

Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Es bezeichne x eine komplexe Veränderliche, $f(x)$ eine Funktion derselben, die im Kreise $|x| < 1$ regulär, also $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, und absolut < 1 ist, und es sei $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Dann verdankt man Herrn Landau die folgenden Sätze¹⁾:

I. Für die Menge aller Funktionen $f(x)$ hat bei festem n die obere Grenze von s_n den Wert

$$G_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 = 1 + \binom{1}{2}^2 + \binom{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}^2 + \dots + \binom{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}^2.$$

II. Diese Grenze wird für $n > 0$ bei einer speziellen Funktion $f(x)$ erreicht, ist also Maximum.

Anschließend bewies Herr Bohr²⁾:

III. Für jede einzelne Funktion $f(x)$ ist

$$\lim_{n=\infty} \{G_n - |s_n|\} = \infty.$$

IV. Es gibt eine spezielle Funktion $f(x)$, so daß

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 1.$$

¹⁾ Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Abh.); Arch. Math. Phys. (3) 21 (1913), S. 250. Vgl. auch: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (zitiert als Landau), Berlin 1916; § 2.

²⁾ Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe (Zweite Mitt.); Gött. Nachr. 1917, S. 119; Satz B bzw. A. Ein in der ersten Mitteilung gleichen Titels (Gött. Nachr. 1916, S. 276) erhaltenes Zwischenresultat übergehe ich. (Die beiden Arbeiten werden als Bohr II bzw. I zitiert.)

Wie man sieht, besteht zwischen III und IV noch eine Lücke, die im folgenden ausgefüllt werden soll durch den Satz:

V. Zu jeder Folge $L_n \rightarrow \infty$ gibt es eine spezielle Funktion $f(x)$ der Art, daß für unendlich viele n

$$|s_n| \geq G_n - L_n.$$

Bei der Aufstellung der hiermit angekündigten Funktion $f(x)$ wird von der Konstruktion, die Herr Bohr bei seinem Beweise von IV angegeben hat, der Grundgedanke in dem nachstehend in Fußnote 9 auseinander-gesetzten Umfang beibehalten werden. Jedoch gestaltet sich die Durch-führung ganz erheblich schwieriger³⁾.

Bezeichnungen⁴⁾.

Es soll für $n = 0, 1, 2, \dots$ sein⁵⁾

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} x^\nu = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}x^n$$

$$\text{für } |x| \leq 1,$$

also⁵⁾

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=r} \frac{f(x)}{x^{n+1}} P_n^2(x) dx \quad (0 < r < 1),$$

³⁾ Zu den Sätzen III und V gelten in der Theorie der Fourierreihen die Ana-loga für mod 2π periodische, meßbare Funktionen $\varphi(t)$, die für alle reellen t ab-solut ≤ 1 sind. Der Landauschen oberen Grenze G_n entspricht dabei, wie bereits Herr Szász (Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe; Math. Zeitschr., 1 (1918), S. 163; vgl. Anm. 13 daselbst) bemerkt hat, die Lebesguesche Konstante

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})\alpha|}{\sin \frac{1}{2}\alpha} d\alpha,$$

für s_n gilt der Ausdruck

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} d\alpha,$$

und die Sätze lauten bzw.:

A. Für jedes einzelne $\varphi(t)$ ist

$$\varrho_n - |s_n| \rightarrow \infty.$$

B. Zu jeder Folge λ_n mit dem Grenzwert ∞ gibt es eine spezielle Funktion $\varphi(t)$ der Art, daß $|s_n| \geq \varrho_n - \lambda_n$ für unendlich viele n .

Der Beweis von A ist naheliegend; der von B gelingt nach der durch Du Bois-Reymond und Herrn Lebesgue wohlbekannten Kondensationsmethode zur Kon-struktion divergenter Fourierreihen ohne Schwierigkeiten.

Zu dieser Methode ist übrigens die Bohrsche das durchaus sinngemäße Ana-logon für Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

⁴⁾ In diesen schließe ich mich an das Vorhandene möglichst an, setze übrigens auch den Inhalt der zitierten Arbeiten voraus.

⁵⁾ Landau, § 2.

und⁵⁾

$$f_n(x) = \frac{x^n P_n(1/x)}{P_n(x)},$$

also⁵⁾

$$f_n(x) \text{ regulär} \quad \text{und} \quad |f_n(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad |x| \leq 1.$$

Weiter sei⁶⁾ für alle reellen φ

$$\Phi_n(\varphi) = e^{-n\varphi i} P_n^2(e^{\varphi i}), \quad \text{also} \quad \Phi_n(\varphi) f_n(e^{\varphi i}) = |\Phi_n(\varphi)|,$$

so daß^{5), 6)}

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) f_n(e^{\varphi i}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_n(\varphi)| d\varphi = G_n$$

ist.

Konstruktion von $f(x)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß $L_n \leq G_n$ ist für alle $n = 0, 1, 2, \dots$

Es sei $h_0(x) = 0$ für alle x , $m_0 = 1$, n_0 positiv ganz und so groß, daß

$$\frac{1}{8} L_{n_0} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \varphi} (1 - e^{-2m_0 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cos(m_0 \sin \varphi)) d\varphi (> 0),$$

ferner $\delta_{-1} = \pi$ und δ_0 positiv, $< \frac{1}{2} \delta_{-1}$ und so klein, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} |\Phi_{n_0}(\varphi)| d\varphi \leq \frac{1}{8} L_{n_0},$$

endlich μ_0 positiv und so klein, daß

$$\frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \delta_0}} \leq \frac{1}{16} \frac{L_{m_0}}{G_{n_0}}.$$

Schließlich bedeute eine von $k = a$ (ganz) bis $k = b$ (ganz) erstreckte Summe stets Null, falls $a > b$ ist.

Dann sind durch Vorstehendes, zunächst im Falle $p = 0$, für $k = 0, 1, \dots, p$ solche Funktionen $h_k(x)$, natürliche Zahlen m_k , n_k und positive Zahlen μ_k , sowie solche positive Zahlen $\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_p$ definiert, daß folgende Beziehungen bestehen:

- $$\left. \begin{aligned} (1) \quad & h_p(x) \text{ ist regulär} \\ (2) \quad & |h_p(x)| \leq e^{-m_p(1-u)} \cdot e^{-\mu_p \sqrt[4]{1-u}} \end{aligned} \right\} \text{ für } |x| \leq 1, \Re(x) = u < 1,$$
- $$(3) \quad |h_p(e^{\varphi i})| \leq e^{-\mu_p \sqrt[4]{|\varphi|}} \quad \text{für } \varphi \text{ reell, } 0 < |\varphi| \leq \pi,$$

⁶⁾ Bohr, I § 2 oder II § 1.

$$(4) \quad |h_p(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot \min_{k=0,1,\dots,p-1} (?) \cdot \frac{1}{2^{p-k}} \cdot \frac{L_{n_k}}{G_{n_k}} \quad \text{für } |x| \leq 1, \Re(x) \leq \cos \delta_{p-1},$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^p |h'_k(x)| < 1 \quad \text{für } |x| \leq 1, \Re(x) < 1,$$

$$(6) \quad \frac{1}{8} L_{n_p} > \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi - \delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} (\geq 0),$$

$$(7) \quad \frac{1}{8} L_{n_p} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \sum_{k=1}^{p-1} e^{-\mu_k |\overline{1-\varphi}|} d\varphi,$$

$$(8) \quad \frac{1}{8} L_{n_p} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} (1 - e^{-2m_p \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cos(m_p \sin \varphi)) d\varphi,$$

$$(9) \quad 0 < \delta_p < \frac{1}{2} \delta_{p-1} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi \leq \frac{1}{8} L_{n_p},$$

$$(11) \quad \frac{\mu_p \sqrt{2}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2} \delta_p}} \leq \frac{1}{16} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}}, \quad \text{also } \leq 1$$

wegen der Voraussetzung $L_n \leq G_n$.

Wir nehmen nunmehr an, daß $p > 0$ ist, und in den Fällen $0, 1, \dots, p-1$ statt p die Funktionen und Zahlen mit den vorstehenden Eigenschaften definiert sind. Dann wollen wir zeigen, daß auch die Funktion $h_p(x)$ und die Zahlen m_p und n_p positiv ganz, δ_p und μ_p positiv so definiert werden können, daß die Beziehungen (1) bis (11) gelten⁸⁾.

Die Funktion $h_p(x)$ wird die Gestalt haben

$$(12) \quad h_p(x) = e^{-m_p(1-x)} \cdot e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}} \cdot f_{n_p}(x),$$

wo $f_n(x)$ die Landausche Funktion ist, $\sqrt{1-x}$ den in der Halbebene $\Re(x) < 1$ regulären und von Null verschiedenen Hauptwert der Wurzel bedeutet und die Zahlen m_p, n_p, μ_p noch festzulegen sind⁹⁾. Unabhängig von deren Werten ergibt sich aus (12) ohne weiteres, daß (1) erfüllt ist.

⁸⁾ Dies bedeute z. B. 0, falls $p = 0$ ist.

⁹⁾ Beim Zitieren derselben deuten wir durch Zufügung eines * an, daß darin $p-1$ (oder $0, 1, \dots, p-1$) statt p zu setzen ist.

⁹⁾ Bei diesem Ansatz besteht der Grundgedanke, den ich von Herrn Bohr (II, S. 122, Z. 2) übernehme, darin, daß für eine passende Folge $n = n_p$ natürlicher Zahlen die Landausche Funktion $f_n(x)$ sowohl in einer Halbebene $\Re(x) \leq \cos \delta_p$ ($\delta_p \rightarrow 0$)

Wenn weiter $d = |1 - x|$ ist, und ϑ den im positiven Sinne gerechneten Winkel vom Strahl aus 1 nach 0 zum Strahl aus 1 nach x bedeutet, so ist in unserer Halbebene $|\vartheta| < \frac{1}{2}\pi$ und deshalb

$$\left| e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}} \right| = e^{-\frac{2\mu_p}{\sqrt{d}} \cos \frac{1}{2}\vartheta} \leq e^{-\frac{\mu_p \sqrt{2}}{\sqrt{d}}}.$$

Hieraus folgt, da im Kreise $|x| \leq 1$ stets $d \leq 2\sqrt{1-u}$ ist,

$$\left| e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}} \right| \leq e^{-\mu_p/\sqrt[4]{1-u}} \quad \text{für } |x| \leq 1, \Re(x) = u < 1,$$

und also aus (12), mit Rücksicht auf die vierte Formelzeile der Bezeichnungen, die Richtigkeit von (2). Eine Folge von (2) ist (3), denn für $x = e^{\varphi i}$ (φ reell, $0 < |\varphi| \leq \pi$) ist

$$0 < 1 - u = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \leq \varphi^2, \quad \text{also} \quad \sqrt[4]{1-u} \leq \sqrt{|\varphi|}.$$

Um jetzt (4) und (5) zu erfüllen, beachten wir, daß nach (2)* für $k = 0, 1, \dots, p-1$

$$|h_k(x)| \leq e^{-\mu_k/\sqrt[4]{1-u}} \leq \frac{5!}{\mu_k^5} (1-u) \sqrt[4]{1-u}$$

ist, so daß es mit Rücksicht auf (9)* einen positiven echten Bruch $\gamma \leq \cos \delta_{p-1}$ gibt der Art, daß

$$\sum_{k=1}^{p-1} |h_k(x)| \leq 1 - u \quad \text{für } |x| \leq 1, \Re(x) = u \geq \gamma.$$

Dann besitzt im abgeschlossenen Gebiete $|x| \leq 1, \Re(x) \leq \gamma$ die daselbst nach (1)* stetige Funktion $\sum_{k=1}^{p-1} |h_k(x)|$ ein Maximum ε , das wegen (5)*

kleiner ist als 1. Weiter ist nach (2) $|h_p(x)| \leq e^{-m_p(1-u)}$. Legen wir also die natürliche Zahl m_p auf einen Wert fest, wofür zugleich

$$e^{-m_p(1-\gamma)} < 1 - \varepsilon, < \gamma \quad \text{und} \quad \leq \text{ rechte Seite von (4)}$$

(letztere ist positiv, da $p \geq 1$, und wegen (6)* die Zahlen $L_{n_0}, L_{n_1}, \dots, L_{n_{p-1}}$ alle > 0 sind), so ist (weil $\cos \delta_{p-1} \leq \gamma$) (4) erfüllt und $\sum_{k=1}^p |h_k(x)|$ im Kreise $|x| \leq 1$

als auch in einer gewissen Umgebung von $x=1$ so zu einer Funktion $h_p(x)$ modifiziert wird, daß ihre n_p -te Partialsumme die Landausche Grenze G_{n_p} noch ausreichend approximiert, während zugleich (hauptsächlich infolge der ersten Modifikation) $\sum h_p(x)$ in jedem Gebiete $|x| \leq 1, \Re(x) \leq \eta < 1$ gleichmäßig konvergent wird.

$$\begin{aligned} \text{für } \Re(x) \leq \gamma: & \quad < \varepsilon + (1 - \varepsilon) = 1, \\ \text{für } \gamma \leq \Re(x) < 1: & \quad < (1 - u) + u = 1^{10)}, \end{aligned}$$

also auch (5) erfüllt.

Betrachten wir jetzt die rechten Seiten von (6), (7), (8), so stehen dort, da alle auftretenden Parameter festgelegt sind, und die Integrale sämtlich einen Sinn haben, feste Zahlen. Wegen $L_n \rightarrow \infty$ können wir daher n_p positiv ganz so festlegen, daß (6), (7), (8) erfüllt sind.

Nunmehr kann δ_p positiv und so klein gewählt werden, daß (9) und (10) erfüllt sind, und darauf μ_p positiv und so klein, daß (11) besteht.

Durch die hiermit beendete Induktion haben wir eine Folge von Funktionen $h_p(x)$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) erhalten, und wollen nun zeigen, daß durch

$$(13) \quad \sum_{p=1}^{\infty} h_p(x) \quad \text{für } |x| \leq 1, \quad \Re(x) < 1$$

eine Funktion $f(x)$ definiert wird, die unseren Satz V beweist.

Eigenschaften von $f(x)$.

Da nach (4) und (9), wenn $q = 1, 2, 3, \dots$ ist, für jedes $p \geq q + 1$

$$h_p(x) \leq \frac{1}{2^p} \cdot \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} \quad \text{im Gebiete } |x| \leq 1, \quad \Re(x) \leq \cos \delta_q,$$

so konvergiert die Reihe (13) gleichmäßig in jedem derselben; sie definiert also wegen (1) (und (9)) eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leq 1$ und $\Re(x) < 1$ obendrein stetige Funktion $f(x)$.

Für dieselbe ergibt sich aus (5) sofort, daß

$$(14) \quad |f(x)| \leq 1 \quad \text{für } |x| < 1;$$

daß hierin das Gleichheitszeichen nicht gelten kann (in welchem Falle $f(x) = \text{konst.}$, und zwar $|f(x)| = 1$ wäre), folgt daraus, daß nach (4)

$$|f(-1)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |h_p(-1)| \leq \frac{1}{8} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} = \frac{1}{8} \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} \leq \frac{1}{8}$$

ist, letzteres nach der zu Beginn der Konstruktion gemachten Voraussetzung über die L_n . Satz V ist daher bewiesen, sobald gezeigt ist, daß

$$(15) \quad |s_{n_p}| \geq G_{n_p} - L_{n_p} \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \dots;$$

denn unter den Indizes n_p sind unendlich viele verschiedene, da nach (9) $\delta_p \rightarrow 0$, und infolgedessen nach (6) $L_{n_p} \rightarrow \infty$. — Dem Beweise von (15) schicken wir noch eine

¹⁰⁾ Dies, weil $e^{-m_p(1-u)}$ gegen die u -Achse konvex ist.

Zwischenrechnung

voraus. Dieselbe soll zeigen, daß für $p = 1, 2, 3, \dots$

$$(16) \quad J_p = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi) h_p(e^{\varphi i}) d\varphi \right| \geq G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p}.$$

Zunächst ist wegen der fünften Formelzeile der Bezeichnungen und nach (12) der Integrand

$$= |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot e^{-m_p(1-e^{\varphi i})} \cdot e^{-2\mu_p/\sqrt{1-e^{\varphi i}}}.$$

Daher wird

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} J_p &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| e^{-m_p(1-e^{\varphi i})} d\varphi \right| \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| e^{-m_p(1-e^{\varphi i})} (1 - e^{-2\mu_p/\sqrt{1-e^{\varphi i}}}) d\varphi \right|. \end{aligned} \right.$$

Da nun im Integrationsgebiete nach (11)

$$\left| \frac{2\mu_p}{\sqrt{1-e^{\varphi i}}} \right| = \frac{\mu_p \sqrt{2}}{\sqrt{|\sin \frac{1}{2}\varphi|}} \leq \frac{\mu_p \sqrt{2}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\delta_p}} \leq 1,$$

und falls $|z| \leq 1$, stets $|1 - e^z| \leq 2|z|$ ist, ergibt sich unter Benutzung der schärferen Abschätzung aus (11), daß in (17) der Subtrahend

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} d\varphi = {}^{11)} \frac{1}{8} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} G_{n_p} = \frac{1}{8} L_{n_p}.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} J_p &\geq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \Re(e^{-m_p(1-e^{\varphi i})}) d\varphi \right\} - \frac{1}{8} L_{n_p} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi \right\} - \frac{1}{8} L_{n_p} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot (1 - e^{-2\mu_p \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \cos(m_p \sin \varphi)) d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

¹¹⁾ Nach der letzten Formelzeile der Bezeichnungen.

Da im Intervall $(-\pi, \pi)$ der letzte Integrand ≥ 0 ist, sowie¹²⁾

$$(18) \quad |\Phi_{n_p}(\varphi)| = |P_n(e^{i\varphi})|^2 \leq \frac{4}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \quad (0 < |\varphi| \leq \pi),$$

so wird das zugehörige Glied

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} (1 - e^{-2m_p \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \cos(m_p \sin \varphi)) d\varphi \leq \frac{1}{8} L_{n_p},$$

letzteres nach (8). Also ist schließlich

$$\begin{aligned} J_p &\geq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi \right\} - \frac{2}{8} L_{n_p} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} - \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi - \delta_{p-1}} - \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi \right\} - \frac{2}{8} L_{n_p} \\ &\geq G_{n_p} - \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi - \delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} - \frac{3}{8} L_{n_p} \geq G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p}, \end{aligned}$$

letzteres wegen (18), (10) und (6). Nachdem hiermit (16) bewiesen ist, gelingt die

Diskussion der Partialsummen,

d. h. der Beweis der Beziehung (15), mühelos:

Es ist nach der zweiten Formelzeile der Bezeichnungen, weil infolge der Beschränktheit von $f(x)$ für $|x| \leq 1$ der $\lim r=1$ erlaubt ist,

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\varphi i} P_n^2(e^{i\varphi}) f(e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) f(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Also ist für $p=1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} |s_{n_p}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} + \int_{-\delta_p}^{\delta_p} + \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi - \delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi) f(e^{i\varphi}) d\varphi \right| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi) \left(h_p(e^{i\varphi}) + \sum_{k=1}^{p-1} h_k(e^{i\varphi}) + \sum_{p+1}^{\infty} h_k(e^{i\varphi}) \right) d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi - \delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \right|, \end{aligned}$$

¹²⁾ Dies folgt daraus, daß die Koeffizienten von $P_n(x)$ positiv sind und von 1 an monoton abnehmen, durch partielle Summation.

letzteres nach (14) wegen der Stetigkeit von $f(x)$, sowie nach (18). Da nun nach (4) für $r = 1, 2, 3, \dots$

$$|h_{p+r}(x)| \leq \frac{1}{8 \cdot 2^r} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} \text{ für } |x| \leq 1, \quad \Re(x) \leq \cos \delta_p \leq \cos \delta_{p+r-1},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (16), (18), (3), (10), (6)

$$\begin{aligned} |s_{n_p}| &\geq \left(G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^{\frac{2}{3}} \varphi} \sum_{k=1}^{p-1} e^{-\mu_k \sqrt{|\varphi|}} d\varphi \\ &\quad - \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot 2^r} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)| d\varphi - \frac{1}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} L_{n_p} \end{aligned}$$

und nach (7), sowie der letzten Gleichung der Bezeichnungen

$$|s_{n_p}| \geq G_{n_p} - \frac{6}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} G_{n_p} = G_{n_p} - L_{n_p},$$

womit unser Ziel, die Beziehung (15) bewiesen ist.

Göttingen, den 19. Oktober 1920.

(Eingegangen am 20. Oktober 1920.)