

Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

[Von L. KIEPERT, in Darmstadt. (*)]

Die neuerdings von den Herren KLEIN (**), BRIOSCHI (***) und GORDAN (****) über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades veröffentlichten Arbeiten haben mich veranlasst, eine Untersuchung über denselben Gegenstand anzustellen, durch deren Ergebniss, wie mir scheint, eine nicht unbedeutende Vereinfachung der von Herrn GORDAN gegebenen Ausdrücke herbeigeführt wird. Während nämlich Herr GORDAN seiner Lösung die JERRARD-HERMITESCHEN Formeln zu Grunde legt, kann man mit Anwendung der von Herrn WEIERSTRASS eingeführten Function pu (*****) auf einem kürzeren Wege zum Ziel gelangen. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beehre ich mich im Nachfolgenden einen Auszug aus meiner Untersuchung mitzutheilen.

§ 1.

Es sei die elliptische Function pu definirt durch die Gleichung

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3,$$

während 2ω , $2\omega'$ ein Paar Fundamentalperioden dieser Function bezeichnen;

(*) Abdruck aus den Nachrichten der Göttinger K. Gesellschaft der Wissenschaften.

(**) KLEIN, *Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder*. Math. Annalen, Bd. 12, p. 503-560.

(***) BRIOSCHI, *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Math. Annalen, Bd. 13, p. 109-160.

(****) GORDAN, *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Math. Annalen, Bd. 13, p. 375-404.

(*****) Vrgl. BORCHARDT's Journal, Bd. 76, p. 21-33.

dann sind für $r=0, 1, 2, 3, 4$

$$f = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

$$f_r = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega' + 16r\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega' + 32r\omega}{5}\right)}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$f^{12} + \frac{10}{\Delta} f^6 - \frac{12g_2}{\Delta^2} f^2 + \frac{5}{\Delta^2} = 0, \quad (1)$$

wo

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

ist. Die Berechnung der Grössen $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ wird erleichtert durch eine Umformung, die man mit denselben vornehmen kann, und durch die man erhält

$$f = h^{\frac{4}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt[5]{\Pi\left(\frac{1-h^{10\nu}}{1-h^{2\nu}}\right)}, \quad (2)$$

$$f_r = -\varepsilon^{2r} h^{-\frac{4}{15}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt[5]{\Pi\left(\frac{1-h^{\frac{5}{\varepsilon^{8r\nu}}}}{1-h^{2\nu}}\right)},$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ist, und $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ berechnet werden kann, sobald man die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ der elliptischen Function kennt.

Entwickelt man $\Pi(1-h^{2\nu}) \cdot f$ und $\Pi(1-h^{2\nu}) \cdot f_r$ nach Potenzen von h , so findet man folgende Relationen bestätigt:

$$\left. \begin{aligned} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= f\sqrt{5}, \\ f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \varepsilon^4 f_4 &= 0, \\ f_0 + \varepsilon^4 f_1 + \varepsilon^3 f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon f_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

§ 2.

Setzt man jetzt

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(f^2 - f^2_r)(f^2_{r+2} - f^2_{r+3})(f^2_{r+4} - f^2_{r+1})]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

so werden y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades

$$\Delta^3 y^5 + 10 \Delta^2 y^3 + 45 \Delta y - 216 g_3 = 0. \quad (5)$$

Auf diese Gleichung lässt sich aber die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0 \quad (6)$$

zurückführen durch die Substitution

$$x^2 - u x + v = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2} = z, \quad (7)$$

wobei die Grössen $u, v, \alpha, \beta^2, \frac{g_2^3}{\Delta}$ durch Auflösung von nur zwei quadratischen Gleichungen bestimmt werden. Zunächst folgt aus

$$z = x^2 - u x + v,$$

dass z wieder die Wurzel einer Gleichung fünften Grades ist, in der man aber durch passende Bestimmung von u und v die Summe der Wurzeln und die Summe der Quadrate der Wurzeln gleich Null machen kann. Dies erreicht man indem man setzt

$$\left. \begin{aligned} 5v &= -Au - A^2 + 2B, \\ (2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + 2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Man findet also für u und v die Werthe durch Auflösung einer quadratischen Gleichung und erhält für z die Gleichung

$$z^5 + 5l z^2 - 5m z + n = 0, \quad (9)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} 5l &= -10v^3 - Cu^3 + (-AC + 4D)u^2 + (3AD - BC - 5E)u - 2AE + 2BD - C^2, \\ 5m &= 5v^4 + 10lv - Du^4 + (-AD + 5E)u^3 + (4AE - BD)u^2 + \\ &\quad (3BE - CD)u + 2CE - D^2, \\ n &= -v^5 - 5lv^2 + 5mv - E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dieselbe Form wie bei Gleichung (9) erhält man, wenn man den andern, aus Gleichung (7) sich ergebenden Werth von z , nämlich

$$z = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2}$$

mit Gleichung (5) zusammenstellt und y eliminirt. Damit nun aber völlige Uebereinstimmung mit Gleichung (9) stattfindet, müssen α , β und $\frac{g_2^3}{\Delta}$ so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 8\Delta^2\alpha^3 - 72\Delta\alpha\beta^2 + 216g_3(\Delta\alpha^2\beta - \beta^3) &= 12^3g_2^3\Delta l, \\ \Delta^2\alpha^4 + 18\Delta\alpha^2\beta^2 - 27\beta^4 + 216g_3\alpha\beta^3 &= 12^3g_2^3\Delta m, \\ \Delta^3\alpha^5 + 10\Delta^2\alpha^3\beta^2 + 45\Delta\alpha\beta^4 + 216g_3\beta^5 &= 12^3g_2^3\Delta^2 n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

befriedigt werden. Dies geschieht, wenn man α aus der quadratischen Gleichung

$$(l^4 - lmn + m^3)\alpha^2 + (11l^3m + ln^2 - 2m^2n)\alpha - 27l^3n + 64l^2m^2 - mn^2 = 0 \quad (12)$$

berechnet und in die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \pm 12g_2 &= l\alpha^2 + 3m\alpha - 3n, \\ \pm \Delta &= l^2[(ln - m^2)\alpha + mn], \\ \beta^2 &= \pm l^3[l^2\alpha^2 + 11lm\alpha + 64m^2 - 27ln] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

einsetzt.

§ 3.

Zur vollständigen Auflösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades sind nach dem Vorhergehenden also nur folgende Rechnungsoperationen nöthig:

1) Man berechne aus einer quadratischen Gleichung (8) die Grösse u , dann geben die Gleichungen (8) und (10) unmittelbar die Werthe von v , l , m und n .

2) Sodann berechne man aus einer zweiten quadratischen Gleichung (12) α und setze den gefundenen Werth in die Formeln (13) ein.

3) Man berechne aus $\frac{g_2^3}{\Delta}$ die Grösse $h = e^{\frac{\omega \pi i}{\omega}}$ (Vergl. H. BRUNS, *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung*. Dorpat, 1875).

4) Man bestimme f und $f_r (r=0, 1, 2, 3, 4)$ durch die Gleichungen (2)

$$f = h^{\frac{4}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt[5]{5} \Pi \left(\frac{1 - h^{40\nu}}{1 - h^{2\nu}} \right)$$

$$f_r = -\epsilon^{2r} h^{-\frac{4}{45}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \Pi \left(\frac{1 - h^{\frac{2\nu}{5} \epsilon^{8r\nu}}}{1 - h^{2\nu}} \right),$$

berechne

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(f^2 - f^2_r)(f^2_{r+2} - f^2_{r+3})(f^2_{r+4} - f^2_{r+1})]^{\frac{1}{2}}$$

und daraus

$$z_r = -\frac{\alpha + \beta y_r}{3 + \Delta y^2_r},$$

dann sind die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 der allgemeinen Gleichung fünften Grades (6), wie unmittelbar aus Gleichung (7) folgt, für $r=0, 1, 2, 3, 4$

$$x_r = \frac{-E + (v - z_r)(u^3 + Au^2 + Bu + C) - (v - z_r)^2(2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D - (v - z_r)(3u^2 + 2Au + B) + (v - z_r)^2}.$$
