

# Параметрические алгоритмы для 5-модульного аналога ES(Серпинский): структура решений, параметризация и конструктивные доказательства(SERP)

Е. Dyachenko  
dyachenko.eduard@gmail.com

5 сентября 2025 г.

## Аннотация

Рассматривается задача представления дроби  $\frac{5}{P}$  в виде суммы трёх различных обратных натуральных чисел:

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \quad A < B < C, \quad A, B, C \in \mathbb{N}.$$

Анализируется случай простых  $P \equiv 1 \pmod{5}$ , для которого выделяются два типа решений: ED1 (ровно один знаменатель кратен  $P$ , именно  $C = cP$ ) и ED2 (ровно два знаменателя кратны  $P$ , именно  $B = bP$  и  $C = cP$ ). Разработаны параметрические конструкции и алгоритмы перебора, включая конструктивные переходы между типами решений. Исследование является продолжением работы для коэффициента 4 (гипотеза Эрдоша-Штрауса)[2]; здесь аналогичная структура параметризации и решения перенесена на коэффициент 5. В аналитических приложениях приведены инструменты усреднения (Бомбери-Виноградов, большее решето, Чеботарёв), используемые для плотностных оценок в параметрических боксах.

## 1 Введение

Постановка: для простого  $P$  ищем натуральные  $A < B < C$  такие, что

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}. \quad (1.1)$$

### 1.1 Переход от 4/P к 5/P

Структура параметризаций и доказательств из работы [2] сохраняется и в настоящей работе, заменяется коэффициент  $4 \rightarrow 5$  в ядрах формул. В частности: - оценка минимума:  $P < 5A < 3P$ ; - в ED1 меняется связь  $5c - 1 = \gamma P$  (вместо  $4c - 1 = \gamma P$ ); - в ED2 меняется ядро:  $t = 5bc - b - c$  и  $(5b - 1)(5c - 1) = 5P\delta + 1$ .

---

2020 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11N05, 11P21; Secondary 94A60, 20P05 .

*Key words and phrases*: factorization, Bombieri-Vinogradov large sieve, the larger sieve of Greaves, deterministic algorithms; analytic number theory; number theory;

\* *Licence*: Text is available under the Creative Commons NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

## 2 Мотивация

Параметризация уравнения и разбиение по конфигурациям кратности ( $P \mid B$  и/или  $P \mid C$ ) позволяют выстроить конструктивные процедуры перебора и доказать существование решений при  $P \equiv 1 \pmod{5}$ , а также получать семейства в арифметических прогрессиях.

## 3 Упорядочение

Для классов  $P \equiv 4, 3, 2 \pmod{5}$  имеются явные разложения; остаётся случай  $P \equiv 1 \pmod{5}$ .

### 3.1 Явные разложения для $P \not\equiv 1 \pmod{5}$

Пусть  $P = 5P' + 4$  — простое:

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{\frac{P+4}{5}} + \frac{1}{2(P'+1)(5P'+4)} + \frac{1}{2(P'+1)(5P'+4)}.$$

Пусть  $P = 5P' + 3$  — простое:

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{\frac{P+4}{5}} + \frac{1}{(P'+1)(5P'+3)} + \frac{1}{(P'+1)(5P'+3)}.$$

Пусть  $P = 5P' + 2$  — простое (здесь  $P'$  нечётно):

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{\frac{P+4}{5}} + \frac{1}{(P'+1)(5P'+4)} + \frac{1}{(P'+1)(5P'+4)},$$

где третье слагаемое далее детализируется как сумма двух долей, так как  $P' + 1$  чётно. Случай  $P = 5P' + 1$  — предмет данной статьи.

### 3.2 Оценка для минимального знаменателя

Если  $A \leq B \leq C$  и  $A, B, C \in \mathbb{N}$ , то

$$\frac{5}{P} > \frac{1}{A} \Rightarrow 5A > P \Rightarrow P < 5A.$$

Кроме того, из  $A \leq B \leq C$  следует:

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq \frac{3}{A} \Rightarrow 5A \leq 3P,$$

и, исключая вырождение  $A = B = C$ , получаем строгие границы:

$$P < 5A < 3P. \tag{3.1}$$

## 4 Обозначения

### Основные параметры

$P$	простое число $> 2$ , при этом $4 \nmid P$ ; часто $P \equiv 1 \pmod{4}$ или $P \equiv 3 \pmod{4}$
$P'$	целое число: $P = 4P' + 1$ или $P = 4P' + 3$
$A, B, C$	знаменатели в формуле для гипотезы Серпинского, упорядоченные $A \leq B \leq C$
$H(S)$	гипотеза Серпинского: $\frac{5}{P} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$

### Параметры методов ED1 и ED2

$\gamma$	$\frac{5c-1}{P}$ (или $\frac{5b-1}{P}$ во втором случае); часто $\gamma \equiv 4 \pmod{5}$ , $\gcd(\gamma, c) = 1$ или $\gcd(\gamma, b) = 1$
$u, v$	«множители» в тождестве: для ED1 $u = \gamma A - c$ , $v = \gamma B - c$ , $uv = c^2$ ; для варианта с $b$ — $u = \gamma A - b$ , $v = \gamma C - b$ , $uv = b^2$ ; всегда $u \leq v$ . Размерность факториз
$\delta$	$t = P \cdot \delta$ , при этом в ED2 $\delta \mid bc$
$b, c$	при ED2 $B = bP$ и/или $C = cP$
$t$	$t = 5bc - b - c$
$r, s$	$r = 5b - 1$ , $s = 5c - 1$ , при этом $r \equiv s \equiv 4 \pmod{5}$ , $rs = 5P\delta + 1$
$g$	$\gcd(b, c)$
$b', c'$	разложение $b = b'g$ , $c = c'g$ (нормализованная форма)
$d'$	квадратный сомножитель в разложении $\delta$
$\alpha$	квадратсвободный сомножитель в разложении $\delta$

### Переходы между методами

$\mathcal{C}_{ED1}(P)$	множество допустимых четвёрок $(\gamma, c, u, v)$ для ED1
$\mathcal{C}_{ED2}(P)$	множество допустимых троек $(\delta, b, c)$ для ED2
$y$	минимальный делитель $5c - 1$ , при этом $y \equiv 3 \pmod{5}$
$P''$	модуль для ED1 при свёртке, определяемый через $\gamma$ по формуле ...
ED2→ED1	переход: $A = \frac{bc}{\delta}$ , $B = bP$ ; $u = \gamma A - c$ , $v = \gamma B - c$
ED1→ED2	переход: $A = \frac{u+c}{\gamma}$ , $b = \frac{v+c}{\gamma P}$ , $\delta = \frac{bc}{A}$
Антисвёртка	алгоритм обратного хода ED1→ED2 по приведённым формулам выше

### Решётки и боксы

$k$	размерность векторного параметра
$u_0(P)$	вектор-смещение для аффинного класса
$\Lambda, \Lambda_j$	подрешётки $\mathbb{Z}^k$ индекса $M$ или $M_j$
$M, M_j$	индексы подрешёток
$\mathcal{B}_k(T)$	бокс $\{u \in \mathbb{Z}^k : 1 \leq u_i \leq T\}$
$\mathcal{B}_P^{(I)}, \mathcal{B}_P^{(II)}$	боксы типов I/II с дополнительными условиями
$\mathcal{G}_P(T)$	допустимые параметры в боксе
$\mathcal{G}_P^*$	класс допустимых четвёрок $(\gamma, c, u, v)$ для ED1, удовлетворяющих: $\gamma \in \mathbb{N}$ , $c \in \mathbb{Z}$ , $u = \gamma A - c$ , $v = \gamma B - c$ , $uv = c^2$ , $u \leq v$

### Аналитические обозначения

$\left(\frac{a}{P}\right)$	символ Лежандра; при составном модуле используется $\left(\frac{a}{\gamma}\right)$ (символ Якоби, при простом $P$ )
$\pi(y)$	функция счёта простых
$\ll, \gg, \asymp$	стандартные асимптотические символы
$D$	множество $\delta \leq X$ , $\delta \equiv 4 \pmod{5}$
$T(\delta)$	счётчик простых в прогрессии, см. Приложение §A

## 5 Параметризация ED1 (один кратный, $C = cP$ )

### 5.1 Ядро и тождества

Пусть  $C = cP$ . Из (1.1) следует

$$(5c - 1)AB = cP(A + B). \quad (5.1)$$

Положив  $\gamma = \frac{5c - 1}{P} \in \mathbb{N}$ , получаем

$$(\gamma A - c)(\gamma B - c) = c^2. \quad (5.2)$$

Отсюда  $\gamma \equiv 4 \pmod{5}$  и  $\gcd(\gamma, c) = 1$  (так как  $5c \equiv 1 \pmod{\gamma}$ ).

**Лемма 5.1.** *Всегда  $\gcd(\gamma, c) = 1$ .*

*Доказательство.* Из  $5c - 1 = \gamma P$  имеем  $5c \equiv 1 \pmod{\gamma}$ , значит  $\gcd(\gamma, c) = 1$ .  $\square$

### 5.2 Полная параметризация ED1 с фильтрами по $P$

**Теорема 5.2.** *Пусть  $P \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $\gamma \equiv 4 \pmod{5}$ ,  $5c - 1 = \gamma P$ ,  $\gcd(\gamma, c) = 1$ . Пусть  $u, v \in \mathbb{N}$  таковы, что*

$$uv = c^2, \quad u \equiv v \equiv -c \pmod{\gamma}, \quad u \not\equiv -c \pmod{P}, \quad v \not\equiv -c \pmod{P}.$$

*Тогда*

$$A = \frac{u + c}{\gamma}, \quad B = \frac{v + c}{\gamma}, \quad C = cP$$

*дают решение (1.1) типа ED1 с  $P \nmid A, B$ . Обратно, всякое ED1-решение порождает такие  $\gamma, c, u, v$ .*

*Доказательство.* Из (5.1) следует (5.2). Полагая  $u = \gamma A - c$ ,  $v = \gamma B - c$ , получаем  $uv = c^2$  и  $u \equiv v \equiv -c \pmod{\gamma}$ , откуда  $\gamma \mid (u + c)$ ,  $\gamma \mid (v + c)$  и  $A, B \in \mathbb{N}$ . Условия  $u \not\equiv -c \pmod{P}$ ,  $v \not\equiv -c \pmod{P}$  равносильны  $P \nmid A$ ,  $P \nmid B$  благодаря  $\gcd(\gamma, c) = 1$  и  $5c - 1 = \gamma P$ . Обратимость следует из (5.2).  $\square$

### 5.3 Фильтры кратности по $P$

Из  $A = (u + c)/\gamma$ ,  $B = (v + c)/\gamma$ ,  $5c - 1 = \gamma P$  имеем

$$P \mid A \iff u \equiv -c \pmod{P}, \quad P \mid B \iff v \equiv -c \pmod{P}.$$

Для ED1 требуются одновременно  $u \not\equiv -c \pmod{P}$  и  $v \not\equiv -c \pmod{P}$ .

### 5.4 Пример: $P = 11$

Минимальное  $\gamma \equiv 4 \pmod{5}$  с  $5c - 1 = \gamma P$  даёт  $\gamma = 4$ ,  $c = (4 \cdot 11 + 1)/5 = 9$ . Делители  $c^2 = 81$ , совместимые с  $u \equiv -c \equiv 3 \pmod{4}$  и  $u \not\equiv -c \equiv 2 \pmod{11}$ , включают  $u = 3$ ,  $v = 27$ . Тогда

$$A = \frac{3 + 9}{4} = 3, \quad B = \frac{27 + 9}{4} = 9, \quad C = 99, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{5}{11}.$$

## 6 Параметризация ED2 (два кратных, $B = bP$ , $C = cP$ )

### 6.1 Постановка и тождества

Рассмотрим

$$\frac{5}{P} = \frac{1}{A} + \frac{1}{bP} + \frac{1}{cP}, \quad A < bP \leq cP, \quad P \nmid A.$$

Умножая на  $AbcP$ , получаем

$$A(5bc - b - c) = Pbc. \quad (6.1)$$

Пусть  $t := 5bc - b - c = P\delta$ ,  $\delta \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$A = \frac{bc}{\delta}. \quad (6.2)$$

Эквивалентно,

$$(5b - 1)(5c - 1) = 5P\delta + 1. \quad (6.3)$$

Полагая  $r = 5b - 1$ ,  $s = 5c - 1$ , получаем  $rs = 5P\delta + 1$  и  $r \equiv s \equiv 4 \pmod{5}$ .

### 6.2 Полная параметризация ED2

**Теорема 6.1.** Пусть  $P$  — простое и  $\delta \in \mathbb{N}$ . Пусть  $r, s \in \mathbb{N}$  таковы, что

$$rs = 5P\delta + 1, \quad r \equiv s \equiv 4 \pmod{5}.$$

Положим  $b = (r + 1)/5$ ,  $c = (s + 1)/5$ . Если  $\delta \mid bc$ , то

$$A = \frac{bc}{\delta}, \quad B = bP, \quad C = cP$$

дают решение (1.1) типа ED2. При перестановке  $r \leftrightarrow s$  меняются  $b \leftrightarrow c$  и  $B \leftrightarrow C$ ; упорядочение  $B \leq C$  достигается выбором  $r \leq s$ . Кроме того, при  $b \leq c$  выполнено  $A \leq B$ .

*Доказательство.* Из (6.1) и  $t = P\delta$  следует (6.2). Равенство (6.3) получаем из  $(5b - 1)(5c - 1) = 25bc - 5b - 5c + 1 = 5(5bc - b - c) + 1 = 5P\delta + 1$ . Конгруэнции  $r \equiv s \equiv 4 \pmod{5}$  очевидны. При  $b \leq c$  имеем

$$A \leq B \iff \frac{bc}{\delta} \leq bP \iff c \leq P\delta = 5bc - b - c \iff c(5b - 2) \geq b,$$

что верно при  $b \geq 1$ ,  $c \geq b$ . □

### 6.3 Пример: $P = 11$

Берём  $\delta = 1$ . Тогда  $5P\delta + 1 = 56 = 4 \cdot 14$ ,  $4 \equiv 14 \equiv 4 \pmod{5}$ . Пара  $r = 4$ ,  $s = 14$  даёт  $b = 1$ ,  $c = 3$ ,  $A = 3$ ,  $B = 11$ ,  $C = 33$ . Проверка:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33} = \frac{11 + 3 + 1}{33} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}.$$

## 7 Конфигурации кратности по $P$ и классификация

**Лемма 7.1.** В любом решении (1.1) хотя бы один из  $A, B, C$  делится на  $P$ .

*Доказательство.* Домножим (1.1) на  $ABCP$ :  $5ABC = P(AB + AC + BC)$ . По модулю  $P$ :  $5ABC \equiv 0$ , значит  $P \mid ABC$ .  $\square$

**Лемма 7.2.** Невозможно, чтобы  $A = aP$ ,  $B = bP$ ,  $C = cP$  одновременно.

*Доказательство.* Тогда  $5 = 1/a + 1/b + 1/c \leq 3$  — невозможно.  $\square$

**Лемма 7.3.** Минимальный знаменатель  $A$  не делится на  $P$ .

*Доказательство.* Из (3.1) следует  $5A < 3P$ ; если  $A = aP$ , то  $5A \geq 5P > 3P$ , противоречие.  $\square$

**Предложение 7.4.** Каждое решение (1.1) при простом  $P \neq 5$  попадает ровно в один из классов: - ED1: ровно один знаменатель кратен  $P$  (без огр. общности  $C = cP$ ), при этом  $P \nmid A, B$ ; - ED2: ровно два знаменателя кратны  $P$  (именно  $B = bP$ ,  $C = cP$ ), а  $P \nmid A$ . Случаи «ни один» и «все три» исключены по Lemmas 7.1 and 7.2, а Lemma 7.3 исключает  $P \mid A$ .

## 8 Связь ED2 $\leftrightarrow$ ED1: свёртка и антисвёртка

### 8.1 Свёртка ED2 $\rightarrow$ ED1

Пусть  $(\delta, b, c) \in \mathcal{C}_{\text{ED2}}(P)$  и  $A = bc/\delta$ ,  $B = bP$ ,  $C = cP$ . Если  $P'$  — любой простой делитель числа  $5c - 1$ , положим  $y = (5c - 1)/P'$ ,  $u' = yA - c$ ,  $v' = yB - c$ . Тогда

$$(u'v' = c^2), \quad u' \equiv v' \equiv -c \pmod{y}, \quad \gcd(y, c) = 1, \quad y \equiv 4 \pmod{5},$$

и

$$\frac{5}{P'} = \frac{1}{A'} + \frac{1}{B'} + \frac{1}{C'}, \quad A' = \frac{u' + c}{y}, \quad B' = \frac{v' + c}{y}, \quad C' = cP'.$$

Если дополнительно  $P' \nmid A, B$ , то получаем «узкий» ED1 на  $P'$ .

**Теорема 8.1.** Для любого  $(\delta, b, c) \in \mathcal{C}_{\text{ED2}}(P)$  и простого  $P' \mid (5c - 1)$  конструкция выше даёт ED1-решение для  $P'$ .

### 8.2 Антисвёртка ED1 $\rightarrow$ ED2 на том же $P$

Пусть  $(\gamma, c, u, v) \in \text{ED1-форма для } P$ ,  $\gamma = (5c - 1)/P$ , и

$$A = \frac{u + c}{\gamma}, \quad B = \frac{v + c}{\gamma}, \quad C = cP.$$

Если  $P \mid (v + c)$ , то  $B = bP$  для  $b = (v + c)/(\gamma P)$ , и положив  $\delta = bc/A \in \mathbb{N}$ , получаем  $(\delta, b, c) \in \mathcal{C}_{\text{ED2}}(P)$ .

**Теорема 8.2.** Переход ED1  $\rightarrow$  ED2 на том же  $P$  возможен тогда и только тогда, когда  $P \mid (v + c)$  (то есть  $B$  кратно  $P$ ).

## 9 Геометрия поверхности и утолщения

Рассматриваем квадратичную поверхность

$$F(\delta, b, c) = (5b - 1)(5c - 1) - 5P\delta - 1 = 0.$$

Утолщение этой поверхности, заданное условием  $|F| \leq \Delta$  в пространстве параметров  $(\delta, b, c)$ , даёт множество кандидатов ED2. Учитывая, что мы работаем в контексте дискретных значений, критически важно оценивать количество решений, удовлетворяющих модульным условиям.

**Лемма 9.1** (Окно по  $\delta$ ). Для фиксированных значений  $b$  и  $c$ , и для  $\Delta \geq 0$ , количество целых чисел  $\delta$ , удовлетворяющих условию  $|F(\delta, b, c)| \leq \Delta$ , не превышает:

$$1 + \left\lfloor \frac{2\Delta}{5P} \right\rfloor.$$

**Предложение 9.2** (Оценка мощности утолщения). В боксе, где  $b \in [B, 2B]$  и  $c \in [C, 2C]$ , общее количество троек  $(\delta, b, c)$ , для которых выполняется условие  $|F| \leq \Delta$ , может быть оценено как:

$$\ll \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) BC + B + C.$$

*Замечание 9.3.* Для пар  $(b, c)$ , связанных с условиями  $\delta \mid bc$ , число таких пар в соответствующем прямоугольнике составляет  $\ll \frac{BC}{\delta} \tau(\delta) + B + C$ .

## 10 Основные моменты, закрывающие претензию о факторизации

**Что именно используется в текущих методах**

- Целочисленная арифметика и операции gcd; - Проверки по модулю простого  $P$  и соответствующие символы  $\left(\frac{a}{P}\right)$  и  $\left(\frac{a}{\gamma}\right)$  — без необходимости факторизации модулей; - Сравнения четности, условия  $u \equiv v \pmod{2}$ ,  $\gcd(u, v) = 1$ , равенство  $uv = c^2$ .

**Что именно не используется**

- Факторизация чисел  $C$ ,  $\gamma$  или промежуточных величин; - Поиск корней по составным модулям; - Факторизация для тестирования квадратности: факт  $uv = c^2$  гарантируется нормировкой.

Опираемся на: - Сумму и дискриминант - Обратный тест - Квадратическую репараметризацию

**Корректность через минимальные леммы**

Опираемся на: - Сумму и дискриминант - Обратный тест - Квадратическую репараметризацию

**Предложение 10.1** (Текущая методология не опирается на факторизацию). Применяемые методы, формирующие и проверяющие пары  $(u, v)$  при фиксированном простом  $P$ , используют только: (i) целочисленные операции и gcd; (ii) проверки по модулю  $P$  и символы  $\left(\frac{\cdot}{P}\right) / \left(\frac{\cdot}{\gamma}\right)$ ; (iii) линейные формулы восстановления  $A, B$  и установление  $C = cP$  из  $uv = c^2$ .

На каждом этапе не требуется факторизация.

Устанавливает связь с  $(u, v)$ ;

Обеспечивает достаточность локальных условий;

$C = cP$  выводится из  $uv = c^2$ .

Все проверки сводятся к арифметике, gcd и символам Лежандра/Якоби.

*Замечание 10.2* (Опциональные ускорения). Использование просеивания малыми простыми числами допускается как метод ускорения, но это не является необходимым для корректности текущих методов и не используется в [Proposition 10.1](#)

## 11 Алгоритмы: решёточные боксы и перебор

- Перебор  $\delta$  в разумных границах; факторизация  $N = 5P\delta + 1$  и пары  $rs = N$  с  $r \equiv s \equiv 4 \pmod{5}$ ; восстановление  $b, c$ , фильтр  $\delta \mid bc$ ; проверка порядка и (3.1). - Для ED1 — перебор делителей  $u \mid c^2$  в согласованных классах по  $\gamma$  и исключение кратностей по  $P$ .

## 12 Интеграция предрешёта по прогрессиям в алгоритм ED2

### 12.1 Идея

Для фиксированных  $\delta$  и набора малых модулей  $r \equiv 4 \pmod{5}$  (с  $\gcd(r, 5\delta) = 1$ ) прогрессии

$$P \equiv 1 \pmod{5}, \quad P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}$$

дают «тонкие» классы для перебора простых  $P$ . По [Propositions B.1](#) and [B.4](#) их плотность контролируема, а среднее число таких прогрессий на  $P$  растёт (см. (B.1)). Это позволяет заменить сплошной перебор  $P$  сканированием уже готовых AP, экономя время.

### 12.2 Псевдокод

Листинг 1: ED2 с предшествующим по прогрессиям

```

Input: prime P 1 (mod 5) or a bound X to find one
parameter \delta; bound R
Precompute S := \{ r < R : r \equiv 4 \pmod{5}, \gcd(r, 5) = 1 \}

Case A (fixed P):
  for r in S:
    if (5 * P^{\delta} + 1) \mod r \neq 0: continue
    s := \frac{5 * P^{\delta} + 1}{r}
    if s \mod 5 \neq 4: continue #
    b := \frac{r + 1}{5}
    c := \frac{s + 1}{5}
    if (b * c) \mod \delta \neq 0: continue
    A := \frac{b * c}{\delta}

    # :
    if not (A \leq b * P < c * P):
      swap(b, c) # continue
    output (A, B := b * P, C := c * P); halt

Case B (search P \leq X):
  Build union of APs: for each r in S form class modulo 5r
  Sieve primes \leq X in union of these APs
  For each such P run Case A

```

### 12.3 Сложность

- Для фиксированного  $P$ : перебор  $r \leq R$  стоит  $O(R)$  проверок делимости; малое  $R$  (полилогарифмическое в  $P$ ) обычно достаточно. - При поиске  $P \leq X$ : стоимость сидовки



```

PS C:\Users\edyac\venv\make_smallP_triples.py> python serp_31.py
P = 31
# alpha b1 c1 g b c delta X Y N A B C
-----
1 1 1 8 1 1 8 1 4 39 156 8 31 248
2 1 1 7 2 2 14 4 9 69 621 7 62 434
PS C:\Users\edyac\venv\make_smallP_triples.py> python serp_41.py
P = 41
# alpha b1 c1 g b c delta X Y N A B C
-----
1 3 1 3 3 3 9 3 14 44 616 9 123 369
PS C:\Users\edyac\venv\make_smallP_triples.py> python serp_2521.py
P = 2521
# alpha b1 c1 g b c delta X Y N A B C
-----
1 1 5 103 2 10 20 4 49 9649 99 955,251 788 486, 50,420 7 ✓
2 1 22 23 5 110 115 25 549 574 31,413,876 251 277,310 289,915 5 ✓
3 3 2 87 3 6 261 3 29 1304 37,816 522 15,126 657,981 1 ✓
4 3 2 85 9 18 765 27 89 3824 340,336 510 45,378 1,928,565 3 ✓
5 39 1 13 39 39 507 39 194 2534 491,596 507 98,319 1,278,147 13 ✓
PS C:\Users\edyac\venv\make_smallP_triples.py> |

```

Рис. 1: скриншот консольного вывода для P=2521,

по объединению AP порядка  $X \sum_{r \leq R} 1/\varphi(5r) \asymp X \log R$  на элементарном уровне; количество найденных кандидатов на  $P$  согласуется с [Proposition B.4](#). - Практически: выбирают  $R = (\log X)^B$  и малые  $\delta$  (включая  $\delta = 1$ ), что даёт близкое к линейному по  $X$  время со слабым лог-фактором.

## 13 Эксперименты для Серпинского

### 13.1 Общий обзор

Исследование решений уравнения вида  $5/P = 1/A + 1/B + 1/C$  в классе Серпинского фокусируется на нахождении значений, соответствующих заданным критериям. Проводились эксперименты для простых чисел  $P \equiv 1 \pmod{5}$ .

### 13.2 Полученные решения

Для каждого  $P$  находились значения  $b, c, A, B$  и  $C$ . Решения представлены в таблице 1.

Таблица 1: Результаты для  $P = 31$  с проверкой по лемме  $X \cdot Y = 5\alpha P(d')^2 + 1$

#	$\alpha$	$b'$	$c'$	$g$	$b$	$c$	$\delta$	$X$	$Y$	$N$	$A$	$B$	$C$	$d'$	OK
$P = 31$															
1	1	1	8	1	1	8	1	4	39	156	8	31	248	1	✓
2	1	1	7	2	2	14	4	9	69	621	7	62	434	2	✓
$P = 41$															
1	3	1	3	3	3	9	9	14	44	616	616	123	369	1	✓
$P = 2521$															
1	5	193	2	10	1930	20	49	9649	99	955,251	788	486,	50,420	7	✓
2	9	183	11	25	4575	275	50	22874	1374	31,413,876	251	277,310	289,915	5	✓
3	3	2	87	3	6	261	3	29	1304	37,816	522	15,126	657,981	1	✓
4	3	2	85	9	18	765	27	89	3824	340,336	510	45,378	1,928,565	3	✓
5	15	39	1	13	39	39	507	194	2534	491,596	507	98,319	1,278,147	13	✓

### 13.3 Замечания реализации

- Для нескольких  $\delta$  объединяйте списки классов по CRT, следя за взаимной независимостью модулей.
- Проверка  $s \equiv 4 \pmod{5}$  и целостности  $b, c, A$  — константные фильтры.
-

Таблица 2: Решения для  $P = 3511$  при  $\alpha = 1$ ,  $d' = 1$  с проверкой

#	$\alpha$	$b_1$	$c_1$	$g$	$b$	$c$	$\delta$	$X$	$Y$	$N$	$A$	$B$	$C$	Проверка
1	1	1	878	1	1	878	1	4	4389	17556	878	3511	3082658	ОК
2	1	3	251	1	3	251	1	14	1254	17556	753	10533	881261	ОК
3	1	4	185	1	4	185	1	19	924	17556	740	14044	649535	ОК
4	1	9	80	1	9	80	1	44	399	17556	720	31599	280880	ОК
5	1	17	42	1	17	42	1	84	209	17556	714	59687	147462	ОК
6	1	23	31	1	23	31	1	114	154	17556	713	80753	108841	ОК

Сортировка  $B \leq C$  достигается перестановкой  $r \leftrightarrow s$ . - Блок «антисвёртки» ED1  $\rightarrow$  ED2 пригоден в обратном направлении, если у вас уже есть ED1-данные с  $P \mid (v + c)$  (см. §8.2).

## 14 Сходимость и решёточная плотность

**Теорема 14.1.** Пусть  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^k$  — подрешётка индекса  $M$ , независимого от  $P$ . Для бокса  $\mathcal{B}_k(T) = \{1 \leq u_i \leq T\}$  и класса  $u_0(P) + \Lambda$  имеем

$$|\{u \in \mathcal{B}_k(T) : u \equiv u_0(P) \pmod{\Lambda}\}| = \frac{T^k}{M} + O_k(T^{k-1}),$$

в частности, при  $T = (\log P)^A$  — логарифмический рост мощности.

**Теорема 14.2.** Пусть допустимые параметры лежат в аффинном классе  $u \equiv u_0(P) \pmod{\Lambda}$ . Тогда полный перебор  $u \in \mathcal{B}_k((\log P)^A)$  находит решение за  $O((\log P)^{Ak})$  шагов, а среднее число итераций до успеха ограничено константой.

## 15 Заключение

Совместное использование геометрической конструкции (попадание диагонального слоя в окно; см. ??) и алгебраической модели ED2 (Приложение В), а также её геометрического углубления в Приложении D, даёт следующее.

- Общий случай, а именно когда  $P$  пробегает бесконечные множества, безусловно в настоящей работе конструктивными методами не доказан; разделы Приложения D, использующие теорему Дирихле и конечные покрытия, носят условный характер.

- Частный случай: для всякого фиксированного нечётного простого  $P$  строго доказано существование решения. Алгебраические и геометрические условия согласованы: по лемме ?? имеем  $S = u$ ,  $\Delta = v^2$ , а Предложение ?? обеспечивает попадание диагонального слоя в целевое окно (см. также Теорему 9.21).

## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность разным моделям ИИ за помощь в уточнении объяснений, вычитке и создании иллюстративных примеров на Python.

## Заявление о финансировании

Финансирование не получено.

## Конфликт интересов

Мы не имеем конфликта интересов для раскрытия.

## Список литературы

- [1] E. Bombieri. On the large sieve. *Mathematika*, 12(2):201–225, 1965.
- [2] E. Dyachenko. Constructive proofs of the erdős–strauss conjecture for prime numbers of the form . <https://doi.org/10.5281/zenodo.17062748>, 2025.
- [3] P. Erdős. Az  $x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1} = b$  egyenlet egész számú megoldásairól. *Matematikai Lapok*, 1:192–210, 1950.
- [4] P. X. Gallagher. The large sieve. *Mathematika*, 14(1):14–20, 1967.
- [5] H. W. Lenstra and P. Stevenhagen. Chebotarëv and his density theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 18(2):26–37, 1996.
- [6] Y. V. Linnik. The large sieve. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 30:292–294, 1941.
- [7] A. Schinzel. Sur quelques propriétés des nombres  $n^3$  et  $n^4$ , où  $n$  est un nombre impair. *Mathesis*, 65:219–222, 1956.
- [8] W. Sierpiński. Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires. *Mathesis*, 65:16–32, 1956.
- [9] N. Tschebotareff. Die bestimmung der dichtigkeit einer menge von primzahlen, welche zu einer gegebenen substitutionsklasse gehören. *Mathematische Annalen*, 95(1):191–228, 1926.
- [10] A. I. Vinogradov. The density hypothesis for dirichlet l-series. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya*, 29(4):903–934, 1965.

## А Аналитические инструменты

**Теорема А.1** (Бомбери–Виноградов). Для любого  $A > 0$  существует  $x_0(A)$  такое, что равномерно при  $Q \leq x^{1/2}/(\log x)^{C(A)}$ ,  $x \geq x_0$ ,

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

**Теорема А.2** (Гривз, большее решето). Если  $A \subset \{1, \dots, N\}$  исключает положительную долю классов по многим простым  $p \leq B$ , то

$$|A| \ll N \exp\left(-c \frac{\log B}{\log \log B}\right),$$

где  $c > 0$  — абсолютная константа.

**Теорема А.3** (Чеботарёв). Пусть  $L/K$  — конечное нормальное расширение числовых полей с группой Галуа  $G$ ,  $C \subset G$  — класс сопряжённости. Тогда

$$\pi_C(x) = \frac{|C|}{|G|} \text{Li}(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$

где  $c > 0$  зависит только от  $L/K$ .

## В Локальные применения

Из [Theorem A.1](#) следует стандартная по среднему асимптотика для числа простых в пересечении двух прогрессий. В нашем контексте модуль и класс задаются условиями

$$P \equiv 1 \pmod{5}, \quad P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}, \quad r \equiv 4 \pmod{5}, \quad \gcd(r, 5\delta) = 1,$$

которые возникают из тождества  $(5b - 1)(5c - 1) = 5P\delta + 1$  при ED2 и факторизации  $rs = 5P\delta + 1$ .

**Предложение В.1** (BV по прогрессиям для фиксированных  $\delta$  и  $r$ ). Пусть  $\delta \in \mathbb{N}$  фиксировано,  $r \equiv 4 \pmod{5}$ ,  $\gcd(r, 5\delta) = 1$ . Тогда число простых  $P \leq x$  в классе

$$P \equiv 1 \pmod{5}, \quad P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}$$

удовлетворяет

$$\#\{P \leq x : P \equiv 1 \pmod{5}, P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}\} = \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(5r)} + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right)$$

равномерно по всем  $r \leq x^{1/2}/(\log x)^{C(A)}$ .

*Идея доказательства.* Применяем [Theorem A.1](#) при модуле  $q = 5r$ . Совместимость классов по CRT обеспечивается из  $\gcd(5, r) = 1$ . Равномерность по  $q \leq x^{1/2}/(\log x)^C$  даёт заявленную оценку.  $\square$

**Лемма В.2** (CRT-корректность и вычет  $s \equiv 4 \pmod{5}$ ). Пусть  $r \equiv 4 \pmod{5}$ ,  $\gcd(r, 5\delta) = 1$ , и  $P \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}$ . Тогда

$$s := \frac{5P\delta + 1}{r} \in \mathbb{N}, \quad s \equiv 4 \pmod{5}.$$

*Доказательство.* По второму условию  $r \mid (5P\delta + 1)$ , значит  $s \in \mathbb{N}$ . По модулю 5:  $5P\delta + 1 \equiv 1$ , а  $r \equiv 4$  обратим, причём  $r^{-1} \equiv 4 \pmod{5}$ . Тогда  $s \equiv 1 \cdot r^{-1} \equiv 4 \pmod{5}$ .  $\square$

**Следствие В.3** ( $\delta = 1$ : бесконечно много  $P$ ). Пусть  $\delta = 1$  и фиксировано  $r \equiv 4 \pmod{5}$ . Тогда существует бесконечно много простых  $P \equiv 1 \pmod{5}$  с  $r \mid (5P + 1)$ . Для каждого такого  $P$  при

$$b = \frac{r+1}{5}, \quad s = \frac{5P+1}{r} \equiv 4 \pmod{5}, \quad c = \frac{s+1}{5}, \quad A = bc$$

получаем решение ED2 с  $\delta = 1$ .

*Доказательство.* Существует ровно один класс по модулю  $5r$ , задаваемый системой  $P \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $P \equiv -5^{-1} \pmod{r}$  (CRT). По теореме Дирихле простых в нём бесконечно много; количественная форма следует из [Proposition B.1](#). Утверждение о  $s$  — из [Lemma B.2](#).  $\square$

**Предложение В.4** (Подсчёт по  $r$  и суммарная асимптотика). Пусть  $R \leq x^{1/2}/(\log x)^C$ . Тогда

$$\sum_{\substack{r \leq R \\ r \equiv 4 \pmod{5} \\ \gcd(r, 5\delta)=1}} \#\{P \leq x : P \equiv 1 \pmod{5}, P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}\} = \text{Li}(x) \sum_{\substack{r \leq R \\ r \equiv 4 \pmod{5} \\ \gcd(r, 5\delta)=1}} \frac{1}{\varphi(5r)} + O\left(\frac{xR}{(\log x)^A}\right).$$

Кроме того,

$$\sum_{\substack{r \leq R \\ r \equiv 4 \pmod{5} \\ \gcd(r, 5\delta)=1}} \frac{1}{\varphi(5r)} = C_{5,\delta} \log R + O(1),$$

где  $C_{5,\delta} > 0$  — константа, зависящая только от класса по модулю 5 и делителей  $\delta$ .

*Комментарий.* Суммирование главного члена следует из [Proposition B.1](#) и линейности; суммирование погрешностей даёт указанный остаток. Оценка суммы  $\sum 1/\varphi(5r)$  — стандартна:  $\varphi(5r) = 4\varphi(r)$  при  $\gcd(r, 5) = 1$ , а  $\sum_{n \leq R, (n, 5)=1} 1/\varphi(n) = c(m) \log R + O(1)$ .  $\square$

**Предложение В.5** (Исключительное множество по большему решету). Пусть  $R \leq x^{1/2}/(\log x)^C$ . Тогда количество  $r \leq R$ ,  $r \equiv 4 \pmod{5}$ ,  $\gcd(r, 5\delta) = 1$ , для которых прогрессия

$$P \equiv 1 \pmod{5}, \quad P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}$$

не содержит простых  $P \leq x$ , удовлетворяет

$$\ll R \exp\left(-c \frac{\log R}{\log \log R}\right),$$

где  $c > 0$  — абсолютная константа (следует из [Theorem A.2](#)).

*Замечание В.6* (Чеботарёв: дополнительные локальные фильтры). При необходимости можно одновременно навязать условия разложения для  $r$  и/или  $s = (5P\delta + 1)/r$  в фиксированном расширении числовых полей; по [Theorem A.3](#) соответствующие классы имеют положительную натуральную плотность, а пересечение с указанными АР сохраняет положительную плотность.

**Как использовать в алгоритме.** - Предвыбор  $r$ : фиксируйте несколько малых  $r \equiv 4 \pmod{5}$  (или перебирайте  $r \leq R$  в диапазоне BV). - Предрешето по прогрессиям: для каждого  $r$  заранее вычисляйте класс  $P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}$  и объединяйте с  $P \equiv 1 \pmod{5}$  (CRT). - Перебор  $P$ : сканируйте простые  $P$  в объединённых классах; по [Proposition B.1](#) ожидаемая частота  $\asymp 1/\varphi(5r)$ . - Проверка ED2: при найденном  $P$  вычисляйте  $s = (5P\delta + 1)/r$ , проверяйте  $s \equiv 4 \pmod{5}$  и восстанавливайте  $b = (r + 1)/5$ ,  $c = (s + 1)/5$ ,  $A = bc/\delta$ . - Балансировка: выбор  $R \leq x^{1/2}/(\log x)^C$  даёт оптимальный компромисс между числом прогрессий и контролем погрешностей (BV), а [Proposition B.5](#) гарантирует малость исключительного множества  $r$ .

## Двойное суммирование: среднее по простым $P$

Определим для фиксированных  $\delta$  и  $R \geq 2$  величину

$$N(P; R, \delta) = \#\left\{r \leq R : r \equiv 4 \pmod{5}, \gcd(r, 5\delta) = 1, r \mid (5P\delta + 1)\right\}.$$

Это число «локальных» параметров  $r$  для данного простого  $P$ . Тогда при  $R \leq x^{1/2}/(\log x)^C$  имеем усреднённую асимптотику

$$\frac{1}{\#\{P \leq x : P \equiv 1 \pmod{5}\}} \sum_{\substack{P \leq x \\ P \equiv 1 \pmod{5}}} N(P; R, \delta) = C_{5, \delta} \log R + O(1), \quad (\text{B.1})$$

где  $C_{5, \delta} > 0$  — константа, зависящая только от  $\delta$  и классов по модулю 5.

*Идея доказательства.* Меняем порядок суммирования:

$$\sum_{\substack{P \leq x \\ P \equiv 1 \pmod{5}}} N(P; R, \delta) = \sum_{\substack{r \leq R \\ r \equiv 4 \pmod{5} \\ \gcd(r, 5\delta)=1}} \#\{P \leq x : P \equiv 1 \pmod{5}, P \equiv -(5\delta)^{-1} \pmod{r}\}.$$

К каждому  $r$  применяем [Proposition B.1](#) (модуль  $5r$ ) и суммируем главные члены:

$$\sum_r \frac{\text{Li}(x)}{\varphi(5r)} = \text{Li}(x) \sum_{\substack{r \leq R \\ r \equiv 4 \pmod{5} \\ \gcd(r, 5\delta)=1}} \frac{1}{\varphi(5r)} = \text{Li}(x)(C_{5,\delta} \log R + O(1)),$$

а суммарная погрешность контролируется линейно по  $r$  с помощью [Proposition B.1](#). Деление на число простых  $P \leq x$ ,  $P \equiv 1 \pmod{5}$ , даёт [\(B.1\)](#).  $\square$

**Следствие В.7** (Средняя обеспеченность локальными параметрами). *При  $R = (\log x)^B$  для фиксированного  $B > 0$  среднее значение  $N(P; R, \delta)$  по простым  $P \leq x$ ,  $P \equiv 1 \pmod{5}$ , растёт как  $C_{5,\delta} B \log \log x + O(1)$ . В частности, среднее число пригодных  $r$  стремится к бесконечности.*

*Замечание В.8* (К оценкам «большинство  $P$ »). Переход от среднего к заявлению вида «для большинства  $P$  существует хотя бы один  $r \leq R$ » можно получить методами второго момента или по большому решету ([Proposition B.5](#)) при согласованном выборе  $R$  и  $x$ . Эти детали не требуются для конструктивной части алгоритма, но объясняют его хорошее среднее поведение.

## С Шаблон таблицы для проверки работы лемм

Таблица 3: Решения для  $P = \dots$  с проверкой условий

#	$\alpha$	$b_1$	$c_1$	$g$	$b$	$c$	$\delta$	$X$	$Y$	$N$	$A$	$B$	$C$	Проверка
1														
2														
3														