

## Über die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes.

Von Dr. Emil Kohl in Wien.

Die Arbeiten über die Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen lassen sich je nach ihrem theoretischen Ausgangspunkt in mehrere Gruppen eintheilen. So gehen die Theorien von Fresnel<sup>1)</sup>, Neumann<sup>2)</sup> und Cauchy<sup>3)</sup> von der Vorstellung von Äthertheilchen aus, durch deren Verschiebung Kräfte geweckt werden, welche nicht mehr wie bei isotropen Medien auch in doppelbrechenden Krystallen nach jeder Richtung hin mit jener der Verschiebung zusammenfallen. Stefan<sup>4)</sup> gewinnt die Gleichungen der Doppelbrechung durch die Betrachtung, dass die zur Verschiebung eines Äthertheilchens nöthige Arbeit eine Function der Verschiebungsrichtung ist. Diese Darstellungen besitzen das charakteristische Merkmal, dass keine besondere Annahme über die Beschaffenheit des lichtleitenden Mediums, sondern nur über den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den durch sie geweckten Kräften gemacht wird.

Arbeiten anderer Art sind jene, welche den Begriff einer Arbeitsfunction oder Potentials einführen, also einer Function, deren Ableitungen nach den Unbekannten die wirkenden Kräfte liefern,

<sup>1)</sup> A. Fresnel, Mémoire sur la double réfraction. Mémoires de l'Acad. des sciences, t. VII.

<sup>2)</sup> F. E. Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. Pogg. Ann. Bd. 25. — Theoretische Untersuchungen der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien reflectiert und gebrochen wird. Abhandlg. d. Berliner Akademie, Bd. 35.

<sup>3)</sup> A. Cauchy, Mémoire sur la théorie de la lumière. Mémoires de l'Acad. d. sciences t. X. — Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction. Mémoires de l'Acad. d. sciences, t. XVIII.

<sup>4)</sup> J. Stefan, Theorie der doppelten Brechung. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie. Bd. 50 (II).

wie dies von Green<sup>1)</sup>, M. Cullagh<sup>2)</sup> und Kirchhoff<sup>3)</sup> geschah. Da sich dieses Potential als das in der Elasticitätstheorie wohl bekannte „Potential der inneren Kräfte“ deuten lässt, leiten diese Arbeiten sachgemäß zur Elasticitätstheorie des Lichtes hinüber, welche von Lamé<sup>4)</sup> in seinem grundlegenden Werke eine sehr eingehende Behandlung erfuhr. Es ist nun zu bemerken, dass diese Arbeiten zur Ableitung der experimentell sicher gestellten Thatsachen bereits gewisse Beziehungen zwischen den auftretenden Constanten voraussetzen müssen, welche bereits bestimmten Eigenschaften des Mediums entsprechen. Weitere Ausbildung erfuhren diese Betrachtungen durch Volkmann<sup>5)</sup>, Lévy<sup>6)</sup> und vor allem durch v. Lang<sup>7)</sup>, der in seinem Lehrbuche<sup>8)</sup> eine umfassende Darstellung der geometrischen Gesetze der Doppelbrechung niedergelegt hat. Gleichsam als Bindeglied könnte eine Arbeit von Stefan<sup>9)</sup> betrachtet werden, worin derselbe unter Anwendung von Methoden, welche denen der Elasticitätstheorie analog sind, die Gleichungen der Lichtbewegung in doppelbrechenden Medien auf dem von Green eingeschlagenen Wege ableitet und ihre formelle Übereinstimmung sowohl mit den Green'schen wie mit den Cauchy'schen Gleichungen darthut.

Eine dritte Kategorie von Arbeiten sieht den Hauptgrund der Refractionerscheinungen in der Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die Mitbewegung der körperlichen Massentheilchen. Begründet durch Sellmeier<sup>10)</sup> und v. Helmholtz<sup>11)</sup> wurde diese

<sup>1)</sup> G. Green, On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of two non Crystallized Media. Transact. of the Cambridge Philos. Society, Vol. VII, part I. — On the Propagation of Light in Crystallized Media. Vol. VII, part II.

<sup>2)</sup> J. M. Cullagh, On the Laws of Crystalline Reflection and Refraction Transact. of the R. Irish Academy, Vol. XVI.

<sup>3)</sup> G. Kirchhoff, Über die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel. Abhandlung der Berliner Akademie, 1876.

<sup>4)</sup> G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1866. 17<sup>ème</sup>—25<sup>ème</sup> leçon.

<sup>5)</sup> P. Volkmann, Einfache Ableitung des Green'schen Ausdrucks für das Potential des Lichtäthers. Wiedemanns Ann. Bd. 35.

<sup>6)</sup> M. Lévy, Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatible avec la surface de l'onde de Fresnel. Comptes rendus 105.

<sup>7)</sup> V. v. Lang, Über die Gesetze der Doppelbrechung. Sitzungsbericht der Wiener Akademie, Bd. 43. — Zur Theorie der Doppelbrechung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 73. (II). — Bemerkungen zu Cauchy Theorie der Doppelbrechung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 81 (II).

<sup>8)</sup> V. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik, Braunschweig, 187.

<sup>9)</sup> J. Stefan, Allgemeine Gleichungen für oscillatorische Bewegungen Pogg. Ann. Bd. 102.

<sup>10)</sup> W. Sellmeier, Über die durch Ätherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien. Pogg. Ann. Bd. 14 Bd. 147.

<sup>11)</sup> H. v. Helmholtz, Zur Theorie der anomalen Dispersion. Pogg. Ar Bd. 154.

Theorie hauptsächlich von Ketteler,<sup>1)</sup> Lommel<sup>2)</sup> und Voigt<sup>3)</sup> ausgebildet, welch letzterer unter gewissen Annahmen der in seinen Gleichungen auftretenden Constanten zum Green'schen Potentialausdruck gelangt.<sup>4)</sup>

Die vierte Kategorie umfasst endlich die auf den Principien der elektromagnetischen Lichttheorie fußenden zahlreichen Arbeiten der neuesten Zeit. Eine einheitliche Darstellung dieser Theorie gibt Tumlriz in seinem Lehrbuche.<sup>5)</sup> Da sich, wie Helm<sup>6)</sup> gezeigt hat, die Maxwell'schen Gleichungen in der ihnen von Hertz gegebenen Form durch entsprechende Umformung der Ausdrücke der Elasticitätstheorie auch als die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers deuten lassen, so ist wenigstens formell eine Beziehung zur elastischen Theorie des Lichtes gegeben, wiewohl diese Arbeit zunächst nur ein isotropes Medium voraussetzt.

Während nun alle diese Theorien die experimentell beglaubigten Thatsachen der Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen vollkommen befriedigend darzustellen vermögen, herrscht bekanntlich in der Frage nach der Schwingungsrichtung der beiden Strahlen gegenüber der Polarisationssebene Meinungsverschiedenheit. Es hat nun Drude<sup>7)</sup> in einer Discussion dieser verschiedenen Theorien auf den höchst bemerkenswerten Umstand hingewiesen, dass es bei jeder Lichtbewegung zwei Vektoren gibt, wovon der eine, von ihm als potentieller Vector genannte und mit

$$u, v, w$$

bezeichnete den Fresnel'schen Formeln, der andere, als kinetischer Vector in der Form

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

dargestellte, den Neumann'schen Formeln genügt. Definiert man also als Licht die periodischen Änderungen des potentiellen Vectors (resp. in der elektromagnetischen Lichttheorie jene der elektrischen Kraft), so befolgt es die Fresnel'schen Gesetze, deutet man dasselbe aber als diejenigen des kinetischen Vectors (resp. der

<sup>1)</sup> E. Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig, 1885.

<sup>2)</sup> E. Lommel, Theorie der Absorption und Fluorescenz. — Theorie der normalen und anomalen Dispersion. Wiedemanns Ann. Bd. 3. — Theorie der doppelten Brechung. Wiedemanns Ann. Bd. 4.

<sup>3)</sup> W. Voigt, Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media. Wiedemanns Ann. Bd. 19.

<sup>4)</sup> W. Voigt, Über die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger krystallinischer Medien. Wiedemanns Ann. Bd. 24.

<sup>5)</sup> O. Tumlriz, Die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Leipzig, 1883.

<sup>6)</sup> G. Helm, Die Fortpflanzung der Energie durch den Äther. Wiedemanns Ann. Bd. 47.

<sup>7)</sup> P. Drude, Inwiefern genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik? Göttinger Nachrichten 1892.

magnetischen Kraft), so erhält man jene von Neumann. Die Bedeutung der Vektoren ist also in beiden Theorien gegenseitig vertauscht.

In jüngster Zeit hat Boltzmann gelegentlich einer populären Besprechung der Röntgen-Strahlen den Gedanken ausgesprochen, dass sich der Lichtäther gleichsam unter dem Bilde einer gelatinösen, sulzähnlichen Masse vorstellen lasse, soweit die Lichtschwingungen in Betracht kommen. Die Haupteigenschaft eines solchen Mediums ist die ungemein leichte elastische Verschiebbarkeit bei nahezu gänzlichem Mangel an Compressibilität. Diesbezüglich hat bereits Volkmann in der oben citierten Arbeit gezeigt, dass sich aus der Eigenschaft der Incompressibilität des Mediums eine solche Beziehung zwischen den Constanten derselben ergibt, wie sie der Ausdruck für das Green'sche Potential fordert.

Die vorliegende Arbeit bildet die mathematische Formulierung dieses Gedankens. Es wird hier von der Annahme ausgegangen, dass das Licht (resp. die Wirkungen desselben) den elastischen Verschiebungen eines incompressiblen Mediums seine Entstehung verdankt und dass der periodisch sich ändernde Vector, welcher den „Lichtschwingungen“ entspricht, identisch mit diesen ist. Mit Rücksicht darauf werden die Grundgleichungen der Elasticitätstheorie unter der Voraussetzung untersucht, dass das Medium vollkommen elastisch und vollkommen incompressibel ist. Nimmt man hiebei an, dass durch die Erfahrung die Richtigkeit der Fresnel'schen Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  einer Planwelle in Richtung ihrer Normalen (definiert durch ihre Richtungswinkel  $\lambda, \mu, \nu$ ) in der Gestalt

$$\frac{\cos^2 \lambda}{a^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \mu}{b^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \nu}{c^2 - v^2} = 0$$

bewahrheitet ist, so lassen sich hieraus Schlüsse auf die Constanten der Elasticitätsgleichungen ziehen, welche gewisse charakteristische Eigenschaften dieses Mediums näher bestimmen lassen.

Unter Zugrundelegung des Vorganges von Fresnel sollen die Untersuchungen auf Planwellen beschränkt und vorausgesetzt werden, dass deren Einhüllende die von einem Erregungspunkt ausgehende Wellenfläche darstellt.

Der Gang der Untersuchungen wird demnach der sein, das zunächst die Gleichungen für die Wellenbewegungen in einem beliebigen anisotropen elastischen Medium aufgestellt und sodann an den Grenzfall, dass die cubische Dilatation unendlich klein wird ausgedehnt werden. Es sei bemerkt, dass hiebei Glieder, welche die cubische Dilatation enthalten, nicht ohne weiters weggelassen werden dürfen, obwohl dieselbe gegen Null convergiert, da gleich zeitig damit Glieder multiplicativ verbunden sind, welche den Factor des cubischen Compressionscoefficienten enthalten, der unendlich groß wird.

Die Untersuchungen selbst werden sich auf die beiden bekannten Grundannahmen, dass entweder die Elasticität oder dass die Dichte nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, beziehen und die sich hieraus ergebenden Consequenzen näher erörtert werden.

### I. Medium mit ungleicher Elasticität und gleicher Dichte.

Es werde ein Medium vorausgesetzt, welches nach drei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen, die zugleich als Coordinatenachsen gewählt werden sollen, verschiedene Elasticität besitzen möge. Man denke sich aus demselben einen Würfel mit zu den drei Achsen parallelen Seiten herausgeschnitten und auf ein paralleles Flächenpaar eine normale Zugkraft  $P$  wirken. Diese Kraft bewirkt einerseits eine Verlängerung in der Richtung der in sie fallenden Kante, anderseits Verkürzungen der beiden senkrecht darauf stehenden Kanten, welche wegen der Verschiedenheit der Elasticität ebenfalls verschieden sein werden. Die resultierenden Verschiebungen werden durch folgendes Schema gegeben sein:

		Zugkraft $P$ wirkt parallel		
		der $X$ -Achse	$Y$ -Achse	$Z$ -Achse
Es wird verlängert die	$X$ -Kante um	$\frac{P}{E_x}$	$-\frac{q_x P}{E_y}$	$-\frac{r_x P}{E_z}$
	$Y$ - " "	$-\frac{p_y P}{E_x}$	$\frac{P}{E_y}$	$-\frac{r_y P}{E_z}$
	$Z$ - " "	$-\frac{p_z P}{E_x}$	$-\frac{q_z P}{E_y}$	$\frac{P}{E_z}$

Hierin bedeutet  $E_x, E_y, E_z$  den entsprechenden Elasticitäts-coefficienten nach je einer Achse, die  $p, q, r$  sind Größen, die der Poisson-Wertheimschen Constante bei homogenem Medium analog sind. Lässt man auf alle Flächen des Würfels normale Zugkräfte  $P$  wirken, so hat die entstehende räumliche Dilatation den Wert

$$\Delta V = P \left[ \frac{1}{E_x} (1 - p_y - p_z) + \frac{1}{E_y} (1 - q_x - q_z) + \frac{1}{E_z} (1 - r_x - r_y) \right].$$

Denkt man sich ferner auf die Flächen des Würfels Schubkräfte wirken, welche in die Richtung der entsprechenden Fläche fallen, so werden je zwei Kanten, die früher einen rechten Winkel einschlossen, um einen gewissen Winkel verdreht erscheinen. Dieser wird für sehr kleine Verdrehungen proportional der wirkenden Schubkraft sein, wegen der ungleichen Elasticität werden aber je nach der Richtung dieser Kräfte drei Proportionalitätsconstante  $G, H, J$  auftreten.

Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich leicht die Bewegungsgleichungen für elastische Schwingungen aufstellen, wobei die von Clebsch<sup>1)</sup> angewendete Methode zugrunde gelegt werden soll. Es ist, sehr kleine Schwingungen mit den Componenten  $\xi, \eta, \zeta$  vorausgesetzt:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{X_x}{E_x} - q_x \frac{Y_y}{E_y} - r_x \frac{Z_z}{E_z}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{Y_y}{E_y} - p_y \frac{X_x}{E_x} - r_y \frac{Z_z}{E_z}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{Z_z}{E_z} - p_z \frac{X_x}{E_x} - q_z \frac{Y_y}{E_y}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} X_y = Y_x = J \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ Y_z = Z_y = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \\ X_z = Z_x = H \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Hierin sind  $X_x, Y_y, Z_z$  die normalen Druckkräfte, die  $X_y = Y_x, Y_z = Z_y, X_z = Z_x$  die seitlichen Verschiebungskräfte.

Setzt man die Determinante

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1, & -q_x, & -r_x \\ -p_y, & 1, & -r_y \\ -p_z, & -q_z, & 1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

ferner deren Unterdeterminanten

$$(4) \quad \begin{cases} 1 - q_z r_y = a_{11}, & q_x + q_z r_x = a_{12}, & r_x + r_y q_x = a_{13}, \\ p_y + p_z r_y = a_{21}, & 1 - p_z r_x = a_{22}, & r_y + r_x p_y = a_{23}, \\ p_z + p_y q_z = a_{31}, & q_z + q_x p_z = a_{32}, & 1 - p_y q_x = a_{33}, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$(5) \quad \begin{cases} X_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{E_x}{\Delta} a_{11} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{E_x}{\Delta} a_{12} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{E_x}{\Delta} a_{13}, \\ Y_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{E_y}{\Delta} a_{21} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{E_y}{\Delta} a_{22} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{E_y}{\Delta} a_{23}, \\ Z_z = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{E_z}{\Delta} a_{31} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{E_z}{\Delta} a_{32} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{E_z}{\Delta} a_{33}. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig. §§. 1 und 1'

Zwischen diesen Constanten bestehen<sup>1)</sup> gewisse nothwendige Beziehungen; es ist nämlich

$$(6) \quad \begin{cases} E_x a_{12} = E_y a_{21}, \\ E_x a_{13} = E_z a_{31}, \\ E_y a_{23} = E_z a_{32}. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

führt man obige Werte ein, so folgt, wenn der Kürze wegen

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{E_x}{\Delta} a_{11} = a, & \frac{E_x}{\Delta} a_{12} = \frac{E_y}{\Delta} a_{21} = b, \\ \frac{E_y}{\Delta} a_{22} = d, & \frac{E_x}{\Delta} a_{13} = \frac{E_z}{\Delta} a_{31} = c, \\ \frac{E_z}{\Delta} a_{33} = f, & \frac{E_y}{\Delta} a_{23} = \frac{E_z}{\Delta} a_{32} = e \end{cases}$$

gesetzt wird und  $\rho$  die Dichte des Mediums bedeutet:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \\ &= \left( a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + J \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + (b + J) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + (c + H) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \\ &= (b + J) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \left( J \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + (e + G) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \\ &= (c + H) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + (e + G) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + \left( H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + f \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Aus der Form der Determinante (3) und der Unterdeterminante (4) ergeben sich weiters die Beziehungen

<sup>1)</sup> Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig. §. 16.

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} af - c^2 = \frac{E_x E_z}{\Delta}, \\ df - e^2 = \frac{E_y E_z}{\Delta}, \\ ad - b^2 = \frac{E_x E_y}{\Delta}, \\ ae - bc = \frac{E_x E_y}{\Delta} r_y = \frac{E_x E_z}{\Delta} q_z, \\ bf - ce = \frac{E_x E_z}{\Delta} q_x = \frac{E_y E_z}{\Delta} p_y, \\ dc - be = \frac{E_y E_z}{\Delta} p_z = \frac{E_x E_y}{\Delta} r_x. \end{array} \right.$$

Hieraus folgen die Beziehungsgleichungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x r_x = E_z p_z, \\ E_y p_y = E_x q_x, \\ E_y r_y = E_z q_z, \end{array} \right.$$

welche, wie durch einfache Rechnungen nachgewiesen werden kann, mit den Gleichungen (6) übereinstimmen.

Für incompressible Medien ist speciell

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \Delta = 0, \\ \lim (1 - p_y - p_z) = 0, \\ \lim (1 - q_x - q_z) = 0, \\ \lim (1 - r_x - r_y) = 0, \end{array} \right.$$

da die räumliche Dilatation für jede der Kräfte  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z$  verschwinden muss. Ferner sei darauf hingewiesen, dass beim Grenzübergange

$$(12) \quad \lim a = \lim b = \lim c = \lim d = \lim e = \lim f = \frac{x}{\Delta}$$

wird, wobei diese Größen unendlich groß werden, wie sich leicht aus Gleichungen (6), (7) und (11) ergibt.

Es sollen nun die in einem solchen Medium möglichen ebener Wellen näher untersucht werden.

Denkt man sich auf einer unbegrenzten Wellenebene, deren Normale die Richtungswinkel  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , besitzen möge, zu einander parallele Schwingungen mit den Richtungswinkeln  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  hervorgerufen und geht diese Ebene zur Zeit  $t=0$  durch den Coordinatenanfangspunkt, so wird die Gleichung dieser Wellenebene zu Zeit  $t$  lauten:



$$v t = x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu,$$

wenn man voraussetzt, dass sie sich mit der constanten Geschwindigkeit  $v$  parallel zu sich selbst verschiebt. Die Componenten der Schwingungen können daher in der Form geschrieben werden:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \cos \varphi \\ \eta = \cos \psi \\ \zeta = \cos \chi \end{array} \right\} \cdot \sin 2\pi n \left( t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{v} \right).$$

Setzt man die Werte der Derivierten von  $\xi, \eta, \zeta$  aus (13) in die Gleichungen (8) ein, so erhält man folgendes System:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi [a \cos^2 \lambda + J \cos^2 \mu + H \cos^2 \nu - \rho v^2] + \\ + \cos \psi \cos \lambda \cos \mu [b + J] + \cos \chi \cos \lambda \cos \nu [c + H] = 0, \\ \cos \varphi \cos \mu \cos \lambda [b + J] + \cos \psi [J \cos^2 \lambda + d \cos^2 \mu + \\ + G \cos^2 \nu - \rho v^2] + \cos \chi \cos \mu \cos \nu [e + G] = 0, \\ \cos \varphi \cos \nu \cos \lambda [c + H] + \cos \psi \cos \nu \cos \mu [e + G] + \\ + \cos \chi [H \cos^2 \lambda + G \cos^2 \mu + f \cos^2 \nu - \rho v^2] = 0. \end{array} \right.$$

Damit dieses System nach  $\cos \varphi, \cos \psi, \cos \chi$  eine Lösung besitze, ist hinreichend und nothwendig, dass die Determinante

$$(15) \quad \left| \begin{array}{ccc} [a \cos^2 \lambda + J \cos^2 \mu + H \cos^2 \nu - \rho v^2], & [b + J] \cos \lambda \cos \mu, & [c + H] \cos \lambda \cos \nu, \\ [b + J] \cos \mu \cos \lambda, & [J \cos^2 \lambda + d \cos^2 \mu + G \cos^2 \nu - \rho v^2], & [e + G] \cos \mu \cos \nu, \\ [c + H] \cos \nu \cos \lambda, & [e + G] \cos \nu \cos \mu, & [H \cos^2 \lambda + G \cos^2 \mu + f \cos^2 \nu - \rho v^2] \end{array} \right| = 0$$

wird. Hieraus folgt für  $v^2$  eine Gleichung dritten Grades, es sind also im allgemeinen drei verschiedene Schwingungen möglich, welche sich in ebenen Wellen im Körper fortpflanzen.

Setzt man zur Abkürzung

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a \cos^2 \lambda + J \cos^2 \mu + H \cos^2 \nu] = A, \\ [b + J] \cos \lambda \cos \mu = B, \\ [c + H] \cos \lambda \cos \nu = C, \\ [J \cos^2 \lambda + d \cos^2 \mu + G \cos^2 \nu] = D, \\ [e + G] \cos \mu \cos \nu = E, \\ [H \cos^2 \lambda + G \cos^2 \mu + f \cos^2 \nu] = F, \end{array} \right.$$

so kann (15) in der Gestalt

$$(\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2 [A + D + F] + (\rho v^2) [AF + DF + AD - E^2 - B^2 - C^2] - [2BCE + ADF - AE^2 - FB^2 - DC^2] = 0,$$

oder, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ B, & D, & E \\ C, & E, & F \end{vmatrix} = (\Delta),$$

die Unterdeterminante von  $A, D, F$  aber  $= (A), (D), (F)$  gesetzt werden, auch in der Form

$$(17) (\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2 [A + D + F] + (\rho v^2) [(A) + (D) + (F)] - (\Delta) = 0$$

dargestellt werden.

Im folgenden soll nun der Fall eines elastischen incompressiblen Mediums näher untersucht werden, für welches die definierenden Gleichungen (11) und (12) gelten. Dann werden  $a, b, c, d, e, f$  und alle durch  $\Delta$  dividierten Glieder unendlich; von den Größen  $G, H, J$  als den Coefficienten der Schubelasticität möge aber vorausgesetzt werden, dass sie auch beim Übergange zu einem incompressiblen Medium endlich bleiben.

Bevor die Untersuchungen weiter geführt werden, ist es nöthig, einige Bemerkungen über solche Gleichungen vorauszuschicken, welche die Form

$$x^3 - [L\omega + P]x^2 + [M\omega + Q]x - [N\omega + R] = 0$$

besitzen, wenn darin

$$\lim \omega = \infty,$$

$L, M, N$  und  $P, Q, R$  endlich bleiben. Sie besitzen offenbar eine Wurzel vom Grade  $\lim \omega$  und zwei im allgemeinen endliche Wurzeln, wie die Betrachtung der Coefficienten zeigt. Diese letztere können dadurch bestimmt werden, dass man sich für  $x$  eine solche substituirt denkt und nun durch  $\lim \omega$  dividiert. Man erhält so zur Bestimmung der beiden endlichen Wurzeln die Gleichung

$$Lx^2 - Mx + N = 0,$$

deren Wurzeln mit  $x_1, x_2$  bezeichnet werden mögen. Man kann dann stets drei Größen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Omega \quad (\lim \varepsilon_1 = 0, \lim \varepsilon_2 = 0, \Omega \text{ endlich})$$

so bestimmen, dass die Werte

$$x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, L \lim \omega + \Omega$$

obige Gleichung bis auf unendlich kleines erfüllen. Es kann nämlich unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder gese werden

$$L \lim \omega + \Omega + x_1 + x_2 = L \lim \omega + P,$$

$$L \lim \omega (x_1 + x_2) + L \lim \omega (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \Omega = M \lim \omega + Q$$

$$L \lim \omega x_1 x_2 + L \lim \omega (x_2 \varepsilon_1 + x_1 \varepsilon_2) + x_1 x_2 \Omega = N \lim \omega + R.$$

Hieraus folgt leicht die Bestimmung von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Omega$ . Da nun die wahren Wurzelwerte sich nur um unendlich kleine Größen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  von den aus obiger quadratischer Gleichung gefundenen unterscheiden, können letztere an Stelle der ersteren als Wurzeln betrachtet werden.

Gleichung (17) gehört in die Gruppe der eben bezeichneten; obwohl für  $\lim \Delta = 0$  scheinbar Glieder von der Ordnung  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$  und  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^3$  auftreten, reducieren sich dieselben durch Beachtung der Gleichungen (9) und (10) auf Glieder von der Ordnung  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ . Betrachtet man  $\lim \omega$  in den eben angestellten Erörterungen durch  $\lim \frac{1}{\Delta}$  gegeben und berücksichtigt die Beziehungen (12), so erhält man schließlich durch Division mit  $\lim \frac{z}{\Delta} = \lim (a \cos^2 \lambda + d \cos^2 \mu + f \cos^2 \nu)$  für  $(\rho v^2)$  folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} & (\rho v^2)^2 - (\rho v^2) [(H + J) \cos^4 \lambda + (J + G) \cos^4 \mu + (H + G) \cos^4 \nu \\ & + \left( H + G - 2J + \frac{E_x E_y}{x} \right) \cos^2 \lambda \cos^2 \mu + \left( J + G - 2H + \frac{E_x E_z}{x} \right) \cos^2 \lambda \cos^2 \nu \\ & + \left( H + J - 2G + \frac{E_y E_z}{x} \right) \cos^2 \mu \cos^2 \nu] + [HJ \cos^6 \lambda + GJ \cos^6 \mu \\ & + GH \cos^6 \nu + \left( GJ - 2HJ + \frac{E_x E_y}{x} H \right) \cos^4 \lambda \cos^2 \mu + (GH - 2HJ \\ (18) \quad & + \frac{E_x E_z}{x} J) \cos^4 \lambda \cos^2 \nu + (GH - 2GJ + \frac{E_y E_z}{x} J) \cos^4 \mu \cos^2 \nu \\ & + \left( HJ - 2GH + \frac{E_y E_z}{x} H \right) \cos^2 \mu \cos^4 \nu + \left( HJ - 2GJ + \frac{E_x E_y}{x} G \right) \cos^4 \mu \cos^2 \lambda \\ & + \left( HJ - 2GH + \frac{E_x E_z}{x} G \right) \cos^2 \lambda \cos^4 \nu + 2 \left( JG + JH + HJ - \right. \\ & \left. - r_y \frac{E_x E_y}{x} G - q_x \frac{E_x E_z}{x} J - p_z \frac{E_y E_z}{x} H + \frac{E_x E_y E_z}{2x} \right) \cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu] = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann auch nach einigen einfachen Rechnungen so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & (\rho v^2)^2 - (\rho v^2) \left[ G(\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + H(\cos^2 \lambda \cos^2 \nu) + J(\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu) - \right. \\
 & - 4 \left( G - \frac{E_y E_z}{4x} \right) \cos^2 \mu \cos^2 \nu - 4 \left( H - \frac{E_x E_z}{4x} \right) \cos^2 \lambda \cos^2 \nu \\
 & - 4 \left( J - \frac{E_x E_y}{4x} \right) \cos^2 \lambda \cos^2 \mu \left. \right] + [HJ \cos^2 \lambda + GJ \cos^2 \mu + GH \cos^2 \nu \\
 (18') & - 4G \left( J - \frac{E_x E_y}{4x} \right) \cos^2 \lambda \cos^4 \mu - 4J \left( G - \frac{E_y E_z}{4x} \right) \cos^4 \mu \cos^2 \nu \\
 & - 4H \left( J - \frac{E_x E_y}{4x} \right) \cos^4 \lambda \cos^2 \mu - 4J \left( H - \frac{E_x E_z}{4x} \right) \cos^4 \lambda \cos^2 \nu \\
 & - 4H \left( G - \frac{E_y E_z}{4x} \right) \cos^2 \mu \cos^4 \nu - 4G \left( H - \frac{E_x E_z}{4x} \right) \cos^2 \lambda \cos^4 \nu \\
 & - (2E_x E_y r_y G + 2E_x E_z q_x J + 2E_y E_z p_x H - E_x E_y E_z) \cdot \\
 & \qquad \qquad \qquad \cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu] =
 \end{aligned}$$

Die Berechnung von (18) ist hiebei so vorzunehmen, dass zunächst die Glieder der Gleichung (17) ganz allgemein entwickelt, hierauf mittelst (9) und (10) die Reduction auf Größen von der Ordnung  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)$  durchgeführt und schließlich nach erfolgter Multiplikation mit  $\Delta$  (resp. Division durch  $\frac{1}{\Delta}$ ) die Beziehungen (11) und (12) angewendet werden.

Mittelst der Gleichung (11) und (12) lassen sich zunächst die Werte von  $p, q, r$  in  $E_x, E_y, E_z$  ausdrücken; setzt man

$$E_y E_z = m$$

$$E_x E_z = n$$

$$E_x E_y = o$$

$$S = 2mo + 2mn + 2no - m^2 - n^2 - o^2,$$

so ergibt sich  $x = \frac{4E_x E_y E_z}{S}$ ,

$$p_y = \frac{E_y E_z + E_x E_z - E_x E_y}{2E_y E_z} = \frac{m + n - o}{2m},$$

$$p_z = \frac{E_y E_z + E_x E_y - E_x E_z}{2E_y E_z} = \frac{m + o - n}{2m},$$

$$q_x = \frac{E_y E_z + E_x E_z - E_x E_y}{2E_x E_z} = \frac{m + n - o}{2n},$$

$$q_z = \frac{E_x E_z + E_x E_y - E_y E_z}{2E_x E_z} = \frac{n + o - m}{2n},$$

$$r_x = \frac{E_y E_z + E_x E_y - E_x E_z}{2E_x E_y} = \frac{m + o - n}{2o},$$

$$r_y = \frac{E_x E_z + E_x E_y - E_y E_z}{2E_x E_y} = \frac{n + o - m}{2o}.$$

Nach Fresnel ist nun die Gleichung, welche die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  als Function der Richtungscosinus der Wellenebene definiert, von der Form

$$\frac{\cos^2 \lambda}{v^2 - v_x^2} + \frac{\cos^2 \mu}{v^2 - v_y^2} + \frac{\cos^2 \nu}{v^2 - v_z^2} = 0,$$

oder

$$(19) \quad v^4 - v^2 \left[ (v_y^2 + v_z^2) \cos^2 \lambda + (v_x^2 + v_z^2) \cos^2 \mu + (v_x^2 + v_y^2) \cos^2 \nu \right] \\ + \left[ v_y^2 v_z^2 \cos^2 \lambda + v_x^2 v_z^2 \cos^2 \mu + v_x^2 v_y^2 \cos^2 \nu \right] = 0^1)$$

und wird als Elasticitätsfläche bezeichnet;  $v_x, v_y, v_z$  bedeuten hiebei gewisse Geschwindigkeiten nach den Hauptachsen für die Systeme

$$\cos \lambda = 1, 0, 0,$$

$$\cos \mu = 0, 1, 0,$$

$$\cos \nu = 0, 0, 1.$$

Es entsteht nun die Frage, ob durch gewisse Annahmen bezüglich  $G, H, J$  in dem vorliegenden Medium Schwingungen möglich sind, welche genau zu denselben Formeln führen wie jene bei der Doppelbrechung des Lichtes.

Aus Gleichung (18') erkennt man nun, dass dies dann der Fall ist, wenn die Constanten  $G, H, J$  die Werte haben

$$(20) \quad \begin{cases} G = \frac{E_y E_x}{4\kappa} = \frac{m}{4\kappa}, \\ H = \frac{E_x E_z}{4\kappa} = \frac{n}{4\kappa}, \\ J = \frac{E_x E_y}{4\kappa} = \frac{o}{4\kappa}, \end{cases}$$

da dann auch der mit dem Factor  $\cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu$  behaftete Ausdruck  $2 E_x E_y r_y G + 2 E_x E_z q_x H + 2 E_y E_z p_z H - E_x E_y E_z$  in (18') identisch verschwindet.

Durch Division von (18') durch  $\rho^2$  nimmt dieselbe die Gestalt

$$(21) \quad (v^2)^2 - (v^2) \left[ \frac{G}{\rho} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + \frac{H}{\rho} (\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu) + \frac{J}{\rho} (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu) \right] \\ + \left[ \frac{G H}{\rho \rho} \cos^2 \nu + \frac{G J}{\rho \rho} \cos^2 \mu + \frac{H J}{\rho \rho} \cos^2 \lambda \right] = 0,$$

oder

$$(21') \quad \frac{\cos^2 \lambda}{v^2 - \frac{G}{\rho}} + \frac{\cos^2 \mu}{v^2 - \frac{H}{\rho}} + \frac{\cos^2 \nu}{v^2 - \frac{J}{\rho}} = 0$$

<sup>1)</sup> Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. I. B., 154 Cap.

an, woraus sich für die axialen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Werte ergeben:

$$v_x = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

$$v_y = \sqrt{\frac{H}{\rho}},$$

$$v_z = \sqrt{\frac{J}{\rho}},$$

und zwar gilt das Schema:

Wert von $\cos \lambda$	$\cos \mu$	$\cos \nu$	axiale Geschwindigkeiten
1	0	0	$v_y, v_z$ nach der X-Achse
0	1	0	$v_x, v_z$ „ „ Y- „
0	0	1	$v_x, v_y$ „ „ Z- „

Aus (20) folgt eine einfache Beziehung für  $G, H, J$ :

$$G:H:J = \frac{1}{E_x} : \frac{1}{E_y} : \frac{1}{E_z}.$$

Durch (9), (10) und (20) reduciert sich also die Anzahl der Constanten in einem vollkommen elastischen und vollkommen incompressiblen Medium, welches dieselben Wellengleichungen wie der Lichtäther besitzt, auf drei, nämlich die von einander unabhängigen Größen  $E_x, E_y, E_z$ .

Aus (21) folgt nach bekannter Methode<sup>1)</sup> die Gleichung der Wellenfläche in der Fresnel'schen Form:

$$\frac{\frac{G}{\rho} \cos^2 l}{(v)^2 - \frac{G}{\rho}} + \frac{\frac{H}{\rho} \cos^2 m}{(v)^2 - \frac{H}{\rho}} + \frac{\frac{J}{\rho} \cos^2 n}{(v)^2 - \frac{J}{\rho}} = 0$$

wobei unter  $(v)$  die Geschwindigkeit nach dem Strahle,  $l, m, n$  die Richtungswinkel desselben zu verstehen ist.

Aus den hier vorgeführten Entwicklungen ergibt sich dem nach der Satz:

I. Betrachtet man den Lichtäther als ein vollkommen elastisches und vollkommen incompressible Medium, so erfolgen die Schwingungen nach den Gesetzen der Fresnel'schen Wellenfläche, wenn die Schubelasticitäts-Coefficienten die Form besitzen

<sup>1)</sup> Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes, Capitel 15

$$G = \frac{E_y E_z}{4\kappa} = \frac{S}{4\kappa} \cdot \frac{1}{E_x},$$

$$H = \frac{E_x E_z}{4\kappa} = \frac{S}{4\kappa} \cdot \frac{1}{E_y},$$

$$J = \frac{E_x E_y}{4\kappa} = \frac{S}{4\kappa} \cdot \frac{1}{E_z},$$

worin  $E_x, E_y, E_z$  die Zugelastitätscoefficienten nach den drei Achsen bedeuten und  $S$  und  $\kappa$  die früher angeführten Werte besitzen.

Es ist also hiermit bewiesen, dass der Lichtäther unter gewissen Beziehungen seiner Constanten als elastisches Medium aufgefasst werden kann.

Aus der Gleichung (14) lassen sich des weiteren auch gewisse Sätze über die Richtungscosinus der Schwingungen selbst ableiten. Zu diesem Zwecke möge folgende Bemerkung vorausgeschickt werden:

Es seien drei Richtungscosinus durch die Werte

$$\begin{aligned} K \cos \varphi &= L + P \lim \omega, \\ K \cos \psi &= M + Q \lim \omega, \\ K \cos \chi &= N + R \lim \omega \quad (\lim \omega = \infty) \end{aligned}$$

definiert, worin  $K$  ein Proportionalitätsfactor,  $L, M, N; P, Q, R$  aber endliche Größen sind; wie eine einfache Rechnung zeigt, kann dann bis auf verschwindend kleine Größen

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{P}{K}, \\ \cos \psi &= \frac{Q}{K}, \\ \cos \chi &= \frac{R}{K}, \quad (K = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}) \end{aligned}$$

gesetzt werden.

Davon lässt sich beim vorliegenden Falle Gebrauch machen. Gleichung (14) kann nämlich geschrieben werden:

$$\begin{aligned} (A - v^2) \cos \varphi + B \cos \psi + C \cos \chi &= 0, \\ (B \cos \varphi + (D - v^2) \cos \psi + C \cos \chi &= 0, \\ C \cos \varphi + E \cos \psi + (F - v^2) \cos \chi &= 0, \end{aligned}$$

worin  $A, B, C, D, E, F$  die durch (16) definierten Werte besitzen. Man erhält hieraus:

$$(22a) \quad \begin{cases} K \cos \varphi = (D - v^2)(E - v^2) - E^2, \\ K \cos \psi = EC - (F - v^2)B, \\ K \cos \chi = BE - (D - v^2)C, \end{cases}$$

ist. Entwickelt man diese Ausdrücke, wendet die Beziehung (9) an und setzt für  $v^2$  eine der beiden endlichen Wurzeln von (21), so lassen sich die gefundenen Werte in gewisse endliche Größen  $L, M, N$  und in mit dem Factor  $\frac{1}{\Delta}$  behaftete ebenfalls endliche Größen  $P, Q, R$  zerlegen, so dass der eben erwähnte Fall zur Anwendung kommt,  $\cos \varphi, \cos \psi, \cos \chi$  daher bloß von  $P, Q, R$  abhängt; es ist somit, wenn für  $G, H, J; p, q, r; E_y, E_z, E_x, E_z, E_x, E_y$  ihre Werte in  $m, n, o$  und  $\alpha$  eingesetzt werden, nach einfachen Rechnungen:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{1}{K_1} \left\{ \left[ \frac{n}{4} \cos^2 \lambda \cos^2 \mu + \frac{o}{4} \cos^2 \lambda \cos^2 \nu + \frac{m}{4} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \alpha (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) v_1^2 \right\}, \\ \cos \psi_1 &= \frac{1}{K_1} \left\{ \left[ \frac{o}{4} \cos^2 \nu - \frac{m}{4} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) - \frac{n}{4} (\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu) \right] \right. \\ &\quad \left. \cos \lambda \cos \mu + \alpha \cos \lambda \cos \mu v_1^2 \right\}, \\ \cos \chi_1 &= \frac{1}{K_1} \left\{ \left[ \frac{n}{4} \cos^2 - \frac{o}{4} (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu) - \frac{m}{4} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) \right] \right. \\ &\quad \left. \cos \lambda \cos \nu + \alpha \cos \lambda \cos \nu v_1^2 \right\}; \end{aligned} \right.$$

dabei beziehen sich die beiden Indices 1 und 2 auf die aus Gleichung (21) resultierenden zwei endlichen Wurzeln  $v_1^2$  und  $v_2^2$ .  $K_1$  sind Proportionalitätsfactoren, dargestellt durch  $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$  wie oben erwähnt.

Bildet man

$$\cos \varphi_1 \cos \lambda + \cos \psi_1 \cos \mu + \cos \chi_1 \cos \nu,$$

so wird dieser Ausdruck identisch Null; hieraus folgt:

II. Die beiden Schwingungen mit endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Medium sind im I. Satze definierten Eigenschaften geschehe in der Wellenebene, sie sind demnach transversal.

Dieser Satz ist eine nothwendige Folge der Incompressibilität des Mittels.

Bildet man ferner aus (22)

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2$$

und berücksichtigt, dass nach (21)

$$p(v_1^2 + v_2^2) = (G + H) \cos^2 \nu + (G + J) \cos^2 \mu + (H + J) \cos^2 \lambda$$

$$p^2 v_1^2 v_2^2 = GH \cos^2 \nu + GJ \cos^2 \mu + HJ \cos^2 \lambda$$

ist, so wird obige Productensumme ebenfalls Null, woraus folgt:



III. Die beiden transversalen Schwingungen stehen aufeinander senkrecht.

Es erübrigt noch die Richtungscosinus derjenigen Schwingung zu untersuchen, für welche

$$v_3^2 = \infty$$

wird. Die vollständige Form der cubischen Gleichung (17) lässt sich unter Beachtung der Beziehungen (9) und (12) so darstellen:

$$(\rho v^2)^3 - (\rho v^2)^2 \left[ \frac{x}{\Delta} + v_1^2 + v_2^2 \right] + (\rho v^2) \left[ \frac{x}{\Delta} (v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2 \right] - \left[ \frac{x}{\Delta} v_1^2 v_2^2 - 4G H J \cos^2 \lambda \cos^2 \mu \cos^2 \nu \right] = 0.$$

Nach früheren Bemerkungen sind die wahren Wurzeln dieser Gleichung

$$(v_1)^2 = v_1^2 \pm \varepsilon_1,$$

$$(v_2)^2 = v_2^2 \mp \varepsilon_2,$$

$$(v_3)^2 = \frac{x}{\Delta},$$

worin  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  zwei gegen Null convergierende Größen darstellen, wenn  $\lim \frac{1}{\Delta} = \infty$  wird. Berechnet man mit diesem Werte von  $v_3^2$  die Richtungscosinus nach der Formel (22a), so erhält man dieselben in der Gestalt

$$(K) \cos \varphi_3 = (L) + \frac{x}{\Delta} (P) + \left( \frac{x}{\Delta} \right)^2 \cos \lambda \cos \lambda,$$

$$(K) \cos \psi_3 = (M) + \frac{x}{\Delta} (Q) + \left( \frac{x}{\Delta} \right)^2 \cos \lambda \cos \mu,$$

$$(K) \cos \chi_3 = (N) + \frac{x}{\Delta} (R) + \left( \frac{x}{\Delta} \right)^2 \cos \lambda \cos \nu,$$

wobei  $(K)$  einen Proportionalitätsfactor,  $L, M, N$ ;  $P, Q, R$  endliche Größen darstellen. Man ersieht wieder, dass, da alle Glieder 0. und 1. Potenz von  $\frac{x}{\Delta}$  gegen jene 2. Potenz verschwinden, die Richtungscosinus folgende einfache Werte besitzen:

$$\cos \varphi_3 = \cos \lambda,$$

$$\cos \psi_3 = \cos \mu,$$

$$\cos \chi_3 = \cos \nu.$$

Die Schwingungen der dritten Art geschehen also senkrecht zur Wellenebene; auf Grund dessen kann man folgenden Satz aussprechen:

IV. Die drei Schwingungsrichtungen in einem Medium mit den im ersten Satze definierten Eigenschaften stehen wechselweise auf einander senkrecht.

Wie leicht ersichtlich, ist die Wellenfläche dieser dritten Schwingung eine Kugel mit dem unendlich großen Radius  $\frac{\lambda}{\Delta}$ ; die Volumsdilatation ist

$$\varnothing = \frac{2\pi n}{v_3}$$

also  $\lim \varnothing = 0$ ; sie ist von der Lage der Wellenebene unabhängig; man kann diese Welle als longitudinal bezeichnen. In der Optik wird gewöhnlich vorausgesetzt, dass sie überhaupt nicht auftritt, was in dem vorliegenden Falle offenbar dann eintreten würde, wenn das Medium absolut incompressibel ist.

Dieses letztere Resultat lässt eine einfache physikalische Deutung zu. Setzt man das Princip der Superposition der kleinsten Bewegungen als richtig voraus, so wird man die in der Wellenebene  $(\lambda, \lambda, \nu)$  zur Zeit  $t$  herrschende Totalbewegung in drei zu einander senkrechte Partialbewegungen nach den drei eben entwickelten Schwingungsrichtungen  $(\varphi_{1,2,3}, \psi_{1,2,3}, \chi_{1,2,3})$  zerlegen können, deren Componenten nach den Coordinatenachsen  $\xi_{1,2,3}, \eta_{1,2,3}, \zeta_{1,2,3}$  sind. Bildet man nun die Ausdrücke für die lebendige Kraft, so ist gemäß der Beziehung zwischen den drei Richtungscosinus für ein beliebiges Vielfache  $n$  der Schwingungsdauer  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \right]^2 \right\}_t = \\ \frac{\rho}{2} \left\{ \left( \left[ \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \xi_3}{\partial t} \right]^2 \right) + \left( \left[ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \eta_3}{\partial t} \right]^2 \right) + \right. \\ \left. + \left( \left[ \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} \right]^2 \right) \right\}_{t+nT}. \end{aligned}$$

Denkt man sich also von der Erregungsebene eine vollständige Welle ausgehen, so wird sich die gesammte lebendige Kraft nach Verlauf einer beliebig großen Zeit in den drei Einzelwellen wieder vorfinden, trotzdem sich dieselben wegen ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von einander beliebig weit getrennt haben. Die Orthogonalität der Schwingungsrichtungen gibt also die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür an, dass eine von einem gemeinsamen Erregungsorte ausgehende Wellenbewegung, die sich in mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten be-

gabte Einzelwellen zerlegt, trotz der sofort eintretenden Trennung doch stets dieselbe lebendige Kraft repräsentiert.

Für einachsige Medien ist speciell, wenn die  $Z$ -Achse als Symmetrieachse betrachtet wird,

$$E_x = E_y$$

$$G = H$$

$$q_x = p_y, p_x = q_z, r_x = r_y = \frac{1}{2}.$$

Die Wurzelwerte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden endlichen Wellen werden

$$v_1^2 = \frac{G}{\rho},$$

$$v_2^2 = \frac{J}{\rho} (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu) + \frac{G}{\rho} \cos^2 \nu;$$

die Wellenfläche nimmt die Form an

$$\left(r^2 - \frac{G}{\rho}\right) \left(\frac{r^2 [\cos^2 l + \cos^2 m]}{\frac{J}{\rho}} + \frac{r^2 \cos^2 n}{\frac{G}{\rho}} - 1\right) = 0.$$

Sie besteht demnach aus einer Kugel (ordinäre Schwingung), und einem Rotationsellipsoid (extraordinäre Schwingung); letzteres berührt die erstere in deren Schnittpunkt mit der  $Z$ -Achse (optische Achse). Die Richtungscosinus der ordinären Schwingung sind nach Gleichung (22)

$$\cos \varphi_1 = \pm \frac{\cos \lambda \cos \nu}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}},$$

$$\cos \psi_1 = \pm \frac{\cos \mu \cos \nu}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}},$$

$$\cos \chi_1 = \mp \sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu},$$

die der extraordinären Schwingung aber

$$\cos \varphi_2 = \pm \frac{\cos \mu}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}},$$

$$\cos \psi_2 = \mp \frac{\cos \lambda}{\sqrt{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}},$$

$$\cos \chi_2 = 0.$$

Aus der Form der Cosinuswerte ergibt sich:

V. Die Schwingungen der ordinären Welle erfolgen in den Meridianen der Kugel, jene der extra-

ordinären Welle in den Parallelkreisen des Rotationsellipsoides, wenn man die gemeinsamen Berührungspunkte als Pole annimmt.

Es handelt sich schließlich noch um die Frage nach der Schwingungsrichtung beider Wellen in Bezug auf die Polarisationssebene, d. h. die durch die optische Achse und das Einfallslot gelegte Ebene. Man denke sich aus dem Medium eine planparallele Platte geschnitten und eine Ebene unter beliebigem Azimute polarisierte Welle mit schiefer Incidenz so einfallen, dass Einfallsebene und Polarisationssebene zusammenfallen. Wendet man behufs Construction der gebrochenen Wellen das Huyghen'sche Princip in der bekannten Weise an, so erkennt man leicht, dass zwei Wellen entstehen, deren Brechungsebenen im Krystalle wieder in der Polarisationssebene liegen. Nach dem eben entwickelten Satz V folgt, dass die Schwingungen der ordinären Welle in der Polarisationssebene, jene der extraordinären Welle aber senkrecht zu derselben vor sich gehen; zur ersteren gibt die in der Einfallsebene liegende, zur letzteren die darauf senkrechte Componente der Gesamtschwingung Veranlassung. Man kann daher den Satz aussprechen:

VI. Die Schwingungen der ordinären Welle geschehen in der Polarisationssebene, die der extraordinären senkrecht zu derselben.

Zusammenfassend lassen sich die gefunden Resultate folgendermaßen aussprechen:

Betrachtet man den Lichtäther als ein vollkommen elastisches und vollkommen incompressibles Medium, welches in Krystallen des nicht tesserale Systemes zugleich anisotrop ist, so führen, wenn die Schubelasticitätscoefficienten die oben entwickelte Form besitzen, die Gleichungen der Elasticitätstheorie auf die Fresnel'sche Wellenfläche. Die Schwingungen in einaxigen Krystallen erfolgen aber hinsichtlich ihrer Lage bezüglich der Polarisationssebene gemäß der Neumann'schen Hypothese.

## II. Medium mit gleicher Elasticität und ungleicher Dichte.

Eine zweite der Beschaffenheit des Lichtäthers vielfach zugrunde gelegte Annahme ist die, dass seine Elasticität in Krystallen nach allen Richtungen gleich, seine Dichte nach drei zu einander senkrechten Achsen aber verschieden ist. Bezüglich des letzteren Ausdrucks ist jedoch eine nähere Erörterung nöthig. Würde man den Ausdruck Dichte in dem gewöhnlichen Sinne als die in der Volumseinheit enthaltene Materie fassen, so ist klar, dass, wie auch die Aneinanderlagerung der Massentheilchen sei, wenn selbe nur symmetrisch zu den Achsen angeordnet sind, stets in jedem gleich großen Elementar-Parallelepiped die gleiche Masse vorhanden ist welches auch dessen Lage sein mag. Denn denkt man sich z. B.

aus dem Körper ein Parallelepiped mit den Kanten  $a, b, c$  parallel zu den Achsen herausgeschnitten, welches die Masse  $d$  enthält, und dasselbe durch ein System von drei zu einander senkrechten Ebenen in lauter Elementarprismen mit den Seiten  $\Delta l, \Delta m, \Delta n$  zerlegt, so ist die in demselben enthaltene Masse

$$\Delta d = d \frac{\Delta l \Delta m \Delta n}{a \cdot b \cdot c}.$$

Diese GröÙe ist aber unabhängig von der Lage der Kanten  $\Delta l, \Delta m, \Delta n$ , somit des Systems der Theilungsebenen, da man die an den Endflächen des Prismas  $abc$  etwa auftretenden nicht prismatischen Körperchen wegen der Kleinheit ihrer Summe gegenüber dem Prismeninhalte vernachlässigen kann. Dieselben Überlegungen gelten offenbar auch, wenn statt des Prismas  $abc$  ein beliebig begrenzter Theil des Mediums betrachtet wird.

Es ist nun zu bedenken, dass in den linken Seiten  $\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ ,  $\rho \frac{d^2 \eta}{dt^2}$ ,  $\rho \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$  der Gleichungen der Elasticitätstheorie, wie überhaupt im D'Alembert'schen Principe,  $\rho$  eigentlich die Bedeutung eines Widerstandes der Masse besitzt. Die „Masse“ hat ja schließlich in der gesammten Mechanik überhaupt nur diese Bedeutung, da es ja nicht möglich ist, einen directen Schluss auf die Materie durch die von einer gegebenen Kraft ihr ertheilte Beschleunigung zu ziehen. Man kann sich nun vorstellen, dass die im betrachteten Medium durch die Verschiebungen geweckten Elasticitätskräfte zwar nach allen Richtungen gleich groß sind, dass aber die bewegendenden Kräfte nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene äußere Widerstände zu überwinden haben, etwa dadurch hervorgerufen, dass in das Mittel discrete Massentheilchen eingebettet sind, welche infolge eines eigenthümlichen Zusammenhanges derselben nach verschiedener Richtung mit verschiedener Leichtigkeit beweglich sind. Nothwendig ist aber hiebei die Voraussetzung, dass diese Theilchen nur an der Bewegung des Mittels theilnehmen, jedoch nicht selbst Ausgangspunkte von Wellen innerhalb des Complexes des von ihnen erfüllten Raumes sind, die eine von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Medium verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Indem der Begriff der Dichte so gefasst werden soll, können die Elasticitätsgleichungen der Bewegung in der Form geschrieben werden:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = K \Delta \xi + K' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \rho_2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = K \Delta \eta + K' \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \rho_3 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = K \Delta \zeta + K' \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{array} \right.$$

worin  $K = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ,  $K' = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$ ,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \emptyset = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

ferner  $E$  den Elasticitätscoefficienten,  $\mu$  die Poisson-Wertheim'sche Constante bedeutet.

Setzt man wieder voraus, dass die Schwingungen unter einander parallel bleiben und auf einer Wellenebene

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0$$

begonnen haben, so wird die Gleichung derselben zur Zeit  $t$  sein

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = v t$$

wenn sie sich mit der normalen Geschwindigkeit  $v$  parallel zu sich im Medium verschiebt. Sind ferner  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  die Richtungswinkel der Schwingungscomponenten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , so lassen sich dieselben in der Form schreiben:

$$(24) \quad \begin{cases} \xi = \cos \varphi \\ \eta = \cos \psi \\ \zeta = \cos \chi \end{cases} \sin 2\pi n \left( t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{v} \right)$$

Setzt man die Derivierten von (24) in (23) ein, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} \left( \frac{K}{\rho_1} + \frac{K'}{\rho_1} \cos^2 \lambda - v^2 \right) \cos \varphi + \frac{K'}{\rho_1} \cos \lambda \cos \mu \cos \chi + \frac{K'}{\rho_1} \cos \lambda \cos \nu \cos \chi = 0 \\ \frac{K'}{\rho_2} \cos \mu \cos \lambda \cos \varphi + \left( \frac{K}{\rho_2} + \frac{K'}{\rho_2} \cos^2 \mu - v^2 \right) \cos \psi + \frac{K'}{\rho_2} \cos \mu \cos \nu \cos \chi = 0 \\ \frac{K'}{\rho_3} \cos \nu \cos \lambda \cos \varphi + \frac{K'}{\rho_3} \cos \nu \cos \mu \cos \psi + \left( \frac{K}{\rho_3} + \frac{K'}{\rho_3} \cos^2 \nu - v^2 \right) \cos \chi = 0 \end{cases}$$

Die Determinante, deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser drei Gleichungen, also für die Möglichkeit der Auflösung derselben nach  $\cos \varphi$ ,  $\cos \psi$ ,  $\cos \chi$ , angibt, lautet:

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{K}{\rho_1} + \frac{K'}{\rho_1} \cos^2 \lambda - v^2 \right), & \frac{K'}{\rho_1} \cos \lambda \cos \mu, & \frac{K'}{\rho_1} \cos \lambda \cos \nu \\ \frac{K'}{\rho_2} \cos \mu \cos \lambda, & \left( \frac{K}{\rho_2} + \frac{K'}{\rho_2} \cos^2 \mu - v^2 \right), & \frac{K'}{\rho_2} \cos \mu \cos \nu \\ \frac{K'}{\rho_3} \cos \nu \cos \lambda, & \frac{K'}{\rho_3} \cos \nu \cos \mu, & \left( \frac{K}{\rho_3} + \frac{K'}{\rho_3} \cos^2 \nu - v^2 \right) \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt wieder eine cubische Gleichung für  $v^2$ :

$$(26) \quad v^6 - v^4 \left[ K \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \right) + K' \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho_3} \right) \right] \\ + v^2 \left[ K^2 \left( \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_3} + \frac{1}{\rho_2 \rho_3} \right) + K K' \left( \frac{\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu}{\rho_1 \rho_3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}{\rho_1 \rho_2} + \frac{\cos^2 \mu + \cos^2 \nu}{\rho_2 \rho_3} \right) - \frac{K^3 + K^2 K'}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \right] = 0,$$

da die Glieder mit  $K'^2$  ausfallen. Setzt man für ein incompressibles Medium als Definitionsgleichung  $\mu = \frac{1}{2}$ , also

$$\lim K' = \infty,$$

so besitzt diese Gleichung die im ersten Abschnitte angegebenen Eigenschaften, und es können die dort angestellten Betrachtungen hier Verwendung finden. Dividirt man also (26) unter Voraussetzung eines endlichen  $v^2$  durch  $\lim K' = \infty$ , so erhält man für die beiden endlichen Wurzelwerte die Gleichung:

$$(27) \quad v^4 K \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho_3} \right) - v^2 K^2 \left( \frac{\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu}{\rho_1 \rho_3} + \right. \\ \left. + \frac{\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu}{\rho_1 \rho_2} + \frac{\cos^2 \mu + \cos^2 \nu}{\rho_2 \rho_3} \right) + \frac{K^3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{K}{\rho_1} = a^2,$$

$$\frac{K}{\rho_2} = b^2,$$

$$\frac{K}{\rho_3} = c^2,$$

so kann (27) auch in der Form geschrieben werden:

$$(28) \quad \frac{a^2 \cos^2 \lambda}{a^2 - v^2} + \frac{b^2 \cos^2 \mu}{b^2 - v^2} + \frac{c^2 \cos^2 \nu}{c^2 - v^2} = 0.$$

Diese Gleichung liefert die Beziehung zwischen der normalen Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  und den Richtungswinkeln  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  der Wellennormalen; die hiedurch definierte Fläche heißt, wie schon im 1. Abschnitte erwähnt, die Elasticitätsfläche.<sup>1)</sup> Während in der Fresnel'schen Theorie dieselbe die Form

$$\frac{\cos^2 \lambda}{a^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \mu}{b^2 - v^2} + \frac{\cos^2 \nu}{c^2 - v^2} = 0$$

<sup>1)</sup> Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes, I. Theil, 154.

besitzt, nimmt sie hier nach (28) die Gestalt der Fresnel'schen Wellenfläche an; offenbar wird die aus (28) gefundene Wellenfläche nicht mehr mit der Fresnel'schen übereinstimmen; man kann daher den Satz aussprechen:

VII. Unter Annahme gleicher Elasticität, aber nach den Achsen verschiedener Dichte des elastischen Mediums hat die Wellenfläche nicht die von Fresnel gegebene Form.

Berechnet man mittelst der Determinantentheorie aus (25) die Richtungscosinus der Schwingungscomponenten, so erhält man

$$(29) \quad \begin{cases} R_1 \cos \varphi_2 = \frac{K}{\rho_1 \rho_2} (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) - v_1^2 \left( \frac{\cos^2 \nu}{\rho_3} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho_2} \right), \\ R_1 \cos \psi_2 = - \frac{K}{\rho_2 \rho_3} \cos \lambda \cos \mu + v_1^2 \frac{\cos \lambda \cos \mu}{\rho_2}, \\ R_1 \cos \chi_2 = - \frac{K}{\rho_2 \rho_3} \cos \lambda \cos \nu + v_1^2 \frac{\cos \lambda \cos \nu}{\rho_3}, \end{cases}$$

wo  $R_1$  gewisse Proportionalitätsfactoren darstellen.

Daraus folgt zunächst

$$\cos \varphi_1 \cos \lambda + \cos \psi_1 \cos \mu + \cos \chi_1 \cos \nu = 0,$$

woraus sich der Satz ergibt:

VIII. Die Schwingungen erfolgen unter der im VII. Satze gemachten Annahme in der Wellenebene, sind also transversal.

Dividirt man Gleichung (27) durch

$$\frac{v^4}{\left( \frac{K^3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \right)},$$

so erscheint sie in der Form:

$$\left( \frac{1}{v^2} \right)^2 - \left( \frac{1}{v^2} \right) \frac{1}{K} [\rho_1 (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + \rho_2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu) + \rho_3 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu)] \\ + [\rho_1 \rho_2 \cos^2 \nu + \rho_1 \rho_3 \cos^2 \mu + \rho_2 \rho_3 \cos^2 \lambda] = 0;$$

daraus folgt:

$$\left( \frac{1}{v_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{v_2} \right)^2 = \frac{1}{K} [\rho_1 (\cos^2 \mu + \cos^2 \nu) + \rho_2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \nu) + \rho_3 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu)] \\ \left( \frac{1}{v_1} \right)^2 \left( \frac{1}{v_2} \right)^2 = \frac{1}{K^2} [\rho_1 \rho_2 \cos^2 \nu + \rho_1 \rho_3 \cos^2 \mu + \rho_2 \rho_3 \cos^2 \lambda].$$



Dividiert man nun (29) durch  $\left(v_1\right)_2^2$ , bildet weiters

$$R_1 R_2 \frac{1}{v_1^2 v_2^2} [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2]$$

und wendet die eben erwähnten Beziehungen an, so findet man nach einfachen Rechnungen, dass diese Productensumme = 0 ist.

Man gewinnt so den Satz:

IX. Die beiden Schwingungsrichtungen in einem mit den im VII. Satze definierten Eigenschaften begabten Medium stehen auf einander senkrecht.

Was endlich die Richtungscosinus der mit unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit begabten Schwingung betrifft, so wurde im 1. Abschnitte darauf hingewiesen, dass für diese

$$v_3^2 = K' \left( \frac{\cos^2 \lambda}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho_2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho_3} \right) + \Omega,$$

also

$$= (\bar{a}^2 \cos^2 \lambda + \bar{b}^2 \cos^2 \mu + \bar{c}^2 \cos^2 \nu) + \Omega$$

gesetzt werden kann, worin  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \sqrt{\frac{K'}{\rho_1}}, \sqrt{\frac{K'}{\rho_2}}, \sqrt{\frac{K'}{\rho_3}}$  ist, also für unendlich große Werte von  $K'$  wegen

$$\lim \sqrt{K + K'} = \lim \sqrt{K^2} \quad (\lim K' = \infty, K \text{ endlich})$$

die longitudinalen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nach den Achsen darstellen, und  $\Omega$  eine endliche Zahl bedeutet.

Berechnet man aus (25) nach der Determinantentheorie  $\cos \varphi_3$ ,  $\cos \psi_3$ ,  $\cos \chi_3$ , so ergibt sich

$$\cos \varphi_3 = \frac{\cos \lambda}{\rho_1} \frac{1}{D} = \frac{\bar{a}^2 x}{D'},$$

$$\cos \psi_3 = \frac{\cos \mu}{\rho_2} \frac{1}{D} = \frac{\bar{b}^2 y}{D'},$$

$$\cos \chi_3 = \frac{\cos \nu}{\rho_3} \frac{1}{D} = \frac{\bar{c}^2 z}{D'}. \quad (D' = \sqrt{\bar{a}^2 x^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{c}^2 z^2}).$$

Die Schwingungen erfolgen also nicht normal zur Wellenebene, sondern normal zu einem Ellipsoid von der Form

$$\bar{a}^2 x^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{c}^2 z^2 = \text{Const.}$$

Daraus ist zu entnehmen, dass diese dritte Schwingung nicht mehr wie die des vorhergehenden Abschnittes mit den beiden transversalen ein orthogonales System bildet.

Aus den abgeleiteten Gleichungen ersieht man, dass die Voraussetzung, der Lichtäther sei ein absolut elastisches und incompressibles Medium mit gleicher Elasticität aber verschiedener Dichte, nicht auf die experimentell beglaubigten Gesetze der Doppelbrechung führt.<sup>1)</sup> Nun muss allerdings folgender Umstand in Betracht gezogen werden. Es wurde vorausgesetzt, dass die Verschiedenheit der Dichte in dem Mitschwingen von vollkommen trägen Massentheilen ohne specielle Eigenschwingungen begründet sei, welche jedoch nach verschiedenen Richtungen infolge einer eigenthümlichen Art der Structurlagerung der Bewegung einen verschiedenen Widerstand entgegensetzen. Es dürfte nun kaum angehen, einen derartigen Zusammenhang zwischen den materiellen Theilen ohne eine Äußerung einer selbständigen Eigenschwingung derselben anzunehmen, da sie dann nicht mehr absolut träge, sondern gewissen inneren Kräften unterworfen sind. Daraus folgt, dass die Gleichungen (23) nur unvollständig die gesammte Bewegung schildern, dass vielmehr auch der Einfluss der materiellen Theile in Betracht zu ziehen sei, etwa in der Weise, dass man zu den Gleichungen (23) noch diejenigen für die materiellen Theile hinzufügt, jedoch so, dass die inneren elastischen Kräfte des einen Mittels zugleich die äußeren für das andere bilden. Eine solche Darstellung ist aber der reinen Elasticitätstheorie des Lichtes, welche von dem Mitspielen der Eigenschwingungen der körperlichen Massen absieht, fremd und soll daher hier nicht weiter verfolgt werden.

Zusammenfassend ergibt sich also der Schluss, dass die Annahme von der Gleichheit der Elasticität und der Verschiedenheit der Dichte vom Standpunkte der Elasticitätsgleichungen unvereinbar mit den experimentell bewahrheiteten Gesetzen der Doppelbrechung ist, während die Annahme von der Gleichheit der Dichte und Verschiedenheit der Elasticität wohl zu den Fresnel'schen Gesetzen führt, jedoch hinsichtlich der Schwingungen der ordinären und der extraordinären Welle in einachsigen Krystallen in Bezug auf die Polarisationssebene den Neumann'schen Satz ergibt.

In diesen Betrachtungen wurde vorausgesetzt, dass der mit den Lichtschwingungen identische Vector durch die Verschiebungen des elastischen Mediums definiert ist. Die Verhältnisse gestalten sich aber offenbar anders, wenn damit ein anderer Vector identificiert wird. Es seien hiezu einige Bemerkungen gestattet, welche aus den bisher vorgeführten Entwicklungen folgen.

Es wurde bereits anfangs erwähnt, dass bei der Berechnung des Problems der Schwingungen eines incompressiblen Mediums zuerst die allgemeinen Formeln für elastische Medien überhaupt zu

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, dass einige Theorien zu anderen Wellenflächen als der Fresnel'schen gelangen. Man vergleiche hiemit:

K. Hollefreund, Die Gesetze der Lichtbewegung in doppelbrechenden Medien nach der Lommel'schen Reibungs Theorie und ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung. — Nova Acta Acad. C. Leopold.-Carol. Tomus 46.

H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Wiedemanns Ann. Bd. 40. (Schlusscapitel).

entwickeln und sodann erst die Eigenschaft der Incompressibilität durch Übergang zu dem Grenzfalle eines Mediums, in welchem keine cubische Dilatation auftreten kann, einzuführen ist.

Dagegen wäre es unthunlich, von vorn herein Wellen zu untersuchen, für welche

$$\emptyset = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist, da die Existenz solcher immer erst zu beweisen ist. In der That zeigt sich bei Verfolgung der mathematischen Betrachtungen der ersten Grundannahme Folgendes: In einem Medium sind im allgemeinen drei Wellen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten möglich, welche letztere gewisse, durch eine cubische Gleichung dargestellte Functionen der elastischen Constanten des Mittels und der Fortpflanzungsrichtung sind. In einem homogenen Medium zerfallen diese Wellen in eine longitudinale und zwei identisch gleiche transversale Wellen; in einem einachsigen Medium gibt es stets eine transversale und zwei nicht transversale, in einem zweiachsigen überhaupt keine transversale Welle mehr, falls man nicht gewisse Beziehungen zwischen den elastischen Constanten einführt, welche dann schon ein specielles Mittel definieren. Ein solches ist nun auch durch die Incompressibilitäts-Eigenschaft definiert. Infolge dieser degenerieren — wenn der Ausdruck gestattet ist — in einachsigen Medien eine, in zweiachsigen aber zwei der ursprünglich nicht transversalen Wellen, in eine, resp. zwei transversale Wellen, so dass es im incompressiblen Mittel stets zwei rein transversale Schwingungen gibt.

Auch bei der zweiten hier betrachteten Grundannahme wäre es nicht sachgemäß, in den Gleichungen (23) von vorn herein die Glieder  $K' \frac{\partial \emptyset}{\partial x}$ ,  $K' \frac{\partial \emptyset}{\partial y}$ ,  $K' \frac{\partial \emptyset}{\partial z}$  wegzulassen, weil damit der Factor  $\lim K' = \infty$  multiplicativ verbunden erscheint. In der That würde man hiedurch eine wesentlich andere Form der Gleichungen für  $v$  erhalten.

Hieraus ist zu schließen, dass man bei Untersuchungen, welche die Lichtschwingungen mit anderen als dem Verschiebungsvector der Theilchen identificieren und den Lichtäther als incompressibles, elastisches Medium betrachten, nicht ohne weiters wegen der Incompressibilität des Mittels bloß einen einzigen Vector einführen, d. h. sofort die Glieder, welche in der Elasticitätstheorie die Dilatation enthalten, weglassen kann, sondern dass stets von den allgemeinen Gleichungen auszugehen und erst sodann zum Grenzfalle eines Mittels ohne Compressibilität überzugehen ist. Es ist naheliegend, dass bei diesem Untersuchungswege noch ein zweiter Vector oder eventuell eine skalare Größe, (ähnlich der Dilatation) auftreten wird, welche den Gang der Untersuchungen modificiert. Jedoch soll ein specielleres Eingehen auf diese Betrachtungen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.