

ÜBER ANNÄHERUNG DURCH POLYNOME MIT LAUTER REELLEN WURZELN.

Von **Georg Pólya** (Budapest).

Adunanza dell'11 maggio 1913.

1. Es soll in einem Kreise, beschrieben um den Nullpunkt als Mittelpunkt, eine Folge von Polynomen

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$$

mit *lauter positiven Wurzeln* gleichmässig gegen einen Grenzwert $F(x)$ konvergieren. $F(x)$ ist, nach dem klassischen Satze von WEIERSTRASS, regulär analytisch im besagten Kreis; ich betrachte die Funktion $F(x)$, die durch dieses Element definiert ist, und beweise den folgenden

SATZ I. — *Die Funktion $F(x)$, die in einem gewissen Kreise um den Nullpunkt, beliebig und gleichmässig durch Polynome mit lauter positiven Wurzeln angenähert werden kann, ist eine transcendente ganze Funktion; und zwar ist $F(x)$ gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlecht Null, und der Funktion $e^{-\gamma x}$, wo $\gamma \geq 0$. — Ferner wird $F(x)$ durch die besagten Polynome in jedem endlichen Gebiet gleichmässig angenähert; diese letzte Aussage ist aber nur dann gültig, wenn $F(x)$ nicht identisch verschwindet ¹⁾.*

Ich werde noch folgende Sätze beweisen:

SATZ II. — *Gibt es eine Folge von Polynomen mit lauter reellen Wurzeln, die in einem Kreise, um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben, gleichmässig gegen die analytische Funktion $F(x)$ konvergieren, so ist $F(x)$ transcendent ganz; und zwar ist $F(x)$ gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlechte Eins und der Funktion $e^{-\gamma x^2}$, wo $\gamma \geq 0$.*

SATZ III. — *Haben alle Abschnitte einer formal angeschriebenen Potenzreihe, von einem gewissen an, lauter reelle Wurzeln eines Zeichens, so konvergiert die Potenzreihe für jedes x und stellt eine Funktion vom Geschlechte Null dar.*

SATZ IV. — *Haben alle Abschnitte einer formal angeschriebenen Potenzreihe, von einem*

¹⁾ Ein Beispiel dafür, dass sie in der Tat nicht gilt, wenn $F(x)$ identisch $= 0$ ist, bietet die Polynomfolge

$$\Phi_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

gewissen an, lauter reelle Wurzeln, so konvergiert die Potenzreihe für jedes x und stellt eine Funktion vom Geschlechte Null oder Eins dar.

LAGUERRE ²⁾ hat folgenden Satz ausgesprochen: wenn eine transzendente ganze Funktion $F(x)$ der Grenzwert von Polynomen mit lauter reellen Wurzeln eines Zeichens ist, dann ist sie gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlechte Null und von e^{ax+b} . LAGUERRE sagt einfach « limite » aber er scheint vorauszusetzen, dass die Polynomfolge in jedem endlichen Bereich gleichmässig gegen die Funktion $F(x)$ konvergiert. Wird übrigens gleichmässige Konvergenz in jedem endlichen Bereich vorausgesetzt, dann ist die Voraussetzung, dass $F(x)$ transzendent ganz ist, überflüssig, denn man erhält diese Eigenschaft von $F(x)$ als unmittelbare Folgerung.

Satz I besagt mehr, als der zitierte LAGUERRESche Satz, indem er dieselbe Folgerung aus einer geringeren Voraussetzung zieht. Ich setze nur voraus, dass gleichmässige Konvergenz in einem einzigen Gebiete, das einen Punkt der negativen reellen Achse im Innern enthält, stattfindet, anstatt Konvergenz in der ganzen Ebene vorauszusetzen. Ferner kommt die neue Tatsache hinzu, dass aus Konvergenz im besagten Gebiete Konvergenz in der ganzen Ebene folgt. — Ähnlich zieht Satz II eine LAGUERRESche Folgerung ²⁾ aus einer geringeren Voraussetzung. Die Determinante der Integralgleichung mit symmetrischem Kern kann als Beispiel und Bestätigung des Satzes II dienen (Vgl. 7.).

LAGUERRE führte den Beweis nur für den Fall der Wurzeln gleiches Zeichens. Die Richtigkeit dieses Beweises kann angezweifelt werden; ich bin der Ansicht, dass der Beweis ohne wesentliche Aenderungen des Gedankenganges lückenlos zu führen ist. — Der hier gegebene Beweis ist von der Richtigkeit des LAGUERRESchen völlig unabhängig, und beruht auf einer ganz anderen Grundlage.

Potenzreihen, deren alle Abschnitte reelle Wurzeln eines Zeichens haben, hat in mehreren Arbeiten Herr PETROVITCH ³⁾ untersucht. In seinen beiden ersten Arbeiten stellte er fest, dass solche Potenzreihen für jedes x konvergieren, und dass sie Funktionen vom Geschlechte Null oder Eins darstellen. Letzteres folgt aus dem ersteren reichlich nach dem zitierten Satze von LAGUERRE.

In Beantwortung der Frage 3022 des *Intermédiaire* ⁴⁾ (gestellt von Herrn PETROVITCH) teilte LAURENT ohne Beweis eine Relation mit, woraus ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes III folgt.

²⁾ *Œuvres de LAGUERRE* (Paris, Gauthier-Villars), Bd. I (1898), S. 174-177. Für eine Anwendung siehe daselbst S. 202-204.

³⁾ M. PETROVITCH: a) *Sur une classe de séries entières* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLIII (2. Semester 1906), S. 208-210; b) *Sur certaines transcendentes entières* [Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXXIV (1906), S. 165-177]; c) *Une classe remarquable de séries entières* [Atti del IV^o Congresso Internazionale dei Matematici (Roma 6-11 aprile 1908), Bd. II (1909), S. 36-43]; d) *Théorème sur les séries de TAYLOR* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLVI (1. Semester 1908), S. 272-274].

⁴⁾ *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, Bd. XIII (1906), S. 38, 135-136, 159-160.

In seiner Arbeit loc. cit. ³⁾, c) bewies Herr PETROVITCH die LAURENTSche Relation und damit den Satz III. Diesen Beweis werde ich der Vollständigkeit halber unter 4. wiedergeben.

2. Ich habe bei dem Beweis den einfachsten Spezialfall einer von NEWTON herrührenden Regel nötig ⁵⁾. Um den Leser nicht anderswohin verweisen zu müssen, gebe ich den Satz mit einem bekannten kurzen Beweis wieder; er lautet so:

Hat das reelle Polynom $f(x)$

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \binom{n}{1} \alpha_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

lauter reelle Wurzeln, so bestehen die Ungleichungen

$$(I) \quad \alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_3 \geq 0, \dots, \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2} \alpha_n \geq 0.$$

In der Tat, es ist

$$\frac{df(x)}{dx} = n \left(\alpha_0 x^{n-1} + \binom{n-1}{1} \alpha_1 x^{n-2} + \binom{n-1}{2} \alpha_2 x^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1} \right),$$

$$\frac{dx^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = n \left(\alpha_n x^{n-1} + \binom{n-1}{1} \alpha_{n-1} x^{n-2} + \binom{n-1}{2} \alpha_{n-2} x^{n-3} + \dots + \alpha_1 \right)$$

und so kann ich durch Differenzieren und Vertauschen von x und $\frac{1}{x}$ bis zu den Polynomen zweiten Grades

$$\alpha_0 x^2 + 2 \alpha_1 x + \alpha_2, \quad \alpha_1 x^2 + 2 \alpha_2 x + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} x^2 + 2 \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

hinuntersteigen, die also *ebenfalls lauter reelle Wurzeln haben müssen*. Daraus folgt das Bestehen der Ungleichungen (I).

Sind $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ alle positiv, so können die Ungleichungen (I) so geschrieben werden

$$\alpha_1^2 \geq \alpha_0 \alpha_2, \quad \alpha_2^2 \geq \alpha_1^2 \alpha_3, \dots, \alpha_p^2 \geq \alpha_{p-1}^p \alpha_{p+1}^p, \dots, \alpha_{n-1}^2 \geq \alpha_{n-2}^{n-1} \alpha_n^{n-1}.$$

Multipliziere ich die ersten p Ungleichungen, so bekomme ich

$$\alpha_1^2 \alpha_2^4 \alpha_3^6 \dots \alpha_p^{2p} \geq \alpha_0 \alpha_1^2 \alpha_2^{1+3} \alpha_3^{2+4} \dots \alpha_{p-1}^{p-2+p} \alpha_p^{p-1} \alpha_{p+1}^p$$

oder gekürzt

$$\alpha_p^{p+1} \geq \alpha_0 \alpha_{p+1}^p.$$

Daraus schliesst man: hat das Polynom

$$1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots + (-1)^n a_n x^n$$

⁵⁾ S. z. B. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra* (Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn), Zweite Auflage, Bd. I (1898), S. 345-353. Der in Text gegebene Beweis dürfte so ungefähr 150 Jahre alt sein, aber ich konnte nicht feststellen, von wem er eigentlich herrührt.

lauter reelle positive Wurzeln, so bestehen die Ungleichungen

$$(2) \quad \frac{a_1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_2}{\binom{n}{2}}} \geq \dots \geq \sqrt[p]{\frac{a_p}{\binom{n}{p}}} \geq \dots \geq \sqrt[n]{a_n}.$$

Die beiden Enden zusammenfassend gewinnt man den Satz von dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. An der Hand des Beweises lässt sich auch der bekannte Ausnahmefall erkennen, wo das Zeichen $=$ in (2) das richtige ist — aber das werde ich nicht nötig haben.

3. Ich betrachte nun die Polynomfolge

$$\Phi_1(x), \quad \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$$

wo jedes Polynom nur positive Wurzeln haben soll; die Polynomfolge soll in dem Kreise $|x| \leq \rho$ gleichmässig gegen die Funktion $F(x)$ konvergieren. Ich setze voraus, dass $F(x)$ nicht identisch verschwindet.

Wie schon bemerkt wurde, es folgt aus dieser Voraussetzung zunächst, dass $F(x)$ für $|x| < \rho$ regulär ist; $F(x)$ wird also durch den Ausdruck gegeben

$$F(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$$

wo die Reihe rechts für $|x| < \rho$ gewiss konvergiert.

Setze ich

$$(3) \quad \Phi_n(x) = a_{n0} - a_{n1} x + a_{n2} x^2 - \dots + (-1)^n a_{nn} x^n,$$

so besagt noch der zitierte Satz von WEIERSTRASS, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{np} = a_p.$$

Ich kann es ohne Beschränkung voraussetzen, dass $a_0 \neq 0$ ist. Denn wäre $F(0) = 0$, so möchte ich die Funktion $F(x - \beta)$ betrachten, wo $0 < \beta < \rho$. $F(x - \beta)$ wird durch die Polynomfolge $\Phi_1(x - \beta), \dots, \Phi_n(x - \beta), \dots$ angenähert, und diese Polynomfolge genügt allen Voraussetzungen des Satzes I. Ferner kann $F(x - \beta)$ für $x = 0$ nicht verschwinden, denn $F(x)$ hat gewiss keine Wurzeln zwischen $-\rho$ und 0. Ebenso kann ich anstatt $F(x)$ und $\Phi_n(x)$, $\frac{F(x)}{a_0}$ und $\frac{\Phi_n(x)}{a_{n0}}$ betrachten (da doch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n0} = a_0 \neq 0$), und so kann ich annehmen, dass $\Phi_n(x)$ von der Form sei ⁶⁾:

$$(3') \quad \begin{cases} \Phi_n(x) = 1 - a_{n1} x + a_{n2} x^2 - \dots + (-1)^n a_{nn} x^n \\ \quad = \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n1}}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_{nn}}\right). \end{cases}$$

Aus den Ungleichungen (2) folgt, dass

$$(4) \quad \frac{a_{n1}}{n} \geq \sqrt[p]{\frac{a_{np}}{\binom{n}{p}}}, \quad a_{n1}^p \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{n^p} \frac{1}{p!} \geq a_{np}$$

⁶⁾ Wenn $\Phi_n(x)$ den Grad k ($k < n$) hat, so steht natürlich in der zweiten Zeile nur k Faktoren.

also

$$(5) \quad \frac{a_1^p}{p!} \geq a_p.$$

Davon folgt, dass $F(x)$ für jedes x konvergiert. Es folgt ferner, dass

$$(6) \quad |F(x)| \leq F(-|x|) \leq e^{a_1|x|}.$$

Da a_{n1} gegen a_1 konvergiert, so gilt nach (4) von einem bestimmten x an gewiss die Ungleichung

$$a_{np} \leq \frac{(a_1 + 1)^p}{p!}$$

und daraus schliesst man, mittelst der Zerlegung

$$\begin{aligned} |F(x) - \Phi_n(x)| &\leq \left| \sum_0^N (-1)^p (a_p - a_{np}) x^p \right| + \left| \sum_{N+1}^{\infty} (-1)^p a_p x^p \right| + \left| \sum_{N+1}^n (-1)^p a_{np} x^p \right| \\ &\leq \left| \sum_0^N (-1)^p (a_p - a_{np}) x^p \right| + 2 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(a_1 + 1)^p |x|^p}{p!} \end{aligned}$$

dass für jedes x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = F(x)$$

und dass die Konvergenz in jedem endlichen Bereiche gleichmässig erfolgt.

Aus der Gleichmässigkeit der Konvergenz in jedem endlichen Gebiete schliesst man weiter, dass $F(x)$ nur reelle positive Wurzeln haben kann, wenn sie überhaupt Wurzeln besitzt. Diese Wurzeln seien der Grösse nach geordnet

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$$

wo jede Wurzel mit ihrer Multiplizität angeschrieben gedacht wird. Ich nehme an, es sei in der Formel (3')

$$\alpha_{n1} \leq \alpha_{n2} \leq \dots \leq \alpha_{np} \leq \dots \leq \alpha_{nn}.$$

Dann folgt (ebenfalls aus wohlbekannten allgemeinen Prinzipien) dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{np} = \alpha_p.$$

Nun ist

$$a_{n1} = \frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_{nn}}$$

$$a_{n1} \geq \frac{1}{\alpha_{n1}} + \frac{1}{\alpha_{n2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_{np}}$$

also

$$a_1 \geq \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_p}.$$

Folglich ist die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha_p}$ konvergent, und es besteht die Ungleichung

$$(7) \quad a_1 \geq \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_p} + \dots$$

Aus (7) folgt, dass $F(x)$ in die Form gesetzt werden kann

$$F(x) = e^{g(x)} \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right) \dots$$

wo $g(x)$ transcendent ganz ist. Es folgt nun aus (6), nach einem grundlegenden Satze des Herrn HADAMARD ⁷⁾, dass $g(x)$ eine lineare Funktion ist

$$g(x) = -\gamma x + \delta.$$

Man erhält durch Vergleichung der Koeffizienten in der Gleichung

$$F(x) = 1 - a_1 x + \dots = e^{-\gamma x + \delta} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right)$$

dass

$$\delta = 0$$

und dass

$$a_1 = \gamma + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_p} + \dots$$

Daraus schliesst man, mit Hinzuziehung von (7), dass

$$\gamma \geq 0.$$

Somit ist Satz I. vollständig bewiesen.

4. Beim Beweise des Satzes II. ist man genötigt einen weniger einfachen Weg zu verfolgen. Ich werde Satz II. auf Satz I. zurückführen.

Ich setze nun voraus, dass die Polynome

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$$

lauter *reelle* Wurzeln haben, und gleichmässig in dem Kreis $|x| \leq \rho$ nach einer Funktion $F(x)$ konvergieren. $F(x)$ ist regulär analytisch und hat nur reelle Wurzeln im Kreise $|x| < \rho$. Es sei $F(x) \neq 0$. Ich kann es ohne Beschränkung annehmen, dass $\Phi_n(x)$ in die Form (3') geschrieben ist, wo nun $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots$ gewisse *reelle* Zahlen bedeuten.

Ich setze

$$x = \xi + i\eta$$

und ich will zunächst beweisen, dass die Folge $\Phi_n(x)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) gleichmässig in jedem Gebiete der x Ebene konvergiert, das durch die Ungleichungen

$$(8) \quad -r \leq \xi \leq +r, \quad -\mathfrak{z}\rho \leq \eta \leq +\mathfrak{z}\rho$$

begrenzt ist; dabei bedeutet \mathfrak{z} einen positiven echten Bruch, und r irgend eine positive Zahl.

Ich will das durch die Ungleichungen (8) begrenzte Gebiet als « Rechteck \mathfrak{z}, r » bezeichnen.

Aus der Annahme unserer Behauptung folgt, dass die Folge $\Phi_n(x)$ gleichmässig gegen die Funktion $F(x)$ in jedem « Rechteck \mathfrak{z}, r » konvergiert, wo

$$r < \rho \sqrt{1 - \mathfrak{z}^2}.$$

Ich werde nun den Satz beweisen:

⁷⁾ J. HADAMARD, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par RIEMANN* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Series IV, Bd. IX (1893), S. 171-215], S. 209.

Wenn $\Phi_n(x)$ im Rechteck Θ, R gleichmässig konvergiert, dann konvergiert sie auch gleichmässig in jedem Rechteck \varkappa, r , wo

$$(9) \quad \varkappa < \Theta, \quad r < 3R.$$

Es ist leicht zu sehen, dass mit dem Nachweise dieses Satzes die gleichmässige Konvergenz von $\Phi_n(x)$ in jedem durch die Ungleichungen (8) begrenzten Gebiete dargestellt ist.

Nun ist $F(x) = \lim \Phi_n(x)$ der Annahme gemäss im Inneren des Rechteckes $\Theta, R - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) regulär analytisch und hat daselbst nur reelle Nullstellen, in endlicher Anzahl; seien diese

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$$

bezeichnet, diesmal ohne Rücksicht auf die Multiplizität.

Ist β ein reeller Punkt des Rechteckes $\Theta, R - \varepsilon$, so ist die Polynomfolge

$$\Phi_n(\beta + x)\Phi_n(\beta - x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

im Kreise $|x| < \rho$ gleichmässig konvergent. Ist

$$-R + \varepsilon < \beta < +R - \varepsilon$$

und ist β von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ verschieden, so hat man bei genügend hohem n

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_n(\beta + x)\Phi_n(\beta - x) &= \Phi_n(\beta)^2 \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_{np} - \beta}\right) \left(1 + \frac{x}{\alpha_{np} - \beta}\right) \\ &= \Phi_n(\beta)^2 \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(\alpha_{np} - \beta)^2}\right) \end{aligned} \right.$$

$\Phi_n(\beta + x)\Phi_n(\beta - x)$ ist ein Polynom in x^2 , mit lauter positiven Wurzeln, und konvergiert für $n = \infty$ gleichmässig in einem gewissen Kreis um den Punkt $x^2 = 0$; also konvergiert sie, gemäss dem Satz I, für jedes x , und gleichmässig in jedem endlichen Gebiete der x Ebene. Man überzeugt sich leicht, dass diese Folgerung bestehen bleibt, wenn auch eventuell $\beta = \xi_\mu$ ist, nur muss man dann anstatt Formel (10) eine etwas verschiedene anwenden.

Ich will nun beweisen, dass $\Phi_n(x)$ gleichmässig in der rechten Hälfte des Rechteckes \varkappa, r konvergiert, wenn

$$\varkappa < \Theta, \quad r < 3(R - \varepsilon).$$

Für die linke Hälfte desselben Rechteckes geht es dann ebenso. Ich werde zu diesem Zwecke die Formel anwenden

$$\Phi_n(2\beta + x) = \frac{\Phi_n(\beta + (\beta + x))\Phi_n(\beta - (\beta + x))}{\Phi_n(-x)}$$

mit deren Hilfe die Konvergenz von $\Phi_n(x)$ gleichsam sich fortsetzen lässt.

In der Tat, $\frac{1}{\Phi(-x)}$ konvergiert gleichmässig im Rechtecke $\varkappa, R - \varepsilon$ wenn davon die Punkte $-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_\nu$ durch irgendwelche Gebiete, z. B. durch schmale vertikale Streifen ausgeschlossen werden. $F(x)$ ist nämlich im Inneren und

an der Begrenzung des Rechteckes \mathfrak{z} , $R - \varepsilon$ ausnahmslos regulär, und hat daselbst nur die Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$.

Ich bestimme nun zwei Zahlen β, β' die den $4 + \frac{v(v-1)}{2} + 1$ Ungleichungen

$$(11) \quad \frac{r - R + \varepsilon}{2} < \beta < R - \varepsilon, \quad \frac{r - R + \varepsilon}{2} < \beta' < R - \varepsilon, \\ 2\beta - \xi_i \neq 2\beta' - \xi_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, v) \\ \beta \neq \beta'$$

genügen. Aus den Ungleichungen (11) folgt, dass

$$2\beta + R - \varepsilon > r, \quad 2\beta' + R - \varepsilon > r, \\ 2\beta - R + \varepsilon < R - \varepsilon, \quad 2\beta' - R + \varepsilon < R - \varepsilon.$$

Ich schliesse nun die $2v$ Punkte

$$2\beta - \xi_1, \dots, 2\beta - \xi_v, \quad 2\beta' - \xi_1, \dots, 2\beta' - \xi_v$$

in so schmale vertikale Streifen ein, dass kein Punkt *zugleich* zwei verschiedenen von diesen $2v$ Streifen angehört.

Und dann schliesst man aus den beiden Formeln

$$\Phi_n(2\beta + x) = \Phi_n(\beta + (\beta + x)) \Phi_n(\beta - (\beta + x)) \frac{1}{\Phi_n(-x)} \\ \Phi(2\beta' + x) = \Phi(\beta' + (\beta' + x)) \Phi(\beta' - (\beta' + x)) \frac{1}{\Phi_n(-x)}$$

dass die rechte Hälfte des Rechteckes \mathfrak{z} , r ausnahmslos durch eine endliche Anzahl von Gebieten (Rechtecken) überdeckt werden kann, derart, dass in jedem dieser Gebiete das Polynom $\Phi_n(x)$ gleichmässig einem Grenzwert zustrebt.

Damit ist die schwierigere Hälfte des Beweises beendet. Es folgt aus dem eben Bewiesenen, dass $F(x)$ regulär im unendlichen Streifen $-\rho < \eta < +\rho$ ist, und daselbst nur reelle Nullstellen hat; es sollen diese Nullstellen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$$

bezeichnet werden, wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität angeschrieben ist. Wir denken uns diese Nullstellen der absoluten Grösse nach geordnet.

Wir wollen nun aus Satz I. einige Folgerungen ziehen.

Es folgt daraus zunächst mit Hinzuziehung der Gleichung (10), dass

$$(12) \quad F(\beta + x)F(\beta - x) = F(\beta)^2 e^{-x^2} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{(\alpha_p - \beta)^2}\right)$$

ist, wenn β irgend eine reelle, nur von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$ verschiedene Zahl bedeutet. x ist eine nichtnegative Zahl, abhängig von β .

Es folgt aus dem Satz I ferner, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_p^2} + \dots$$

konvergiert, also dass das unendliche Produkt

$$\prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right) e^{\frac{x}{\alpha_p}}$$

ebenfalls konvergiert. Ich setze

$$\int_0^x \left(\frac{F'(x)}{F(x)} - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \alpha_p} + \frac{1}{\alpha_p} \right) \right) dx = g(x)$$

$g(x)$ ist gewiss regulär, solange $|x| < \rho$ ist. Man hat

$$F(x) = e^{g(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right) e^{\frac{x}{\alpha_p}}.$$

Es bedeute β irgend eine reelle Zahl, die in das Innere des Konvergenzkreises der Potenzreihe $g(x)$ fällt; man erhält durch Einsetzung in (12)

$$(12') \left\{ \begin{aligned} F(\beta + x) F(\beta - x) &= e^{g(\beta+x)+g(\beta-x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta+x}{\alpha_p}\right) \left(1 - \frac{\beta-x}{\alpha_p}\right) e^{\frac{\beta}{\alpha_p}} \\ &= e^{g(\beta+x)+g(\beta-x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_p - \beta}\right) \left(1 + \frac{x}{\alpha_p - \beta}\right) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha_p}\right)^2 e^{\frac{\beta}{\alpha_p}} \\ &= F(\beta)^2 e^{-\gamma x^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{(\alpha_p - \beta)^2}\right) \end{aligned} \right.$$

und daraus

$$(13) \left\{ \begin{aligned} g(\beta + x) + g(\beta - x) &= -\gamma x^2 + c \\ &= 2g(\beta) + 2 \frac{g''(\beta)}{2!} x^2 + 2 \frac{g^{iv}(\beta)}{4!} x^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

Der Wert der Konstanten c ist leicht aus (12') zu entnehmen. Also ist

$$g^{iv}(\beta) = 0$$

für alle Punkte eines Intervalles, und folglich ist $g(x)$ ein Polynom dritten Grades.

$$g(x) = kx^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu.$$

Davon folgt zunächst, dass $F(x)$ transcendent ganz ist. Ich will noch beweisen, dass $k = 0$ und $\lambda \leq 0$ ist. Man erhält durch Einsetzung in die Formel (13)

$$6k\beta + 2\lambda = -\gamma \leq 0$$

$6k\beta + 2\lambda$ ist eine lineare Funktion von β , und wäre $k \geq 0$, so könnte sie gewiss auch positive Werte annehmen. Also ist

$$k = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = -\frac{\gamma}{2}$$

(γ ist also von β unabhängig).

Hiermit ist Satz II. vollständig bewiesen.

5. Ich gehe nun zum Beweise des Satzes III. über. Der Einfachheit halber nehme ich zunächst an, die Potenzreihe

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

habe die Eigenschaft, dass alle ihre Abschnitte, schon vom ersten an, lauter reelle negative Wurzeln besitzen.

Aus dieser Voraussetzung folgt natürlich, dass alle ihre Koeffizienten positiv (grösser als Null) sind.

Ich wende den in den Ungleichungen (1) ausgesprochenen Satz auf die letzten drei Koeffizienten des n^{ten} Abschnittes an. So erhalte ich

$$\frac{a_{n-2} a_n}{\binom{n}{n-2} \binom{n}{n}} \leq \frac{a_{n-1}^2}{\binom{n}{n-1}^2},$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

und auf ähnliche Weise

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq \frac{1}{2} \frac{n-2}{n-1} \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}},$$

.....

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1},$$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{a_1}{1}.$$

Durch Multiplikation der $n-1$ Ungleichungen

$$(14) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{n} \frac{a_1}{1}.$$

Diese Relation verdankt man LAURENT⁸⁾; daraus folgt weiter

$$a_n \leq a_{n-1} \frac{a_1}{2^{n-1} n},$$

$$a_{n-1} \leq a_{n-2} \frac{a_1}{2^{n-2} (n-1)},$$

.....

$$a_2 \leq a_1 \frac{a_1}{2 \cdot 2}.$$

und dies alles multipliziert gibt die Ungleichung⁹⁾

$$(15) \quad a_n \leq \frac{a_1^n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}.$$

⁸⁾ Loc. cit. ⁴⁾ steht der Druckfehler

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^n} \quad \text{anstatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^n} \frac{a_1}{a_0}.$$

⁹⁾ In seinen beiden ersten Arbeiten [loc. cit. ³⁾, a), b)] erhält Herr PETROVITCH nur die viel schwächere Ungleichung $a_n \leq \frac{a_1^n}{n^n}$. — Die Ungleichung (15) des Textes steht in seiner Arbeit loc. cit. ³⁾, c) unter (12).

Haben die Abschnitte der Reihe $1 + a_1 x + \dots$ nur von dem $q + 1^{\text{ten}}$ angefangen lauter reelle negative Wurzeln, so bestimme ich eine Zahl G , die alle die $(q-1) + 1$ Ungleichungen

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{G}{2} \frac{n-1}{n} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad (n=2, 3, 4, \dots, q)$$

$$G \geq 1$$

befriedigt. Dann folgen für jedes n die Ungleichungen

$$(14') \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{G^{q-1}}{2^{n-1}} \frac{1}{n} \frac{a_1}{1},$$

$$(15') \quad a_n \leq \frac{(a_1 G^{q-1})^n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!}.$$

Es erhellt aus (15), (15'), dass die Potenzreihe $\sum_0^\infty a_n x^n$ für jedes x konvergiert. Daraus folgt, kraft des Satzes I, dass sie gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlecht Null, und der Funktion $e^{-\gamma x}$ ist. Die HADAMARDSche Theorie hinzugezogen, erhellt es aus (15), (15'), dass $\sum_0^\infty a_n x^n$ vom Geschlecht Null ist, also dass $\gamma = 0$.

Somit ist Satz III vollständig erwiesen; ich füge noch hinzu, dass $\sum_0^\infty a_n x^n$ tatsächlich Wurzeln besitzen muss, und zwar unendlich viele, wenn sich die Potenzreihe nicht auf ein Polynom reduziert.

6. Ich setze nun voraus, dass alle Abschnitte der Potenzreihe

$$F(x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$$

schon von dem ersten angefangen, nur reelle Wurzeln haben.

Wenn also $a_n \geq 0$ ist, dann hat der n^{te} Abschnitt n von Null verschiedene reelle Wurzeln

$$\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \dots, \alpha_{nn}$$

und es bestehen die Gleichungen

$$\frac{1}{\alpha_{n1}^2} + \frac{1}{\alpha_{n2}^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{nn}^2} = a_1^2 - 2a_2 = c \quad (c > 0)$$

$$\frac{1}{\alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn}} = a_n.$$

Nach dem Satze über das arithmetische und über das geometrische Mittel folgt daraus, dass

$$\frac{c}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^2}$$

oder, dass

$$(16) \quad |a_n| \leq \frac{\frac{c}{2}}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Diese Ungleichung (16) gilt *ausnahmslos*, wenn $n \geq 2$ ist. Aus der Ungleichung (16)

erhält zunächst, dass die Reihe $F(x)$ für jedes x konvergiert. Ferner besagt Ungleichung (16), nach der HADAMARDSchen Theorie, dass $F(x)$ höchstens vom Geschlechte 2 ist. Endlich kann, laut unseres Satzes II, $F(x)$ so geschrieben werden:

$$F(x) = e^{-\gamma x^2 + \beta x} \prod_i \left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right) e^{\frac{x}{\alpha_i}}$$

wo γ eine nicht negative reelle Zahl ist. Ich will nun beweisen, dass $\gamma = 0$, d. h. dass $F(x)$ höchstens vom Geschlechte Eins ist.

Man hat

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x)F(-x) &= e^{-2\gamma x^2} \prod_i \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_i^2}\right) \\ &= (1 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \\ &= 1 - (a_1^2 - 2a_2)x^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4)x^4 - \dots \\ &= 1 - c_1 x^2 + c_2 x^4 - c_3 x^6 + \dots \end{aligned} \right.$$

mit

$$c_1 = c.$$

Die rationale ganze Funktion

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + a_{2n} x^{2n})(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}) \\ &= 1 - c_1 x^2 + c_2 x^4 - \dots + (-1)^n c_n x^{2n} + \dots + a_{2n}^2 x^{4n} \end{aligned} \right.$$

stimmt bis zum Gliede mit x^{2n} einschliesslich, mit der Potenzreihe $F(x)F(-x)$ überein. Sie ist, als Funktion von x^2 betrachtet von $2n^{\text{ten}}$ oder von niedrigerem Grade, und hat lauter reelle positive Wurzeln. Wenn $a_{2n} \geq 0$ ist, so kann kein vorausgehender Koeffizient verschwinden und daraus schliesst man, dass alle $c_n > 0$ sind, den uninteressanten Fall, wo $F(x)$ ein Polynom ist, bei Seite lassend. [Letzteres erhellt übrigens aus Formel (17) ebenfalls].

Ich wende nun auf das $n - 2^{\text{te}}$, $n - 1^{\text{te}}$ und n^{te} Koeffizient des Polynoms (18) den durch die Ungleichungen (I) ausgedrückten Satz an. So erhalte ich die Ungleichung

$$\frac{c_{n-2} c_n}{\binom{2n}{n-2} \binom{2n}{n}} \leq \frac{c_{n-1}^2}{\binom{2n}{n-1}^2}$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} c_{n-2} c_n &\leq \frac{n-1! n-1! n+1! n+1!}{n-2! n! n! n+2!} c_{n-1}^2, \\ \frac{c_n}{c_{n-1}} &\leq \frac{n-1. n+1}{n. n+2} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}. \end{aligned}$$

Man setzt noch anstatt n die Zahlen $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2 hinein;

$$\begin{aligned} \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} &\leq \frac{n-2. n}{n-1. n+1} \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{c_3}{c_2} &\leq \frac{2.4}{3.5} \frac{c_2}{c_1}, \\ \frac{c_2}{c_1} &\leq \frac{1.3}{2.4} \frac{c_1}{1}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation aller dieser Ungleichungen erhalte ich

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} \leq \frac{n-1! \frac{n+1!}{2!}}{n! \frac{n+2!}{3!}} \frac{c_1}{1} = \frac{3c}{n \cdot n+2}.$$

Man hat also

$$c_1 = 1 \cdot \frac{3c}{1 \cdot 3},$$

$$c_2 \leq c_1 \frac{3c}{2 \cdot 4},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_n \leq c_{n-1} \frac{3c}{n \cdot n+2}$$

und folglich

$$(19) \quad c_n \leq \frac{2(3c)^n}{n! n+2!}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt dass $F(x)F(-x)$ als Funktion von x^2 betrachtet vom Geschlecht Null ist, folglich dass $\gamma = 0$ ist; vgl. die Formel (17). Q. E. D.

Diesmal liesse sich übrigens auch die HADAMARDSche Theorie umgehen; setzt man in die Formel (17) $x = i\eta$ mit reellem η , so bekommt man

$$(20) \quad e^{2\gamma\eta^2} \leq F(i\eta)F(-i\eta) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3c)^n \eta^{2n}}{n! n+2!}.$$

Wäre also $\gamma > 0$, so würde folgen

$$e^{\eta^2} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3c}{2\gamma}\right)^n \eta^{2n}}{n! n+2!}$$

während nach einem verallgemeinerten Theoreme von CESÀRO ¹⁰⁾ tatsächlich

$$\lim_{\eta=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3c}{2\gamma}\right)^n \eta^{2n}}{n! n+2!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^{2n}}{n!}} = \lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{3c}{2\gamma}\right)^n}{n+2!} = 0.$$

Die rechte Seite der Ungleichung (20) ist übrigens eine BESSELSche Funktion

$$\frac{-2}{\left(2i\eta \sqrt{\frac{3c}{2\gamma}}\right)^2} I_2 \left(2i\eta \sqrt{\frac{3c}{2\gamma}}\right).$$

Aus der Tatsache $\gamma = 0$ kann man übrigens noch die Folgerung ziehen dass

¹⁰⁾ K. KNOPP, *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze* (Inaugural-Dissertation, Berlin 1907), S. 37, Satz VI.

$F(x)$ tatsächlich einige Wurzeln besitzt. Man erhält nämlich aus Formel (17), dass

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_p^2} = c > 0.$$

Es besteht noch der Satz: Wenn sämtliche Wurzeln sämtlicher Abschnitte der Potenzreihe

$$1 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + (-1)^n a_n x^n + \dots$$

in k Halbstrahlen liegen, die von dem Punkt $x = 0$ ausgehend die Ebene in k gleiche Winkel teilen — dann konvergiert die Reihe für jedes x und stellt eine ganze Funktion vom endlichen Geschlecht ($\leq k$) dar.

Es folgt nämlich aus der etwas merkwürdigen Voraussetzung [man vergleiche die Ableitung von (16)]

$$\frac{|s|}{n} \geq \sqrt[n]{|a_n|}^k \quad (n = k + 1, k + 2, \dots)$$

wo s einen gewissen rationalen ganzen Ausdruck in a_1, a_2, \dots, a_k bedeutet.

7. Wir fanden während des Beweises des Satzes I die kuriose Tatsache, dass wenn eine Folge von Polynomen mit lauter reellen positiven Wurzeln in irgend einem Gebiete gleichmässig konvergiert, welches einen Punkt der reellen negativen Achse im Innern enthält, und wenn die Grenzfunktion nicht identisch verschwindet, dann konvergiert dieselbe Folge notwendigerweise in der ganzen Ebene. Bei dem Beweise des Satzes II sind wir auf eine ähnliche Tatsache gestossen; aber es ist mir bisher nicht gelungen, zu entscheiden, ob folgender Satz wahr oder falsch ist: « Wenn eine Folge von Polynomen mit lauter reellen Wurzeln gleichmässig in irgend einem Gebiete der Ebene gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert konvergiert, dann konvergiert sie notwendigerweise überall ».

Um ein Beispiel und eine Bestätigung des Satzes II zu haben, betrachten wir die Determinante

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \int_0^1 K(x, x) dx + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} K(x, x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) \end{vmatrix} dx dy - \dots$$

der Integralgleichung mit dem symmetrischen Kern $K(x, y)$ und sehen wir zu, was für $D(\lambda)$ aus Satz II. folgt. Ich setze voraus, $K(x, y)$ sei beschränkt und integrabel (R). HILBERT zeigte, dass $D(\lambda)$ der gleichmässige Grenzwert von Polynomen mit lauter reellen Wurzeln in jedem endlichen Gebiete ist; daraus folgt also, dass

$$D(\lambda) = e^{-\gamma \lambda^2 + \delta \lambda} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p} \right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_p}}.$$

Es folgt ferner durch Koeffizientenvergleichung aus der Gleichung

$$\begin{aligned} D(\lambda) D(-\lambda) &= e^{-2\gamma \lambda^2} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_p^2} \right) \\ &= 1 - \frac{\lambda^2}{1!} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, x) dx dy + \dots \end{aligned}$$

dass

$$2\gamma + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \dots = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, x) dx dy = \int_0^1 K^2(x, x) dx.$$

Da nun $\gamma \geq 0$ ist, man hat

$$\int_0^1 K^2(x, x) dx \geq \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + \dots.$$

Wir wissen, dass in der letzterhaltenen Relation das Zeichen $=$ unter sehr weiten Bedingungen das richtige ist, also dass $\gamma = 0$. Dass $D(\lambda)$ höchstens vom Geschlecht 2 ist, ergibt sich aus dem HADAMARD'schen Determinantensatz und aus der HADAMARD'schen Theorie der ganzen transcendenten Funktionen auch bei nicht-symmetrischem beschränktem Kern unmittelbar ¹¹⁾.

Satz II lässt folgende Umkehrung zu: « Ist die reelle transcendente ganze Funktion $F(x)$ gleich dem Produkte einer Funktion vom Geschlechte Null oder Eins und der Funktion $e^{-\gamma x^2}$, wo $\gamma \geq 0$, und hat $F(x)$ nur reelle Wurzeln, so ist $F(x)$ ein Grenzwert von Polynomen mit lauter reellen Wurzeln; die Konvergenz der Polynomfolge ist gleichmässig in jedem endlichen Bereiche ». Herr JENSEN ¹²⁾ hat nämlich gezeigt, wie eine solche Polynomfolge $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$ auf eine einfache Art aus den Koeffizienten der MACLAURIN'schen Reihe von $F(x)$ zu bilden ist. Wird $F(x)$ durch die Reihe

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = F(x)$$

dargestellt, so haben die Polynome von JENSEN

$$(21) \quad \Phi_n(x) = 1 + a_1 x + a_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \dots + a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) x^n$$

nur reelle Wurzeln, und konvergieren gegen $F(x)$ ¹³⁾. Es besteht also der Satz: « Wenn die Potenzreihe $1 + a_1 x + \dots$ in einem Kreise, beschrieben um einen Punkt der reellen Achse als Mittelpunkt, beliebig und gleichmässig durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln approximiert werden kann, so kann sie durch die Polynome (21), die alle nur reelle Wurzeln haben, beliebig und gleichmässig in jedem endlichen Gebiet der x Ebene approximiert werden ». Ueber Satz I lassen sich ähnliche Bemerkungen machen.

Die Sätze III und IV lassen gewiss keine Umkehrung zu. Es erhellt, dass ein sehr exceptioneller Fall ist, wenn alle Abschnitte einer Potenzreihe reelle Wurzeln haben. Insbesondere erhellt es aus der Ableitung des Satzes III, dass in den familiären Reihen für $\sin x$, $\cos x$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, ... alle Abschnitte von einem gewissen an kom-

¹¹⁾ T. LALESKO, *Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ de FREDHOLM* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXLV (2. Semester 1907), S. 906-907].

¹²⁾ J. L. W. V. JENSEN, *Recherches sur la théorie des équations* [Acta Mathematica, Bd. XXXVI (1913), S. 181-195].—JENSEN betrachtet Funktionen vom Geschlecht 0 oder 1, ohne den für seinen Zweck unerheblichen Faktor $e^{-\gamma x^2}$; um das Resultat des Textes zu erhalten, muss man am JENSEN'schen Beweise nur eine ganz geringfügige Aenderung vornehmen.

plexe Wurzeln haben, während die Funktionen selbst nur reelle Nullstellen besitzen. Wenn man nämlich durch eine gewisse Potenz von x dividiert, haben alle diese Reihen die Form

$$a_0 - a_1 x^2 + a_2 x^4 - a_3 x^6 + \dots$$

wo a_0, a_1, a_2, \dots positiv sind. Hat der $2n + 2^{\text{te}}$ Abschnitt nur reelle Wurzeln, so muss die Ungleichung bestehen

$$\frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2} \leq \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} < \frac{1}{2}$$

während bei allen diesen Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2} = 1.$$

Diese Tatsachen werfen ein neues Licht auf die Eleganz des zitierten Satzes von Herrn JENSEN; seine kanonische Polynome tun es immer, was die Abschnitte nur so selten vermögen.

8. ¹³⁾ Satz I gestattet eine wesentliche Verallgemeinerung: Man kann erstens anstatt Polynome allgemeiner ganze Funktionen vom Geschlecht Null zulassen, und es genügt zweitens, die Wurzeln dieser ganzen Funktionen anstatt auf die positive reelle Achse auf einen Winkelraum zu beschränken, dessen Scheitel der Punkt $x = 0$ und dessen Öffnung kleiner als π ist ¹⁴⁾.

Es fließt aus diesem verallgemeinerten Satz I ohne weiteres, dass Satz II auf ganze Funktionen vom Geschlecht Null oder Eins mit lauter reellen Wurzeln ausgedehnt werden kann. Ferner gestattet dieser verallgemeinerte Satz I die am Anfang von 7. gestellte Frage im bejahenden Sinne für Polynome mit lauter positiven Wurzeln zu beantworten ¹⁵⁾.

Satz I gestatten übrigens eine grosse Anzahl von Erweiterungen und Varianten. Man kann Funktionen vom Geschlecht Eins in Betracht ziehen, die lauter reelle Wurzeln und positive Koeffizienten haben; Ungleichung (4) wird hier durch eine von BOREL ¹⁶⁾ abgeleitete Ungleichung vertreten. Man kann ferner die Bedingung der gleichmässigen Konvergenz im Kreise um den Nullpunkt durch andere Bedingungen ersetzen, gestützt auf einen Satz von OSGOOD ¹⁷⁾. Bleibt man bei Geschlecht Null und bei den Wurzeln im Winkelraum, so kann man eine gleichmässig beschränkte Anzahl von Wurzeln auch ausserhalb des Winkelraums zulassen, und man erhält dieselbe

¹³⁾ Hinzugefügt während der Korrektur. [Göttingen, den 18. Juni 1913].

¹⁴⁾ Vgl. meine Arbeit *Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1913, Sitzung vom 24. Mai].

¹⁵⁾ L. c. ¹⁴⁾, Satz II.

¹⁶⁾ É. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900), S. 36.

¹⁷⁾ W. F. OSGOOD, *Note on the Functions Defined by Infinite Series whose Terms are Analytic Functions of a Complex Variable; with corresponding Theorems for Definite Integrals* [Annals of Mathematics, Series II, Bd. III (1902), S. 25-34].

Folgerung für die Grenzfunktion, wenn man nur gleichmässige Konvergenz in jedem endlichen Bereiche voraussetzt.

Betrachtet man endlich die Wurzeln der Abschnitte einer Potenzreihe, so kann man behaupten, dass die Potenzreihe notwendigerweise überall konvergiert, wenn die Wurzeln des n^{ten} Abschnittes in einen Winkelraum W_n fallen, wo W_n mit wachsendem n *genügend langsam* wachsend sich einer Halbebene nähert ¹⁸⁾.

Göttingen, den 30. April 1913.

GEORG PÓLYA.

¹⁸⁾ Nach einer brieflichen Mitteilung von FEJÉR.