

## Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem.

Von

FELIX BERNSTEIN in Göttingen.

Einleitung. Fragestellung und Formulierung des Axiomes von der <i>eingeschränkten</i> <i>Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen</i> . . . . .	417
§ 1. Ein Grenzsatz . . . . .	421
§ 2. Die geometrische Wahrscheinlichkeit für Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen von stärkerer als Kettenbruchordnung und Verwandtes. 425	431
§ 3. Approximationen mit Nebenbedingungen . . . . .	431
§ 4. Die Definition der mittleren Bewegung. Die Funktion $\varphi(x, s; n)$ und die Sätze von P. Bohl und W. Sierpinski . . . . .	433
§ 5. Nachweis des Hauptsatzes von der Unwahrscheinlichkeit der mittleren Be- wegung der Funktion $\varphi(x, s; n)$ . . . . .	438

Es ist das Verdienst einer äußerst scharfsinnigen Untersuchung von P. Bohl\*), von neuem die Aufmerksamkeit auf ein klassisches Problem der Theorie der säkularen Störungen gelenkt zu haben, welches zuerst von Lagrange gestellt worden ist. Es handelt sich um die Frage nach der Existenz einer sogenannten *mittleren Bewegung* der Perihelie bez. Knoten der Planetenbahnen. Lagrange hat festgestellt, daß eine solche für die Perihelie aller großen Planeten außer Erde und Venus besteht, indem er eine *hinreichende* Bedingung dafür aufstellte. Nach ihm haben sich Tisserand, Stockwell, Gyldén und Carvallin mit der Frage beschäftigt, ohne jedoch einen Fortschritt in dem schon von Lagrange als sehr schwierig bezeichneten Problem zu erreichen. Insbesondere haben Gyldén und Carvallin offenbare Fehler begangen. Erst P. Bohl hat ein wesentlich über Lagrange hinausgehendes Resultat erhalten.

Mathematisch betrachtet, handelt es sich bei diesem Problem darum, zu entscheiden, ob eine Summe von zyklischen Bewegungen, repräsentiert durch einen Ausdruck

---

\*) P. Bohl (Riga). Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. J. f. Math. 135, Heft 3.

$$\sum_{\nu=1}^n r_{\nu} e^{i(g_{\nu}t + h_{\nu})} = r e^{i\omega t},$$

wo  $r_{\nu}$  ( $> 0$ ),  $g_{\nu}$  und  $h_{\nu}$  Konstanten sind, eine, den Nullpunkt für wachsende Zeiten  $t$ , bis auf beschränkte Schwankungen gleichförmig in einem Sinne umlaufende Bewegung, die sogenannte „mittlere“ Bewegung, ergibt, oder nicht. D. h. es soll entschieden werden, ob  $\omega$  in der Form

$$\omega = ct + \chi$$

darstellbar ist, wo  $\chi$  für alle  $t$  zwischen festen endlichen Grenzen bleibt.

Lagrange hat nun gezeigt, daß dies stets der Fall ist, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $n = 2$ ,

2. ein  $r = r_{\nu}$  ist größer als die Summe der übrigen.

In dem Falle 2. befinden sich alle großen Planeten, mit Ausnahme von Venus und Erde.

P. Bohl hat nun bewiesen, daß für den Fall  $n = 3$  die Entscheidung lediglich abhängt von den Größen

$$\varrho = \frac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{\pi} (\omega_3 + \varrho \omega_2),$$

wo  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die den Seiten  $r_1, r_2, r_3$  gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks sind, das sich im Falle des Nichterfülltseins von 2. bilden läßt.

Man findet leicht, und dies ist auch schon Lagrange bekannt, daß eine mittlere Bewegung existiert, wenn die Relativgeschwindigkeit der Einzelbewegungen, bezogen auf eine derselben, also die Größen

$$\varrho_{\mu, \nu} = \frac{g_{\mu} - g_1}{g_{\nu} - g_1},$$

kommensurabel sind. Dementsprechend ist die Menge der Werte, für welche mittlere Bewegung existiert, überalldicht. Die Leistung von P. Bohl besteht nun darin, gezeigt zu haben, daß für jeden Wert von  $\varrho$  und  $\xi$  eine Konstante  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega}{t}$  der mittleren Bewegung existiert, daß aber eine überalldichte Menge von Werten  $\varrho$  und  $\xi$  existiert, für welche der Rest  $\chi$  nicht zwischen endlichen Grenzen bleibt. Diese Wertmengen erstrecken sich über den ganzen Bereich der Werte von  $\varrho$  und  $\xi$ , welcher dem Nichterfülltsein der Lagrangeschen Bedingung entspricht. (Dabei muß die Lagrangesche hinreichende Bedingung 2. dahin erweitert werden, daß auch noch der Fall, daß ein  $r$  gleich der Summe der übrigen  $r_{\nu}$  ist, zugelassen wird.)

P. Bohl schließt daraus, daß es unmöglich sei, die Existenz einer mittleren Bewegung festzustellen, wenn die Größen  $\varrho$  und  $\xi$  mittels experimenteller Daten als außerhalb der Lagrangeschen Grenzen liegend ge-

funden werden. Denn die in Beobachtungen bestehende Unsicherheit bringe mit sich, daß nur ein Intervall für die Lage von  $\varrho$  und  $\xi$  bestimmt werde, innerhalb dessen dann zufolge des Bewiesenen sowohl Werte liegen, denen eine mittlere Bewegung entspricht, als solche, denen keine mittlere Bewegung entspricht.

Daß den Intervallen der Unsicherheit der *direkt* beobachteten Größen übrigens wirkliche Intervalle in den  $\varrho$ - und  $\xi$ -Werten entsprechen, wird von P. Bohl genau bewiesen.

Die von ihm hier gezogene Schlußfolgerung möchte ich jedoch aus ganz prinzipiellen Gründen noch nicht für entscheidend halten.

Ich möchte nämlich das folgende ganz allgemein gehaltene Axiom formulieren, das zu den Grundlagen der theoretischen Physik und Astronomie zu gehören scheint.

*Axiom. Bezieht man die Werte einer experimentell gemessenen Größe auf die Skala der Werte aller reellen Zahlen,\*) so kann man in der letzteren von vornherein eine beliebige Nullmenge ausschalten und darf nur solche Folgen der beobachteten Ereignisse erwarten, welche bestehen bleiben, wenn der beobachtete Wert durch einen der übrig bleibenden, innerhalb des Beobachtungsintervalles gelegenen Werte repräsentiert wird.*

Dabei wird unter einer Nullmenge (nach Borel-Lebesgue) eine Punktmenge verstanden, welche sich in eine Intervallmenge von beliebig kleiner Summe der Intervalllängen einschließen läßt.

*In der Tat haben reale Bedeutung nur endlich ausgedehnte Größen.* Dies sind hier die Beobachtungsintervalle und in diesen ist ein Punktsystem, das selbst in eine Intervallmenge von der Gesamtlänge  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  beliebig klein) eingeschlossen werden kann, nicht von realer Bedeutung. Ebenso können auch die Folgen der Beobachtungstatsachen nicht auf die Lage eines der Anfangswerte in einem beliebig kleinen Intervall, d. h. an einer exakten Stelle, bez. in einer Intervallmenge von beliebig kleiner Summe rückschließen lassen. Es ist das obige Axiom die wirklich *exakte* Formulierung der handgreiflichen Tatsache, daß jede Beobachtung nur eine endliche Zahl von Dezimalen liefert, und eine notwendige Verallgemeine-

\*) Hierzu hat man natürlich kein Recht, wenn man im voraus weiß, oder auf Grund einer akzeptierten Theorie annehmen darf, daß gewisse reelle Werte für die in Rede stehende Größe ausgeschlossen sind. Will man z. B. die Anzahl der Münzen in einem Haufen gleichartiger Exemplare durch Wägung feststellen, so wird man natürlich den Quotienten aus dem gefundenen Gewicht des Haufens und dem bekannten Gewicht der Münze nicht auf die Skala aller reellen Zahlen, sondern nur auf die Skala der ganzen Zahlen beziehen, und ebenso wird die Skala der rationalen Zahlen allein in Betracht kommen, wenn das Verhältnis der Zahlen zweier Haufen durch eine vergleichende Wägung bestimmt wird. Prinzipiell ähnlich liegt der Fall bei der durch atomistische Vorstellungen geforderten Rationalität gewisser Konstanten.

rung des Axioms, daß man einen Beobachtungswert nicht eindeutig einer reellen Zahl im exakten Sinne zuordnen darf. Im Sinne unseres *Axioms von der eingeschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen* dürfen wir bei jedem Existenzbeweis physikalischer Größen von den Werten einer Nullmenge in den von den direkten Beobachtungsgrößen stetig abhängenden Parametern absehen. Im vorliegenden Falle erhebt sich die Frage, ob die Bohlschen Werte der Nichtexistenz mittlerer Bewegung nicht etwa nur eine Nullmenge ausmachen. Dann müßte trotzdem die Existenz der mittleren Bewegung an sich bejaht werden\*) (wenngleich auch dann noch, wie P. Bohl zeigt, gewisse negative Sätze bestehen).

Dies zu entscheiden war die Aufgabe, die ich mir gestellt habe. Das Ergebnis ist das folgende. *Im Sinne unseres Axioms existiert außerhalb der Lagrangeschen Grenzen keine mittlere Bewegung.*

D. h. die Menge der Wertepaare  $\varphi, \zeta$ , für die es mittlere Bewegung gibt, bilden eine Nullmenge.

*Damit ist das von Lagrange gestellte Problem für  $n = 3$  vollständig erledigt.*

Die in der gegenwärtigen Arbeit angewandten Methoden sind eine Kombination gewisser mengentheoretischer Sätze mit den Sätzen der Geometrie der Zahlen. Dieselben berühren sich mit den Untersuchungen von Wiman, Brodén und Borel über Wahrscheinlichkeitsbestimmungen betreffend Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung, sowie mit den Methoden von Voronoi und Sierpinski über asymptotische Werte gewisser zahlentheoretischer Funktionen. Bezüglich der astronomischen Fragen verweise ich im übrigen auf die Abhandlung von P. Bohl und möchte hier nur folgendes bemerken. Setzen wir

$$(g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1 = x, \quad (g_3 - g_1)t + \beta_3 - \beta_1 = y,$$

so handelt es sich also darum in der Gleichung

$$\frac{A + B \cos x + C \cos y}{B \sin x + C \sin y} = \operatorname{ctg} \varphi,$$

$\varphi$  als Funktion von  $t$  zu studieren. Der Zuwachs von  $\varphi$  um Vielfache von  $2\pi$  (bez. von  $\pi$ ) hängt ab von der Anzahl der Überschreitungen doppeltperiodisch angeordneter Verbindungsstrecken je zweier der Punkte, für welche Zähler und Nenner des obigen Bruches zugleich verschwinden. Die Frage nach dem Verhalten von  $\varphi$  für wachsende  $t$  findet sich so transformiert in die Frage nach dem asymptotischen Verhalten einer zahlentheoretischen Funktion, welche mittels einiger Umformungen erklärt

\*) Freilich würde dies streng genommen nur für das kinematische Problem gelten, welches dem Ansatz von Lagrange entspricht. In diesem Sinne ist aber auch in dem Lagrangeschen Falle die Behauptung aufzufassen.

werden kann als die Anzahl der Gitterpunkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten, welche sich in einem schief liegenden Parallelstreifen unterhalb der Grenze  $y = t$  befinden. Um die Untersuchung der Differenz dieser Anzahl und des Flächeninhalts des entsprechenden Teiles des Parallelstreifens, also um das *asymptotische Verhalten des Exhaustionsrestes* handelt es sich — rein mathematisch gesprochen — in der vorliegenden Arbeit.

## § 1.

**Ein Grenzsatz.**

Mit E. Borel und H. Lebesgue sagen wir, eine Punktmenge  $P$  besitzt das Maß Null, wenn sich dieselbe in eine Intervallmenge von beliebig kleiner Summe der Längen der einzelnen Intervalle einschließen läßt. Wir verstehen unter  $[a]$  die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $a$  ist und bezeichnen die Differenz  $a - [a]$  mit  $(a)$ .

Es besteht der folgende Satz:

Satz 1. *Es sei  $v_i$  eine wachsende Folge positiver ganzer Zahlen,*

$$(1) \quad v_i < v_{i+1}.$$

*Dann besitzt die Menge  $M_x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) der Zahlen  $x$ , für welche eine Gleichung*

$$(2) \quad \lim_{i=\infty} (v_i x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

*besteht, das Maß Null.*

Beweis. Es sei  $n$  irgend eine positive ganze Zahl, verschieden von Null. Eine Zahl  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), für welche die Gleichung gilt

$$(3) \quad (nx) \leq \varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  eine beliebig vorgegebene Zahl kleiner als 1 bedeutet, gehört in eines der  $n$  getrennten Intervalle

$$(4) \quad \left(0, \frac{\varepsilon}{n}\right); \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right); \left(\frac{2}{n}, \frac{2}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right); \dots; \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right),$$

welche die Längen  $\frac{\varepsilon}{n}$  besitzen. Die Menge der  $x$ , welche der Bedingung (3) genügen, füllt die  $n$  Intervalle (4) vollständig aus und besitzt daher den linearen Inhalt  $n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ .

Sei jetzt  $x$  so beschaffen, daß die Gleichung (2) erfüllt ist, so gibt es, bei vorgegebenen  $\varepsilon < 1$ , zu jedem  $x$  der Menge  $M_x$  einen *kleinsten* Index  $j_x$ , sodaß die Gleichung

$$(5) \quad (v_i x) \leq \varepsilon \text{ für alle } i \geq j_x$$

gilt, während noch

$$(6) \quad (v_i x) > \varepsilon \text{ für } i = j_x - 1$$

ist. Der Wahl von  $\varepsilon$  entsprechend zerfällt die Menge  $M_x$  in soviel Bestandteile, als es Werte  $j_x$  gibt, d. h. in eine abzählbare Menge getrennter Teilmengen  $M_j$ . Wir schreiben

$$(7) \quad M = \sum_{(j)} M_j.$$

Um uns für die Mengen  $M_j$  Majoranten zu verschaffen, wählen wir zu einem  $j$  eine ganze Anzahl  $m > j$  und definieren eine Intervallmenge  $M_{j,m}$  durch die Bedingungen

$$(8) \quad (v_i x) \leq \varepsilon \text{ für alle } i, j \leq i \leq m,$$

während

$$(9) \quad (v_i x) > \varepsilon \text{ für } i = j - 1$$

ist. Die Menge  $M_{j,m}$  umfaßt die Menge  $M_{j,\bar{m}}$ , wenn  $\bar{m} > m$  ist, da die ihr auferlegten Bedingungen ein Teil der Bedingungen für  $M_{j,\bar{m}}$  sind, und jede Menge  $M_{j,m}$  umfaßt  $M_j$ . Zwei Mengen  $M_{j,m}$  und  $M_{\bar{j},m}$  für verschiedene  $j$  und  $\bar{j}$  und dasselbe  $m$  können keinen gemeinsamen Bestandteil haben. Denn ist  $\bar{j} > j$ , so ist

$$(10) \quad (v_{\bar{j}-1} x) \leq \varepsilon, \text{ vermöge } j \leq \bar{j} - 1 < m,$$

für alle Punkte von  $M_{j,m}$  und

$$(11) \quad (v_{\bar{j}-1} x) > \varepsilon$$

für alle Punkte von  $M_{\bar{j},m}$ . In der für ein hinreichend großes  $m$  gebildeten Summe

$$(12) \quad \sum_{(j < m)} M_{j,m},$$

erstreckt über alle  $j < m$ , sind daher alle Mengen  $M_{j,m}$  getrennt. Andererseits genügen alle  $x$  der Summe (12) der Ungleichung

$$(13) \quad (v_m x) \leq \varepsilon,$$

daher liegen sie nach (3) und (4) in einer Intervallmenge des linearen Inhalts  $\varepsilon$ . Bezeichnen wir also mit  $q_{j,m}$  den linearen Inhalt der Intervallmenge  $M_{j,m}$ , so ist einerseits der Inhalt von  $\sum_{(j < m)} M_{j,m}$  gleich der Summe

$\sum_{(j < m)} q_{j,m}$ , und andererseits

$$(14) \quad \sum_{(j < m)} q_{j,m} \leq \varepsilon.$$

Da für  $\bar{m} > m$   $M_{j,\bar{m}}$  in  $M_{j,m}$  enthalten ist, so ist

$$(15) \quad q_{j,\bar{m}} \leq q_{j,m}.$$

Es existiert also für wachsendes  $m$  ein und nur ein unterer Limes

$$(16) \quad \lim_{m=\infty} q_{j,m} = q_j$$

der monotonen Folge  $q_{j,m}$ , und es ist für beliebiges  $m$

$$(17) \quad q_j \leq q_{j,m}.$$

Also ist, vermöge (14)

$$(18) \quad \sum_{(j < m)} q_j \leq \varepsilon.$$

Es konvergiert daher die unendliche Summe  $\sum_j q_j$ , erstreckt über alle  $j$  und es ist

$$(19) \quad \sum_j q_j \leq \varepsilon.$$

Wir können jetzt leicht eine Intervallmenge von beliebig kleiner Summe der Intervalllängen angeben, welche die vorgelegte Menge  $M_x$  einschließt. Wir wählen zu diesem Zweck eine Reihe positiver Größen  $\delta_j$ , so, daß dieselbe die konvergente beliebig klein vorzuschreibende Summe  $\delta = \sum_j \delta_j$  besitze. Dann läßt sich auf Grund der Relationen (15) und (16)

zu jedem  $\delta_j$  ein zugehöriges  $n_j$  bestimmen, sodaß

$$(20) \quad q_{j,n} \leq q_j + \delta_j \text{ für } n = n_j$$

wird. Hieraus folgt dann mit Rücksicht auf die Ungleichung (19) die Konvergenz der Summe  $\sum_{(j)} q_{j,n}$ , in der  $n = n_j$  genommen werde, und die Ungleichung

$$(21) \quad \sum_{(j)} q_{j,n} \leq \sum q_j + \sum \delta_j \\ \leq \varepsilon + \delta.$$

Da  $M_{j,n}$  die Menge  $M_j$  enthält, so enthält die Vereinigungsmenge  $\{M_{j,n}\}$  ( $n = n_j$ ) die Menge  $M_x = \sum_j M_j$ . Die Summe der Längen der Intervalle in der Menge  $\{M_{j,n}\}$  ( $n = n_j$ ) ist ferner genau gleich  $\sum_{(j)} q_{j,n}$ .

Also kann vermöge (20) die vorgelegte Menge  $M$  in eine abschätzbare Intervallmenge  $\{M_{j,n}\}$  ( $n = n_j$ ) eingeschlossen werden, in der die Summe der Intervalllängen kleiner als die beliebig klein vorzuschreibende Größe  $\varepsilon + \delta$  wird, q. e. d.

Eine Menge, deren Komplementärmenge das Maß Null besitzt, bezeichnet man als vom Maß Eins. Wir heben folgende Folgerung des Satzes 1. hervor.

Folgerung. Bedeutet  $\nu_i$  eine wachsende Folge positiver ganzer Zahlen, so ist es möglich, für jedes  $x$  einer Menge  $M_x$  vom Maß 1 ( $0 \leq x \leq 1$ ) eine zu  $x$  passende unendliche Teilfolge  ${}_x \nu_i$  aus der Folge  $\nu_i$  so herauszuheben, daß die Ungleichung

$$(22) \quad \lim_{\text{inf}} ({}_x \nu_i, x) > 0 \text{ bez. } ({}_x \nu_i, x) > \eta_x > 0$$

für alle  $\nu$  der Teilfolge  ${}_x \nu_i$  erfüllt ist.

In der Tat, schließen wir die Menge  $M_x$  des Satzes 1 aus, so muß für jedes andere  $x$  die unendliche Menge der positiven Größen  $(\nu, x)$  mindestens eine von Null verschiedene Häufungsstelle  $\xi_x$  besitzen. Wählen wir also  $\eta_x$  zwischen  $\xi_x$  und 0, so ist für eine unendliche Teilfolge  ${}_x\nu_i$  der  $\nu_i$  die Ungleichung (22) erfüllt.

Der vorstehende Satz ist enthalten in dem folgenden Satz, der unmittelbar aus einer allgemeinen Überlegung von H. Lebesgue (Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906, No. 9) zu entnehmen ist.

„Es sei  $f_n$  eine unendliche Folge von meßbaren Funktionen und ebenfalls  $f$  eine meßbare Funktion einer Variablen.

Es sei die Gleichung

$$(23) \quad |f - f_m| \leq \varepsilon$$

für eine Menge  $\Gamma_m$  erfüllt. Dann ist die Menge  $M_\varepsilon$  aller Punkte, für die von irgend einem  $m$  ab die Gleichung

$$(24) \quad |f - f_{m+p}| \leq \varepsilon$$

für alle  $p = 0, 1, 2, \dots$  erfüllt ist, meßbar und man kann, wenn unendlich viele  $\Gamma_m$  ein Maß kleiner oder gleich  $\eta$  besitzen, sagen, daß auch  $M_\varepsilon$  ein Maß kleiner oder gleich  $\eta$  besitze.“

In der Tat, bezeichnet man mit  $\mathfrak{D}_m$  den Durchschnitt der Mengen

$$(25) \quad \Gamma_m, \Gamma_{m+1}, \dots,$$

so ist  $M_\varepsilon$  offenbar die Summe der völlig getrennten Mengen

$$(26) \quad P_m = \mathfrak{D}_m - \mathfrak{D}_{m-1},$$

d. h.

$$(27) \quad M_\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} P_m$$

und, da nach bekannten Sätzen mit den  $\Gamma_m$  zugleich  $\mathfrak{D}_m$  und also  $P_m$  meßbar ist, so ist  $M_\varepsilon$  meßbar. Ferner ist, unter  $\bar{M}$  das Maß der Menge  $M$  verstanden, vermöge des Hauptsatzes der Theorie der Meßbarkeit

$$(28) \quad \bar{M}_\varepsilon = \overline{\left( \sum_{m=1}^{\infty} P_m \right)} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_m = \lim_{m=\infty} \left( \sum_1^m P_m \right),$$

$$(29) \quad = \lim_{m=\infty} \bar{\mathfrak{D}}_m.$$

Ferner ist, wie leicht ersichtlich,

$$(30) \quad \bar{\mathfrak{D}}_m(\Gamma_m, \Gamma_{m+1}, \dots) = \lim_{\text{inf.}} \bar{\Gamma}_{m+p} \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Ist daher für unendlich viele  $m$  das Maß von  $\Gamma$  kleiner oder gleich  $\eta$ , so gilt dasselbe für alle  $\mathfrak{D}_m$ . Daher ist vermöge (29)

$$(31) \quad M_\varepsilon \leq \eta.$$

So schnell die vorstehende, von Lebesgue herrührende Schlußweise zum Ziel führt, so setzt doch dieselbe alle wesentlichen Sätze der Theorie von Lebesgue voraus, und daher glaubte ich den vorstehenden sehr einfachen Beweis, der nichts derart voraussetzt, nicht unterdrücken zu sollen.

## § 2.

### Die geometrische Wahrscheinlichkeit für Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen von stärkerer als Kettenbruchordnung und Verwandtes.

Jede abzählbare Menge, z. B. die der rationalen Zahlen, besitzt, wie leicht zu sehen, das Maß Null. Wir können daher im folgenden die Menge der rationalen Zahlen außer acht lassen.

Es sei die Irrationalzahl  $x$  ( $0 < x < 1$ ) durch einen unendlichen Kettenbruch

$$(32) \quad x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots = (a_1, a_2, \dots)$$

dargestellt. Wir bezeichnen, wie üblich, mit  $\frac{P_n}{Q_n}$  den  $n^{\text{ten}}$  Näherungsbruch und erinnern an die bekannten Formeln

$$(34) \quad \begin{aligned} P_n &= a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \\ P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Es sei  $k$  eine ganze positive Zahl  $\geq 2$ . Ist nun für feste Werte  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$

$$(35) \quad a_n \geq k,$$

dagegen  $a_{n+p}$  für  $p = 1, 2, \dots$  variabel, so liegen die unendlichen Kettenbrüche  $x$  im Innern des Intervalles

$$(36) \quad \{(a_1, \dots, a_{n-1}); (a_1, \dots, a_{n-1}, k)\}$$

von der Länge

$$(37) \quad l_{nk} = \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} \\ = \frac{1}{Q_{n-1} (k Q_{n-1} + Q_{n-2})},$$

d. h.

$$(38) \quad = \frac{1}{Q_{n-1}^2} \frac{1}{k + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}},$$

also ist

$$(39) \quad \frac{l_{nk}}{l_{n1}} = \frac{1 + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}}{k + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}}$$

Da ferner

$$(40) \quad 0 < \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} < 1$$

ist, so ist

$$(41) \quad \text{Min}_{0 \leq x \leq 1} \frac{1+x}{k+x} < \frac{l_{nk}}{l_{n1}} < \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} \frac{1+x}{k+x}.$$

Da  $\frac{1+x}{k+x}$  für  $0 \leq x \leq 1$  die Werte eines Intervalles einfach bedeckt, so sind die Extremwerte die Werte in den Endpunkten, die  $x = 0$  und  $x = 1$  entsprechen, d. h. es wird

$$(42) \quad \frac{1}{k} < \frac{l_{nk}}{l_{n1}} < \frac{2}{k+1}.$$

Dieselbe Betrachtung liefert für  $a_n < k$

$$(43) \quad \frac{k-1}{k+1} < \frac{l_{n1} - l_{nk}}{l_{n1}} < \frac{k-1}{k}.$$

Die Bedingung an  $a_n \geq 1$  ist stets erfüllt; man kann daher  $\frac{l_{nk}}{l_{n1}}$  als geometrische Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, daß bei gegebenen  $a_1, \dots, a_{n-1}$   $a_n \geq k$  sei. Es liegt also diese Wahrscheinlichkeit in zwei von  $n$  unabhängigen Grenzen. Wir schalten eine Bemerkung über die geometrische Lage der Kettenbrüche ein. Den verschiedenen positiven ganzzahligen Werten des Teilenners  $a_1$  entspricht eine Einteilung des Intervalles 0 1 in eine einfach unendliche in der Richtung von 1 nach 0 fortschreitende, gegen Null sich häufende Menge von Teilintervallen. Jedes dieser Teilintervalle wird entsprechend den Werten des zweiten Teilenners  $a_2$  wieder in eine einfach unendliche Reihe von Teilintervallen, aber in umgekehrter Richtung laufend, untergeteilt, usw. in stets wechselnder Richtung. Stimmen daher zwei Teilennerrreihen

$$a_1, \dots, a_{n-1},$$

$$a'_1, \dots, a'_{n-1}$$

auch nur in einer Ziffer nicht überein, so liegen alle mit der einen oder anderen dieser endlichen Teilennerrfolge beginnenden Kettenbrüche in getrennten Intervallen.

Wir unterscheiden die endlich vielen verschiedenen möglichen Wertesysteme

$$(44) \quad a_1, \dots, a_{n-1}$$

durch den Index  $i$  und schreiben  $l_{nk}$  für die Länge des Intervalles  $l_{nk}$ , welches dem  $i^{\text{ten}}$  der Systeme (44) entspricht. Aus (42) folgt dann

$$(45) \quad \frac{1}{k} \sum'_{(i)} l_{n1} < \sum'_{(i)} l_{nk} < \frac{2}{k+1} \sum'_{(i)} l_{n1};$$

$$\frac{k-1}{k+1} \sum'_{(i)} l_{n1} < \sum'_{(i)} (l_{n1} - l_{nk}) < \frac{k-1}{k} \sum'_{(i)} l_{n1},$$

wobei die  $\sum'$  über *irgend einen* Teil der  $i$  erstreckt sei. Beachten wir, daß die Summe  $\sum'_{(i)} l_{n1}$ , über alle Werte von  $i$  erstreckt, die Länge des Gesamtintervalls 01 bedeutet, so wird also, wenn wir

$$(46) \quad \sum'_{(i)} l_{n1} \cdot B_{nk} = \sum'_{(i)} l_{nk}, \quad 1 - B_{nk} = A_{nk}$$

einführen,

$$(47) \quad \frac{1}{k} < B_{n,k} < \frac{2}{k+1}, \quad \frac{k-1}{k+1} < A_{n,k} < \frac{k-1}{k}.$$

Man kann  $A_{n,k}$  und  $B_{n,k}$  offenbar als geometrische Wahrscheinlichkeiten dafür definieren, daß  $a_n < k$  bez.  $a_n \geq k$  (bei beliebigen Werten der übrigen Teilnenner) sei.

Verwandeln wir jetzt erstens  $n$  in  $\bar{n} > n$  und erstrecken zweitens die Summe  $\sum'$  in (45) über alle möglichen Werte  $a_1, \dots, a_{\bar{n}-1}$ , aber  $a_n < k$ , so ist die so erstreckte Summe  $\sum'_{(i)} l_{\bar{n},1}$  offenbar identisch mit

$$A_{n,k} = \sum'_{(i)} (l_{n1} - l_{nk}).$$

Es ist also nach Division mit  $\sum'_{(i)} l_{n1} = 1$

$$(48) \quad \frac{k-1}{k+1} A_{n,k} < A_{n,k; \bar{n},k} < \frac{k-1}{k} A_{n,k}, \quad (\bar{n} > n)$$

wenn wir mit  $A_{n,k; \bar{n},k}$  die Summe der Längen aller der Intervalle bezeichnen, in deren Innern die Bedingungen

$$(49) \quad a_n < k, \quad a_{\bar{n}} < k$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Analog ist

$$(48a) \quad \frac{1}{k} B_{n,k} < B_{n,k; \bar{n},k} < \frac{2}{k+1} B_{n,k}. \quad (\bar{n} > n)$$

Es ist aber zufolge (47)

$$(50) \quad \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 < A_{n,k; \bar{n},k} < \left(\frac{k-1}{k}\right)^2.$$

Analog wird

$$(51) \quad \left(\frac{1}{k}\right)^2 < B_{n,k; \bar{n},k} < \left(\frac{2}{k+1}\right)^2$$

und allgemein wird mit Rücksicht auf  $k \geq 2$

$$(52) \quad \begin{aligned} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{r+1} < A_{n,k;\dots;n^{(r)},k} < \left(\frac{k-1}{k}\right)^{r+1}, \\ \left(\frac{1}{k}\right)^{r+1} < B_{n,k;\dots;n^{(r)},k} < \left(\frac{2}{k+1}\right)^{r+1} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$$(53) \quad \lim_{r=\infty} A_{n,k;\dots;n^{(r)},k} = 0; \quad \lim_{r=\infty} B_{n,k;\dots;n^{(r)},k} = 0.$$

Es gilt der

Satz 2. Die irrationalen Zahlen  $x$  ( $0 < x < 1$ ), für welche von irgend einem  $n = n^{(r)}$  an die Bedingungen

$$a_n < k \quad \text{oder} \quad a_n \geq k \quad (n^{(r)} < n^{(r+1)})$$

für alle  $r = 0, 1, 2, \dots$  erfüllt sind, bilden bez. Punktmengen  $N_k$  und  $\bar{N}_k$  vom Maß Null.

Da, wie unmittelbar aus der Definition zu folgern ist, die Vereinigungsmenge einer abzählbar unendlichen Reihe von Punktmengen des Maßes Null, wieder eine Punktmenge von Maß Null ausmacht, so ist z. B. die Vereinigungsmenge  $N = \{N_k\}$  für  $k = 2, 3, \dots$  vom Maß Null.

Auf die Zahlen der Komplementärmenge  $M_x$  (die rationalen ausgeschlossen) bezieht sich nun der

Satz 3. Es gibt im Intervall Null bis Eins eine Menge  $M_x$  ( $x = \text{Irrationalzahl}$ ) vom Maß 1, sodaß sich zu jedem  $x$  der Menge  $M_x$  eine unendliche Reihe  $v = v_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) von wachsenden natürlichen Zahlen und eine zugehörige Reihe  $a_i$  von wachsenden natürlichen Zahlen so bestimmen läßt, daß

$$(54) \quad \frac{(v_i x)}{v_i} < \frac{1}{v_i^2 a_i}$$

für alle  $i = 1, 2, \dots$  wird.

Denn für jedes  $x$  der Menge  $M_x$  läßt sich aus der Reihe der Teiler der Kettenbruchentwicklung mit ungeradem Index

$$(55) \quad a_1', a_3', a_5', \dots$$

eine Teilreihe beständig und über jede Grenze  $k$  wachsender Zahlen

$$(56) \quad a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$$

herausheben. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die für  $n = 2m + 1$  geltenden Formeln

$$(57) \quad x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n(a_n Q_n + Q_{n-1})} \quad Q_{n-1} < Q_n,$$

$$(58) \quad x - \frac{P_i}{Q_i} < \frac{1}{Q_i^2 a_i}.$$

Schreiben wir noch  $v_i$  statt  $Q_i$  und  $(v_i x)$  statt  $x Q_i - P_i$ , so folgt der obige Satz.

Anmerkung. Betrachtet man die Mengen  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$ , so erhält man den Satz, daß für eine Menge vom Maß 1 unter den Teilennern die Zahl 1 unendlich oft vorkommt.

Wir können das gewonnene Resultat so ausdrücken: Die Reihe der Teilenner eines unendlichen Kettenbruchs, ist mit der geometrischen Wahrscheinlichkeit eins weder nach oben noch nach unten beschränkt. Dasselbe gilt auch von jeder unendlichen Teilreihe der Teilenner. Etwas verallgemeinert lautet die Formel (48)

$$(59) \quad \frac{\bar{k} - 1}{\bar{k} + 1} A_{n, k} < A_{n, k; \bar{n}, \bar{k}} < \frac{\bar{k} - 1}{\bar{k}} A_{n, k},$$

wenn  $\bar{k}$  einen von  $k$  verschiedenen Wert bedeutet und  $a_{\bar{n}} < \bar{k}$  sein soll.

Bedeutet daher  $\varphi(n)$  einen positiven Wert, ist  $a_n$  eine Teilreihe der Teilennerreihe, und tritt

$$(60) \quad a_n < \varphi(n)$$

anstatt der Bedingungen  $a_n < k$ , so tritt an Stelle von (52)

$$(61) \quad \prod_{v=n}^{v=n+r} \frac{\varphi(v) - 1}{\varphi(v) + 1} < A_{n, \varphi(n); \dots; n+r, \varphi(n+r)} < \prod_{v=n}^{v=n+r} \left(1 - \frac{1}{\varphi(v)}\right).$$

Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}, \quad \text{so ist} \quad \prod_{v=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\varphi(v)}\right)$$

verschieden von Null. Dann konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\varphi(n) + 1}$  und es ist

das Produkt  $\prod_{v=n}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{\varphi(v) + 1}\right)$  verschieden von Null. Ist andererseits  $A$

die Menge der Punkte, für deren Kettenbruchteil die Bedingung (60) erfüllt ist, so ist die Menge  $A$  im Sinne von Lebesgue meßbar und ihr Maß  $\bar{A}$  ist der Limes von  $A_{n, \varphi(n); \dots; n+r, \varphi(n+r)}$ . Es liegt daher zwischen von Null verschiedenen Grenzen.

Nehmen wir z. B.  $\varphi(n) = (n+1)^2$ , so wird

$$\prod_n \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) < \frac{1}{2}$$

und also liegt  $\bar{A}$  zwischen Null und  $\frac{1}{2}$ .

Divergiert dagegen

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}, \text{ so ist } \prod_{\nu=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\varphi(\nu)}\right)$$

gleich Null und also  $\bar{A} = 0$ .

Dasselbe gilt für die Bedingung  $a_n \geq \varphi(n)$ . Wir fassen zusammen:

Satz 4. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $\varphi(n)$  eine Grenze für die Teilreihe  $a_n$  der Teilnenner nach oben oder unten von einem gewissen  $n$  ab mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit bildet, besteht in der Konvergenz von  $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ .

Divergiert dagegen  $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ , so besteht die Wahrscheinlichkeit 1 dafür, daß die beschränkende Ungleichung unendlich oft durchbrochen ist.

Machen wir endlich noch einige historische Bemerkungen. Gyldén\*) scheint der erste gewesen zu sein, welcher die Frage nach der Wahrscheinlichkeit aufgeworfen hat, daß  $a_n = k$  für irgend ein  $n$  sei, und er hat diese Bestimmung bei Beantwortung einer störungstheoretischen Frage benutzt. Danach hat Brodén\*\*) diesen letzteren Gegenstand aufgenommen und schließlich hat A. Wiman\*\*\*) die Prinzipien der Theorie der mengentheoretischen Wahrscheinlichkeit auseinander gesetzt, und die von Gyldén aufgeworfene Frage beantwortet. Endlich hat E. Borel†) eine allgemeine Theorie der Wahrscheinlichkeit in abzählbar unendlichen Fällen gegeben und bezüglich der Theorie der Kettenbrüche folgendes Resultat abgeleitet (l. c. S. 269): Behält man nur diejenigen Teilnenner bei, welche in  $\lim_{\text{sup}} a_n$  eingehen, so ist das so definierte Wachstum mit der abzählbaren

Wahrscheinlichkeit 1 geringer††) als das der Funktion  $\varphi(n)$ , wenn  $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$  konvergiert und größer†††), wenn  $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$  divergiert.

Was den letzteren Teil des Satzes angeht, so ist derselbe enthalten in dem zweiten Teil des Satzes 4.

\*) C. R. (1888) S. 1584, 1777.

\*\*) Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förh. (1900), S. 239—266.

\*\*\*) Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förh. (1900), S. 829—842; Bemerkungen über eine von Gyldén aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage, Lund 1901.

†) Les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), S. 247—271.

††) D. h.  $\lim_{\text{sup}} \frac{a_n}{\varphi(n)} = 0$ .

†††)  $\lim_{\text{sup}} \frac{a_n}{\varphi(n)} = \infty$

Der erste Teil aber steht im Widerspruch mit dem von uns erhaltenen Resultat in Satz 4.

Der Grund des Widerspruchs hat eine Ursache von *prinzipieller Wichtigkeit*, welche wir daher ausführlich erläutern wollen.

Es besteht die folgende Tatsache:

*Für unsere geometrischen Wahrscheinlichkeiten gilt nicht die Unabhängigkeit der Einzelfälle.*

Um sich davon zu überzeugen, genügt es, ein einfaches Beispiel zu bilden. Bezeichnen wir mit  ${}_1p_1$  und  ${}_2p_1$  die Wahrscheinlichkeit, daß  $a_1 = 1$  bez.  $= 2$  sei, mit  ${}_1p_2$  die Wahrscheinlichkeit, daß  $a_2 = 1$  sei und mit  $p_{11}$ ,  $p_{21}$  die Wahrscheinlichkeiten, daß zugleich  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  bez.  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$  sei, so müßte, wenn Unabhängigkeit der Einzelfälle bestände,  $p_{11} : p_{21} = {}_1p_1 : {}_2p_1$  sein. Nun ist

$$p_{11} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+0}} = \frac{1}{6},$$

$$p_{21} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+1}} - \frac{1}{2 + \frac{1}{1+0}} = \frac{1}{15},$$

$${}_1p_1 = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$${}_2p_1 = \frac{1}{2+0} - \frac{1}{2+1} = \frac{1}{6}.$$

Man kann in solchen Fällen das Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten nur in der verallgemeinerten Form

$$(P, Q) = \sum p_i q_i$$

zum Ansatz bringen, wo  $P = \sum p_i$  die eine Wahrscheinlichkeit und  $q_i$  immer den zugehörigen Wert von  $Q$  bedeutet (d. h. den Wert von  $Q$  im Falle des Eintreffens des Ereignisses, welches die Wahrscheinlichkeit  $p_i$  besitzt.)

Liegen dann für alle  $i$  die  $q_i$  zwischen den Grenzen  $\underline{q}$  und  $\bar{q}$ , so gilt die Ungleichung

$$(62) \quad P\underline{q} \leq (P, Q) \leq P\bar{q}.$$

Auf diese Ungleichung lassen sich die voranstehenden Schlüsse beziehen.

### § 3.

#### Approximationen mit Nebenbedingungen.

Wir verbinden die Resultate der vorhergehenden Paragraphen, indem wir folgenden Satz beweisen.

Satz 5. *Es sei*

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq s \leq 1,$$

so gibt es eine Menge  $M$  von Werten  $x$  vom Maß 1 und zu jedem  $x$  der Menge  $M$  eine Menge  $S$  von Werten  $s$  vom Maße 1, sodaß zu jedem Wertepaar  $(x, s)$  zwei Reihen positiver wachsender ganzer Zahlen  $\nu = \nu_i$  und  $a = a_\nu$  zugehören derart, daß zugleich

$$(63) \quad \frac{(vx)}{\nu} \leq \frac{1}{\nu^2 a_\nu}$$

und

$$(64) \quad (\nu s) > \eta_{x,s} > 0 \quad \text{für alle } \nu$$

ist, wo  $\eta_{x,s}$  eine nur von dem Wertepaar  $(x, s)$  abhängige Größe bedeutet.

In der Tat können wir hier für die Menge  $M$  ohne weiteres die Menge  $M$  des Satzes 3 einsetzen, dann gilt

$$\frac{(\bar{\nu}x)}{\bar{\nu}} \leq \frac{1}{\bar{\nu}^2 a_\nu}.$$

Indem wir jetzt auf die Reihe der  $\bar{\nu}$  die Folgerung 1 (§ 1) anwenden, erhalten wir zu jedem  $x$  eine Menge  $S$  von Werten  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), sodaß zu jedem Wertepaar  $(x, s)$  eine Teilmenge  $\nu = \nu_i$  der  $\bar{\nu}$  gehört derart, daß zugleich die eben angegebene Ungleichung und

$$(\nu s) > \eta_{x,s} > 0$$

für alle  $\nu$  besteht.

Wir beweisen nunmehr den folgenden wichtigen

Satz 6. *Es sei  $L > 0$  eine beliebig groß vorgegebene Zahl, dann gibt es eine  $x$ -Menge  $M$  vom Maß 1 und zu jedem  $x$  von  $M$  eine  $s$ -Menge  $S$  von Maß 1 ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ) derart, daß für jedes Wertepaar  $(x, s)$  zwei positive ganze Zahlen  $\nu$  und  $N$  so wählbar sind, daß einerseits die Beziehung*

$$(65) \quad \frac{(vx)}{\nu} < \frac{s}{N^2}$$

und andererseits die Beziehung

$$(66) \quad N \frac{(\nu s)}{\nu} > L$$

erfüllt sind.

Wir wählen  $x$  und  $s$  aus den Mengen  $M$  und  $S$  des Satzes 5, sodaß die Ungleichungen (63) und (64) gelten. Andererseits wählen wir zu dem vorgegebenen Werte von  $L$  und irgend einem  $\nu$  des Satzes 5. die ganze Zahl  $N$  beliebig in den Grenzen

$$(67) \quad \frac{L+1}{\eta_{x,s}} \nu > N > \frac{L}{\eta_{x,s}} \nu.$$

Wenn, was wir festsetzen können,  $\eta_{x,s} < \frac{1}{2}$  ist, so ist  $\left[ \frac{\nu}{\eta_{x,s}} \right] > 2\nu$  und es stehen uns mindestens  $2\nu$  ganzzahlige Werte zur Verfügung.

Es wird also mit Rücksicht auf (64)

$$(68) \quad N \frac{(\nu s)}{\nu} > L.$$

Andererseits ist für dasselbe  $\nu$

$$(69) \quad \frac{(\nu x)}{\nu} \leq \frac{1}{N^2 \bar{a}_\nu},$$

wenn

$$(70) \quad \bar{a}_\nu = \frac{\nu^2}{N^2} a_\nu$$

gesetzt wird. Vermöge (67) ist dann wieder

$$(71) \quad \bar{a}_\nu \geq \left( \frac{\eta_{x,s}}{L+1} \right)^2 a_\nu.$$

Da nun mit wachsendem  $\nu$ ,  $a_\nu$  über alle Grenzen wächst, so wächst auch zugleich  $\bar{a}_\nu$  über alle Grenzen und also läßt sich ein  $\nu$  so groß bestimmen, daß

$$(72) \quad \frac{1}{\bar{a}_\nu} \leq s$$

wird. Aus (69) und (72) folgt also für dieses  $\nu$

$$(73) \quad \frac{(\nu x)}{\nu} \leq \frac{s}{N^2}$$

womit der in Rede stehende Satz bewiesen ist.

#### § 4.

**Die Definition der mittleren Bewegung. Die Funktion  $\varphi(x, s; n)$  und die Sätze von P. Bohl und W. Sierpinski.**

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum eigentlichen Gegenstand der Untersuchung. Wir schicken die folgende Definition voraus.

**Definition.** Es sei  $f(x; n)$  eine Funktion der positiv ganzzahligen Variablen  $n$  und des reellen Parameters  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) derart, daß die Gleichung

$$(74) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f(x; n)}{n} = s$$

für jedes  $x$  erfüllt sei, wo  $s$  eine von  $x$  unabhängige Konstante bedeute. Wir sagen dann,  $f(x; n)$  besitzt eine *mittlere Bewegung* für den Wert  $x$ , wenn es eine von  $x$  abhängige Zahl  $G_x > 0$  gibt, sodaß die Ungleichung

$$(75) \quad |f(x; n) - ns| \leq G_x$$

für alle  $n \geq n_0$  erfüllt ist.

Ebenso sagen wir, die Funktion  $f(x; n)$  besitze eine *mittlere Bewegung* für die Punktmenge  $M$ , wenn für jeden Punkt  $x$  der Menge  $M$  eine Ungleichung (75) besteht.

Hat insbesondere die Punktmenge  $M$  der Punkte  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) das Maß Null, so sagen wir, daß für das Intervall  $(0, 1)$  die geometrische Wahrscheinlichkeit mittlerer Bewegung Null sei.

Beiläufig bemerkt man:

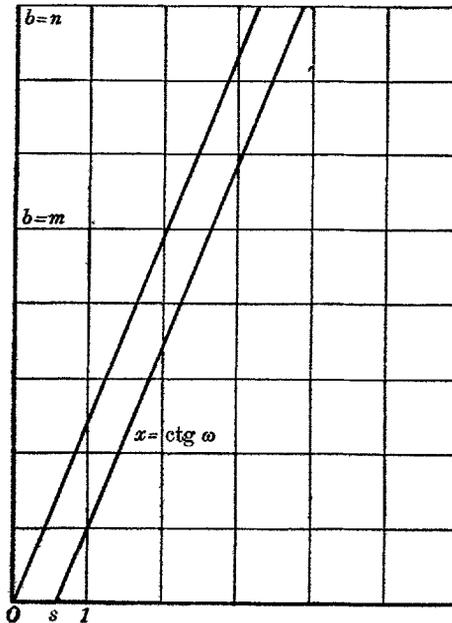
Damit die geometrische Wahrscheinlichkeit mittlerer Bewegung für das Intervall 0 bis 1 Null sei, ist es *hinreichend*, daß eine Ungleichung

$$(76) \quad |f(x; n) - ns| \leq G,$$

wo  $G$  eine von  $x$  unabhängige Größe bedeute, nur für eine Nullmenge in  $x$  erfüllt sei, *wie groß auch  $G$  angenommen werde*.

Denn diejenigen  $x$ , für welche mittlere Bewegung existiert, sind in der abzählbaren Zahl von Nullmengen enthalten, die den wachsenden Werten  $G_1, G_2, \dots$  entsprechen, sie bilden eine Menge von Maß Null.

Wir definieren jetzt eine Funktion  $\varphi(x, s; n)$  folgendermaßen: Aus dem ebenen Zahlgitterquadranten, dessen Punkte durch die positiven ganzen



Zahlen  $(a, b)$  bestimmt werden, schneiden wir mittels der parallelen Geraden I und II einen Parallelstreifen heraus. Wir legen zunächst die Gerade I durch den Nullpunkt unter der Neigung  $\omega$  gegen die positive

$a$ -Achse und setzen  $x = \text{ctg } \omega$ . Die Parallele II schneide die positive  $a$ -Achse im Punkte ( $a = s, b = 0$ ).

Unter  $\varphi(x, s; n)$  verstehen wir die Anzahl der in dem Parallelstreifen *unterhalb* der Ordinate  $b = n + 1$  gelegenen Gitterpunkte des Quadranten, wobei wir die auf der Abszissenachse und die auf der Geraden I gelegenen Gitterpunkte von der Zählung ausschließen.

In analytischer Darstellung lautet der Ausdruck der Funktion

$$(77) \quad \varphi(x, s; n) = ns + \sum_{m=1}^{m=n} \{ (xm) - (s + xm) \},$$

wobei wieder  $(a) = a - [a]$  gesetzt ist.

In der Tat ist ja die Anzahl der auf einer Geraden  $b = m$  ( $0 < m \leq n$ ) gelegenen Gitterpunkte unseres Streifens, d. h. die Anzahl der auf der Strecke zwischen den Endpunkten

$$(a = xm, b = m), \quad (a = s + xm, b = m)$$

gelegenen Gitterpunkte gleich der Differenz der Anzahl der auf den Strecken ( $a = 0, b = m$ ), ( $a = s + xm, b = m$ ) und ( $a = 0, b = m$ ), ( $a = xm, b = m$ ) gelegenen Gitterpunkte. Die diesbezüglichen Anzahlen sind

$$[s + xm] \quad \text{und} \quad [xm],$$

deren Differenz auch

$$(xm) - (s + xm) + s$$

geschrieben werden kann, sodaß in der Tat

$$\varphi(x, s; n) = \sum_{m=1}^{m=n} \{ (xm) - (s + xm) + s \}$$

wird.

Ist  $\frac{\mu}{\nu}$  ein irreduzibler Bruch und geht die Gerade I durch den Punkt  $(\mu, \nu)$ , so geht sie durch alle Punkte mit den Koordinaten  $(p\mu, q\nu)$  und der Streifen zerfällt dann in lauter sich periodisch wiederholende Parallelogramme der Höhe  $\nu$ . Es ist also, wenn

$$(78) \quad n = \nu p + m \quad 0 \leq m < \nu$$

gesetzt wird,

$$(79) \quad \varphi\left(\frac{\mu}{\nu}, s; n\right) = p\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}; s; \nu\right) + \varphi\left(\frac{\mu}{\nu}, s; m\right).$$

Ferner ist

$$(80) \quad \varphi\left(\frac{\mu}{\nu}, s; \nu\right) = [\nu s].$$

Denn es ist nach (77)

$$\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}, s; \nu\right) = \nu s + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left\{ \left(\frac{\mu}{\nu} m\right) - \left(s + \frac{\mu}{\nu} m\right) \right\};$$

setzen wir

$$(81) \quad s = \frac{[vs] + (vs)}{v};$$

so durchläuft

$$(82) \quad \left(\frac{\mu}{v} m\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{[vs] + \mu m}{v}\right)$$

für  $m = 1, 2, \dots, v$ , da  $\frac{\mu}{v}$  irreduzibel, alle echten Brüche mit dem Nenner  $v$ .

Andererseits ist, vermöge

$$(83) \quad \frac{(vs)}{v} < \frac{1}{v},$$

$$(84) \quad \left(\frac{vs + \mu m}{v}\right) = \left(\frac{[vs] + \mu m}{v} + \frac{(vs)}{v}\right) = \left(\frac{[vs] + \mu m}{v}\right) + \frac{(vs)}{v}.$$

Daher reduziert sich die Summe in (77) auf

$$* \quad \frac{(vs)}{v} v = (vs)$$

und es wird

$$\varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; v\right) = [vs].$$

Hieraus folgt, in Verbindung mit (79),

$$(85) \quad \varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; n\right) - n \frac{[vs]}{v} = \varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; m\right) - m \frac{[vs]}{v},$$

wenn

$$(86) \quad n \equiv m(v)$$

ist.

Dividieren wir durch  $n$  und ersetzen wir, unter der Annahme

$$(87) \quad 0 \leq m \leq v - 1,$$

$\varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; m\right) - m \frac{[vs]}{v}$  durch seine Extremalwerte  $\overline{M}$  und  $\underline{M}$  für  $m = 0, 1, \dots, v - 1$ , so folgt

$$(88) \quad \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; n\right)}{n} \leq \frac{[vs]}{v} + \frac{\overline{M}}{n} \quad \text{und} \quad \geq \frac{[vs]}{v} + \frac{\underline{M}}{n},$$

also, da  $\overline{M}$  und  $\underline{M}$  von  $n$  unabhängige endliche Größen bezeichnen,

$$(89) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{v}, s; n\right)}{n} = \frac{[vs]}{v}. \quad (\text{Bohl l. c. p. 226})$$

Ist dagegen  $x$  irrational, so besteht die Gleichung

$$(90) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x, s; n)}{n} = s \quad (\text{Bohl l. c. p. 226}),$$

deren Beweis von P. Bohl auf sehr sinnreiche Weise geführt wird.

Einen allgemeineren Satz hat W. Sierpinski (Krakau Ak. Anz. Math.-Nat. Kl. A, Jan. 1910, p. 9) zugleich auf einfachere Weise bewiesen (vgl. auch *ibid.* Nov. 1909).

Das Theorem von W. Sierpinski lautet: Es ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^n [kx + y] - \frac{n(n+1)}{2} x - ny + \frac{n}{2} \right\} = 0,$$

wo  $x$  irrational und  $y$  beliebig ist. Diese Formel folgt aus der leicht zu beweisenden Ungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^n \left[ k \frac{P}{Q} + y \right] - n \frac{n+1}{2} \frac{P}{Q} - n \frac{[Qy]}{Q} + \frac{Q-1}{2Q} n \right| \leq \frac{Q-1}{2},$$

in der  $\frac{P}{Q}$  einen irreduziblen Bruch bedeutet, indem man folgenden Approximationssatz zuhilfe nimmt:

„Zu jeder reellen Zahl  $x$  läßt sich eine unendliche Folge von Brüchen

$$\frac{a_n}{c_n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

so finden, daß zugleich

$$\lim_{n=\infty} n \left( x - \frac{a_n}{c_n} \right) = 0$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n} = 0$$

ist.

Dieser Satz ist unabhängig von H. Weyl in einer etwas später erschienenen Arbeit: Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene (Rend. Circ. Mat. Palermo 30, 12. Juni 1910, p. 406) bewiesen worden.

Läßt man bei gegebenem  $N$  in der Funktion

$$\varphi(x, s; N)$$

$x$  von 0 bis 1 variieren, so ändert sich der Wert der Funktionen an den Stellen

$$(90) \quad x = \frac{s}{b}, \quad \frac{a+s}{b},$$

wo  $a$  und  $b$  irgend welche ganze Zahlen  $1, 2, \dots, N$  bedeuten, sprungsweise um 1. Der Abstand zweier Werte (91) ist größer oder gleich  $\frac{s}{N^2}$ , sodaß in einem Intervall der Länge  $\frac{s}{N^2}$  sich die Funktion  $\varphi(x, s; N)$  um nicht mehr als 1 ändert.

## § 5.

**Nachweis des Hauptsatzes von der Unwahrscheinlichkeit  
der mittleren Bewegung der Funktion  $\varphi(x, s; n)$ .**

Wir beweisen nunmehr den Hauptsatz:

Satz 7. *Es gibt eine Menge  $M$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) vom Maß Eins, und zu jedem  $x$  der Menge  $M$  eine  $s$ -Menge vom Maß Eins derart, daß für jedes Wertepaar  $(x, s)$  die Funktion  $\varphi(x, s; n)$  keine mittlere Bewegung besitzt.*

Als ebene Menge betrachtet, hat die  $(x, s)$ -Menge das Maß 1. Wir können also sagen:

*Es besteht für mittlere Bewegung der Funktion  $\varphi(x, s; n)$  die geometrische Wahrscheinlichkeit Null.*

Beweis: Wir nehmen als Mengen  $M$  und  $S$  die Mengen des Satzes 6. an. Infolge der Beziehung

$$(92) \quad \frac{(\nu x)}{\nu} < \frac{s}{N^2}$$

ist für das dort bestimmte  $N$

$$(93) \quad \varphi(x, s; N) = \varphi\left(\frac{[\nu x]}{\nu}, s; N\right) + \chi,$$

wo  $\chi$  entweder 0 oder  $\pm 1$  ist.

Es sei

$$(94) \quad \frac{[\nu x]}{\nu} = \frac{\mu^*}{\nu^*},$$

wo  $\frac{\mu^*}{\nu^*}$  irreduzibel sei und

$$(95) \quad \nu = \nu^* \cdot \nu^{**}.$$

Für  $N$  stehen alle Werte zur Verfügung, welche im Intervalle (67) von der Länge  $2\nu$  liegen. Wir denken uns  $N$  so gewählt, daß

$$(96) \quad N \equiv 0 \pmod{\nu^*}$$

wird. Es ist also nach (79)

$$(97) \quad \varphi\left(\frac{\mu^*}{\nu^*}, s; N\right) = N \frac{[\nu^* s]}{\nu^*}.$$

Also ist

$$(98) \quad \begin{aligned} \varphi(x, s; N) - Ns &= N \frac{[\nu^* s]}{\nu} - Ns + \chi \\ &= -N \frac{(\nu^{**} s)}{\nu^*} + \chi. \end{aligned}$$

Nun ist aber  $N$  bei gegebenem  $L$  so bestimmt worden, daß

$$(99) \quad N \frac{(\nu s)}{\nu} > L$$

wird. Aus

$$(100) \quad \nu s - \nu^{**} [\nu^* s] \geq \nu s - [\nu s]$$

folgt durch Division mit  $\nu = \nu^* \cdot \nu^{**}$

$$s - \frac{[v^*s]}{\nu^*} \geq s - \frac{[vs]}{\nu},$$

d. h.

$$(101) \quad \frac{(v^*s)}{\nu^*} \geq \frac{(vs)}{\nu}.$$

Es ist also zufolge (98) und (99)

$$(102) \quad \begin{aligned} |\varphi(x, s; N) - Ns| &\geq N \frac{(vs)}{\nu} - \chi, \\ &> L - \chi, \\ &> L - 1. \end{aligned}$$

Es läßt sich also, wie groß auch  $L - 1$  vorgegeben sei, zu jedem  $(x, s)$  der Menge ein  $N$  derart bestimmen, daß die Ungleichung (102) erfüllt ist. Damit ist der fragliche Satz vollständig bewiesen.

Man verallgemeinert die vorstehenden Betrachtungen, indem man anstatt der Funktion  $\varphi(x, s, n)$  die Funktion

$$\varphi(x, a, s; n) = \varphi(x, a + s; n) - \varphi(x, a; n)$$

betrachtet, welche die Anzahl der Gitterpunkte in einem um  $a$  nach rechts verschobenen Streifen angibt. Da keine neuen Überlegungen ins Spiel kommen, so verzichten wir auf eine Angabe der Beweise und formulieren lediglich das Ergebnis:

*Es besteht die geometrische Wahrscheinlichkeit Null für mittlere Bewegung der Funktion  $\varphi(a, x, s; n)$ , was auch  $a$  sei.*