 9$.

i	$F(x, i-1)$	$3F(x, i-1) + 1$	$t(i) = v_2(3F + 1)$	$D(i)$	Состояние сшивания $\mathcal{S}(i)$
0	9	—	—	0	$F = 9, R^A = 0$
1	9	28	2	2	$F = 7, R^A = 00$
2	7	22	1	3	$F = 11, R^A = 000$
3	11	34	1	4	$F = 17, R^A = 0000$
4	17	52	2	6	$F = 13, R^A = 000000$
5	13	40	3	9	$F = 5, R^A = 0^{\times 9}$
6	5	16	4	13	$F = 1, R^A = 0^{\times 13}$

На каждом шаге длина суммарного хвоста $D(i)$ увеличивается на $t(i)$, а основная часть F пересчитывается и остаётся нечётной.

Краткая форма записи алгоритма

$$\begin{aligned}
 D(0) &= v_2(x), \quad F(0) = \frac{x}{2^{D(0)}}, \\
 \text{для } i \geq 1: \quad t(i) &= v_2(3F(i-1) + 1), \\
 D(i) &= D(i-1) + t(i), \quad F(i) = \frac{3F(i-1) + 1}{2^{t(i)}}.
 \end{aligned}$$

Замечания по связи с $P \sqcup R$

- В любой момент i накопительное представление через сшивание задаётся парой (P, R) как $P = F(i)$, $|R| = D(i)$.
- Визуально: ядро P переходит $F(i-1) \mapsto F(i)$, а хвост R не переопределяется заново, а накапливается: $|R| \mapsto |R| + t(i)$.

$x = 9_{10} = 1001_2$						$x = 7_{10} = 111_2$					
i	$F_9(i-1)$	$3F+1$	$t(i)$	$D(i)$	R^A (хвост)	i	$F_7(i-1)$	$3F+1$	$t(i)$	$D(i)$	R^A (хвост)
0	9	—	—	0	0	0	7	—	—	0	0
1	9	28	2	2	00	1	7	22	1	1	0
2	7	22	1	3	000	2	11	34	1	2	00
3	11	34	1	4	0000	3	17	52	2	4	0000
4	17	52	2	6	000000	4	13	40	3	7	$0^{\times 7}$
5	13	40	3	9	$0^{\times 9}$	5	5	16	4	11	$0^{\times 11}$
6	5	16	4	13	$0^{\times 13}$	—	—	—	—	—	—

Таблица 4: Параллельное сравнение траекторий накопительной модели для $x = 9$ и $x = 7$.

Сравнительная таблица для $x = 9$ и $x = 7$

6 Эквивалентность итераций

Definition 6.1 (Накопительное преобразование F). Пусть $x \in \mathbb{N}$ — исходное число. Определим

$$D(0) := v_2(x), \quad F(x, 0) := \frac{x}{2^{D(0)}} \quad (\text{нечётно}).$$

Для каждого $i \geq 1$ положим

$$t(i) := v_2(3F(x, i-1) + 1), \quad D(i) := D(i-1) + t(i), \quad F(x, i) := \frac{3F(x, i-1) + 1}{2^{t(i)}} \quad (\text{нечётно}).$$

Здесь $t(i)$ — локальное число удалённых двоичных нулей на i -м ускоренном шаге, а $D(i) = v_2(x) + \sum_{j=1}^i t(j)$ — суммарное количество удалённых нулей (чётных шагов стандартной итерации) к моменту получения $F(x, i)$.

Remark 6.2 (Связь индексов). Индекс i нумерует шаги ускоренной (накопительной) итерации по нечётной части F , индекс k — шаги стандартной итерации g . Связь задаётся формулой

$$k(i) = i + D(i),$$

где $D(0) = v_2(x)$ и $D(i+1) = D(i) + t(i)$, $t(i) = v_2(3F(x, i) + 1)$. Тогда для любых $x \in \mathbb{N}$ и $i \geq 0$ верно

$$g(x, k(i)) = F(x, i).$$

Definition 6.3 (Параллельные процессы g и F). Пусть $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ задаётся стандартной итерацией Коллатца

$$g(x, 0) := x, \quad g(x, k+1) := \begin{cases} \frac{g(x, k)}{2}, & \text{если } g(x, k) \text{ чётно,} \\ 3g(x, k) + 1, & \text{если } g(x, k) \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Определим индекс нечётных членов траектории g :

$$k(i) := D(0) + \sum_{j=1}^i (1 + t(j)) = i + D(i).$$

Тогда для всех $i \geq 0$ верно

$$g(x, k(i)) = F(x, i).$$

Эквивалентно, $D(i) = k(i) - i$, то есть индекс $k(i)$ равен числу чётных шагов $D(i)$ плюс числу совершённых нечётных шагов i .

Пример: $x = 9$. Сравнение накопительной и стандартной схемы итерации.

$$D(0) = v_2(9) = 0, \quad F(0) = 9.$$

Шаг $i = 1$:

$$t(1) = v_2(3 \cdot 9 + 1) = v_2(28) = 2, \quad D(1) = 2, \quad F(1) = \frac{28}{2^2} = 7,$$

$$k(1) = i + D(1) = 1 + 2 = 3, \quad g(9, 3) = 7.$$

Шаг $i = 2$:

$$t(2) = v_2(3 \cdot 7 + 1) = v_2(22) = 1, \quad D(2) = 3, \quad F(2) = \frac{22}{2^1} = 11,$$

$$k(2) = 2 + 3 = 5, \quad g(9, 5) = 11.$$

Шаг $i = 3$:

$$t(3) = \nu_2(3 \cdot 11 + 1) = \nu_2(34) = 1, \quad D(3) = 4, \quad F(3) = \frac{34}{2^1} = 17,$$

$$k(3) = 3 + 4 = 7, \quad g(9, 7) = 17.$$

Шаг $i = 4$:

$$t(4) = \nu_2(3 \cdot 17 + 1) = \nu_2(52) = 2, \quad D(4) = 6, \quad F(4) = \frac{52}{2^2} = 13,$$

$$k(4) = 4 + 6 = 10, \quad g(9, 10) = 13.$$

Шаг $i = 5$:

$$t(5) = \nu_2(3 \cdot 13 + 1) = \nu_2(40) = 3, \quad D(5) = 9, \quad F(5) = \frac{40}{2^3} = 5,$$

$$k(5) = 5 + 9 = 14, \quad g(9, 14) = 5.$$

Шаг $i = 6$:

$$t(6) = \nu_2(3 \cdot 5 + 1) = \nu_2(16) = 4, \quad D(6) = 13, \quad F(6) = \frac{16}{2^4} = 1,$$

$$k(6) = 6 + 13 = 19, \quad g(9, 19) = 1.$$

7 Эквивалентность накопительной и стандартной итераций

Definition 7.1 (Накопительное преобразование F). Пусть $x \in \mathbb{N}$ — исходное число. Определим

$$D(0) := \nu_2(x), \quad F(x, 0) := \frac{x}{2^{D(0)}} \quad (\text{нечётно}).$$

Для каждого шага $i \geq 1$ положим

$$t(i) := \nu_2(3F(x, i-1) + 1),$$

$$D(i) := D(i-1) + t(i),$$

$$F(x, i) := \frac{3F(x, i-1) + 1}{2^{t(i)}} \quad (\text{нечётно}).$$

Здесь $t(i)$ — локальный прирост длины хвоста (число последовательных делений на 2), а $D(i)$ — суммарная длина хвоста (количество чётных шагов) в стандартной итерации g к моменту получения $F(x, i)$.

Definition 7.2 (Итерация g). Определим стандартную пошаговую итерацию $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$g(x, 0) = x, \quad g(x, k+1) = \begin{cases} \frac{g(x, k)}{2}, & \text{если } g(x, k) \text{ чётное,} \\ 3g(x, k) + 1, & \text{если } g(x, k) \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Накопительный счётчик нулей. Назовём *накопительным количеством нулей* величину

$$Z_{\text{накоп}}(i) = \nu_2(x) + \sum_{j=1}^i t(j) = D(i).$$

Она показывает, сколько всего двоичных факторов 2 было удалено от x до получения $F(x, i)$.

Связь с количеством шагов. В стандартной итерации каждый нечётный шаг (применение $3n+1$) даёт один отдельный шаг, не входящий в $Z_{\text{накоп}}(i)$. Поэтому:

$$S_{\text{std}}(i) = Z_{\text{накоп}}(i) + i.$$

В ускоренной схеме ($\text{odd} \rightarrow (3n+1)/2^t$, $\text{even} \rightarrow n/2$) каждый блок длины $t(j)$ даёт ровно $t(j)$ шагов, и

$$S_{\text{acc}}(i) = Z_{\text{накоп}}(i).$$

Следствие. В стандартной схеме, чтобы из общего числа шагов $S_{\text{std}}(i)$ получить число удалённых нулей, нужно вычесть число нечётных переходов:

$$Z_{\text{накоп}}(i) = S_{\text{std}}(i) - i.$$

Remark 7.3 (Связь индексов). Индекс i нумерует шаги *накопительной* итерации F , индекс k — шаги стандартной итерации g . Между ними существует однозначная связь:

$$k(i) = D(i) + i,$$

и для любых $x \in \mathbb{N}$ и $i \geq 0$ выполняется

$$g(x, k(i)) = F(x, i).$$

Таким образом, F фиксирует только нечётные ядра траектории g , а $k(i)$ указывает, на каком шаге стандартной итерации они возникают.

Пример: $x = 9$

i	$F(x, i)$	$t(i)$	$D(i)$	$k(i) = D(i) + i$	$g(x, k(i))$	Проверка
0	9	—	0	0	9	$g(9, 0) = 9$
1	7	2	2	3	7	$g(9, 3) = 7$
2	11	1	3	5	11	$g(9, 5) = 11$
3	17	1	4	7	17	$g(9, 7) = 17$
4	13	2	6	10	13	$g(9, 10) = 13$
5	5	3	9	14	5	$g(9, 14) = 5$
6	1	4	13	19	1	$g(9, 19) = 1$

В этой таблице:

- i — номер шага накопительной итерации F ;
- $F(x, i)$ — нечётное ядро на шаге i ;
- $t(i)$ — локальное число удалённых двоичных нулей;
- $D(i)$ — суммарное число удалённых нулей (чётных шагов);
- $k(i) = D(i) + i$ — номер шага стандартной итерации g , на котором встречается $F(x, i)$;
- $g(x, k(i))$ — значение стандартной итерации на этом шаге;
- «Проверка» — явная демонстрация совпадения $g(x, k(i)) = F(x, i)$.

Theorem 7.4 (Об эквивалентности пар $(F(x, i), D(i))$ и $(g(x, k(i)), k(i))$). Пусть:

- $(F(x, i), D(i))$ — *накопительная пара*, где
 - $D(0) = v_2(x)$, $F(x, 0) = x/2^{D(0)}$ (нечётно).
 - Для $j \geq 1$:

$$t_j := v_2(3F(x, j-1) + 1), \quad F(x, j) = \frac{3F(x, j-1) + 1}{2^{t_j}}, \quad D(j) = D(j-1) + t_j.$$

- Тогда для $i \geq 1$:

$$D(i) = D(0) + \sum_{j=1}^i t_j.$$

- $(g(x, n), n)$ — *стандартная пошаговая итерация Коллатца*:

$$g(x, 0) = x, \quad g(x, n+1) = \begin{cases} g(x, n)/2, & \text{если } g(x, n) \text{ чётно,} \\ 3g(x, n) + 1, & \text{если } g(x, n) \text{ нечётно.} \end{cases}$$

- Связь индексов:

$$k(i) = i + D(i).$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{N}$ и любого $i \geq 0$ выполняется

$$(F(x, i), D(i)) \longleftrightarrow (g(x, k(i)), k(i)), \quad \text{причём} \quad F(x, i) = g(x, k(i)).$$

Доказательство. База: При $i = 0$ имеем $(F(x, 0), D(0)) = (x, 0)$ и $(g(x, 0), 0) = (x, 0)$.

Переход: Пусть $(F(x, i), D(i))$ соответствует $(g(x, k(i)), k(i))$. По определению $F(x, i + 1)$ получается из $F(x, i)$ применением одного нечётного шага $3i + 1$ и последующим удалением $t(i)$ двоичных нулей. В стандартной паре (g, n) это соответствует одному нечётному шагу и $t(i)$ чётным шагам. Следовательно:

$$k(i + 1) = k(i) + 1 + t(i) = (D(i) + i) + 1 + t(i) = D(i + 1) + (i + 1),$$

и $g(x, k(i + 1)) = F(x, i + 1)$.

Заключение: По индукции пары $(F(x, i), D(i))$ и $(g(x, k(i)), k(i))$ эквивалентны для всех $i \geq 0$. \square

Corollary 7.5. Зная $(F(x, i), D(i))$ для всех i , можно восстановить всю стандартную траекторию $(g(x, n), n)$, и наоборот.

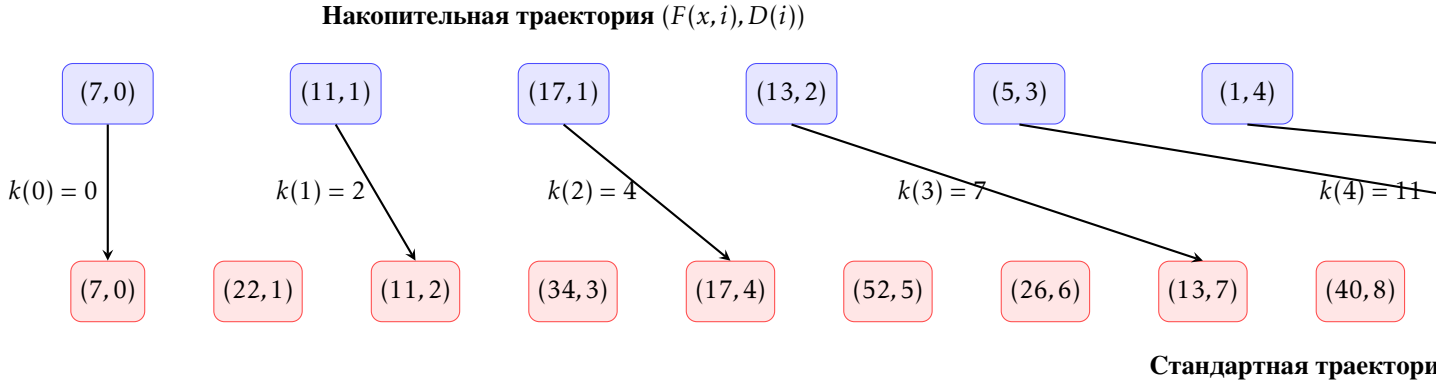


Рис. 1: Пример соответствия для $x = 7$: каждый шаг (F, D) соответствует значению (g, k) с $k = D + i$.

8 Оператор накопительной итерации

Definition 8.1 (Оператор накопительной итерации Φ). Рассмотрим множество состояний

$$\mathcal{S} := \{(F, D) \mid F \in \mathbb{N}_{\text{нечёт}}, D \in \mathbb{N}_0\}.$$

Для $x \in \mathbb{N}$ положим

$$D(0) := v_2(x), \quad F(0) := \frac{x}{2^{D(0)}} \quad (F(0) \text{ нечёт}).$$

Для $(F, D) \in \mathcal{S}$ определим

$$t(F) := v_2(3F + 1), \quad \Phi(F, D) := \left(\frac{3F + 1}{2^{t(F)}}, D + t(F) \right).$$

Здесь $t(F) \geq 1$ для любого нечётного F , а первая компонента $\Phi(F, D)$ всегда нечётна.

Траектория $(F(i), D(i))$ определяется рекуррентно:

$$(F(i + 1), D(i + 1)) := \Phi(F(i), D(i)), \quad i \geq 0.$$

Lemma 8.2 (Эквивалентность траекторий $(F(x, i), D(i))$ и $(g(x, k), k)$). Пусть $(F(i), D(i))$ определяется оператором Φ из Определения 10.6 с начальным состоянием

$$D(0) = v_2(x), \quad F(0) = \frac{x}{2^{D(0)}}.$$

Пусть $g(x, k)$ — стандартная итерация Коллатца, а

$$k(i) := D(i) + i.$$

Тогда для любого $i \geq 0$ выполняется

$$F(x, i) = g(x, k(i)),$$

и, кроме того,

$$k(i + 1) = k(i) + 1 + t(F(x, i)), \quad t(F) := v_2(3F + 1).$$

Доказательство. База: при $i = 0$ имеем $k(0) = D(0) + 0 = v_2(x)$ и

$$g(x, k(0)) = \frac{x}{2^{v_2(x)}} = F(x, 0).$$

Переход: предположим, что $F(x, i) = g(x, k(i))$. По определению Φ :

$$F(x, i+1) = \frac{3F(x, i) + 1}{2^{t(F(x, i))}}, \quad D(i+1) = D(i) + t(F(x, i)).$$

В стандартной итерации g переход от $g(x, k(i))$ к $g(x, k(i+1))$ состоит из одного нечётного шага $3n+1$ и $t(F(x, i))$ чётных шагов деления на 2. Следовательно:

$$k(i+1) = k(i) + 1 + t(F(x, i)),$$

$$\text{и } g(x, k(i+1)) = F(x, i+1).$$

Заключение: по принципу математической индукции равенство $F(x, i) = g(x, k(i))$ верно для всех $i \geq 0$. □

Corollary 8.3 (Композиционная форма для $\Phi(i)$). Обозначим $\Phi(i) := (F(x, i), D(i))$. Начальное состояние:

$$\Phi(0) = \left(\frac{x}{2^{v_2(x)}}, v_2(x) \right).$$

Тогда для всех $i \geq 0$:

$$\Phi(i) = \underbrace{\Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi}_{i \text{ раз}}(\Phi(0)),$$

а переход между шагами имеет вид:

$$\Phi(i+1) = \Phi(\Phi(i)).$$

Компонентно:

$$F(x, i+1) = \frac{3F(x, i) + 1}{2^{v_2(3F(x, i) + 1)}}, \quad D(i+1) = D(i) + v_2(3F(x, i) + 1).$$

Remark 8.4 (Обратимость итераций). В стандартной модели $(g(x, k), k)$ и в накопительной $(F(x, i), D(i))$ прямой переход $i \rightarrow i+1$ однозначен по определению. Обратный переход $i \rightarrow i-1$ возможен только в том случае, если известна вся пошаговая последовательность значений $D(0), D(1), \dots, D(i)$, поскольку для восстановления $F(i-1)$ требуется знать $D(i-1)$.

Если же известна только пара $(F(i), D(i))$ без информации о предыдущем $D(i-1)$, то обратный ход неоднозначен: существует несколько возможных предшественников, дающих одно и то же $(F(i), D(i))$.

Таким образом, оператор Φ в общем случае *необратим*, а обратное применение $i \rightarrow i-1$ корректно лишь при наличии полной истории D .

Lemma 8.5 (Целостность и завершение v -разложения). Пусть $A \in \mathbb{N}$ и $q = \frac{4}{3}$. Алгоритм v -разложения, на i -м шаге которого

- вычисляется остаток R_i и блок E_i так, что $A = \sum_{j=0}^i q^j E_j + q^{i+1} R_{i+1}$,
- остаток R_{i+1} может быть рациональным числом,

обладает следующими свойствами:

1. Для каждого $i \geq 0$ остаток R_i имеет вид

$$R_i = \frac{m_i}{3^i}, \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

2. После ровно i переносов множителя 3^{-1} в старший разряд (операция $3 \mapsto q^{-1} \cdot 4$) знаменатель 3^i уничтожается, и блок E_i становится целым числом.
3. Так как длина траектории конечна ($R_m = 0$ для некоторого m), процесс завершается за конечное число шагов, и

$$A = \sum_{j=0}^m q^j E_j$$

— конечная q -запись с целыми блоками E_j .

Доказательство. Докажем по индукции по i . При $i = 0$ имеем $R_0 = A \in \mathbb{Z}$, то есть $m_0 = A$, знаменатель $3^0 = 1$. Переход $i \rightarrow i + 1$ в алгоритме устроен так, что R_{i+1} получается из R_i делением на 3 (возможно, после вычитания целого блока E_i), поэтому $R_{i+1} = \frac{m'_i}{3^{i+1}}$ с $m'_i \in \mathbb{Z}$. Это доказывает (1).

Для (2) заметим, что умножение на 4 и сдвиг позиции $q^j \mapsto q^{j+1}$ эквивалентны переносу одного множителя 3^{-1} в старший разряд: $q^j = \frac{4^j}{3^j}$. После i таких переносов множитель 3^{-i} в знаменателе сокращается, и E_i становится целым.

Пункт (3) следует из конечности траектории: на последнем шаге $R_m = 0$, и сумма $\sum_{j=0}^m q^j E_j$ даёт точное разложение A . \square

Example 8.6 (Работа оператора Φ на числе 7). Начальное состояние по определению 10.6:

$$(F(0), D(0)) = \left(\frac{7}{2^{v_2(7)}}, v_2(7) \right) = (7, 0).$$

На каждом шаге вычисляем

$$t(i) := v_2(3F(i) + 1), \quad F(i+1) := \frac{3F(i) + 1}{2^{t(i)}}, \quad D(i+1) := D(i) + t(i).$$

i	$F(i)$	$D(i)$	$3F(i) + 1$	$t(i)$	$(F(i+1), D(i+1))$
0	7	0	22	1	(11, 1)
1	11	1	34	1	(17, 2)
2	17	2	52	2	(13, 4)
3	13	4	40	3	(5, 7)
4	5	7	16	4	(1, 11)

Корректность шага с дробями и завершение. Телескопическая формула переноса/остатка (см. 13) даёт для конечной траектории длины m :

$$N(0) = q^m(N(m) - D(m-1)) + \sum_{i=0}^{m-1} q^i E(i), \quad E(i) = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3}, \quad q = \frac{4}{3}.$$

При $N(m) = D(m)$ первый член есть $q^m E(m)$, так что $N(0) = \sum_{i=0}^m q^i E(i)$. Каждое $E(i)$ нормализуем по степеням 4: при $b(i-1) = 2u + v$, $v \in \{0, 1\}$ имеем

$$E(i) = 4^u \cdot \eta(i), \quad \eta(i) \in \{\text{нечётное}, 2 \times \text{нечётное}\}.$$

Тогда

$$q^i E(i) = \frac{4^i}{3^i} \cdot 4^u \eta(i) = \frac{\eta(i)}{3^i} \cdot 4^{u+i}.$$

Ровно i переносов $3 \mapsto q^{-1} \cdot 4$ устраняют знаменатель 3^i , оставляя целый локальный коэффициент при q^i . Так как $m < \infty$, сумм конечное число, и после локальной перенормировки коэффициентов по q -позициям (см. §11) получаем допустимые q -цифры и конечную запись.

Наблюдения:

- Каждое новое состояние $\Phi(i+1)$ однозначно получается из $\Phi(i)$ по формуле определения — никакого ветвления вперёд нет.
- Первая компонента $F(i)$ всегда нечётна; вторая $D(i)$ строго возрастает, накапливая все удалённые двоичные нули.
- Связь с классической итерацией: $k(i) = D(i) + i$, и $F(i) = g(7, k(i))$.

Пример итераций для числа 7

$$7 = \frac{\frac{\frac{2^{11} - 2^7}{3} - 2^4}{3} - 2^2}{3} - 2^1}{3} - 2^0}{3}$$

$$D(0) < D(1) < \dots < D(i) < \dots < D(n) \quad (8.1)$$

Пояснение.

- Каждая дробь $\frac{\dots}{3}$ соответствует одному шагу применения оператора Φ : берём нечётное $F(i)$, умножаем на 3, прибавляем 1, затем делим на 2^{t_i} , где $t_i = v_2(3F(i) + 1)$.

- Вычитание 2^k на каждом уровне отражает удаление k двоичных нулей (деление на 2^k) и переход к следующему нечётному значению.
- Степени двойки $2^{11}, 2^7, 2^4, 2^2, 2^1, 2^0$ — это $2^{D(i)}$, где $D(i)$ — накопленное число удалённых нулей к моменту шага i .
- Последовательность $D(0) < D(1) < \dots < D(n)$ строго возрастает, так как на каждом шаге удаляется хотя бы один ноль.
- Вложенная запись наглядно показывает, как 7 через серию шагов Ф сводится к 1, при этом $D(i)$ аккумулирует суммарное количество удалённых двоичных нулей.

Теорема о единственности представления и следствия

Общая формула через последовательности A и B

Пусть $D(0) < D(1) < \dots < D(n)$, $B(i) := D(i+1) - D(i) > 0$, $D(0) = 0$, $D(i) = \sum_{j=0}^{i-1} B(j)$. Тогда определим запись числа x :

$$x = \frac{2^{D(n)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-1)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-2)}}{3^{n-1}} - \dots - \frac{2^{D(1)}}{3^2} - \frac{2^{D(0)}}{3}. \quad (8.2)$$

как форму $H(x, n)$.

Первое слагаемое положительное, все остальные — с минусом, а знаменатели образуют последовательность $3^1, 3^2, \dots, 3^n$.

Theorem 8.7. Пусть $D(0) = 0 < D(1) < \dots < D(n)$ и $B(i) := D(i+1) - D(i) > 0$. Имеем

$$H(x, n) = \frac{2^{D(n)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-1)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-2)}}{3^{n-1}} - \frac{2^{D(n-3)}}{3^{n-2}} - \dots - \frac{2^{D(1)}}{3^2} - \frac{2^{D(0)}}{3}. \quad (*)$$

Тогда:

1. Представление x в форме $H(x, n)$ по (*) единственно для данной последовательности D .
2. Отображение $(D(0), \dots, D(n)) \mapsto x$ инъективно.

Доказательство. В (*) — линейная комбинация с различными знаменателями $3, 3^2, \dots, 3^n$ и числителями $2^{D(k)}$ (в верхнем члене — разность степеней двойки). Разные последовательности D дают разные наборы степеней, значит, и разные x . Если бы $D \neq D'$ дали одинаковое x , то разность представлений свелась бы к нетривиальной целочисленной комбинации различных степеней 2, равной нулю, что невозможно. \square \square

Следствие (вложенная форма). Назовем форму числа x ниже модифицированной $H(x, n)$ или вложенной:

$$mH(x, n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\dots \frac{1}{3} \left(\frac{2^{D(n)} - 2^{D(n-1)}}{3} - 2^{D(n-2)} \right) - 2^{D(n-3)} \dots \right) - 2^{D(0)} \right).$$

или

$$mH(x, n) = \frac{2^{B(1)}}{3} \left(\frac{2^{B(2)}}{3} \left(\frac{2^{B(3)}}{3} \left(\dots \left(\frac{2^{B(i)}}{3} \left(\dots \left(\frac{2^{B(n-2)}}{3} \left(\frac{2^{D(n)-B(n-1)}}{3} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) \dots \right) - \frac{1}{3} \right) \dots \right) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) \quad (8.3)$$

Алгоритм восстановления числа x по последовательности A :

1. $Y := \frac{2^{D(n)} - 2^{D(n-1)}}{3}$.
2. Для $k = n-2, \dots, 0$: $Y \leftarrow \frac{Y - 2^{A(k)}}{3}$.
3. $x := Y$.

Пример: $x = 7$

Для

$$D: 0, 1, 2, 4, 7, 11 \implies B: 1, 1, 2, 3, 4$$

получаем:

$$7 = \frac{2^{11}}{3^5} - \frac{2^7}{3^5} - \frac{2^4}{3^4} - \frac{2^2}{3^3} - \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3}.$$

Знаменатели идут строго по порядку: $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$.

9 Позиционные записи числа

9.1 Вычитательная схема Хорнера и система $2 \sqcap 3$

Вычитательная запись числа

В классической позиционной системе с основанием p число M записывается по схеме Хорнера:

$$M = c_0 + p(c_1 + p(c_2 + \dots + p c_n) \dots), \quad 0 \leq c_i < p.$$

Обычно эта форма строится через последовательное деление на p и взятие остатков.

Вычитательная версия строится зеркально: начинаем с ближайшей сверху степени p^k и вычитаем остаток, который затем раскладываем по тому же принципу:

$$M = p^k - R_1, \quad R_1 = c_0 + p(c_1 + p(c_2 + \dots)).$$

Например, в десятичной системе:

$$87 = 10^2 - 13 = 100 - (10 + 3).$$

Здесь 100 — *большой базис*, а 13 — остаток, который снова раскладывается.

9.2 Переход к системе $2 \sqcap 3$

В нашей конструкции роль «основания» играет дробь

$$p = \frac{1}{3},$$

а *цифрами* служат степени двойки $2^{D(i)}$, где $D(i) \in \mathbb{Z}$ (допускаются отрицательные показатели).

Definition 9.1 (Разряд и значение записи в $(2 \sqcap 3)$). Разрядом называется позиция $i \geq 0$ в последовательности цифр $c_i = 2^{D(i)}$, отсчитываемая от младшей к старшей. Значение записи (c_0, c_1, \dots, c_m) определяется по модифицированной схеме Хорнера:

$$\text{val}(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^m c_i p^i = \sum_{i=0}^m 2^{D(i)} \left(\frac{1}{3}\right)^i.$$

Замечание. Такое представление корректно называть *модифицированной вычитательной схемой Хорнера* с дробным основанием $p = \frac{1}{3}$ и нестандартным алфавитом цифр. В отличие от классической схемы, где p — целое и $0 \leq c_i < p$, здесь разряды соответствуют степеням $1/3$, а цифры — степеням двойки, что отражает специфику системы $\{2 \sqcap 3\}$.

9.3 Формула по модифицированному Хорнеру (Н)

Для возрастающей последовательности

$$D(0) = 0 < D(1) < \dots < D(n), \quad B(i) := D(i+1) - D(i) > 0,$$

определим:

$$H(x, n) = \frac{2^{D(n)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-1)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-2)}}{3^{n-1}} - \dots - \frac{2^{D(1)}}{3^2} - \frac{2^{D(0)}}{3}. \quad (9.1)$$

Первое слагаемое положительное, остальные — отрицательные. Знаменатели идут строго по порядку: $3, 3^2, \dots, 3^n$.

Definition 9.2 (Каноническая нормировка в $(2 \sqcap 3)$). Запись числа $x \in \mathbb{N}$ в системе $(2 \sqcap 3)$ называется *канонически нормированной*, если существует $n \geq 1$ и строго возрастающая последовательность

$$D(0) = 0 < D(1) < \dots < D(n),$$

такая, что $x = H(x, n)$ по формуле (9.1). Требования нормировки:

- N1) Строгая монотонность $D(0) < \dots < D(n)$ (запрещены слияния степеней 2 на одном уровне знаменателя);
- N2) Фиксированный знак: верхний член на уровне 3^n положителен, все остальные — отрицательны;
- N3) Запись устойчива: никакие локальные преобразования вида [LOCK]/перенос не применимы.

Такую запись обозначим $x = H(A, n)$ и назовём *H-формой* числа x .

Theorem 9.3 (Однозначность канонической нормировки). Если x имеет две канонически нормированные записи

$$x = H(D, n) = H(D', n'),$$

то $n = n'$ и $D(i) = A'(i)$ для всех $i = 0, \dots, n$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $m := \max\{n, n'\}$. Умножим равенство на 3^m . Получим целые линейные комбинации степеней 2 с нечётными коэффициентами $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$, поскольку множители 3^{m-j} нечётны. Если $n \neq n'$, то одна из сторон не содержит положительного члена на уровне 3^m , что противоречит N2. Значит, $n = n'$.

Шаг 2: Умножим равенство на 3^n и сравним старшие члены. Пусть $D(n) \geq D'(n)$. Разность правых частей:

$$2^{D(n)} - 2^{D'(n)} = \sum c_u 2^{\alpha_u}, \quad \alpha_u < D'(n), \quad c_u \text{ нечётные.}$$

Левая часть делится на $2^{A'(n)}$, правая — нет. Противоречие. Значит, $D(n) = D'(n)$.

Шаг 3: Индукция вниз по i . Вычитая совпадающие верхние члены, повторяем рассуждение для оставшейся части. Получаем $D(i) = D'(i)$ для всех i . \square

Пример записи для числа 7

Для

$$D : 0, 1, 2, 4, 7, 11$$

имеем:

$$7 = \frac{2^{11}}{3^5} - \frac{2^7}{3^5} - \frac{2^4}{3^4} - \frac{2^2}{3^3} - \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3}.$$

Пояснение: первые два члена объединены в разность $2^{11} - 2^7$, делённую на 3^5 , что соответствует верхнему уровню вложенной формы.

Замечания об основаниях систем счисления $\{1 \sqcap 3\}$ и $\{2 \sqcap 3\}$. Следует учитывать, что:

1. В классической теории систем счисления принято брать в качестве основания $p > 1$;
2. Цифры системы счисления должны быть меньше основания p ;
3. Существуют и другие варианты оснований систем счисления $\{2 \sqcap 3\}$ и $\{4 \sqcap 3\}$, которые описаны в разделах [11](#) и [\[3\]](#).

10 Система $\{2 \sqcap 3\}$, операции и убывающая мера

10.1 Базовые операции и их назначение

Операция [ЛОСК]. Определим локальную нормировку как пару тождеств, действующих на элементарные вклады вида $\frac{2^p}{3^q}$ при целых p, q :

$$\begin{aligned} \frac{2^p}{3^q} &= \frac{2^{p+1}}{3^{q+1}} + \frac{2^p}{3^{q+1}}, \\ -\frac{2^p}{3^q} &= -\frac{2^{p+2}}{3^q} + \frac{2^p}{3^{q-1}}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Формально [ЛОСК] — локальное преобразование записи, которое при выполнении условий применимости заменяет пару соседних локальных вкладов эквивалентной по значению локальной суммой по (10.1).

Условия применимости и свойства:

1. **Локальность:** [ЛОСК] применяется к вкладам, стоящим на одном или соседних уровнях, то есть имеющим согласованный знаменатель 3^q в позиционной записи.
2. **Эквивалентность:** замена по (10.1) не меняет числовое значение суммы: если R — исходная запись, R' — после [ЛОСК], то $R' = R$.
3. **Нормировка:** [ЛОСК] приводит локальные переполнения/недополнения к стандартной форме для дальнейшей канонической нормировки.
4. **Вспомогательность:** в глобальных доводах (например, при анализе убывания меры под Φ) [ЛОСК] используется лишь локально.

Операции [SEAM] и [UNSEAM]. Пусть

$$A = \{a(n), a(n-1), \dots, a(1)\}_{2\Gamma 3}, \quad B = \{b(m), b(m-1), \dots, b(1)\}_{2\Gamma 3}$$

— две конечные записи в системе $\{2\Gamma 3\}$, представленные как последовательности элементарных блоков, упорядоченные по убыванию уровня 3^{-q} .

Definition 10.1 (Сшивание [SEAM]). Пусть $a(1)$ — младший блок A , $b(m)$ — старший блок B . Если

1. оба блока лежат на одном уровне q (одинаковая степень 3 в знаменателе);
2. сумма $a(1) + b(m)$ после локальной нормировки (10.1) остаётся корректным элементарным блоком (возможно, с изменением уровня),

то *сшиванием* A и B называется запись

$$C = A \text{ [SEAM] } B,$$

полученная конкатенацией блоков A и B с заменой пары $(a(1), b(m))$ на их нормализованную сумму. Формально:

$$C = \{a(n), a(n-1), \dots, a(2), a(1) + b(m), b(m-1), \dots, b(1)\}_{2\Gamma 3}, \quad (10.2)$$

где $a(1) + b(m)$ понимается как результат локальной нормировки по (10.1).

Definition 10.2 (Расшивание [UNSEAM]). Если C имеет вид (10.2), то *расшиванием* C [UNSEAM] q называется замена блока $a(1) + b(m)$ на пару $(a(1), b(m))$ с восстановлением исходных записей A и B на уровнях, согласованных с q . Разбиение может быть неединственным.

Remark 10.3. Операции [SEAM] и [UNSEAM] не используются в доказательстве убывания меры M ; они служат для композиции и декомпозиции записей в примерах.

Частный случай (локальная нормировка на границе). Если

$$a(1) = -\frac{2^{p+2}}{3^q}, \quad b(m) = -\frac{2^p}{3^{q-1}},$$

то

$$a(1) + b(m) = -\frac{2^p}{3^{q-1}},$$

и на позиции m при сшивании срабатывает [LOCK].

10.2 Элементарные числа и общая форма

Definition 10.4 (Элементарное число и вклад на уровне). Элементарное число — это пара $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = 2^a$ и $\beta = 2^b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$. *Величиной* элементарного числа уровня i будем называть

$$E(i) := \frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3} = \frac{2^{a(i)} - 2^{b(i)}}{3}.$$

Элементарный блок на масштабе $i-1$ — это пара $[\alpha(i), \beta(i)]$ с вкладом в H -сумму

$$\frac{E(i)}{3^{i-1}} = \frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3^i} = \frac{2^{a(i)} - 2^{b(i)}}{3^i}.$$

Порядок в паре заранее не фиксируется; ориентация $\alpha - \beta$ выбирается нормировкой.

Definition 10.5 (Общая запись). Нормированное представление имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{E(i)}{3^{i-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3^i} = \sum_{i=1}^n \frac{2^{a(i)} - 2^{b(i)}}{3^i},$$

где для каждого уровня $i-1$ задан ровно один элементарный блок $[\alpha(i), \beta(i)]$.

Примеры.

$$13_{10} = \frac{[2^7, 2^5]}{3^1} + \frac{[2^3, 2^0]}{3^0}, \quad 7_{10} = \frac{[2^{11}, 2^9]}{3^4} + \frac{[2^7, 2^6]}{3^3} + \frac{[2^4, 2^4]}{3^2} + \frac{[2^2, 2^3]}{3^1} + \frac{[2^1, 2^0]}{3^0}.$$

10.3 Оператор Φ и каноническая форма

Definition 10.6 (Оператор накопительной итерации). Пусть F — нечётное натуральное число, а D — целое число, интерпретируемое как накопленный показатель степени двойки. Обозначим

$$t(F) := v_2(3F + 1),$$

где $v_2(\cdot)$ — 2-адическая валюация (показатель степени двойки в разложении числа).

Оператор Φ действует на пару (F, A) по правилу

$$\Phi(F, D) := \left(\frac{3F + 1}{2^{t(F)}}, D + t(F) \right).$$

Для данного $x \in \mathbb{N}$ положим

$$D(0) := v_2(x), \quad F(0) := \frac{x}{2^{D(0)}}.$$

Тогда последовательность пар $(F(i), D(i))$ определяется рекурсией

$$(F(i + 1), D(i + 1)) = \Phi(F(i), D(i)), \quad i \geq 0.$$

Remark 10.7. В терминах канонической $(2 \sqcup 3)$ -формы x величина $F(i)$ соответствует нечётной «вершине» верхнего блока, а $A(i)$ — суммарному показателю степени двойки в этом блоке. Применение Φ либо удаляет верхний блок (если $F' = 1$), либо заменяет его на блок с меньшим показателем степени двойки на том же уровне, что и используется в лемме 10.9.

10.4 Убывающая мера и действие Φ

Definition 10.8 (Мера на канонических формах). Пусть x — каноническая форма в системе $(2 \sqcup 3)$, содержащая $n + 1$ ненулевых элементарных чисел (блоков), и пусть n — максимальный уровень 3^{-n} , на котором встречается ненулевой блок. Определим

$$M(x) := (M_1(x), M_2(x)) := (n + 1, n).$$

Компонента M_1 — это количество ненулевых блоков, компонента M_2 — высота верхнего блока. Сравнение мер производится в лексикографическом порядке:

$$(m_1, m_2) < (m'_1, m'_2) \iff (m_1 < m'_1) \text{ или } (m_1 = m'_1 \text{ и } m_2 < m'_2).$$

Иными словами, M — это счётчик числа блоков с приоритетом по их высоте.

Lemma 10.9 (Действие Φ на каноническую форму). Пусть

$$x = \frac{2^{D(n)}}{3^n} - \frac{2^{D(n-1)}}{3^n} - \frac{2^{A(n-2)}}{3^{n-1}} - \dots - \frac{2^{D(0)}}{3}$$

— каноническая H -форма, где $0 = D(0) < \dots < D(n)$ и $n \geq 1$. Тогда после одного шага Φ и последующей канонической нормировки получаем каноническую форму x' такую, что выполняется одно из двух:

1. **Сокращение блока:** $M_1(x') < M_1(x)$;
2. **Опускание вершины:** $M_1(x') = M_1(x)$, но $M_2(x') < M_2(x)$.

В частности, $M(x') < M(x)$ в лексикографическом порядке.

Доказательство (схема). Верхний блок $\frac{2^{D(n)}}{3^n}$ соответствует текущему нечётному значению F и накопленному показателю $D(n)$. При применении Φ имеем:

$$F' = \frac{3F + 1}{2^t}, \quad D' = D(n) + t, \quad t = v_2(3F + 1) \geq 1.$$

Если $F' = 1$, то верхний блок исчезает, и M_1 уменьшается. Если $F' > 1$, то после нормировки верхний блок остаётся на том же уровне 3^{-n} , но его показатель степени двойки уменьшается, что влечёт уменьшение M_2 . В обоих случаях M убывает в лексикографическом порядке. \square

10.5 Достаточность конечной вложенной формы

Theorem 10.10 (Достаточность наличия вложенной формы для сходимости к единичной длине). Пусть x имеет каноническую H -форму (9.1) в системе $(2 \sqcup 3)$ и эквивалентную конечную вложенную запись

$$x \equiv \text{Nest}(A) = \langle Y_n; Y_{n-1}; \dots; Y_1 \rangle,$$

где $A = \{D(0) = 0 < A(1) < \dots < D(n)\}$ — строго возрастающая последовательность показателей, а каждый Y_k — корректный фрагмент вложенной конструкции. Тогда существует $m < \infty$ такое, что после m итераций оператора Φ каноническая форма x состоит ровно из одного ненулевого элементарного блока.

Доказательство. Введём меру $M(x) = (M_1(x), M_2(x)) = (n+1, n)$, где M_1 — число ненулевых элементарных чисел (блоков) в каноническом $(2 \sqcup 3)$ -разложении, а M_2 — максимальный уровень (сравнение в лексикографическом порядке). По лемме 10.9 один шаг Φ с последующей канонической нормировкой либо уменьшает M_1 , либо, при фиксированном M_1 , уменьшает M_2 . Следовательно, $M(\Phi(x)) < M(x)$ в лексикографическом порядке. Так как M принимает значения в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а начальная вложенная запись конечна, последовательность $M(\Phi^k(x))$ строго убывает и конечна. Значит, за конечное число шагов достигается минимальная форма — с одним ненулевым блоком. \square

Remark 10.11. Необходимость (т.е. что любое натуральное x допускает представление через конечную запись элементарных чисел в системе $(2 \sqcup 3)$) будет доказана далее, см. пояснение 1.1 в разделе 21.

Corollary 10.12. Если $A_{10} \in \mathbb{N}$ имеет конечную каноническую H -форму (эквивалентно — конечную вложенную запись), то при итерациях Φ за конечное число шагов каноническая форма будет состоять ровно из одного ненулевого блока.

Remark 10.13 (Эквивалентные формулировки достаточности). Следующие утверждения равносильны и каждое гарантирует достижение формы с одним ненулевым блоком:

- конечная каноническая mH -форма в $(2 \sqcup 3)$;
- конечная вложенная запись $\text{Nest}(A)$;
- конечное v -разложение суммой элементарных блоков $E(i)$ с непрерывной шкалой уровней.

Во всех случаях при каждом шаге Φ мера M строго убывает.

Remark 10.14 (О роли метрики M). Метрика M введена как вспомогательный инструмент для локального анализа и иллюстрации динамики преобразования Φ . В силу особенностей системы $\{2 \sqcup 3\}$ и допустимого алфавита, прямое доказательство глобальной сходимости в метрике M не проводится: этот путь оказался бесперспективным. Её убывающие свойства будут обоснованы косвенно — через связь с дискретной метрикой L_{disc} , для которой в 20.1 получены строгие оценки отрицательного дрейфа. Именно ограниченность подхода через M стала одной из причин перехода к каркасу $\{4 \sqcup 3\}$ и введению дискретных метрик, что позволило построить строгую аргументацию глобальной сходимости. Таким образом, M играет роль наглядного, но не критического элемента конструкции, а ключевые результаты опираются на L_{disc} .

10.6 Примеры

Число 5.

$$5 = \{4, 0\}_{2 \sqcup 3} = \frac{[2^4, 2^0]}{3^0} = \frac{2^4 - 2^0}{3}.$$

Число 13.

$$13 = \{7, 3, 0\}_{2 \sqcup 3} = \frac{[2^7, 2^5]}{3^1} + \frac{[2^3, 2^0]}{3^0}.$$

Число 7.

$$7 = \{11, 7, 6, 4, 2, 1, 0\}_{2 \sqcup 3} = \frac{[2^{11}, 2^9]}{3^4} + \frac{[2^7, 2^6]}{3^3} + \frac{[2^4, 2^4]}{3^2} + \frac{[2^2, 2^3]}{3^1} + \frac{[2^1, 2^0]}{3^0}.$$

Вложенная форма:

$$7 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \left(\dots \frac{1}{3} \left(\frac{2^{11} - 2^7}{3} - 2^4 \right) - 2^2 \dots \right) - 2^0 \right).$$

10.6.1 Алгоритм получения v -разложения $A \in \mathbb{N}$ в виде суммы элементарных чисел

Remark 10.15 (О применимости результатов AFS). Для системы $\{4 \sqcup 3\}$ ($p = 4, q = 3$) существование и единственность конечного представления следуют из общей теоремы о рациональных основаниях $p/q > 1$ [1]. Система $\{2 \sqcup 3\}$ имеет основание $1/3 < 1$ и специальный алфавит блоков, поэтому указанный результат к ней напрямую не применим; универсальность и свойства v -разложения в этом случае будут доказаны в разделе 21.

Вход. Натуральное число $A \in \mathbb{N}$.

Выход. Набор элементарных блоков

$$E(i) = [\alpha(i), \beta(i)]_v, \quad \alpha(i) = 2^{a(i)}, \quad \beta(i) = 2^{b(i)},$$

и представление

$$A = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3^{i+1}} = \sum_{i=0}^n \frac{2^{a(i)} - 2^{b(i)}}{3^{i+1}}.$$

Здесь $\frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3}$ — *элементарное число* блока, а деление на 3^i даёт его вклад на масштабе i .

Шаг 0.

1. Определить начальный показатель двойки:

$$b(0) := v_2(A) \quad (\text{т.е. } 2^{b(0)} \parallel A).$$

2. Вычислить

$$a(0) := v_2(3A - 2^{b(0)}).$$

3. Задать первый блок:

$$E(0) = [2^{a(0)}, 2^{b(0)}]_v.$$

Итерация (шаг $i \geq 0$).

1. **Правило «замка»:**

$$b(i+1) := a(i) + 2.$$

2. **Остаток:**

$$R_i := A - \sum_{j=0}^i \frac{2^{a(j)} - 2^{b(j)}}{3^{j+1}}.$$

3. **Следующий показатель:**

$$a(i+1) := v_2\left(3^{i+1}R_i \pm 2^{b(i+1)}\right),$$

где знак \pm выбирается так, чтобы $v_2(\cdot)$ было максимально (локальная нормализация).

4. **Новый блок:**

$$E(i+1) = [2^{a(i+1)}, 2^{b(i+1)}]_v.$$

Остановка. Процесс завершается при $R_m = 0$ для некоторого m . Тогда

$$A = \sum_{i=0}^m \frac{2^{a(i)} - 2^{b(i)}}{3^{i+1}}$$

— конечная сумма элементарных чисел в представлении $(A)_v$.

Замечания.

- *О выборе знака.* В формулах для $a(0)$ и $a(i+1)$ знак перед $2^{b(\cdot)}$ выбирается так, чтобы $v_2(\cdot)$ было максимально. Это соответствует *локальной нормализации*.
- *О траекториях.* Фиксированный знак («−» или «+») даёт детерминированную траекторию, но не всегда минимальное число шагов. Локально оптимальный выбор знака может не быть глобально оптимальным.
- *Правило полноты по индексам.* Масштабы i идут без пропусков. Даже если $2^{a(i)} = 2^{b(i)}$ и вклад блока равен нулю, блок $E(i)$ включается в запись.

Остановка (уточнение). В $(A)_v$ сохраняются все блоки $E(i)$ для $i = 0, \dots, m$, включая нулевые, чтобы индексы 3^i образовывали непрерывную последовательность.

Remark 10.16 (О неконструктивности и условности). Приведённый алгоритм описывает процедуру построения v -разложения для данного A и корректно работает для любого числа, для которого такое представление существует. Однако он *не является* конструктивным доказательством того, что *любое* $A \in \mathbb{N}$ допускает конечное v -разложение в системе $\{2 \sqcup 3\}$. Это свойство — *гипотеза универсальности* — формулируется явно и используется в разделах 20 и 20.12 как условие. Доказательство необходимости и достаточности (см. пояснение в замечании 1.1) приведено в разделе 21. До этого момента все утверждения, опирающиеся на универсальность, следует понимать как условные.

10.6.2 Пример: вход $A = 7$, выход $7_v = (11, 7, 4, 2, 1, 0)_v$

Example 10.17 (Пятишаговое v -разложение для $A = 7$ (режим фиксированного знака «+»)). В этом режиме на каждом шаге используем формулу для показателя степени двойки

$$\alpha(i) = v_2\left(3^{i+1}R_i + 2^{\beta(i+1)}\right), \quad \beta(i+1) = \alpha(i) + 2,$$

где R_i — остаток после учёта блоков $E(0), \dots, E(i)$, а последовательность масштабов $i = 0, 1, 2, 3, 4$ идёт без пропусков (каноническая полнота). Нулевые блоки сохраняются.

Example 10.18 (Вычитательное разложение числа 7 с учётом масштабов). Правила шага:

$$\beta_i = v_2(\text{num}(N_i)), \quad \alpha_i = v_2(3N_i + 2^{\beta_i}), \quad E_i = \frac{2^{\alpha_i} - 2^{\beta_i}}{3}, \quad N_{i+1} = N_i - E_i, \quad k = i + 1.$$

Старт: $N_0 = 7$, $\beta_0 = v_2(7) = 0$.

Example 10.19 (Вычитательное разложение числа 7 с учётом масштаба и правила замка). Старт: $R_0 = 7$, $\beta_{\text{mem}} = 0$ (нечётное).

i	масштаб 3^k	остаток R_i	β_i (низ)	α_i (верх)	блок $E_i = \frac{2^{\alpha_i} - 2^{\beta_i}}{3^k}$	R_{i+1}
0	3^1	7	0	$v_2(7 + \frac{2^0}{3}) = 1$	$\frac{2^1 - 2^0}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
1	3^2	$\frac{20}{3}$	$1 + 2 = 3$	$v_2(\frac{20}{3} + \frac{2^3}{9}) = 2$	$\frac{2^2 - 2^3}{9} = -\frac{4}{9}$	$\frac{64}{9}$
2	3^3	$\frac{64}{9}$	$2 + 2 = 4$	$v_2(\frac{64}{9} + \frac{2^4}{27}) = 4$	$\frac{2^4 - 2^4}{27} = 0$	$\frac{64}{9}$
3	3^4	$\frac{64}{9}$	$4 + 2 = 6$	$v_2(64 \cdot 9 + 2^6) = v_2(640) = 7$	$\frac{2^7 - 2^6}{81} = \frac{64}{81}$	0
4	3^5	$\frac{512}{81}$	$7 + 2 = 9$	$v_2(512 \cdot 3 + 2^9) = v_2(2048) = 11$	$\frac{2^{11} - 2^9}{243} = \frac{512}{81}$	0

Нулевой блок (строка $i = 2$) не завершает процесс: остаток переносится на следующий масштаб. Остановка происходит только при $R_{i+1} = 0$.

Проверка суммы (свёртка по масштабам):

$$\begin{aligned}
 7 &= \left(\frac{2^1}{3^1} - \frac{2^0}{3^1}\right) + \left(\frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^2}\right) + \left(\frac{2^4}{3^3} - \frac{2^4}{3^3}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{2^7}{3^4} - \frac{2^6}{3^4}\right) + \left(\frac{2^{11}}{3^5} - \frac{2^9}{3^5}\right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + 0 + \frac{64}{81} + \frac{1536}{243} \\
 &= \frac{81 - 108 + 192 + 1536}{243} = \frac{1701}{243} = 7.
 \end{aligned}$$

Сшивание [SEAM] в v по определению (10.2) даёт упорядоченную по масштабам запись

$$7 = [11, 9]_v \sqcap [7, 6]_v \sqcap [4, 4]_v \sqcap [2, 3]_v \sqcap [1, 0]_v = (11, 7, 4, 2, 1, 0)_v,$$

где $[4, 4]_v$ — нулевой блок, сохранённый для канонической полноты по индексам знаменателей 3^i .

11 Система счисления $4 \sqcap 3$

Введение

Представление чисел в рациональном основании $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые положительные целые числа, было предложено в [2].

В настоящей работе мы рассматриваем случай

$$\frac{p}{q} = \frac{4}{3},$$

мотивированный ограничениями системы $2 \sqcap 3$ и естественным разбиением цифры в записи позиции на два полуразряда в числителе.

Такой выбор согласуется с алгебраической формой оператора Φ : для нечётной головы F отношение

$$\frac{\Phi(F \cdot 2^b)}{F \cdot 2^b} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4F}$$

содержит базовый множитель $\frac{3}{4}$, то есть деление на 2^2 в архимедовой части. Поэтому естественно перейти от двоичного масштаба $\{2 \sqcap 3\}$ к масштабу $\{4 \sqcap 3\}$, где единицей измерения служит полуразряд (степень четвёрки). Это упрощает разложение приращения длины на архимедову и 2-адическую компоненты и делает шаги Φ согласованными с выбранной системой счисления.

Основание системы. Положим

$$q = \frac{4}{3} > 1.$$

Система с основанием q используется для позиционного представления чисел, позволяя отразить их арифметическую структуру как сумму «частей» (разрядов).

Алфавит цифр. В качестве цифр используются значения

$$\gamma(i) \in \left\{ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right\}.$$

Каждая цифра $\gamma(i)$ представляет собой дробную часть целого или группы элементов.

Definition 11.1 (Разряд). В канонической W_q -записи при $q = \frac{4}{3}$ под *разрядом* понимается позиция i в последовательности цифр $\gamma(i)$, отсчитываемая от младшей к старшей. Один разряд соответствует множителю q^i в представлении числа.

Definition 11.2 (Представление числа в системе $4 \sqcap 3$). Для $A \in \mathbb{N}$ его представление в системе с рациональным основанием $\frac{4}{3}$ (далее $4 \sqcap 3$) — это единственная запись вида

$$A = \sum_{i=0}^k \gamma(i) \left(\frac{4}{3} \right)^i,$$

где цифры $\gamma(i)$ принадлежат фиксированному алфавиту $\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ для всех $i \geq 0$, и $\gamma(k) \neq \frac{0}{3}$, если $k \geq 1, A \geq 1$. Такую запись удобно обозначать словом в $\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}^*$:

$$\langle A \rangle_{4 \sqcap 3} = \gamma_k \gamma_{k-1} \dots \gamma_0,$$

где γ_0 — младшая цифра, соответствующая коэффициенту при q^0 , а γ_k — старшая ненулевая цифра.

Definition 11.3 (Полуразряды). В системе $\{4 \sqcap 3\}$ каждый q -разряд $\gamma(i)$ можно разложить на два *полуразряда*:

$$\gamma(i) = s(i) \gamma(i_2) + t(i)(i) \gamma(i_1),$$

где $s(i), t(i) \in \{0, 1\}$, а

$$\gamma(i_2) = \frac{2}{3}, \quad \gamma(i_1) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом:

$$\frac{0}{3} = 0, \quad \frac{1}{3} = \gamma(i_1), \quad \frac{2}{3} = \gamma(i_2), \quad \frac{3}{3} = \gamma(i_2) + \gamma(i_1).$$

Отрицательные элементарные числа. При нормализации (например, после действия Φ или операции расщивания) возможны ситуации, когда в разряде i младший полуразряд $\gamma(i_1)$ присутствует, а старший $\gamma(i_2)$ — отсутствует или «занят» переносом на соседний уровень. В этом случае в записи элементарного числа согласно 10.4 может оказаться, что $\alpha(i) < \beta(i)$, и

$$E(i) = \frac{\alpha(i) - \beta(i)}{3}, \quad E(i) < 0.$$

Такие отрицательные элементарные числа отражают локальный «заём» из соседнего разряда: на уровне полуразрядов это означает, что часть положительного вклада перенесена вверх или вниз, оставив на данном уровне чисто отрицательный вклад.

Пример. Если в позиции i после переноса остался только младший полуразряд:

$$\gamma(i) = \gamma(i_1) = \frac{1}{3}, \quad \alpha(i) = 0, \quad \beta(i) = 1,$$

то $E(i) = -\frac{1}{3}$ — отрицательное элементарное число. Аналогично, при $\gamma(i) = \frac{2}{3}$ и $\alpha(i) = 0, \beta(i) = 2$ получаем $E(i) = -\frac{2}{3}$.

Позиционная запись. Любое натуральное число A может быть записано в системе q в виде

$$A_q = \sum_{i=0}^n \gamma(i) q^i.$$

Уникальность такой записи (при фиксированных правилах переноса) следует из схемы Горнера [20].

Пример. Для числа $A = 7$ получаем:

$$7_{10} = \frac{3}{3}q^4 + \frac{2}{3}q^3 + \frac{1}{3}q^2 + \frac{3}{3}q^1 + \frac{1}{3}q^0.$$

Эквивалентная форма. Умножая каждую цифру на $\frac{3}{4}$ и сдвигая степень q на 1, имеем:

$$A_{4\cap 3} = \sum_{i=0}^n \left(\gamma(i) \frac{3}{4} \right) q^{i+1},$$

где

$$\gamma(i) \frac{3}{4} \in \left\{ \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right\}.$$

Правила переноса. Пусть на позиции i после сложения или действия Φ получена цифра

$$\tilde{\gamma}(i) = \frac{k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $k \notin \{0, 1, 2, 3\}$, выполняем перенос:

- пока $k \geq 4$: положить $k \leftarrow k - 4$ и увеличить цифру $\gamma(i+1)$ на $1 = \frac{3}{3}$;
- пока $k < 0$: положить $k \leftarrow k + 4$ и уменьшить цифру $\gamma(i+1)$ на $1 = \frac{3}{3}$.

После переноса $\gamma(i) = \frac{k}{3}$ снова принадлежит алфавиту, а значение числа сохраняется, так как $q^i \cdot \frac{4}{3} = q^{i+1}$.

Definition 11.4 (Каноническая q -запись). Запись $A_q = \sum_{i=0}^n \gamma(i)q^i$ называется *канонической* в системе $\{4\cap 3\}$, если:

1. каждая цифра $\gamma(i)$ принадлежит алфавиту $\{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$;
2. отсутствуют лишние старшие нули: $\gamma(n) \neq \frac{0}{3}$;
3. для всех i выполнены условия переноса, описанные выше.

Lemma 11.5 (Корректность переноса). Пусть на позиции i получена промежуточная цифра $\tilde{\gamma}(i) = \frac{k}{3}$ с $k \notin \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда применение правил переноса:

$$k \leftarrow k - 4, \gamma(i+1) \leftarrow \gamma(i+1) + 1 \quad \text{или} \quad k \leftarrow k + 4, \gamma(i+1) \leftarrow \gamma(i+1) - 1$$

сохраняет значение числа A_q и уменьшает $|k|$ на 4. После конечного числа шагов получаем $\gamma(i) \in \{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$.

Доказательство. Так как $q^i \cdot \frac{4}{3} = q^{i+1}$, уменьшение k на 4 на позиции i и увеличение $\gamma(i+1)$ на 1 добавляет к сумме

$$-\frac{4}{3}q^i + 1 \cdot q^{i+1} = -\frac{4}{3}q^i + \frac{4}{3}q^i = 0,$$

и аналогично для отрицательного переноса. Инвариант значения сохраняется, а $|k|$ уменьшается на 4, что гарантирует завершение процесса. \square

11.1 Дробные позиции в системе q

- Для целых $i \geq 0$ запись числа в системе q имеет вид

$$A_q = \sum_{i=0}^n \gamma(i)q^i.$$

- Аналогично системам с основанием 10 или 2, в системе q можно ввести понятие запятой и рассматривать дробные позиции:

$$A_q = \sum_{i=-m}^n \gamma(i)q^i.$$

Далее рассмотрим примеры.

- **Сдвиг на одну позицию:**

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{3}\right)_q &= \frac{1}{3}q^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \\ \left(0, \frac{2}{3}\right)_q &= \frac{2}{3}q^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4}, \\ \left(0, \frac{3}{3}\right)_q &= \frac{3}{3}q^{-1} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- **Сдвиг на две позиции:**

$$\begin{aligned}\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)_q &= \frac{1}{3} q^{-2} = \frac{1}{4} q^{-1} = \frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \\ \left(0, 0, \frac{2}{3}\right)_q &= \frac{2}{3} q^{-2} = \frac{2}{4} q^{-1} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\ \left(0, 0, \frac{3}{3}\right)_q &= \frac{3}{3} q^{-2} = \frac{3}{4} q^{-1} = \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

- И так далее для больших сдвигов.
- **Целая и дробная части в системе W_q .** В представлении чисел системы W_q целая часть собирается из *третьей*, а дробная часть — из *четвертей*. При этом множители (делители) целой и дробной частей пропорциональны соответственно третям и четвертям.
- Рассмотрим представление делителей 2^{-r} , $r \in \mathbb{N}$, в W_q . Обозначим представление такого делителя в системе W_q как $\delta(-r)_q$.
Из $q^{-1} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ получаем итерационное построение по нарастающей:

$$\begin{aligned}\delta(-1)_q &= \frac{1}{2} = \left(0, \frac{2}{3}\right)_q, \\ \delta(-2)_q &= \frac{1}{4} = \frac{3}{3} - q^{-1}, \\ \delta(-3)_q &= \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{3} - q^{-1}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right)_q \cdot \left(\frac{3}{3} - q^{-1}\right), \\ &\vdots \\ \delta(-r)_q &= 2^{-r} = 2^{-r+2} \left(\frac{3}{3} - q^{-1}\right) = \delta(-r+2)_q \cdot \left(\frac{3}{3} - q^{-1}\right).\end{aligned}\tag{11.1}$$

- **Пример нормализации.** Пусть в результате сложения получен разряд $\left(0, \frac{4}{3}\right)_q$. Это значение превышает допустимый максимум $\frac{3}{3}$, поэтому разряд обнуляется с переносом $1 = \frac{3}{3}$ в следующий разряд. Дальнейшие возможные итерации выполняются аналогично.

11.2 Особые противоречия в системе q

- В десятичной системе меньшему числу соответствует более короткая запись:

$$101_{10} < 1001_{10}.$$

- В системе q меньшему числу может соответствовать *более длинная* запись. Длину будем измерять числом позиций от запятой. Например:

$$\left(\frac{1}{3} 0 \frac{1}{3}\right)_q < \left(\frac{3}{3}\right)_q = 1_{10},$$

хотя первая запись длиннее.

- **Инверсии порядка («числовой беспорядок»).** Внутри одного разряда порядок значений очевиден, но при переходе на следующий разряд возможна инверсия:

$$\left(\frac{1}{3}\right)_q \cdot q^{i+1} < \left(q^i\right)_q.$$

То есть меньший коэффициент при более высокой степени q может дать меньшее число, чем больший коэффициент при более низкой степени.

- **Таблица «беспорядка».** Она строится из неравенств вида

$$\gamma(i)_q < \gamma(i-1),$$

которые дают три случая:

$$\frac{1}{3}q < \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}q < \frac{3}{3}, \quad \frac{2}{3}q < \frac{3}{3}.$$

Аналогично для сдвига на два разряда:

$$\gamma(i)_q q^2 < \gamma(i-2),$$

два случая:

$$\frac{1}{3}q^2 < \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}q^2 < \frac{3}{3}.$$

Для сдвига на три разряда:

$$\gamma(i)_q q^3 < \gamma(i-3),$$

один случай:

$$\frac{1}{3}q^3 < \frac{3}{3}.$$

- **Граница эффекта.** При сдвиге на четыре разряда

$$\gamma(i)q^4 < \gamma(i-4)$$

решений уже нет, так как

$$\frac{1}{3}q^4 > \frac{3}{3}.$$

11.3 Различие между потенциалом и позиционной длиной числа в системе q

- Как показано в предыдущем разделе, система $q = \frac{4}{3}$ обладает свойством *беспорядка*: порядок чисел и длина их записи могут не совпадать с привычной интуицией. Меньшее число может иметь более длинную запись, а при переходе между разрядами возможны инверсии порядка.
- Чтобы корректно сравнивать числа в такой системе и построить убывающую меру, вводится понятие *потенциала*. Потенциал учитывает не только текущую длину записи, но и «запас» в хвосте, способный вызвать рост длины при переносах.
- **Пример.** Рассмотрим два числа в системе q :

$$\underbrace{\left(\frac{3}{3} \frac{3}{3} \dots \frac{3}{3} \frac{3}{3}\right)}_{n \text{ разрядов}}_q$$

и

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3} \frac{0}{3} \dots \frac{0}{3} \frac{0}{3}\right)}_{n+1 \text{ разрядов}}_q.$$

Вторая запись длиннее на один разряд, но по значению может быть меньше первой. Потенциал позволяет корректно отразить их относительный «вес» в динамике.

- **Интерпретация.** Число в системе q можно рассматривать как распределение общей величины потенциала между масштабами i :

$$A_q = \sum_i \gamma(i)q^i, \quad P(A) = \sum_i p_i$$

где p_i — вклад потенциала от разряда i .

- **Определение.** Для чисел без дробной части естественным выбором является

$$P(A) = \log_q A,$$

что соответствует длине в системе q в непрерывной шкале. В отличие от дискретной длины (числа разрядов), потенциал меняется плавно и монотонно при изменении A и не подвержен локальным инверсиям порядка.

12 Преобразование Φ в системе q

Состояние на входе. В терминах ускоренной динамики Коллатца каждое число A представляется в виде

$$A = N \cdot 2^b,$$

где:

- N — *нечётная голова* (odd part), $N \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$;
- 2^b — *хвост*, чётный множитель, который можно трактовать как количество делителей 2 в запасе.

Замечание о различии систем. В системе $\{2\uparrow 3\}$ операция SEAM («сшивание») соединяет нечётную голову с хвостом следующего масштаба, не изменяя показатель степени двойки. В системе $4\uparrow 2$ (см. действия в рамке для 4_3) шаг Φ после обработки головы всегда сопровождается увеличением показателя b на $t = v_2(3N + 1)$, что эквивалентно умножению предыдущего делителя на 2^t .

Определение оператора Φ . Оператор Φ действует на пару (N, b) следующим образом:

1. **Шаг головы:** вычисляем

$$S = 3N + 1, \quad t = \nu_2(S) (\geq 1), \quad N' = \frac{S}{2^t} \text{ (новая нечётная голова).}$$

В рациональной форме до нормализации это можно записать как

$$N \mapsto \frac{3}{4}N + \frac{1}{4},$$

что в q -записи реализуется как временные дробные разряды, устраняемые переносами.

2. **Шаг хвоста:** обновляем показатель степени двойки

$$b' = b + t \quad (\text{новое количество делителей}).$$

Выход:

$$\Phi(N, b) = (N', b'), \quad \text{то есть} \quad N \cdot 2^b \xrightarrow{\Phi} N' \cdot 2^{b'}.$$

Эквивалентность в системе q . В записи

$$A_q = \sum_{i=s}^p \gamma(i) q^i$$

преобразование Φ соответствует:

- действию на голову: $\gamma(s)$ изменяется по правилу $N \mapsto \frac{3}{4}N + \frac{1}{4}$ (с последующей нормализацией);
- переносу хвоста: 2^b сдвигается на t позиций вверх, что в q -системе соответствует сдвигу на t разрядов.

Эквивалентность понимается в смысле равенства в \mathbb{Q} ; сама форма записи может измениться из-за нормализации.

Свойства Φ .

1. *Совместимость с делением на степень двойки:*

$$\Phi\left(\frac{A}{2^z}\right) = \frac{1}{2^z} \Phi(A), \quad z \in \mathbb{N}_0.$$

2. *Параллельный перенос цифр в q -записи:*

$$A_q = q \cdot \sum_{i=s}^p \gamma(i) \left(\frac{3}{4}q^i\right) = q \cdot \sum_{i=s-1}^{p-1} \gamma(i+1) q^i.$$

Это формализует сдвиг блока на один масштаб.

Оговорки.

- На вход Φ подаётся нечётная голова N и хвост 2^b ; если A чётно, сначала выделяется его 2-адическая часть.
- При переходе $N \mapsto N'$ возможны промежуточные рациональные значения, которые в q -записи реализуются как временные дробные разряды и всегда нормализуются.
- В $\{2 \sqcup 3\}$ -системе перед применением Φ может выполняться SEAM, если $b = 0$ и хвост берётся с более высокого масштаба.

Таблица 5: Итерации оператора Φ (старт $N_0 = 7$, $b_0 = 0$) с q -записью и промежуточным значением A_k для перехода к масштабу головы

k	q -запись A_k	N_k	b_k	$t_k = v_2(3N_k + 1)$	$\Phi_{\text{raw}}(A_k) = \frac{3N_k + 1}{2^{t_k}}$	Промежуточное значение $A_k = \frac{N_k}{2^{b_k}}$
0	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{1/3 \ 1/3}^{\text{хвост}}$	7	0	1	$\frac{22}{2} = 11$	7
1	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{0/3 \ 2/3}^{\text{хвост}}$	11	1	1	$\frac{34}{2} = 17$	$\frac{11}{2}$
2	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{0/3 \ 1/3}^{\text{хвост}}$	17	2	2	$\frac{52}{4} = 13$	$\frac{17}{4}$
3	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{1/3 \ 0/3}^{\text{хвост}}$	13	4	3	$\frac{40}{8} = 5$	$\frac{13}{16}$
4	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{0/3 \ 1/3}^{\text{хвост}}$	5	7	4	$\frac{16}{16} = 1$	$\frac{5}{128}$
5	$\overbrace{3/3 \ 2/3 \ 1/3}^{\text{голова}} \ \overbrace{0/3 \ 0/3}^{\text{хвост}}$	1	11	2	$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{1}{2048}$

Примечание. A_k — это рациональное значение головы, получаемое делением N_k на 2^{b_k} . Оно служит для перехода от масштаба всего числа к масштабу головы и не является отдельным состоянием траектории.

Algorithm 1: Действие оператора Φ в q -записи

Input: Каноническая q -запись числа $A_q = \sum_{i=s}^p \gamma(i) q^i$, где $q = \frac{4}{3}$, выделены *голова* N и *хвост* 2^b .

Output: Новая пара (N', b') и её q -запись после применения Φ .

1. Шаг головы:

1. Вычислить $S \leftarrow 3N + 1$.
2. Найти $t \leftarrow v_2(S)$ — показатель степени двойки в S .
3. Определить новую нечётную голову $N' \leftarrow S/2^t$.
4. В q -записи реализовать $N \mapsto \frac{3}{4}N + \frac{1}{4}$:
 - умножить все цифры головы $\gamma(i)$ на $\frac{3}{4}$;
 - прибавить $\frac{1}{4}$ к младшему разряду головы $\gamma(s)$;
 - выполнить *нормализацию* по правилам переноса, пока $\gamma(i) \in \{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$.

2. Шаг хвоста:

1. Обновить показатель хвоста: $b' \leftarrow b + t$.
2. В q -записи сдвинуть хвост на t позиций вверх (увеличить индексы соответствующих разрядов на t).

3. Выход: вернуть (N', b') и нормализованную q -запись A'_q .

Корректность: по линейности операций в \mathbb{Q} и лемме о корректности переноса, полученная q -запись A'_q представляет число

$$A' = \frac{3N + 1}{2^{b'}} = \Phi(A),$$

и процесс нормализации всегда завершается за конечное число шагов.

Пояснение. Таблица 5 иллюстрирует пошаговую работу ускоренного шага Коллатца, записанного через оператор Φ , одновременно в двух представлениях:

- *позиционная запись* в системе $q = \frac{4}{3}$ с выделением нечётной *головы* и чётного *хвоста* (делителей 2);
- *числовые параметры* (N_k, b_k, t_k) и рациональные формы.

На каждой итерации k :

1. N_k — нечётная часть числа A_k после выделения всех множителей 2;
2. b_k — показатель степени двойки в хвосте 2^{-b_k} ; хвост накапливает найденные на предыдущих шагах множители 2;
3. $t_k = v_2(3N_k + 1)$ — количество двоек, на которое делится $3N_k + 1$; именно на t_k увеличивается показатель хвоста: $b_{k+1} = b_k + t_k$;

4. $\Phi_{\text{raw}}(A_k) = \frac{3N_k + 1}{2^{b_k}}$ — сырая форма шага, до выделения нового 2-адического множителя; в q -записи на этом этапе могут появляться временные дробные разряды;
5. $A_k = \frac{N_k}{2^{b_k}}$ — нормализованное состояние, где голова снова нечётная, а хвост — допустимая степень двойки.

В колонке q -записи нули 0/3 явно показывают пустые разряды, чтобы избежать двусмысленности; конструкции

вида $\overbrace{\dots}^{\text{голова}} \overbrace{\dots}^{\text{хвост}}$ визуально отделяют старшие разряды от хвоста.

Замечание. Все численные значения в таблице согласованы между собой; читатель может самостоятельно выполнить вычислительную проверку, последовательно применяя определения $S_k = 3N_k + 1$, $t_k = v_2(S_k)$, $N_{k+1} = S_k/2^{t_k}$ и $b_{k+1} = b_k + t_k$.

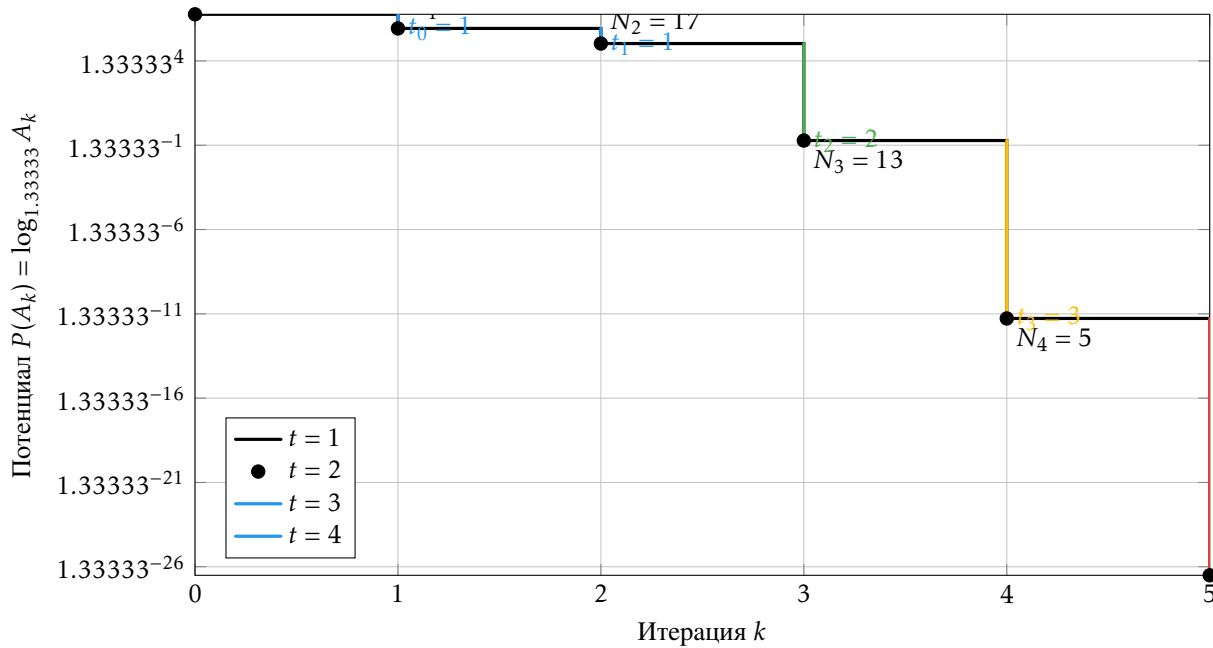


Рис. 2: Дискретная траектория A_k на логарифмической шкале по $q = \frac{4}{3}$. Горизонтальные участки между вертикальными переходами соответствуют масштабам (i) в смысле определения из разд. 13, на каждом из которых показатель хвоста $b(i)$ постоянен, а элементарное число $E(i)$ остаётся закреплённым.

Замечание о сложении в рациональных системах. Как показано в [3], операции сложения и вычитания в системах с рациональным основанием p/q не сводятся к тривиальным поколоночным правилам, как в целых основаниях, и в общем случае требуют использования конечных преобразователей (finite transducers), работающих справа налево и реализующих нетривиальные переносы.

В системе $\{4\overline{13}\}$ прибавление константы (например, $\frac{1}{3}$ или $\frac{4}{3}$) в рамках шага головы оператора Φ является частным случаем такой операции. В настоящей работе оно реализуется *явно* через локальные правила переноса, сформулированные в разд. 11:

1. к младшему разряду головы $\gamma(s)$ прибавляется соответствующая дробь;
2. при необходимости выполняются переносы, пока все $\gamma(i) \in \{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$;
3. корректность переноса гарантируется леммой 11.5.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае роль «преобразователя» играет описанный выше алгоритм нормализации, что обеспечивает корректность сложения в q -записи.

13 Расщепление шагов итерации в системе q

13.1 Масштаб и закреплённый остаток

Рассмотрим состояние на шаге i :

$$A(i) = N(i) \cdot 2^{b(i)}, \quad D(i) = 2^{b(i)}, \quad N(i) \text{ нечётно.}$$

Определение масштаба. *Масштаб* (i) — вычислительная стадия с фиксированным показателем хвоста $b(i)$ (и, следовательно, фиксированным $D(i)$), на которой оператор Φ действует на голову $N(i)$:

$$S(i) = 3N(i) + 1, \quad t(i) = v_2(S(i)), \quad N(i+1) = \frac{S(i)}{2^{t(i)}}, \quad b(i+1) = b(i) + t(i).$$

Элементарное число. Введём

$$E(i) = \frac{D(i) - D(i-1)}{3} = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3},$$

которое интерпретируется как *элементарное число* — остаток, возникающий при переходе $(i-1) \rightarrow i$ и остающийся закреплённым на масштабе (i) . Последующие шаги Φ его не переносят и не изменяют.

Разложение на перенос и остаток. Используя $q = \frac{4}{3}$, получаем тождество:

$$\begin{aligned} A(i) - D(i-1) &= \left[A(i) + \frac{1}{3}D(i) \right] - qD(i) + [D(i) - D(i-1)] \\ &= q(A(i+1) - D(i)) + E(i), \end{aligned} \quad (13.1)$$

где:

- $q(A(i+1) - D(i))$ — *перенос* на следующий масштаб $(i+1)$;
- $E(i)$ — *закреплённый остаток* масштаба (i) .

Интерпретация. На каждом масштабе (i) оператор Φ :

1. обновляет параметры состояния $(N(i+1), b(i+1))$;
2. отделяет локальный вклад $E(i)$, который остаётся прикрепленным к масштабу (i) ;
3. передаёт переносимую часть $q(A(i+1) - D(i))$ на масштаб $(i+1)$.

Телескопическое разложение. Повторяя тождество по i , получаем:

$$A(0) = q^m(A(m) - D(m-1)) + \sum_{i=0}^{m-1} q^i \cdot E(i),$$

где каждый $q^i \cdot E(i)$ — зафиксированный вклад масштаба (i) , а первый член — перенос на верхний масштаб.

13.2 Делитель $D(i)$

С одной стороны, число в q -записи:

$$A_q = \sum_{j=s}^p \gamma(j) q^j.$$

С другой — в виде головы и хвоста:

$$A_q = N(A) d(A), \quad N(A) \text{ нечётно}, \quad d(A) = 2^b.$$

Делитель, соответствующий последней ненулевой цифре $\gamma(s)q^s$, должен быть согласован с общим делителем $D(A)$. Для отдельной цифры:

$$D(\gamma(s)q^s) = \begin{cases} 1 \cdot 4^s, & \gamma(s) \in \{\frac{1}{3}, \frac{3}{3}\}, \\ 2 \cdot 4^s, & \gamma(s) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда следует ограничение:

$$D(A) \geq D(\gamma(s)q^s).$$

14 Преобразование потенциала оператором Phi

Введём функцию потенциала, измеряющую «высоту» состояния A относительно основания q :

$$P(A) = \log_q A.$$

Потенциал до применения Φ :

$$P(A) = \log_q A$$

— исходное значение потенциала для текущего состояния A .

Потенциал после применения Φ :

$$P(\Phi(A)) = \log_q \Phi(A)$$

— значение потенциала для нового состояния, полученного после одного шага Φ .

Изменение потенциала: Разность потенциалов до и после шага показывает, насколько «опустилось» число на шкале q :

$$\Delta P\left(\frac{\Phi(A)}{A}\right) = P(\Phi(A)) - P(A)$$

Подставляя определения, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta P\left(\frac{\Phi(A)}{A}\right) &= \log_q \Phi(A) - \log_q A \\ &= \log_q \left(\frac{\Phi(A)}{A}\right) = \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{D(A)}{A}\right) \\ &= \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{N(A)}\right) \quad (14.1) \end{aligned}$$

Здесь $D(A)$ — хвост (делитель, степень двойки), а $N(A)$ — нечётная голова числа A .

Знак ΔP : Так как $N(A)$ нечётно и $N(A) \geq 1$, дробь $\frac{1}{N(A)} \leq 1$, а значит выражение в скобках всегда меньше 1 в основании $q > 1$. Следовательно:

$$\Delta P < 0.$$

Это означает, что на каждом шаге Φ потенциал строго убывает и стремится к предельному значению -1 .

15 Потенциал и длина числа в системе q

В q -записи число A можно рассматривать как последовательность цифр $\gamma(i)$ в степенях q . Это позволяет ввести понятие длины числа и связать его с потенциалом.

Определение длины числа:

$$A_q = \sum_{i=s}^p \gamma(i) q^i$$

Здесь p — номер старшей значащей цифры, s — номер младшей значащей цифры, а $\gamma(i)$ — цифры q -записи.

Значащие цифры:

$$l(A) = p - s, \quad p, s \in \mathbb{Z}$$

Длина $l(A)$ — это количество значащих разрядов между p и s . Подсчёт p и s ведётся относительно запятой в q -записи.

Определение p : Старший индекс p связан с целой частью потенциала:

$$p + 1 > \lfloor \log_q A \rfloor \geq p$$

и уточняется через старшую цифру:

$$\log_q A > \log_q (\gamma(p) q^p) = \log_q \gamma(p) + p$$

Так как $\gamma(p) < q$, имеем $\log_q \gamma(p) < 0$.

Определение s : Младший индекс s определяется через хвост $D(A)$:

$$s = \lfloor \log_4 D(A) \rfloor$$

Это отражает, что каждый шаг по s соответствует умножению хвоста на 4.

Длина записи в количестве q -разрядов

$$l(A) = \lfloor P(A) \rfloor - s = \lfloor \log_q A \rfloor - \lfloor \log_4 D(A) \rfloor$$

Таким образом, длина в q -записи — это целая часть потенциала минус вклад хвоста.

Свойство длины при сдвиге: При умножении числа на q^a его длина в q -ичной системе увеличивается на a разрядов:

$$l(A \cdot q^a) = l(A) + a.$$

Это свойство удобно для оценки, как изменится длина при сдвиге числа на несколько разрядов в q -системе.

16 Метрика L и её свойства

Выбор формы метрики. В работе [6] длина числа в рациональной системе счисления $3/2$ вводится как *дискретная* величина — целое количество цифр в $(3/2)$ -записи. Такой подход естественен для комбинаторного анализа языка представлений, но в динамических задачах он приводит к редким ситуациям, когда приращение дискретной метрики ΔL_{dig} «не срабатывает» из-за округления вниз, хотя в непрерывной шкале рост или убывание длины есть. Эти случаи требуют отдельного учёта и доказательств об их редкости и накопительном эффекте при итерациях.

В отличие от указанной работы, здесь мы используем *непрерывную* версию метрики.

Разрядная и делительная длины. Следуя [2, 11], будем различать два независимых измерения размера числа N в системе $q = \frac{4}{3}$:

- *Разрядная длина* — потенциал значащих q -полуразрядов в N :

$$L_{\text{dig}}(N) = 2 \log_q N.$$

Это соответствует потенциалу длины слова (*digit length*) в (a/b) -записи в смысле [2].

- *Делительная длина* — показатель степени двоичного *делителя* $D(N) = 2^{b(N)}$, измеренный в двоичных полуразрядах:

$$L_{\text{div}}(N) = b(N) = v_2(N) = 2 \log_4 D(N).$$

Это соответствует p -адической норме (* p -adic valuation*) в смысле [11].

Уточнение для динамики шага. В дальнейшем под *разрядной длиной* числа N понимаем

$$L_{\text{dig}}(N) = 2 \log_q N,$$

то есть потенциал значащих q -полуразрядов *всего* числа N в W_q -записи.

Для описания одного шага оператора Φ удобно выделять *нечётное ядро* $F(N)$ из разложения

$$N = F(N) \cdot D(N), \quad D(N) = 2^{b(N)}, \quad v_2(F(N)) = 0.$$

Ядро F не является разрядной мерой, а служит для вычисления

$$S = 3F + 1, \quad t = v_2(S), \quad F' = \frac{S}{2^t}, \quad D' = 2^{b(N)+t}.$$

Величина t — это *верхняя граница элементарного числа* на данном шаге: она определяет толщину нового слоя делителя, который будет «срезан» при переходе к F' .

Таким образом:

- разрядная длина L_{dig} относится к числу N *целиком*;
- нечётное ядро F и $t = v_2(3F + 1)$ относятся к *операции шага* и задают разрез между разрядной и делительной частью по верхней границе элементарного числа.

Definition 16.1 (Метрика L . Большая длина). Пусть $N(i) = F(i) \cdot D(i)$, $D(i) = 2^{b(i)}$, $q = \frac{4}{3}$. Определим *большую длину* как

$$L(N) = 2 \log_q N - b(N) = 2 \log_q N - 2 \log_4 D(N).$$

В динамике шага Φ изменение метрики раскладывается на

$$\Delta L = \underbrace{\Delta U_L}_{\text{разрядная часть}} - \underbrace{\Delta B_L}_{\text{делительная часть}}, \quad \Delta B_L = \Delta b, \quad \Delta b = d(i) = t(i) - t(i-1),$$

где $d(i)$ — глобальное приращение делительного потенциала, а $t(i)$ — текущая верхняя граница делителя.

Замечание. Дискретная версия метрики — это естественная дискретизация L :

$$L_{\text{disc}}(N) = \lfloor 2 \log_q N \rfloor - \lfloor 2 \log_4 D(N) \rfloor = \lfloor 2 \log_q N \rfloor - b(N).$$

Она измеряет длину в *целых* полуразрядах и удобна для комбинаторной интерпретации как количества разрядов в q -записи. В настоящей работе основное внимание уделяется непрерывной версии $L(N)$, которая позволяет избежать редких пограничных эффектов дискретизации и обеспечивает единообразное вычисление ΔL на каждом шаге итерации.

Потенциал числа и делителей при итерациях. В метрике L мы рассматриваем число N как обладающее *двумя* видами потенциала:

- **Архимедов потенциал** $U(N) = 2 \log_q N$ — отражает «разрядную» длину числа в полуразрядах. При действии Φ он почти всегда *уменьшается*, так как множитель $\frac{3}{4} + \frac{1}{4F}$ меньше 1 для нечётных $F > 1$.
- **Делительный потенциал** $B(N) = b(N)$ — отражает степень двоичного делителя числа. При переходе $N(i) \rightarrow N(i+1)$ он меняется на $d(i) = t(i) - t(i-1)$, где $t(i) = v_2(3F(i) + 1)$ — верхняя граница делителя на шаге i .

Архимедов потенциал даёт *отрицательный* вклад в приращение длины, а делительный потенциал — *положительный*, так как рост делителя компенсирует падение архимедовой части. Если делитель уменьшается ($d(i) < 0$), это, наоборот, усиливает падение длины.

Масштаб и разложение приращения. Работаем в *масштабе всего числа* (whole- N) по определению 16.1:

$$L(N) = 2 \log_q N - b(N), \quad q = \frac{4}{3}.$$

При одном шаге Φ :

$$\Delta L(i) = \underbrace{2 \log_q \frac{N(i+1)}{N(i)}}_{\Delta U_L(i)} - \underbrace{d(i)}_{\Delta B_L(i)}, \quad d(i) = t(i) - t(i-1),$$

где $t(i) = v_2(3F(i) + 1)$, $t(-1) = 0$.

Для удобства: $N(i) = F(i) \cdot D(i)$, $S(i) = 3F(i) + 1 = 2^{t(i)} F(i+1)$, а потому

$$\frac{N(i+1)}{N(i)} = \frac{\Phi(N(i))}{N(i)} = \frac{S(i)}{4F(i)} = \frac{3}{4}$$

Масштаб и разложение приращения. Работаем в *масштабе всего числа* (whole- N) по определению 16.1:

$$L(N) = 2 \log_q N - b(N), \quad q = \frac{4}{3}.$$

При одном шаге Φ :

$$\Delta L(i) = \underbrace{2 \log_q \frac{N(i+1)}{N(i)}}_{\Delta U_L(i)} - \underbrace{d(i)}_{\Delta B_L(i)}, \quad d(i) = t(i) - t(i-1),$$

где $t(i) = v_2(3F(i) + 1)$, $t(-1) = 0$.

Для удобства: $N(i) = F(i) \cdot D(i)$, $S(i) = 3F(i) + 1 = 2^{t(i)} F(i+1)$, а потому

$$\frac{N(i+1)}{N(i)} = \frac{\Phi(N(i))}{N(i)} = \frac{S(i)}{4F(i)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)}.$$

i	$N(i)$	$S(i)$	$t(i)$	$t(i-1)$	$\Delta U_L(i)$	$\Delta B_L(i)$	$\Delta L(i) = \Delta U_L(i) - \Delta B_L(i)$	$\Delta L_{\text{окр}}$
0	27	82	1	0	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{108} \right)$	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{108} \right) - 1$	-2.91
1	41	124	2	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{164} \right)$	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{164} \right) - 1$	-2.94
2	31	94	1	2	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{124} \right)$	-1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{124} \right) + 1$	-0.92
3	47	142	1	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{188} \right)$	0	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{188} \right)$	-1.94
4	71	214	1	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{284} \right)$	0	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{284} \right)$	-1.94
5	107	322	1	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{428} \right)$	0	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{428} \right)$	-1.98
6	161	484	2	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{644} \right)$	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{644} \right) - 1$	-2.99
7	121	364	2	2	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{484} \right)$	0	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{484} \right)$	-1.95
8	91	274	1	2	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{364} \right)$	-1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{364} \right) + 1$	-0.97
9	137	412	2	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{548} \right)$	1	$2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{548} \right) - 1$	-2.95

Комментарии:

- **Фиксирован масштаб:** всё в масштабе всего числа по $L(N) = 2 \log_q N - b(N)$.
- **Архимедова часть:** $\Delta U_L(i) = 2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right)$ — почти всегда отрицательна.
- **Делительная часть:** $d(i) = t(i) - t(i-1)$ входит с минусом, уменьшая длину при росте делителя.
- **Без смены шкалы:** не используем переход к «голове»; head-масштаб вводится отдельно.

16.1 Отправная точка: анализ метрик длины в динамике преобразования Φ

В предыдущих разделах мы ввели необходимые определения метрик длины и потенциалов, а также обсудили их свойства. В настоящем разделе мы используем эти конструкции как *отправную точку* для исследования поведения длины числа в q -системе при действии преобразования Φ .

Опираясь на подходы, предложенные в работах [2, гл. 3], [11, § 4], [6, гл. 2], мы переходим от формальных определений к анализу динамики: фиксируем масштаб, раскладываем приращение длины на архимедову и 2-адическую компоненты и тем самым закладываем основу для дальнейших оценок, лемм и теорем, которые будут развиты в следующих подразделах.

16.2 Локально-глобальная интерпретация метрики L

Метрика

$$L(N) = 2 \log_q N - v_2(N), \quad q = \frac{4}{3},$$

где $v_2(N)$ — показатель степени двойки в разложении N , естественно понимается в терминах *локально-глобальной структуры* числовых высот.

Архимедова и 2-адическая компоненты

- **Архимедова часть:** $2 \log_q N$ — логарифмическая длина числа в полуразрядах по базе q . Соответствует вкладу бесконечного места ∞ в глобальной высоте числа.
- **2-адическая часть:** $v_2(N)$ — длина хвоста $2^{v_2(N)}$ в полуразрядах (в логарифмах по основанию 4: каждый множитель 2 даёт половину разряда). Это вклад локального места $p = 2$.

В терминах норм:

$$v_2(N) = -\frac{\log |N|_2}{\log 2}, \quad |N|_2 \text{ — 2-адическая норма.}$$

Разность как фокусированная высота

В классической теории чисел глобальная логарифмическая высота $h(N)$ строится как сумма локальных вкладов по всем местам поля (формула произведения). Здесь мы берём *разность* архимедового и 2-адического вкладов, что эквивалентно выбору только двух мест $(\infty, 2)$ и назначению им весов:

$$L(N) = c_\infty \cdot \log |N|_\infty + c_2 \cdot \log |N|_2,$$

где $c_\infty = \frac{2}{\log(4/3)}$, $c_2 = \frac{1}{\log 2}$.

Такое «усечённое» сочетание локальных норм встречается, например, в *высотах канонического типа* в арифметической динамике, когда исследуется поведение орбит относительно фиксированного множества мест.

Порядок вычисления при итерации

При шаге Φ с нечётным ядром F и текущим делителем $D = 2^b$:

1. Вычисляется архимедовый потенциал $U' = 2 \log_q(3F + 1)$ до отделения хвоста.
2. Определяется *верхняя граница элементарного числа* $t = v_2(3F + 1)$ — толщина нового слоя делителя.
3. Вычитается 2-адический вклад $E = t - t_{\text{prev}}$ (в полуразрядах), где t_{prev} — граница на предыдущем шаге.
4. Изменение метрики:

$$\Delta L = \underbrace{\left[2 \log_q(3F + 1) - 2 \log_q F \right]}_{\text{архимедовый рост}} - \underbrace{E}_{\text{2-адический штраф по верхней границе}}.$$

Такой порядок соответствует классическому разложению глобальной высоты на локальные компоненты: сначала учитывается полный рост по ∞ , затем вычитается локальный штраф по $p = 2$, но штраф ограничен текущей верхней границей элементарного числа, которая может быть как выше, так и ниже предыдущей.

Аналогии и источники

- Формула произведения и глобальные высоты: [7, гл. 1, §1.4]
- Локально-глобальные разложения в арифметической динамике: [12, гл. 3]
- 2-адическая норма и валюация: [5, гл. 1]

16.3 Определение рамки и механика на масштабах

Рамка — это концептуальный блок, описывающий одну итерацию оператора Φ в системе $q = \frac{4}{3}$ в масштабе всего числа по метрике L .

Визуально рамка изображается в виде прямоугольника:

- нижняя грань — состояние $N(i)$ на масштабе (i) ;
- верхняя грань — состояние $N(i+1)$ на масштабе $(i+1)$.

Состав нижней грани. На вход масштаба (i) приходит нечётное ядро $F(i)$ вместе с *полным делителем* $D(i-1) = 2^{b(i-1)}$, перенесённым сверху из предыдущей рамки. Параметр $t(i-1)$ фиксирует верхнюю границу делителя на предыдущем шаге.

Действия внутри рамки.

$$S(i) = 3F(i) + 1, \quad t(i) = v_2(S(i)), \quad F(i+1) = \frac{S(i)}{2^{t(i)}}, \quad D(i) = D(i-1) \cdot 2^{t(i)}.$$

Здесь $t(i)$ — показатель степени двойки в полном делителе на текущем шаге.

Элементарное число и перенос. В *числовой форме* «сырое» приращение делителя на масштабе (i) :

$$\mathcal{E}_{\text{num}}(i) = D(i) - D(i-1),$$

разность полных делителей в натуральных числах.

В *нормированной форме* (величина элементарного числа по определению 10.4):

$$E(i) = \frac{\mathcal{E}_{\text{num}}(i)}{3} = \frac{D(i) - D(i-1)}{3}.$$

В *метрической форме* (в полуразрядах) используется

$$d(i) = t(i) - t(i-1),$$

и именно оно даёт делительную часть приращения метрики:

$$\Delta B_L(i) = -d(i).$$

Верхняя грань рамки (i) содержит $F(i+1)$ и полный $D(i)$, в котором уже учтён слой $\mathcal{E}_{\text{num}}(i)$. Эта пара переходит на масштаб $(i+1)$.

Что остаётся на масштабе. На масштабе (i) фиксируется слой делителя $\mathcal{E}_{\text{num}}(i)$ как числовая разность $D(i) - D(i-1)$ (или $E(i)$ в нормированной форме). Он больше не изменяется при дальнейшем сдвиге рамки. В дальнейших итерациях участвует только $F(i+1)$ с полным $D(i)$, перенесённым вверх.

Приращение длины рамки. В масштабе всего числа по определению 16.1:

$$\Delta L(i) = \underbrace{2 \log_q \frac{N(i+1)}{N(i)}}_{\Delta U_L(i)} - \underbrace{(-d(i))}_{\Delta B_L(i)}, \quad q = \frac{4}{3}.$$

Где

$$\Delta U_L(i) = 2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right)$$

— архимедова (разрядная) часть в полуразрядной шкале всего числа.

Связь масштабов. Масштабы (i) и $(i+1)$ связаны началом и концом соседних элементарных чисел: $t(i-1)$ и $t(i)$.

Lemma 16.2 (Длина L и нечётная часть). Пусть $N = F \cdot 2^b$, где F нечётно, $b = v_2(N)$, и $q = \frac{4}{3}$. Тогда в непрерывной метрике $L(N) = 2 \log_q N - b$ значение $L(N)$ равно числу полуразрядов нечётной части F в W_q -записи. В частности, $L(N) = 1$ тогда и только тогда, когда $F = 1$.

Доказательство. Из $L(N) = 2 \log_q (F \cdot 2^b) - b = 2 \log_q F + 2 \log_q 2^b - b$ и $2 \log_q 2 = 1$ получаем $L(N) = 2 \log_q F + b - b = 2 \log_q F$. Это и есть число полуразрядов F в W_q -записи. Если $L(N) = 1$, то $2 \log_q F = 1$, откуда $F = 1$. \square

[Здесь будет схема с рамками и стрелками, иллюстрирующая механику перехода между масштабами]

Remark 16.3 (О дальнейшем). В этом разделе мы дискретизировали делитель, получив его целочисленную версию. Аналогичная процедура будет проведена для потенциала в разделе 19, после чего в конце того раздела мы сформулируем итоговые определения непрерывной и дискретной метрик, с которыми будем работать в дальнейшем, и которые станут основой анализа в § 20.

17 Длина числа в q при действии Φ

Приращение длины. В непрерывной метрике $L(N) = 2\log_q N - b(N)$ для $N = F \cdot 2^b$ и $q = \frac{4}{3}$ изменение длины в полуразрядах при шаге Φ записывается как

$$\Delta L(i) = \underbrace{2\log_q \frac{N(i+1)}{N(i)}}_{\text{непрерывная разрядная часть } \Delta_{\text{dig}}(i)} - \underbrace{\left[t(i) - t(i-1)\right]}_{\text{делительная часть } \Delta_{\text{div}}(i)=d(i)},$$

где $t(i) = v_2(3F(i)+1)$ — *верхняя граница элементарного числа* на шаге i , а $d(i)$ — *приращение делителя* относительно предыдущего шага в полуразрядах.

Вклад архимедовой части. Так как $N(i) = F(i) \cdot D(i-1)$, имеем

$$\Delta_{\text{dig}}(i) = 2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right),$$

что является непрерывным вкладом изменения разрядной длины числа при переходе $N(i) \rightarrow N(i+1)$.

Итог.

$$\Delta L(i) = 2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right) - d(i),$$

где $d(i) = t(i) - t(i-1)$ — число в полуразрядах. При $d(i) > 2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right)$ длина убывает, при равенстве — сохраняется, при меньшем значении — растёт.

Таблица 6: Примеры изменения L при действии Φ (непрерывная метрика)

F	$t(i)$	$t(i-1)$	$d(i)$	$\Delta L(i)$
7	1	0	1	$2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{28} \right) - 1$
5	4	0	4	$2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20} \right) - 4$
11	1	0	1	$2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{44} \right) - 1$
13	3	0	3	$2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{52} \right) - 3$
17	2	0	2	$2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{68} \right) - 2$

18 Определения для динамических понятий

Масштаб. Масштабом будем называть состояние числа N в q -системе, заданное парой

$$(F(i), D(i)), \quad N(i) = F(i) \cdot D(i), \quad D(i) = 2^{b(i)},$$

где $F(i)$ — *голова* (нечётная часть числа в W_q -записи, без двоичного делителя), а $D(i)$ — *делитель* (степень двойки). Масштаб соответствует фиксированному «уровню» на вертикальной ленте рамок.

Динамика. Динамика в терминах рамки — это последовательность переходов

$$(F(i), D(i)) \rightarrow (F(i+1), D(i+1))$$

при итерациях Φ , когда верхняя грань одной рамки становится нижней гранью следующей. Каждый переход изменяет:

- *разрядную длину* (по q) — архимедову компоненту метрики;
- *делительную длину* (по 2) — 2-адическую компоненту метрики.

Эти изменения суммируются в приращении

$$\Delta L(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) - \Delta_{\text{div}}(i),$$

где $\Delta_{\text{div}}(i)$ в кумулятивной трактовке равно приращению верхней границы делителя

$$\Delta_{\text{div}}(i) = d(i) = t(i) - t(i-1), \quad t(i) = v_2(3F(i)+1),$$

а в локальной трактовке для нечётной головы $t(i-1) = 0$ и $\Delta_{\text{div}}(i) = t(i)$.

Результат на масштабе. Помимо новой пары $(F(i+1), D(i+1))$, результатом шага на масштабе (i) является *остаток* $E(i)$ — *элементарное число* в q -записи, фиксируемое в рамке. Этот остаток отражает «срезанную» часть головы при переходе и определяется как толщина нового слоя делителя в двоичных полуразрядах:

$$d(i) = t(i) - t(i-1).$$

В нормированной форме величина элементарного числа

$$E(i) = \frac{D(i) - D(i-1)}{3}$$

используется в телескопической формуле.

19 Анализ поведения потенциала как функции

Установка. Фиксируем $q = \frac{4}{3}$. Для $N = F \cdot 2^b$ (нечётная голова F и делитель $D = 2^b$) рассматриваем потенциал

$$P(N) = \log_q N,$$

как функцию дискретного аргумента i вдоль траектории $N(i)$ преобразования Φ . Нас интересует приращение потенциала при переходе $i \rightarrow i+1$ через «чисто головной» множитель

$$\frac{\Phi(N)}{N} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4F},$$

то есть без учёта изменения делителя. Изменение делителя учитывается отдельно через *приращение делительного потенциала*

$$d(i) = t(i) - t(i-1), \quad t(i) = v_2(3F(i) + 1),$$

входящее во вторую компоненту приращения метрики $\Delta L = \Delta_{\text{dig}} - d(i)$.

Монотонность и диапазон. Для нечётных $F \geq 1$ функция

$$f(F) = \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F} \right)$$

строго убывает по F и принимает значения в интервале $[-1, 0]$, причём $f(1) = 0$ и $f(F) \rightarrow \log_q(3/4) = -1$ при $F \rightarrow \infty$.

Модель разности целых частей. Положим $x = 2 \log_q N$ и

$$a = -2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F} \right) \in [0, 2).$$

Тогда «головной» вклад в полуразрядах

$$\Delta_{\text{dig}} = \lfloor x - a \rfloor - \lfloor x \rfloor$$

принимает значения

$$\Delta_{\text{dig}} \in \begin{cases} \{0, -1\}, & a \in (0, 1), \\ \{-1, -2\}, & a \in (1, 2), \\ \{0\}, & a = 0. \end{cases}$$

Для типичных нечётных $F \geq 3$ имеем $a \in (1, 2)$, откуда $\Delta_{\text{dig}} \in \{-1, -2\}$.

Следствия для изменения длины. Полное приращение большой длины в кумулятивной трактовке:

$$\Delta L(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) - d(i).$$

В локальной трактовке для нечётной головы $t(i-1) = 0$ и $d(i) = t(i)$.

Отсюда:

- *Случай $d = 1$* (локально $t = 1$). Тогда $\Delta L \in \{-1, -2\}$ в общем случае. Нулевая компенсация $\Delta L = 0$ возможна лишь при редком «перескоке» $\Delta_{\text{dig}} = +1$, когда $2 \log_q N$ переходит через целую границу.
- *Случай $d \geq 2$* (локально $t \geq 2$). Тогда $\Delta L \leq -2$, то есть длина убывает минимум на один полный разряд (два полуразряда).

Редкая компенсация. Сохранение длины $\Delta L = 0$ достигается только при

$$d(i) = 1 \quad \text{и} \quad \lfloor 2\log_q \Phi(N) \rfloor - \lfloor 2\log_q N \rfloor = +1,$$

когда рост разрядной части на один полуразряд точно компенсирует увеличение делителя на одну степень двойки.

Definition 19.1 (Непрерывная и дискретная метрики). Зафиксируем $q = \frac{4}{3}$.

Определим непрерывную метрику

$$L(N) := 2\log_q N - v_2(N),$$

где $v_2(N)$ — показатель степени двойки в N , измеренный в полуразрядах.

Определим дискретизацию $L(N)$

$$L_{\text{disc}}(N) := \lfloor 2\log_q N \rfloor + b(N), \quad b(N) := v_2(N).$$

В частности, L_{disc} принимает целые неотрицательные значения, и $L_{\text{disc}}(N) = 0$ тогда и только тогда, когда $N \in \{1, 2, 4\}$.

Remark 19.2 (Согласование знаков). Всюду далее $b(N) = v_2(N) \geq 0$, и в непрерывной метрике архимедова часть учитывается со знаком «плюс», 2-адическая — со знаком «минус»; в дискретной версии берётся целая часть архимедовой компоненты и 2-адическая компонента с плюсом, что гарантирует целочисленность и нижнюю грань 0.

В следующем разделе мы исследуем поведение этих метрик при переходах $N(i) \rightarrow N(i+1)$ и выведем строгие оценки их изменения.

20 Сохранение длины L при преобразовании Φ

Ремарка о необходимых и достаточных условиях сохранения длины. В дальнейшем под *сохранением длины* будем понимать выполнение $\Delta L_{\text{disc}} = 0$ в дискретной метрике. Это требует **одновременного** выполнения двух условий:

1. арифметического: $t(i) = v_2(3F(i) + 1) = 1$ (минимальный рост делителя);
2. метрического: $\Delta_{\text{dig}}(i) = -1$, что эквивалентно выполнению критерия «перескока» по дробной части $2\log_q N(i)$.

Первое условие является необходимым, но *не* достаточным: оно не гарантирует автоматического выполнения второго. В частности, случай $F \equiv 3 \pmod{4}$ всегда даёт $t = 1$, но сохранение длины происходит только при выполнении позиционного условия на дробную часть.

Theorem 20.1 (Рост делительной длины при $F \equiv 3 \pmod{4}$). Пусть $N = F \cdot 2^b$, F нечётно, и $q = \frac{4}{3}$. Если $F \equiv 3 \pmod{4}$, то при одном шаге Φ имеем

$$t = v_2(3F + 1) = 1, \quad b' = b + 1,$$

то есть делительная длина (в полуразрядах) увеличивается на +1.

Доказательство. Если $F = 4k + 3$, то $3F + 1 = 12k + 10 = 2(6k + 5)$ и $6k + 5$ нечётно, значит $v_2(3F + 1) = 1$. Следовательно, $b' = b + 1$. \square

Theorem 20.2 (Оценка падения архимедовой длины). Пусть $N = F \cdot 2^b$ с нечётным F и $q = \frac{4}{3}$. Тогда

$$\Delta U(N) := 2\log_q \frac{F'}{N} = 2\log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F} \right) \leq -1 \quad \text{для всех нечётных } F \geq 3,$$

а для $F = 1$ имеем $\Delta U(N) = 0$. Кроме того, $\Delta U(N) \rightarrow -2$ при $F \rightarrow \infty$.

Доказательство. $r(F) := \frac{3}{4} + \frac{1}{4F}$ убывает по F и для $F \geq 3$: $r(F) \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{6} \leq \sqrt{\frac{3}{4}} = q^{-1/2}$. Потому $2\log_q r(F) \leq -1$. При $F = 1$ $r(1) = 1$, и $\Delta U = 0$. При $F \rightarrow \infty$ $r(F) \rightarrow q^{-1}$, так что $\Delta U \rightarrow -2$. \square

Proposition 20.3 (Комбинации приращений в непрерывной метрике). Пусть $N = F \cdot 2^b$, F нечётно, $q = \frac{4}{3}$. Для $F \geq 3$ имеем $-2 < \Delta U \leq -1$, и при

$$d(i) := t(i) - t(i-1)$$

получаем:

$$\Delta L = \Delta U - d(i) \in (-d(i) - 2, -d(i) - 1].$$

Отсюда:

- если $d(i) \geq 2$, то $\Delta L \leq -3$ (убывание минимум на полтора разряда);
- если $d(i) = 1$, то $\Delta L \in (-3, -2]$ (в непрерывной метрике — убывание на один–полтора разряда; в дискретной при редком «перескоке» возможно сохранение);
- если $d(i) \leq 0$, то $\Delta L \in (-2, -1]$ (убывание на один–два полуразряда).

Для $F = 1$ имеем $\Delta U = 0$ и $\Delta L = -d(i)$.

20.1 Переход к дискретной метрике и детерминированный дрейф

Далее работаем с дискретной длиной

$$L_{\text{disc}}(N) = \lfloor 2 \log_q N \rfloor - b(N),$$

где $b(N) = v_2(N)$ — показатель степени двойки в N , измеренный в полуразрядах. Для шага Φ :

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) + \Delta b(i),$$

где

$$\Delta_{\text{dig}}(i) = \lfloor 2 \log_q N(i+1) \rfloor - \lfloor 2 \log_q N(i) \rfloor, \quad \Delta b(i) = \begin{cases} t(i), & \text{локальное чтение;} \\ d(i) = t(i) - t(i-1), & \text{глобальное чтение,} \end{cases}$$

а $t(i) = v_2(3F(i) + 1)$, $F(i)$ — нечётная часть $N(i)$.

Критерий сохранения. На шаге i длина сохраняется ($\Delta L_{\text{disc}}(i) = 0$) тогда и только тогда, когда $\Delta b(i) = 1$ и $\Delta_{\text{dig}}(i) = -1$.

Падение. Если $\Delta b(i) \geq 2$, то $\Delta L_{\text{disc}}(i) \leq -1$; если $\Delta b(i) = 1$, но $\Delta_{\text{dig}}(i) = -2$, то также $\Delta L_{\text{disc}}(i) = -1$.

Lemma 20.4 (Лемма о перескоке). Пусть $x(i) := 2 \log_q N(i)$, $\Delta U := x(i+1) - x(i)$ и $\Delta_{\text{dig}} := \lfloor x(i+1) \rfloor - \lfloor x(i) \rfloor$. Тогда

$$\Delta_{\text{dig}} \in \{\lfloor \Delta U \rfloor, \lfloor \Delta U \rfloor + 1\}.$$

В частности, для нечётных $F(i) \geq 3$ имеем $\Delta U = 2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right) \in (-2, -1]$, откуда $\Delta_{\text{dig}} \in \{-2, -1\}$ и

$$\Delta_{\text{dig}} = -1 \iff \{x(i)\} \geq -1 - \Delta U,$$

где $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ — дробная часть.

Доказательство. Стандартный разбор $x(i) = n + f$ с $f \in [0, 1)$ даёт $\Delta_{\text{dig}} = \lfloor f + \Delta U \rfloor$. Для нечётных $F \geq 3$ $\Delta U \in (-2, -1]$, значит $f + \Delta U \in (-2, 0]$ и возможны ровно значения -2 или -1 , причём условие -1 эквивалентно $f \geq -1 - \Delta U$. \square

Lemma 20.5 (О невозможности роста L_{disc}). Для любого шага преобразования Φ имеем $\Delta L_{\text{disc}}(i) \leq 0$. Более того:

- если $t(i) \geq 2$, то $\Delta L_{\text{disc}}(i) \leq -1$;
- если $t(i) = 1$, то единственные варианты: $(\Delta_{\text{dig}}, \Delta b) = (-2, 1)$, дающий $\Delta L_{\text{disc}} = -1$, либо $(-1, 1)$, дающий $\Delta L_{\text{disc}} = 0$.

В частности, сценарий $\Delta b = +1$ при $\Delta_{\text{dig}} \geq 0$ невозможен.

Доказательство. Если $t \geq 2$, то b растёт минимум на 2, а по лемме 20.4 $\Delta_{\text{dig}} \leq -1$; значит $\Delta L_{\text{disc}} = \Delta_{\text{dig}} + \Delta b \leq -1$. Если $t = 1$, то $\Delta b = 1$, а 20.4 даёт $\Delta_{\text{dig}} \in \{-2, -1\}$, откуда $\Delta L_{\text{disc}} \in \{-1, 0\}$. Положительное приращение невозможно. \square

Lemma 20.6 (Количественное сжатие окна сохранения). Положим $q = \frac{4}{3}$. Для нечётных $F \geq 3$ имеем

$$\varepsilon_F := 1 - \tau(F) = \frac{2}{\ln(4/3)} \ln \left(1 + \frac{1}{3F} \right) \leq \frac{C_0}{F}, \quad C_0 := \frac{2}{3 \ln(4/3)}.$$

В частности, при $F \geq F_0$ длина интервала дробных частей $\{x\} \in [\tau(F), 1)$, обеспечивающих сохранение длины ($\Delta L_{\text{disc}} = 0$), не превосходит C_0/F_0 .

Доказательство. Используем $\Delta U(F) = 2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F} \right) = 2 \left(-1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{3F})}{\ln q} \right)$ и $\tau(F) = -1 - \Delta U(F)$, что даёт формулу для ε_F . Оценка следует из $\ln(1 + u) \leq u$. \square

Lemma 20.7 (Количественный разрыв между сохранениями). Пусть на отрезке шагов с $t = 1$ выполнено $F(j) \geq F_0$. Тогда

$$m_0 := \left\lceil \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right\rceil, \quad \varepsilon_0 := \frac{C_0}{F_0}$$

даёт нижнюю оценку числа шагов между соседними событиями сохранения длины. В частности,

$$m_0 \geq \left\lceil \frac{F_0}{C_0} - 1 \right\rceil.$$

Доказательство. После сохранения длины дробная часть $\{x\}$ уходит ниже порога $\tau(F)$ и для возврата в окно ширины $\leq \varepsilon_0$ требуется накопить суммарный модульный сдвиг не менее $1 - \varepsilon_0$, тогда как на каждом шаге с $t = 1$ он не превышает ε_0 (по лемме 20.6). Значит, необходимо не менее m_0 шагов. \square

Lemma 20.8 (Средний дрейф на большом уровне). *Фиксируем F_0 и положим $\varepsilon_0 := C_0/F_0$, $m_0 := \lceil \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \rceil$, $c_0 := \frac{m_0-1}{m_0}$, $C_1 := m_0 - 1$. Тогда для любого блока из K последовательных шагов с $F(j) \geq F_0$ верно*

$$\sum_{j=1}^K \Delta L_{\text{disc}}(j) \leq -c_0 K + C_1.$$

Доказательство. Разбиваем шаги на $t \geq 2$ (каждый даёт ≤ -1) и $t = 1$. По лемме 20.7 среди m_0 последовательных шагов с $t = 1$ не более одного сохранения ($\Delta L_{\text{disc}} = 0$); остальные дают $\Delta L_{\text{disc}} = -1$. Группировка по блокам длины m_0 и оценка «хвоста» дают требуемое неравенство с константами c_0 и C_1 . \square

Corollary 20.9 (Глобальный отрицательный дрейф). *Пусть траектория ускоренного преобразования Φ бесконечно часто посещает область $F \geq F_0$. Тогда*

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \Delta L_{\text{disc}}(j) \leq -c_0 < 0,$$

где c_0 определена в лемме 20.8. В частности, существует K_* такое, что для всех $K \geq K_*$ выполняется

$$L_{\text{disc}}(N(K)) \leq L_{\text{disc}}(N(0)) - \frac{c_0}{2} K.$$

Доказательство. Разобьём префикс длины K на «большие» блоки ($F \geq F_0$) и «малые» ($F < F_0$). На больших действует лемма 20.8; малые образуют суммарный вклад, ограниченный константой $B(F_0)$, поскольку множество состояний с $F < F_0$ конечно и не может удерживать траекторию неограниченно долго без появления шага $t \geq 2$ (что даёт падение). Делим на K и берём \liminf . \square

Собрав результаты лемм 20.5–20.8 и короллара 20.9, получаем следующий итоговый результат.

Theorem 20.10 (Глобальная конечность траекторий). *Для всякого начального нечётного $N(0) \in \mathbb{N}$ траектория ускоренного преобразования Φ конечна: существует $k < \infty$ такой, что $N(k) \in \{1, 2, 4\}$, а потому $L_{\text{disc}}(N(k)) = 0$.*

Доказательство. По лемме 20.5 на каждом шаге $\Delta L_{\text{disc}} \leq 0$, то есть L_{disc} не возрастает. По королларию 20.9 усреднённый дрейф строго отрицателен, следовательно на достаточно длинных префиксах L_{disc} падает линейно с положительной скоростью и, будучи целочисленной и ограниченной снизу нулём, за конечное число шагов достигает 0. Это и означает достижение терминального состояния после нормализации. \square

20.2 Формализация условия сохранения длины (дискретная метрика)

В дискретной длине

$$L_{\text{disc}}(N) = \lfloor 2 \log_q N \rfloor + b(N),$$

где $b(N) = v_2(N)$ — показатель степени двойки в N , измеренный в полуразрядах, для шага Φ :

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) + \Delta b(i),$$

где

$$\Delta_{\text{dig}}(i) = \lfloor 2 \log_q N(i+1) \rfloor - \lfloor 2 \log_q N(i) \rfloor,$$

а в локальном чтении $\Delta b(i) = t(i) = v_2(3F(i) + 1) \geq 1$.

Для нечётных $F(i) \geq 3$ имеем $\Delta U \in (-2, -1]$, и потому $\Delta_{\text{dig}} \in \{-2, -1\}$, причём

$$\Delta_{\text{dig}} = -1 \iff \{x(i)\} \geq -1 - \Delta U,$$

где $\Delta U = 2 \log_q \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4F(i)} \right)$ — архимедова часть приращения длины, а $x(i) = 2 \log_q N(i)$.

Corollary 20.11 (Сохранение при $t = 1$). *В локальном чтении при $t(i) = 1$ длина сохраняется ($\Delta L_{\text{disc}} = 0$) тогда и только тогда, когда $\Delta_{\text{dig}} = -1$, то есть дробная часть $\{2 \log_q N(i)\}$ превышает порог $-1 - \Delta U$.*

Арифметика класса $4k + 3$. Если $F \equiv 3 \pmod{4}$, то $t = 1$. При этом $F' = (3F + 1)/2 = 6k + 5$ снова даёт $t' = 1$ тогда и только тогда, когда k нечётно; иначе на следующем шаге $t' \geq 2$ и длина убывает.

20.3 Предел свойства $4k + 3$

Переходим от локального условия сохранения длины при $t = 1$ к анализу серий таких шагов и их предельной длины.

Если условие $F \equiv 3 \pmod{4}$ и $t = 1$ выполняется p раз подряд (что не уменьшает длину), то

$$F = 2^{p+1}k + (2^{p+1} - 1), \quad k \text{ нечётно для первых } p-1 \text{ шагов, чётно на } p\text{-м,}$$

и на $(p+1)$ -м шаге свойство нарушается.

Theorem 20.12 (Предел серии сохранения длины). Пусть $N(0) = F_0 \cdot 2^{b_0}$, где F_0 нечётно, и на шагах $i = 0, \dots, p-1$ выполняются условия

$$F_i \equiv 3 \pmod{4}, \quad t(i) = v_2(3F_i + 1) = 1.$$

Тогда для каждого i в пределах этой серии

$$F_i = 2^{p-i+1} \cdot k(i) + (2^{p-i+1} - 1),$$

где $k(i) \in \mathbb{N}$, и в конце серии $k(p-1)$ обязательно чётно.

Доказательство. Индукция по p . База $p = 1$: $F_0 = 4k_0 + 3$ соответствует формуле при $2^{p-i+1} = 4$. Переход: при $t = 1$ и $F \equiv 3 \pmod{4}$ имеем $F_{i+1} = (3F_i + 1)/2$, что сохраняет вид $2^m k + (2^m - 1)$ с уменьшением показателя m на 1. Чётность k в конце серии: если k становится чётным, то на следующем шаге $t \geq 2$ и условие $t = 1$ нарушается. \square

Corollary 20.13 (Конечность серий $t = 1$). Любая серия шагов с $F_i \equiv 3 \pmod{4}$ и $t(i) = 1$ конечна: она обязательно заканчивается шагом с чётным k_i , после чего $t \geq 2$ и

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) - t(i) \leq \Delta_{\text{dig}}(i) - 2 \leq -1.$$

Corollary 20.14 (Конечность серий сохранения длины). Серия сохранения длины в дискретной метрике — это подпоследовательность серии $t = 1$, состоящая из тех шагов, для которых дополнительно выполнено метрическое условие $\Delta_{\text{dig}} = -1$ (критерий перескока). Так как каждая серия $t = 1$ конечна, то и серия сохранения конечна.

Theorem 20.15 (Невозможность бесконечной последовательности нечётных k_i). Пусть $N(0) = F_0 \cdot 2^{b_0}$, F_0 нечётно, и пусть $F_i = 4k_i + 3$ — нечётная часть на i -м шаге траектории Φ . Если k_i нечётно для всех $i \geq 0$, то возникает противоречие; следовательно, на любой траектории существует i с чётным k_i .

Доказательство. Из k_i нечётно следует $t(i) = 1$ и $F_{i+1} = (3F_i + 1)/2$ для всех i . Положив $M_i := F_i + 1$, получаем $M_{i+1} = \frac{3}{2}M_i$, откуда

$$M_i = \frac{3^i}{2^i} (F_0 + 1).$$

Так как $k_i + 1 = \frac{F_i + 1}{4}$, имеем $k_i + 1 = \frac{3^i}{2^i} (k_0 + 1)$. Для целочисленности при всех i необходимо $2^i \mid (k_0 + 1)$ для всех i , что невозможно для фиксированного $k_0 + 1 > 0$. \square

Lemma 20.16 (Ограничение числа шагов для убывания длины. Верхняя оценка). Пусть $N(i) = F_i \cdot 2^{b_i}$, F_i нечётно. Существует такое $P(i) \in \mathbb{N}$, что если на каждом из $P(i)$ последовательных шагов

$$\Delta L_{\text{disc}}(j) = \Delta_{\text{dig}}(j) - t(j) = -1,$$

то

$$F_i \leq 2^{P(i)-1} - 1.$$

В частности, в экстремальном случае $F_i = 2^{P(i)-1} - 1$ за $P(i)$ шагов преобразования Φ длина сократится до единичной.

Доказательство. Если на каждом шаге длина уменьшается ровно на 1 полуразряд, то за $P(i)$ шагов она уменьшится на $P(i)$ полуразрядов. В двоичной шкале это означает, что начальная нечётная часть F_i не может превышать $2^{P(i)-1} - 1$, иначе за $P(i)$ шагов мы не достигнем длины 1. В предельном случае $F_i = 2^{P(i)-1} - 1$ последовательность за $P(i)$ шагов придёт к $F = 1$ (формат $4k + 1$), после чего дальнейшее уменьшение длины невозможно. \square

Corollary 20.17 (Достижение делительной длины и глобальное убывание). Комбинируя локальные оценки лемм 20.6 и 20.8 с конечностью серий $t = 1$ и анализом случаев в Следствии 20.18, получаем:

1. Для любых $\varepsilon \in (0, 1)$ существует $c(\varepsilon) > 0$, такое что на каждом достаточно длинном отрезке траектории Φ

$$\sum \Delta L_{\text{disc}} \leq -c(\varepsilon)K + C(\varepsilon),$$

где K — число шагов в отрезке, а $C(\varepsilon)$ — константа.

2. В частности, дискретная длина L_{disc} убывает с положительной средней скоростью и за конечное число шагов достигает минимального уровня, соответствующего делительному диапазону длины 1.

Таким образом, сценарий, в котором нечётная часть F растёт неограниченно, а L_{disc} убывает «слишком медленно», исключён: при больших F окно сохранения длины сжимается, события сохранения становятся редкими, и падения происходят регулярно.

Corollary 20.18 (Глобальное убывание дискретной длины). Для любого шага i траектории Φ в дискретной метрике L_{disc} выполняется одно из трёх:

1. **Сохранение:** если $t(i) = 1$ и выполнено метрическое условие перескока $\Delta_{\text{dig}}(i) = -1$, то

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) = 0.$$

2. **Убывание при $t = 1$:** если $t(i) = 1$, но $\Delta_{\text{dig}}(i) = -2$ (перескок не происходит), то

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) = -1.$$

3. **Строгое убывание при $t \geq 2$:** в этом случае

$$\Delta L_{\text{disc}}(i) \leq \Delta_{\text{dig}}(i) - 2 \leq -1.$$

Каждая серия сохранения (п.1) конечна, так как она является подпоследовательностью конечной серии шагов с $t = 1$. Следовательно, на бесконечной траектории шаги с убыванием (п.2–3) встречаются бесконечно часто, и L_{disc} за конечное число шагов достигает минимального значения (единичной длины). Нет ни бесконечного роста, ни нетривиальных циклов.

Примеры.

1. $N = 175$: $175 = 4 \cdot 43 + 3$ ($k = 43$ нечётно) $\Rightarrow t = 1$, $\Delta L = 0$; $263 = 4 \cdot 65 + 3$ ($k = 65$ нечётно) $\Rightarrow t = 1$, $\Delta L = 0$; $395 = 4 \cdot 98 + 3$ ($k = 98$ чётно) \Rightarrow на следующем шаге $t \geq 2$, $\Delta L < 0$.
2. $N = 287$: $287 = 4 \cdot 71 + 3$ ($k = 71$ нечётно) $\Rightarrow t = 1$, $\Delta L = 0$; $431 = 4 \cdot 107 + 3$ ($k = 107$ нечётно) $\Rightarrow t = 1$, $\Delta L = 0$; $647 = 4 \cdot 161 + 3$ ($k = 161$ нечётно) $\Rightarrow t = 1$, $\Delta L = 0$; $971 = 4 \cdot 242 + 3$ ($k = 242$ чётно) \Rightarrow на следующем шаге $t \geq 2$, $\Delta L < 0$.

Theorem 20.19 (Необходимость конечного v -разложения для сходимости). Пусть $N_{10} \in \mathbb{N}$ и при итерациях Φ в W_q (где $q = \frac{4}{3}$) длина L достигает 1 за конечное число шагов, то есть

$$\exists m \in \mathbb{N} : L(\Phi^m(N)) = 1.$$

Тогда N имеет конечное v -разложение в системе $(2 \sqcap 3)$.

Доказательство. Шаг 1 (структура траектории и достижение единичной формы).

Рассмотрим накопительную траекторию $(F(i), N(i))_{i \geq 0}$, где $D(0) = v_2(N)$, $F(0) = N/2^{D(0)}$ и

$$t(i) := v_2(3F(i) + 1) \geq 1, \quad F(i+1) = \frac{3F(i) + 1}{2^{t(i)}}, \quad b(i+1) = b(i) + t(i).$$

Пусть на шаге m выполнено $L(\Phi^m(N)) = 1$. По Лемме 16.2 длина L равна числу полуразрядов головы в W_q ; следовательно, голова на шаге m имеет единичную длину, то есть $F(m) = 1$. Тогда всё состояние на шаге m имеет вид

$$N(m) = F(m) \cdot 2^{b(m)} = 2^{b(m)}, \quad F(m) = 1, \quad D(m) = 2^{b(m)}.$$

Иными словами, достигнут «единичный столбец»: голова $F(m) = 1$, хвост $D(m) = 2^{b(m)}$.

Шаг 2 (телескопическая формула переноса/остатка). Введём обозначение $D(i) := 2^{b(i)}$ и величину элементарного числа масштаба

$$E(i) := \frac{D(i) - D(i-1)}{3} = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3}, \quad i \geq 0,$$

где для удобства полагаем $D(-1) := 0$. Тогда тождество переноса и остатка (см. §13, (13.1) и телескопирование по i) даёт:

$$N(0) = q^m(N(m) - D(m-1)) + \sum_{i=0}^{m-1} q^i E(i), \quad q = \frac{4}{3}.$$

Поскольку $N(m) = D(m)$, первый множитель переписывается как

$$q^m(D(m) - D(m-1))/3 = q^m E(m).$$

Следовательно,

$$N(0) = \sum_{i=0}^m q^i E(i).$$

Шаг 3 (нормализация $2 \rightarrow 4$ для каждого $E(i)$). Пусть $b(i-1) = 2u + v$ с $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $v \in \{0, 1\}$. Тогда

$$E(i) = \frac{2^{b(i-1)}(2^{t(i)} - 1)}{3} = \frac{4^u \cdot 2^v \cdot (2^{t(i)} - 1)}{3} = 4^u \cdot \eta(i),$$

где $\eta(i)$ — нечётное число при $v = 0$ и удвоенное нечётное при $v = 1$. Умножая на $q^i = (4/3)^i$, получаем

$$q^i E(i) = \frac{4^i}{3^i} \cdot 4^u \cdot \eta(i) = \frac{\eta(i)}{3^i} \cdot 4^{u+i}.$$

Шаг 4 (уничтожение знаменателя и локальная перенормировка). Так как $q = \frac{4}{3}$, один перенос « $3 \mapsto q^{-1} \cdot 4$ » повышает степень по 4 на 1 и понижает степень по 3 в знаменателе на 1. Ровно i переносов для члена $q^i E(i)$ устраняют знаменатель 3^i , и мы приходим к локальному вкладу на позиции i в виде

$$\gamma(i) q^i, \quad \gamma(i) = \eta(i) \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

После объединения вкладов по одинаковым q -позициям и локальной перенормировки (см. §11) коэффициенты приводятся к допустимому алфавиту q -цифр (например, $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ при выбранной норме), не меняя конечности суммы.

Шаг 5 (конечность v -разложения). Мы показали, что

$$N(0) = \sum_{i=0}^m q^i E(i) = \sum_{i=0}^m \gamma(i) q^i$$

после конечного числа локальных переносов и нормировок по каждой позиции $i = 0, \dots, m$. Число слагаемых конечно (ровно $m+1$). Каждое $E(i)$ порождён локальным элементарным числом (остатком масштаба) и соответствует одному элементарному блоку в $(2 \sqcap 3)$, а суммарная запись есть конечная сумма таких блоков с непрерывной шкалой индексов. Значит, N имеет конечное v -разложение в системе $(2 \sqcap 3)$.

Шаг 6 (логическое завершение). Мы использовали только предпосылку $L(\Phi^m(N)) = 1$ (которая влечёт $F(m) = 1$ и тем самым — телескопическую формулу с конечным m) и локальные тождества переноса/нормировки. Следовательно,

$$(\exists m : L(\Phi^m(N)) = 1) \implies N \text{ имеет конечное } v\text{-разложение.}$$

Теорема доказана. □

Таким образом, мы установили как глобальную конечность траекторий, так и необходимость конечного v -разложения. В следующем разделе это позволит завершить доказательство эквивалентности каркасов без привлечения дополнительных гипотез.

21 Теорема о достаточности, а также связь W_q и $(2 \sqcap 3)$ систем

Замечание. В прежней версии импликация $(B) \implies (A)$ опиралась на гипотезу о конечности траектории. В настоящей редакции конечность траектории установлена в Теореме 20.10, так что $(B) \implies (A)$ является безусловной. Импликация $(A) \implies (B)$ служит проверкой согласованности и замыкает эквивалентность каркасов без циклической зависимости.

Обновим доказательство теоремы о достаточности (см. Теорему 10.10) с учётом свойств системы $4 \sqcap 3$ и позиционной записи в W_q , где $q = \frac{4}{3}$.

Definition 21.1 (Условия A и B). Пусть $N \in \mathbb{N}$, $q = \frac{4}{3}$, L — метрика длины в системе W_q , Φ — оператор итерации.

(A) N имеет конечное v -разложение в системе $(2 \sqcap 3)$, то есть

$$N = \sum_{i=0}^{m-1} E(i), \quad m < \infty,$$

где $E(i)$ — величины элементарных чисел масштаба, определённые как

$$E(i) = \frac{D(i) - D(i-1)}{3} = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3}.$$

(B) При итерациях Φ длина L достигает 1 за конечное число шагов:

$$\exists k < \infty : L(\Phi^k(N)) = 1.$$

Theorem 21.2 (Достаточность конечного v -разложения). Если N имеет конечное v -разложение в $(2 \sqcup 3)$, то при итерациях Φ в W_q длина $L(\Phi^k(N))$ достигает 1 за конечное k .

Доказательство. **1. Телескопическая формула.** Из тождества переноса и остатка:

$$N(0) = q^m(N(m) - D(m-1)) + \sum_{i=0}^{m-1} q^i E(i),$$

где $E(i) = \frac{D(i) - D(i-1)}{3}$.

2. Нормализация $2 \rightarrow 4$. Пусть $b(i-1) = 2u + v$, $u \geq 0$, $v \in \{0, 1\}$. Тогда

$$E(i) = \frac{2^{b(i-1)}(2^{t(i)} - 1)}{3} = \frac{4^u \cdot 2^v \cdot (2^{t(i)} - 1)}{3} = 4^u \cdot \eta(i),$$

где $\eta(i)$ — нечётное число при $v = 0$ и удвоенное нечётное при $v = 1$.

3. Представление в q -системе.

$$q^i E(i) = \frac{4^i}{3^i} \cdot 4^u \cdot \eta(i) = \frac{\eta(i)}{3^i} \cdot 4^{u+i}.$$

Это — одиночный q -вклад на позиции i со степенью по 4 равной $u + i$ и рациональным коэффициентом $\eta(i)/3^i$.

4. Переносы по 3. Так как $q = \frac{4}{3}$, один перенос повышает степень по 4 на 1 и понижает степень по 3 в знаменателе на 1. Ровно i переносов для члена $q^i E(i)$ устраняют знаменатель 3^i и дают локальный вклад вида

$$\gamma(i) q^i, \quad \gamma(i) = \eta(i) \in \mathbb{Z}_{>0},$$

который затем приводится локальной нормализацией к алфавиту допустимых q -цифр (см. §11).

5. Завершающие слагаемые. Первое слагаемое $q^m \cdot 2^a q^b = 2^a q^{m+b}$ — чистый q -столбец. Слагаемое $-q^m \cdot 2^{b(m-1)}$ нормализуется так же, как в пунктах 2–4 (со знаком минус, реализуемым заёмом при локальной перенормировке соседних позиций).

6. Конечность. Все переносы конечны (для $q^i E(i)$ их ровно i , а $i \leq m-1$). Группируя вклады по q -позициям и выполняя локальную перенормировку коэффициентов, получаем конечную q -запись

$$N(0) = \sum_{j=J_{\min}}^{J_{\max}} \gamma(j) q^j, \quad \gamma(j) \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

(после сведения коэффициентов к допустимому алфавиту). Эта запись согласована с делителем $D(\cdot)$ и эквивалентна конечному v -разложению. Поскольку число таких блоков конечно, мера на канонических формах убывает (см. Лемму 10.9), и за конечное число шагов достигается длина 1. \square

Corollary 21.3 (Мост: конечность в $W_q \Rightarrow$ конечность в $(2 \sqcup 3)$). Если для любого $N \in \mathbb{N}$ траектория в W_q конечна, то каждое N имеет конечное v -разложение в $(2 \sqcup 3)$.

Алгоритм построения v -разложения.

1. **Параметры траектории:** по траектории $N(0) \rightarrow \dots \rightarrow N(m)$ вычислить $b(i)$ и $t(i)$.

2. **Блоки:** для каждого i найти величину элементарного числа

$$E(i) = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3}.$$

3. **Нормализация:** представить $E(i) = 4^{s(i)} \cdot \eta(i)$, где $s(i) = \lfloor b(i-1)/2 \rfloor$, а $\eta(i)$ — нечётное или удвоенное нечётное число.

4. **Переносы:** сформировать $q^i E(i)$ и выполнить i переносов (каждый перенос реализует $3 \mapsto q^{-1} \cdot 4$), устраняя знаменатель 3^i .

5. **Завершающий столбец:** обработать $q^m(N(m) - D(m-1))/3$ по тем же правилам (со знаком при необходимости).

6. **Сведение:** объединить по q -позициям, выполнить локальные перенормировки до допустимого алфавита $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

Пример (схема). Пусть $m = 3$, $b(-1) = 0$, $b(0) = 1$, $b(1) = 3$, $b(2) = 4$. Тогда

$$E(0) = \frac{2^1 - 2^0}{3} = 1 \cdot 4^0, \quad E(1) = \frac{2^3 - 2^1}{3} = 2 \cdot 4^0, \quad E(2) = \frac{2^4 - 2^3}{3} = 2 \cdot 4^1.$$

Вклады:

$$i = 0 : 1 \cdot 4^0, \quad i = 1 : \frac{2}{3} \cdot 4^1, \quad i = 2 : \frac{2}{3} \cdot 4^3 \text{ (после переносов).}$$

После объединения и перенормировки получаем конечную q -запись с цифрами из $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

Закключение. Таким образом, если траектория $N(0)$ в системе W_q за конечное число шагов приходит к состоянию $N(m) = 2^a q^b$, то построенный выше алгоритм даёт конечное ν -разложение в системе $(2 \sqcap 3)$. В частности, завершающее состояние $2^a q^b$ соответствует элементу множества $A_{2 \sqcap 3}$ — числу, являющемуся произведением степени двойки и степени $q = \frac{4}{3}$. Это замыкает цепочку: конечность траектории в W_q влечёт существование конечного ν -разложения, а значит, обе части доказательства (достаточное и необходимое условия) оказываются логически связанными. Алгоритм применим к любой конечной траектории.

22 Алгоритм преобразования от N_{10} до 1

Шаг 0. Начало. Задано натуральное число $N_{10} \geq 1$.

Шаг 1. Переход в q -систему. Перевести N_{10} в представление N_q в системе с основанием $q = \frac{4}{3}$:

$$N_{10} \mapsto N_q.$$

Шаг 2. Применение оператора Φ . Вычислить новое состояние $N_q(i+1) = \Phi(N_q(i))$, обновив голову $F(N_q)$ и хвост $D(N_q)$.

Шаг 3. Классификация по голове. Если

$$F(N_q(i)) = 4 \cdot k(i) + 1,$$

то длина $N_q(i+1)$ уменьшится на один полуразряд.

Шаг 4. Случай сохранения длины. Если

$$F(N_q(i)) = 4 \cdot k(i) + 3,$$

то длина $N_q(i+1)$ в полуразрядах сохраняется (не уменьшается).

Шаг 5. Проверка завершения. Если

$$N(i) = 2^a \cdot q^b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

то в натуральных числах это означает, что $N(i) = 1$ (так как $q = \frac{4}{3}$ и $2^a q^b$ целое только при $a = b = 0$). **Процесс завершён.**

Шаг 6. Повтор. Если условие шага 5 не выполнено, положить $i \leftarrow i + 1$ и вернуться к шагу 2.

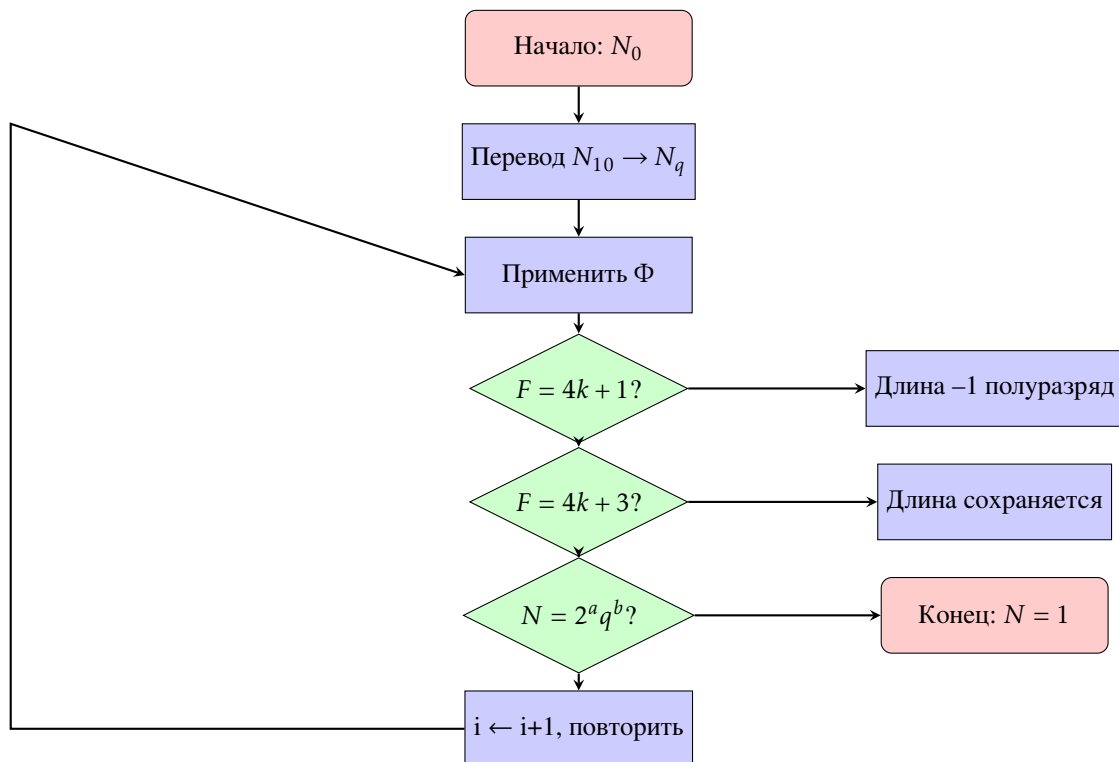


Рис. 3: Блок-схема алгоритма преобразования от N_{10} до 1

23 Алгоритм преобразования

Критерий сохранения длины. На шаге i приращение длины в *логарифмических полуразрядах* вычисляется как

$$\Delta L(i) = \Delta_{\text{dig}}(i) - d(i),$$

где

$$\Delta_{\text{dig}}(i) = \lfloor 2 \log_{4/3} N(i+1) \rfloor - \lfloor 2 \log_{4/3} N(i) \rfloor$$

— изменение разрядной длины в базе $q = \frac{4}{3}$, а

$$d(i) = t(i) - t(i-1), \quad t(i) = v_2(3F(i) + 1)$$

— приращение делительной длины (в полуразрядах) в *глобальном* чтении. В *локальном* чтении $d(i)$ заменяется на $t(i)$.

Сохранение длины имеет место тогда и только тогда, когда

$$\Delta L(i) = 0,$$

то есть рост разрядной длины ровно компенсирует увеличение делителя. В этом случае шаг помечается символом «=».

Если $\Delta L(i) < 0$ — длина убывает на $|\Delta L(i)|$ полуразрядов, метка «<». Если $\Delta L(i) > 0$ — длина возрастает на $\Delta L(i)$ полуразрядов, метка «>».

Пояснение к таблице. В колонке ΔL приведены приращения в *непрерывной* метрике

$$L(N) = 2 \log_q N - b(N)$$

(масштаб всего числа). Колонка «Метка» формируется по *дискретной* метрике

$$L_{\text{disc}}(N) = \lfloor 2 \log_q N \rfloor + b(N)$$

с учётом критерия перескока: «=» соответствует $\Delta L_{\text{disc}} = 0$, «<» — $\Delta L_{\text{disc}} < 0$, «>» — $\Delta L_{\text{disc}} > 0$. Поэтому при $t = 1$ и $\Delta_{\text{dig}} = -1$ возможно $\Delta L > 0$ в непрерывной шкале при сохранении длины в дискретной. Проверка:

i	$n(i)$	t_i	$\Sigma_2(t_i) = 2^{t_i} - 1$	$3n(i) - \Sigma_2$	$(3n(i) + 1) - 2^{t_i}$	Проверка
0	27	1	1	80	80	=
1	41	2	3	120	120	=
2	31	1	1	92	92	=
3	47	1	1	140	140	=
4	71	1	1	212	212	=
5	107	1	1	320	320	=
6	161	2	3	480	480	=
7	121	2	3	360	360	=
8	91	1	1	272	272	=
9	137	2	3	408	408	=
10	103	1	1	308	308	=
11	155	1	1	464	464	=
12	233	2	3	696	696	=
13	175	1	1	524	524	=
14	263	1	1	788	788	=
15	395	1	1	1184	1184	=
16	593	2	3	1776	1776	=
17	445	3	7	1328	1328	=
18	167	1	1	500	500	=
19	251	1	1	752	752	=
20	377	2	3	1128	1128	=
21	283	1	1	848	848	=
22	425	2	3	1272	1272	=
23	319	1	1	956	956	=
24	479	1	1	1436	1436	=
25	719	1	1	2156	2156	=
26	1079	1	1	3236	3236	=
27	1619	1	1	4856	4856	=
28	2429	3	7	7280	7280	=
29	911	1	1	2732	2732	=
30	1367	1	1	4100	4100	=
31	2051	1	1	6152	6152	=
32	3077	4	15	9216	9216	=
33	577	2	3	1728	1728	=
34	433	2	3	1296	1296	=
35	325	4	15	960	960	=
36	61	3	7	176	176	=
37	23	1	1	68	68	=
38	35	1	1	104	104	=
39	53	5	31	128	128	=
40	5	4	15	0	0	=

Таблица 8: Контрольная таблица вычислений параметров t_i и проверочных выражений.

24 Пример работы алгоритма для числа 27

Example 24.1. Рассмотрим траекторию числа 27 под действием оператора Φ . Она полностью совпадает с последовательностью [13] из OEIS, где приведены члены $3x + 1$ -цепочки, начинающейся с 27.

1. **Шаг 0:** Разложение: $27 = N(0) \cdot D(0) = 27 \cdot 2^0$, $N(0) = 27$ (нечётно), $D(0) = 1$. Вычисляем $t(0) = \nu_2(3 \cdot 27 + 1) = \nu_2(82) = 1$. Хвостовой вклад: $\Delta L_{\text{хвост}} = t = 1$. Вклад головы:

$$\Delta L_{\text{пот}} = \lfloor 2 \log_q \Phi(27) \rfloor - \lfloor 2 \log_q 27 \rfloor.$$

Так как $t = 1$ и $N(0) \equiv 3 \pmod{4}$, возможна компенсация.

i	n(i)	deltaD(i)	r(i)	4k+1	4k+3	k(i)	P(i)
0	27	1/2	-1		4*6+3	even	1
1	41	1/4	-2	4*10 + 1			
2	31	1/2	-1		4*7+3	16+15	odd
3	47	1/2	-1		4*11+3		odd
4	71	1/2	-1		4*17+3		odd
5	107	1/2	-1		4*26+3		even
6	161	1/4	-2	4*40+1			
7	121	1/4	-2	4*30+1			
8	91	1/2	-1		4*22+3		odd
9	137	1/4	-2	4*34+1			
10	103	1/2	-1		4*25+3		odd
11	155	1/2	-1		4*38+3		even
12	233	1/4	-2	4*58+1			
13	175	1/2	-1		4*43+3	88+87	odd
14	263	1/2	-1		4*65+3		odd
15	395	1/2	-1		4*98+3		even
16	593	1/4	-2	4*148+1			
17	445	1/8	-3	4*111+1			
18	167	1/2	-1		4*41+3		odd
19	251	1/2	-1		4*62+3		even
20	377	1/4	-2	4*94+1			
21	283	1/2	-1		4*70+3		even
22	425	1/4	-2	4*106+1			
23	319	1/2	-1		4*79+3	160+159	odd
24	479	1/2	-1		4*119+3		odd
25	719	1/2	-1		4*179+3		odd
26	1079	1/2	-1		4*269+3		odd
27	1619	1/2	-1		4*404+3		even
28	2429	1/8	-3	4*607+1			
29	911	1/2	-1		4*227+3		odd
30	1367	1/2	-1		4*341+3		odd
31	2051	1/2	-1		4*512+3		even
32	3077	1/16	-4	4*769+1			
33	577	1/4	-2	4*144+1			
34	433	1/4	-2	4*108+1			
35	325	1/16	-4	4*81+1			
36	61	1/8	-3	4*15+1			
37	23	1/2	-1		4*5+3		odd
38	35	1/2	-1		4*8+3		even
39	53	1/32	-5	4*13+1			
40	5	1/16	-4	4*1+1			
41	1	1	0				

Рис. 4: Преобразование числа 27, выполненное в 2020 г.

2. **Шаг 1:** $\Phi(27) = \frac{3 \cdot 27 + 1}{2^t} \cdot 2^{b(0)+t} = \frac{82}{2^t} \cdot 2^1 = 41 \cdot 2^1$. $N(1) = 41$, $D(1) = 2$. $t(1) = \nu_2(3 \cdot 41 + 1) = \nu_2(124) = 2$. Хвостовой вклад: $\Delta L_{\text{хвост}} = 2$. Вклад головы $\in \{0, -1\}$, поэтому $\Delta L_{\text{итог}} \leq -2$ — длина уменьшается.

3. **Шаг 2:** $\Phi(41 \cdot 2) = \frac{3 \cdot 41 + 1}{2^{t(1)}} \cdot 2^{b(1)+t(1)} = \frac{124}{4} \cdot 2^{1+2} = 31 \cdot 2^3$. $N(2) = 31$, $D(2) = 8$. $t(2) = \nu_2(3 \cdot 31 + 1) = \nu_2(94) = 1$.
Хвостовой вклад: $\Delta L_{\text{хвост}} = 1$. $N(2) \equiv 3 \pmod{4}$, $k = 7$ нечётно — возможна компенсация.
4. **Шаг 3:** $\Phi(31 \cdot 8) = \frac{94}{2} \cdot 2^{3+1} = 47 \cdot 2^4$. $N(3) = 47$, $D(3) = 16$. $t(3) = \nu_2(3 \cdot 47 + 1) = \nu_2(142) = 1$. $N(3) \equiv 3 \pmod{4}$,
 $k = 11$ нечётно — компенсация сохраняется.
5. **Шаг 4:** $\Phi(47 \cdot 16) = \frac{142}{2} \cdot 2^{4+1} = 71 \cdot 2^5$. $N(4) = 71$, $D(4) = 32$. $t(4) = \nu_2(3 \cdot 71 + 1) = \nu_2(214) = 1$. $N(4) \equiv 3 \pmod{4}$, $k = 17$ нечётно — компенсация сохраняется.
6. **Шаг 5:** $\Phi(71 \cdot 32) = \frac{214}{2} \cdot 2^{5+1} = 107 \cdot 2^6$. $N(5) = 107$, $D(5) = 64$. $t(5) = \nu_2(3 \cdot 107 + 1) = \nu_2(322) = 1$. $N(5) \equiv 3 \pmod{4}$, $k = 26$ чётно — на следующем шаге свойство $4k + 3$ нарушится, $t \geq 2$, и длина начнёт убывать.
7. **Сводная таблица для 5 шагов числа 27_{10}**

i	$N(i)$	$D(i)$	$t(i)$	$N \bmod 4$	k	$\Delta L_{\text{пот}}$	$\Delta L_{\text{хвост}}$	$\Delta L_{\text{итог}}$
0	27	2^0	1	3	6	$\in \{0, -1\}$	+1	компенсация возможна
1	41	2^1	2	1	10	$\in \{0, -1\}$	+2	≤ -2
2	31	2^3	1	3	7	$\in \{0, -1\}$	+1	компенсация возможна
3	47	2^4	1	3	11	$\in \{0, -1\}$	+1	компенсация возможна
4	71	2^5	1	3	17	$\in \{0, -1\}$	+1	компенсация возможна
5	107	2^6	1	3	26	$\in \{0, -1\}$	+1	k чётно, t нарушится

Вывод: для $A(0) = 27$ наблюдается серия шагов с $t = 1$ и сохранением длины, которая обрывается, когда k становится чётным. После этого хвост растёт быстрее, чем компенсирует голова, и $\Delta L < 0$.

Траектория, изображённый на рис. 5, соответствует последовательности OEIS A008884. В настоящей работе она разобрана детально, с пояснением каждого ребра и вершины (см. также [19]).

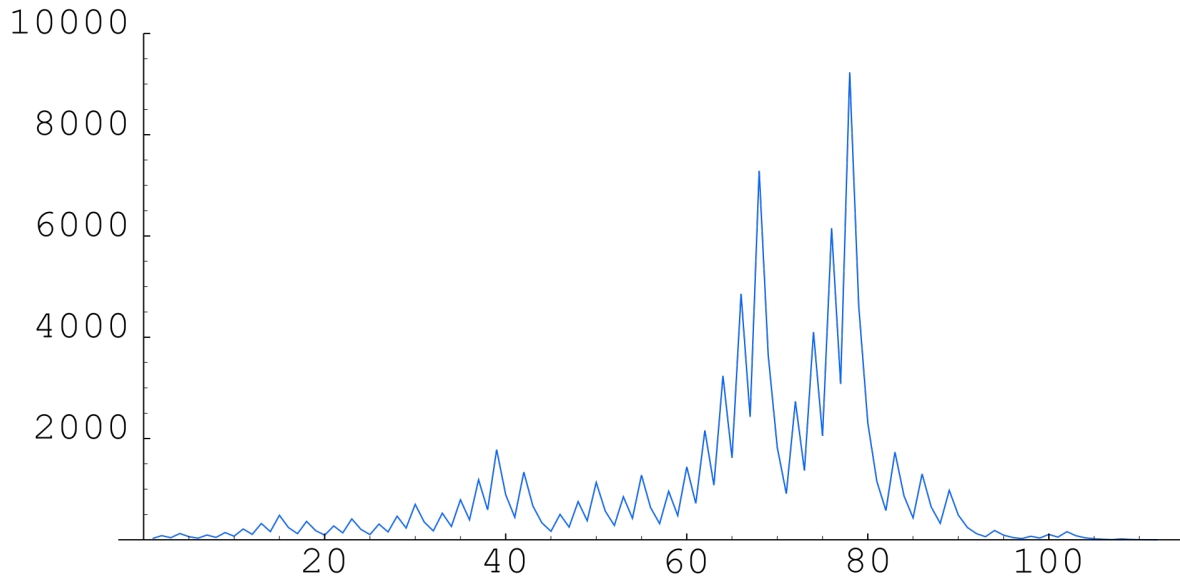


Рис. 5: Граф траектории числа 27 в задаче $3x + 1$ (см. также [19]).

25 Заключительное следствие и критерий эквивалентности

В этом разделе мы замыкаем построение логической пары «достаточность \Leftrightarrow необходимость» для условий 21.1.

Proposition 25.1 (Расширение Теорем 20.19 и 21.2). *Из Теорем 20.11 (необходимость) и 21.2 (достаточность) следует, что для любого $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего (В), существует конечное v -разложение в системе $(2 \sqcup 3)$:*

$$N = \sum_{i=0}^m E(i), \quad m < \infty, \quad E(i) \text{ — величины элементарных чисел.}$$

⁰На следующем шаге k чётно, свойство $4k + 3$ нарушается, $t \geq 2$, и длина убывает.

Доказательство. Рассмотрим в системе W_q траекторию $N(0) \rightarrow N(1) \rightarrow \dots$ по оператору Φ :

$$F(i+1) = \frac{3F(i)+1}{2^{t(i)}}, \quad b(i+1) = b(i) + t(i), \quad t(i) = v_2(3F(i)+1) \geq 1.$$

На каждом шаге i по тождеству переноса и остатка (§13) возникает величина элементарного числа

$$E(i) = \frac{D(i) - D(i-1)}{3} = \frac{2^{b(i)} - 2^{b(i-1)}}{3}, \quad D(i) = 2^{b(i)}, \quad D(-1) := 0,$$

которая в дальнейшем формирует последовательность элементарных чисел уже в системе $(2 \sqcap 3)$.

Телескопическая формула даёт:

$$N(0) = q^m(N(m) - D(m-1)) + \sum_{i=0}^{m-1} q^i E(i).$$

При конечности траектории ($m < \infty$) и $N(m) = D(m)$ первый член также имеет вид $q^m E(m)$, так что

$$N(0) = \sum_{i=0}^m q^i E(i).$$

Каждое $E(i)$ нормализуется по степеням 4: если $b(i-1) = 2u + v$, $v \in \{0, 1\}$, то

$$E(i) = 4^u \cdot 2^v \cdot \frac{2^{t(i)} - 1}{3} = 4^u \cdot \eta(i),$$

где $\eta(i)$ — нечётное или удвоенное нечётное число. Умножая на $q^i = (4/3)^i$, получаем

$$q^i E(i) = \frac{\eta(i)}{3^i} \cdot 4^{u+i}.$$

Ровно i переносов $3 \mapsto q^{-1} \cdot 4$ устраняют знаменатель 3^i , давая локальный вклад $\gamma(i)q^i$ с $\gamma(i) \in \mathbb{Z}_{>0}$. После объединения по позициям i и локальной перенормировки коэффициентов (см. §11) получаем допустимый алфавит q -цифр и конечную сумму

$$N = \sum_{i=0}^m q^i E(i),$$

эквивалентную конечному v -разложению в $(2 \sqcap 3)$. □

Theorem 25.2 (Эквивалентность форм). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $A \iff B$,
2. $C \iff D$,

и, следовательно, $A \iff D$.

Доказательство. Импликация « \Rightarrow » — Теорема 21.2 (достаточность). Импликация « \Leftarrow » — Теорема 20.19 (необходимость). □

Remark 25.3. Таким образом, условие (A) не только достаточно, но и необходимо для (B). Это свойство можно трактовать как *универсальность* системы $(2 \sqcap 3)$: она порождает базис элементарных чисел, в котором представимо любое $N \in \mathbb{N}$, и динамика Φ в W_q полностью эквивалентна пошаговому «снятию» этих базисных элементов.

26 Заключение

В работе получены два результата, имеющих фундаментальное значение для теории чисел:

1. **Сила метрики в системе $\{4 \sqcap 3\}$.** Показано, что совместное использование непрерывной метрики L и её дискретной версии L_{disc} позволяет провести полный анализ динамики преобразования Φ и строго доказать глобальную конечность траекторий. Их взаимная работа обеспечивает как локальные оценки, так и глобальный отрицательный дрейф, что делает этот инструмент универсальным для исследования сходимости.
2. **Представимость натуральных чисел в $\{2 \sqcap 3\}$ и корректность метрики M .** Строго доказано, что любое натуральное число имеет конечное представление в системе $\{2 \sqcap 3\}$. Это подтверждает корректность вспомогательной метрики M , отражающей интервальную структуру "тетрад и закрепляет её роль как наглядного и согласованного с основной схемой инструмента локального анализа.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность разным моделям ИИ за помощь в уточнении объяснений, вычитке и создании иллюстративных примеров.

Заявление о финансировании

Финансирование не получено.

Конфликт интересов

Мы не имеем конфликта интересов для раскрытия.

Список литературы

- [1] Shigeki Akiyama, Christiane Frougny, and Jacques Sakarovitch. On the representation of numbers in a rational base. *Discrete Mathematics*, 306(16):1955–1970, 2006.
- [2] Shigeki Akiyama, Christiane Frougny, and Jacques Sakarovitch. Number systems with a rational base. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 42(4):615–639, 2008.
- [3] Shigeki Akiyama, Christiane Frougny, and Jacques Sakarovitch. Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems. *Israel Journal of Mathematics*, 168(1):53–91, 2013.
- [4] Brilliant.org. Fractional number base. <https://brilliant.org/wiki/fractional-number-base/>. Accessed: 2025-09-11.
- [5] J. W. S. Cassels. *Local Fields*, volume 3 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Гл. 1.
- [6] Shalom Eliahou and Jean-Louis Verger-Gaugry. The number system in rational base $3/2$ and the $3x+1$ problem. *arXiv preprint arXiv:2504.13716*, 2025. Version 1, 18 Apr 2025.
- [7] Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine Geometry: An Introduction*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2000. Гл. 1, §1.4.
- [8] Ilia Krasikov and Jeffrey C. Lagarias. Almost all orbits of the collatz map attain almost bounded values. <https://arxiv.org/abs/1909.03562>. Accessed: 2025-09-08.
- [9] LibreTexts. 5.2: Place value systems. https://math.libretexts.org/Courses/Las_Positas_College/Math_for_Liberal_Arts/05%3A_Numeration_Systems/5.02%3A_Place_Value_Systems. Accessed: 2025-09-08.
- [10] Maurice Margenstern and Yuri Matiyasevich. A binomial representation of the $3x+1$ problem. *Acta Arithmetica*, XCI(4):367–378, 1999.
- [11] Johannes Morgenbesser, Wolfgang Steiner, and Jörg M. Thuswaldner. Digit expansions in rational base number systems. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 25(3):635–664, 2013.
- [12] Joseph H. Silverman. *The Arithmetic of Dynamical Systems*, volume 241 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007. Гл. 3.
- [13] N. J. A. Sloane. A008884: $3x+1$ sequence starting at 27. <https://oeis.org/A008884>, 2025. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at <https://oeis.org>, Accessed: 2025-09-11.
- [14] Terence Tao. The notorious collatz conjecture. <https://terrytao.files.wordpress.com/2020/02/collatz.pdf>. Accessed: 2025-09-08.
- [15] Riho Terras. A stopping time problem on the positive integers. *Acta Arithmetica*, XXX:241–252, 1976.
- [16] Tutorialspoint. Positional number system. <https://www.tutorialspoint.com/positional-number-system>. Accessed: 2025-09-08.
- [17] Lizzie Wade. Mathematician proves huge result on ‘dangerous’ problem. <https://www.quantamagazine.org/mathematician-proves-huge-result-on-dangerous-problem-20191211/>. Accessed: 2025-09-08.
- [18] Wikipedia contributors. Collatz conjecture. https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture. Accessed: 2025-09-08.

- [19] Wikipedia contributors. Fichye: Collatz5.svg. <https://ht.m.wikipedia.org/wiki/Fichye:Collatz5.svg>. Accessed: 2025-09-11.
- [20] Wikipedia contributors. Horner’s method. https://en.wikipedia.org/wiki/Horner%27s_method. Accessed: 2025-09-08.
- [21] Wikipedia contributors. Non-integer base of numeration. https://en.wikipedia.org/wiki/Non-integer_base_of_numeration. Accessed: 2025-09-11.
- [22] Wikipedia contributors. Positional notation. https://en.wikipedia.org/wiki/Positional_notation. Accessed: 2025-09-08.

A Позиционные записи в системе $4 \square 3$

$$N = 27$$

$$N = 1/3 + 0/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 1/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 1/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9$$

$$N = 41$$

$$N = 3/3 + 2/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 3/3 \cdot q^5 + 2/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 3/3 \cdot q^{10}$$

$$N = 31$$

$$N = 1/3 + 1/3 \cdot q + 3/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 3/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 1/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9$$

$$N = 47 \quad N = 1/3 + 1/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 1/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 3/3 \cdot q^{10}$$

$$N = 71 \quad N = 1/3 + 3/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 3/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 0/3 \cdot q^9 + 1/3 \cdot q^{10} + 2/3 \cdot q^{11} + 3/3 \cdot q^{12}$$

$$N = 107 \quad N = 1/3 + 0/3 \cdot q + 0/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 3/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 2/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 3/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 1/3 \cdot q^{11} + 2/3 \cdot q^{12} + 3/3 \cdot q^{13}$$

$$N = 161 \quad N = 3/3 + 0/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 1/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 3/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 2/3 \cdot q^{11} + 0/3 \cdot q^{12} + 1/3 \cdot q^{13} + 2/3 \cdot q^{14} + 3/3 \cdot q^{15}$$

$$N = 121 \quad N = 3/3 + 2/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 2/3 \cdot q^3 + 3/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 1/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 0/3 \cdot q^9 + 2/3 \cdot q^{10} + 0/3 \cdot q^{11} + 1/3 \cdot q^{12} + 2/3 \cdot q^{13} + 3/3 \cdot q^{14}$$

$$N = 91 \quad N = 1/3 + 0/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 2/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 3/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 1/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 1/3 \cdot q^{11} + 2/3 \cdot q^{12} + 3/3 \cdot q^{13}$$

$$N = 137 \quad N = 3/3 + 2/3 \cdot q + 0/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9 + 2/3 \cdot q^{10} + 0/3 \cdot q^{11} + 1/3 \cdot q^{12} + 2/3 \cdot q^{13} + 3/3 \cdot q^{14}$$

$$N = 103 \quad N = 1/3 + 3/3 \cdot q + 3/3 \cdot q^2 + 2/3 \cdot q^3 + 1/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 3/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 3/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 1/3 \cdot q^{11} + 2/3 \cdot q^{12} + 3/3 \cdot q^{13}$$

$$N = 155 \quad N = 1/3 + 0/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 2/3 \cdot q^{11} + 0/3 \cdot q^{12} + 1/3 \cdot q^{13} + 2/3 \cdot q^{14} + 3/3 \cdot q^{15}$$

$$N = 233 \quad N = 3/3 + 2/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 0/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11} + 2/3 \cdot q^{12} + 0/3 \cdot q^{13} + 1/3 \cdot q^{14} + 2/3 \cdot q^{15} + 3/3 \cdot q^{16}$$

$$N = 1367 \quad N = 1/3 + 3/3 \cdot q + 0/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 0/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11} + 2/3 \cdot q^{12} + 1/3 \cdot q^{13} + 1/3 \cdot q^{14} + 3/3 \cdot q^{15} + 0/3 \cdot q^{16} + 3/3 \cdot q^{17} + 2/3 \cdot q^{18} + 0/3 \cdot q^{19} + 1/3 \cdot q^{20} + 2/3 \cdot q^{21} + 3/3 \cdot q^{22}$$

$$N = 2051 \quad N = 1/3 + 2/3 \cdot q + 3/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9 + 2/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11} + 1/3 \cdot q^{12} + 1/3 \cdot q^{13} + 1/3 \cdot q^{14} + 2/3 \cdot q^{15} + 1/3 \cdot q^{16} + 2/3 \cdot q^{17} + 2/3 \cdot q^{18} + 1/3 \cdot q^{19} + 3/3 \cdot q^{20} + 1/3 \cdot q^{21} + 2/3 \cdot q^{22} + 3/3 \cdot q^{23}$$

$$N = 3077 \quad N = 3/3 + 1/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 3/3 \cdot q^5 + 2/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9 + 1/3 \cdot q^{10} + 0/3 \cdot q^{11} + 0/3 \cdot q^{12} + 0/3 \cdot q^{13} + 2/3 \cdot q^{14} + 0/3 \cdot q^{15} + 2/3 \cdot q^{16} + 2/3 \cdot q^{17} + 0/3 \cdot q^{18} + 0/3 \cdot q^{19} + 3/3 \cdot q^{20} + 2/3 \cdot q^{21} + 0/3 \cdot q^{22} + 1/3 \cdot q^{23} + 2/3 \cdot q^{24} + 3/3 \cdot q^{25}$$

$$N = 577 \quad N = 3/3 + 0/3 \cdot q + 0/3 \cdot q^2 + 1/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 2/3 \cdot q^6 + 0/3 \cdot q^7 + 3/3 \cdot q^8 + 2/3 \cdot q^9 + 1/3 \cdot q^{10} + 1/3 \cdot q^{11} + 3/3 \cdot q^{12} + 0/3 \cdot q^{13} + 3/3 \cdot q^{14} + 2/3 \cdot q^{15} + 0/3 \cdot q^{16} + 1/3 \cdot q^{17} + 2/3 \cdot q^{18} + 3/3 \cdot q^{19}$$

$$N = 433 \quad N = 3/3 + 0/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 2/3 \cdot q^3 + 0/3 \cdot q^4 + 2/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 3/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 1/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11} + 0/3 \cdot q^{12} + 3/3 \cdot q^{13} + 2/3 \cdot q^{14} + 0/3 \cdot q^{15} + 1/3 \cdot q^{16} + 2/3 \cdot q^{17} + 3/3 \cdot q^{18}$$

$$N = 325 \quad N = 3/3 + 1/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 3/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 1/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 3/3 \cdot q^{10} + 0/3 \cdot q^{11} + 3/3 \cdot q^{12} + 2/3 \cdot q^{13} + 0/3 \cdot q^{14} + 1/3 \cdot q^{15} + 2/3 \cdot q^{16} + 3/3 \cdot q^{17}$$

$$N = 61 \quad N = 3/3 + 3/3 \cdot q + 3/3 \cdot q^2 + 0/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 3/3 \cdot q^5 + 3/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 2/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11}$$

$$N = 23 \quad N = 1/3 + 3/3 \cdot q + 0/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 0/3 \cdot q^5 + 1/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 3/3 \cdot q^8$$

$$N = 35 \quad N = 1/3 + 2/3 \cdot q + 1/3 \cdot q^2 + 2/3 \cdot q^3 + 2/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 3/3 \cdot q^6 + 1/3 \cdot q^7 + 2/3 \cdot q^8 + 3/3 \cdot q^9$$

$$N = 53 \quad N = 3/3 + 1/3 \cdot q + 3/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3 + 1/3 \cdot q^4 + 1/3 \cdot q^5 + 0/3 \cdot q^6 + 2/3 \cdot q^7 + 0/3 \cdot q^8 + 1/3 \cdot q^9 + 2/3 \cdot q^{10} + 3/3 \cdot q^{11}$$

$$N = 5 \quad N = 3/3 + 1/3 \cdot q + 2/3 \cdot q^2 + 3/3 \cdot q^3$$

В Шпаргалка: обратный ход в вычитательном представлении

Вход: остаток $R = \frac{X}{3^a}$, память β_{mem} .

1. **Низ по замку:** $\beta \leftarrow \beta_{\text{mem}} + 2$.
2. **Перенос к целевому масштабу:** если блок на 3^b ($b \geq a + 1$), то $X^\uparrow \leftarrow X \cdot 3^{b-a}$.
3. **Проба верха:** $S \leftarrow X^\uparrow + 2^\beta$, $\alpha \leftarrow v_2(S)$.
4. **Блок:** $E = \frac{2^\alpha - 2^\beta}{3^b}$.
5. **Обновление:** $R_{\text{нов}} = \frac{X^\uparrow}{3^b} - E$, $\beta_{\text{mem}} \leftarrow \alpha$.
6. Если $\alpha = \beta$ (нулевой блок) и $R_{\text{нов}} \neq 0$ — просто переход на следующий масштаб.
7. **Стоп:** при $R_{\text{нов}} = 0$ процесс завершён.

Замечания:

- Нулевой блок не обнуляет процесс.
- При пропуске нескольких масштабов множитель 3^{b-a} учитывается в пробе.
- Знак блока может быть отрицательным — это нормально.

С Определение тетрады в пифагорейской традиции

Definition C.1 (Тетрада). *Tetрада* (от греч. τετράς — «четвёрка») — в пифагорейской традиции не просто число 4, а завершённая совокупность первых четырёх натуральных чисел:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

дающая *декаду*, которую пифагорейцы считали совершенным числом и символом гармонии мироздания.

Тетрада обозначала завершённость цикла и гармонию: четыре стороны света, четыре времени года, четыре стихии. В «тетрактисе» — священной фигуре пифагорейцев — она представлена как треугольное расположение десяти точек в четыре ряда, символизирующее порядок космоса.

В математическом аспекте тетрада — это первое квадратное число после единицы, сумма первых четырёх чисел, а также основа для построения музыкальных интервалов (кварта 4:3, квинта 3:2, октава 2:1).

Источник: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetractys>

Д Баланс сил: почти $8 \approx 9$

В ускоренной схеме Коллатца шаг на нечётном ядре:

$$F \mapsto \frac{3F+1}{2^t}, \quad t = v_2(3F+1),$$

даёт средний множитель

$$M_{\text{cp}} \approx \frac{3}{2^{\mathbb{E}[t]}}.$$

Граница равновесия: $M_{\text{cp}} = 1 \iff \mathbb{E}[t] = \log_2 3 \approx 1.585$. Два шага подряд:

$$M_2 \approx \frac{3^2}{2^{t_1+t_2}} \Rightarrow \frac{t_1+t_2}{2} \approx \log_2 3.$$

А ведь есть симметрия (шутка): $2^3 = 8$ и $3^2 = 9$ — почти одно и то же. . . но именно эта «единичка» решает, будет ли траектория расти или падать.

i	$n(i)$	$4 \sqcap 3$	Класс	$L(i)$	$t(i) \mid \Delta D$	$\Delta U_L(i)$	$\Delta B_L(i)$	$\Delta L(i) = \Delta U_L(i) - \Delta B_L(i)$	Метка	$\Pi(i)$
0	27	[1]	$4k+3$	20	1 (1/2)	-0.40	1.00	-1.40	<	1
1	41	[2]	$4k+1$	22	2 (1/4)	-0.40	1.00	-1.40	<	
2	31	[3]	$4k+3$	20	1 (1/2)	-0.40	-1.00	0.60	=	4
3	47	[4]	$4k+3$	22	1 (1/2)	-0.40	0.00	-0.40	<	
4	71	[5]	$4k+3$	26	-	-0.41	0.00	-0.41	<	
5	107	[6]	$4k+3$	28	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
6	161	[7]	$4k+1$	32	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
7	121	[8]	$4k+1$	28	2 (1/4)	-0.41	0.00	-0.41	<	
8	91	[9]	$4k+3$	30	1 (1/2)	-0.41	-1.00	0.59	=	1
9	137	[10]	$4k+1$	28	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
10	103	[11]	$4k+3$	32	1 (1/2)	-0.41	-1.00	0.59	=	2
11	155	[12]	$4k+3$	34	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
12	233	[13]	$4k+1$	32	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
13	175	[14]	$4k+3$	34	1 (1/2)	-0.41	-1.00	0.59	=	3
14	263	[15]	$4k+3$	38	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
15	395	[16]	$4k+3$	40	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
16	593	[17]	$4k+1$	38	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
17	445	[18]	$4k+1$	32	3 (1/8)	-0.41	1.00	-1.41	<	
18	167	[19]	$4k+3$	34	1 (1/2)	-0.41	-2.00	1.59	=	2
19	251	[20]	$4k+3$	38	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
20	377	[21]	$4k+1$	36	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
21	283	[22]	$4k+3$	38	1 (1/2)	-0.41	-1.00	0.59	=	1
22	425	[23]	$4k+1$	36	2 (1/4)	-0.41	1.00	-1.41	<	
23	319	[24]	$4k+3$	38	1 (1/2)	-0.41	-1.00	0.59	=	5
24	479	[25]	$4k+3$	42	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
25	719	[26]	$4k+3$	44	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
26	1079	[27]	$4k+3$	48	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
27	1619	[28]	$4k+3$	50	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
28	2429	[29]	$4k+1$	44	3 (1/8)	-0.41	2.00	-2.41	<	
29	911	[30]	$4k+3$	50	1 (1/2)	-0.41	-2.00	1.59	=	3
30	1367	[31]	$4k+3$	48	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	
31	2051	[32]	$4k+3$	52	1 (1/2)	-0.41	0.00	-0.41	<	1
32	3077	[33]	$4k+1$	40	4 (1/16)	-0.41	3.00	-3.41	<	
33	577	[34]	$4k+1$	38	2 (1/4)	-0.41	-2.00	1.59	=	
34	433	[35]	$4k+1$	36	2 (1/4)	-0.41	0.00	-0.41	<	
35	325	[36]	$4k+1$	24	4 (1/16)	-0.41	2.00	-2.41	<	
36	61	[37]	$4k+1$	18	3 (1/8)	-0.41	-1.00	0.59	=	
37	23	[38]	$4k+3$	20	1 (1/2)	-0.39	-2.00	1.61	=	2
38	35	[39]	$4k+3$	24	1 (1/2)	-0.40	0.00	-0.40	<	
39	53	[40]	$4k+1$	8	5 (1/32)	-0.41	4.00	-4.41	<	
40	5	[41]	$4k+1$	2	4 (1/16)	-0.32	-1.00	0.68	=	

Таблица 7: Траектория $n = 27$ в терминах счётных и логарифмических полуразрядов. В колонке $4 \sqcap 3$ указаны перекрёстные ссылки `\ref{n: ...}` на позиционные раскладки чисел в системе $4 \sqcap 3$, приведённые в приложении. Класс ($4k+1$ или $4k+3$) определяет вид остатка при делении на 4. $L(i)$ — длина в счётных полуразрядах; $t(i) \mid \Delta D$ — показатель степени двойки и дробь $D(i)/D(i+1)$. $\Delta U_L(i)$, $\Delta B_L(i)$ и $\Delta L(i)$ — приращения верхней, нижней и полной длины в логарифмических полуразрядах, при этом $\Delta L(i) = \Delta U_L(i) - \Delta B_L(i)$. Метка «=» соответствует сохранению длины ($-1 < \Delta L \leq 0$), «<» — падению. $\Pi(i)$ — длина участка сохранения.

Примечание. В таблице приведены приращения ΔL в непрерывной метрике (масштаб всего числа), которые могут быть положительными на отдельных шагах при $t = 1$ за счёт роста делительной части. В дискретной метрике L_{disc} для этих же шагов $\Delta L_{\text{disc}} \in \{0, -1\}$, что согласуется с утверждением Следствия 20.18 о том, что L_{disc} никогда не растёт.

i	Система 10 и эквивалент в $4 \square 3$	Класс $N \bmod 4$ и $t(i)$	Накопительное $2 \square 3$-разложение
0	27 [4–3-запись $A(0)$, хвост подчеркнут]	$4k + 3$ $t = 1$ сохр.	$2 \square 3$: начало + $E(0) \rightarrow$ перенос
1	$41 \cdot 2$ [4–3-запись $A(1)$, хвост ...]	$4k + 1$ $t = 2$ уб.	$2 \square 3$: $E(0)$ + $E(1) \rightarrow$ добавлен блок
2	$31 \cdot 8$ [4–3-запись $A(2)$, хвост ...]	$4k + 3$ $t = 1$ сохр.	$2 \square 3$: $E(0) \sqcup E(1)$ + $E(2) \rightarrow$ добавлен блок
3	$47 \cdot 16$ [4–3-запись $A(3)$, хвост ...]	$4k + 3$ $t = 1$ сохр.	$2 \square 3$: $E(0) \sqcup E(1) \sqcup E(2)$ + $E(3) \rightarrow$ добавлен блок
4	$71 \cdot 32$ [4–3-запись $A(4)$, хвост ...]	$4k + 3$ $t = 1$ сохр.	$2 \square 3$: $E(0) \sqcup E(1) \sqcup E(2) \sqcup E(3)$ + $E(4) \rightarrow$ добавлен блок
5	$107 \cdot 64$ [4–3-запись $A(5)$, хвост ...]	$4k + 3$ $t = 1$ сохр.*	$2 \square 3$: $E(0) \sqcup E(1) \sqcup E(2) \sqcup E(3) \sqcup E(4)$ + $E(5) \rightarrow$ добавлен блок; далее k чётно, $t \geq 2$ (уб.)

Таблица 9: Пример перетока элементарных чисел из $4 \square 3$ в $(2 \square 3)$ для $A(0) = 27$ с указанием класса $N \bmod 4$ и степени 2. Полная раскладка 5-летней давности с табличной траекторией числа 27 см. рис. 4.