

Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function.

Von

A. HURWITZ in Königsberg i. Pr.

Diejenigen Werthe des Argumentes z , für welche die Bessel'sche Transcendente

$$(1) \quad J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \dots + \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(n+r+1)\Gamma(r+1)} - \dots \right]$$

verschwindet, spielen bekanntlich in vielen mathematisch-physicalischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. Man weiss von diesen Nullwerthen, dass sie sämmtlich reell sind, wenn der Index n einen reellen Werth besitzt, welcher nicht kleiner als -1 ist. Den Beweis dieses Satzes pflegt man nach Poisson's Vorgang auf eine Integralformel zu gründen (vgl. unten § 7), die auch sonst in der Theorie der Bessel'schen Functionen von Wichtigkeit ist.*) Herr Schläfli hat aus einer ähnlichen Formel eine weitere Eigenschaft jener Nullwerthe gefolgert.***) Betrachtet man nämlich den einzelnen Nullwerth als Function $\psi(n)$ des Index n , so wächst $\psi(n)$ beständig, wenn n von Null ausgehend die reellen positiven Werthe durchläuft. Endlich ist noch zu bemerken, dass man die Existenz von unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $J_n(z) = 0$ aus dem asymptotischen Werth von $J_n(z)$ für unendlich grosse Werthe von z geschlossen hat.***)

In der vorliegenden Arbeit habe ich die Untersuchung der Nullstellen von $J_n(z)$ weiter geführt. Ich behandle namentlich den Fall,

*) Poisson, *Théorie de la Chaleur*, p. 178. Man vergleiche eine Arbeit von Sturm in *Liouville's Journal*, Bd. I, pag. 384 ff., sowie die Abhandlung von Stern, Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen, *Crelle's Journal* Bd. 22, pag. 1 ff.

**) *Mathematische Annalen* Bd. X, pag. 137, Anmerkung.

***) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2. Band, pag. 210. Hankel hat die hier in Betracht kommende semiconvergente Entwicklung von $J_n(z)$ in den *Mathematischen Annalen* Bd. I, pag. 491 ausführlich untersucht. Die Abschätzung des Restes jener Entwicklung ist indessen, so wie sie Hankel giebt, nicht richtig. Der leicht kenntliche Fehler findet sich pag. 492 unten.

wo n einen beliebigen reellen Werth besitzt und zwar nach einer Methode, welche sich auf allgemeine Sätze über die Nullstellen analytischer Functionen gründet.

Zum Schluss betrachte ich auch solche imaginäre Werthe von n , deren reeller Bestandtheil positiv ist, wobei ich jedoch wieder Integralformeln zu Hülfe ziehen muss. Ich bemerke noch, dass ich bei meinen Entwicklungen $J_n(z)$ ersetze durch die Function

$$(2) f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \cdots + \frac{z^r}{\Gamma(n+r+1)\Gamma(r+1)} + \cdots$$

Der Uebergang von $f_n(z)$ zu $J_n(z)$ wird dann offenbar vermittelt durch die Gleichung

$$(3) J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n f_n\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

Zur Abkürzung werde ich $f_n(z)$ als die „Bessel'sche Reihe“ bezeichnen.

§ 1.

Ueber die Nullstellen analytischer Functionen.

Es sei

$$(4) f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe der complexen Veränderlichen z ,

$$(5) g_\nu(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_\nu z^\nu$$

die Summe ihrer ersten $\nu + 1$ Glieder. Man kann nun beweisen, dass die Nullstellen von $f(z)$ mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit durch die Auflösung der algebraischen Gleichung

$$(6) g_\nu(z) = 0$$

gefunden werden können. Um diese Behauptung näher zu präcisiren, will ich die Werthe von z in der üblichen Weise durch die Punkte einer Ebene darstellen, und in dieser Ebene die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, g_3(z) = 0, \dots$$

markiren. Das auf diese Weise entstehende System von unendlich vielen Punkten wird, einem bekannten Satze zufolge, bestimmte Verdichtungsstellen besitzen und der Sinn der oben ausgesprochenen Behauptung ist nun dieser:

Jede im Innern des Convergenzkreises von $f(z)$ liegende Verdichtungsstelle ist eine Nullstelle von $f(z)$ und umgekehrt: grenzt man um eine Nullstelle von $f(z)$ einen beliebig kleinen Bereich ab, so kann man N so gross wählen, dass eine Wurzel der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ in jenen Bereich hineinfällt, sobald $\nu \geq N$ ist. Ich beweise statt dieses Satzes sogleich einen allgemeineren, welcher ihn als speciellen Fall enthält, schicke jedoch zunächst folgenden Hilfssatz voraus:

„Im Innern und auf dem Rande R eines einfach zusammenhängenden Bereiches B seien die Functionen $f(z)$ und $g(z)$ eindeutig und stetig. In jedem Punkte des Randes R mögen ferner $f(z)$ und $g(z)$ von Null verschieden, sowie

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

sein. Dann verschwindet die Function $f(z)$ im Innern des Bereiches B genau so oft wie die Function $g(z)$.

Zum Beweise setze ich

$$f(z) - g(z) = f(z) \cdot u,$$

und bilde die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \log g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int d \log f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int d \log (1-u),$$

die Integrale erstreckt durch den Rand R . Das letzte dieser Integrale ist nun gleich Null. Während nämlich z den Rand R durchläuft, beschreibt der Punkt $1-u$ einen Weg, welcher zufolge der Ungleichung $|u| < 1$ die Nullstelle ausschliesst, und es kann sich daher $\log (1-u)$ nach Durchlaufung dieses Weges nicht geändert haben. Es ist somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \log g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int d \log f(z),$$

eine Gleichung, welche den zu beweisenden Satz enthält.

Derselbe Satz gilt, beiläufig bemerkt, auch dann noch, wenn der Bereich B von mehreren in sich zurücklaufenden Linien begrenzt wird. Wenn ferner $f(z)$ und $g(z)$ im Innern eines solchen Bereiches nicht überall stetig sind, jedoch nur wie rationale Functionen unstetig werden, so modificirt sich der Satz nur insofern, als an die Stelle der Zahl der Nullstellen die Differenz zwischen dieser Zahl und der Zahl der Unendlichkeitsstellen tritt.

Ich nehme nun an, dass jede einzelne der Functionen

$$g_1(z), g_2(z), \dots, g_\nu(z), \dots$$

ebenso wie $f(z)$ im Innern eines Gebietes G den Charakter einer rationalen Function besitzt und dass gleichmässig für die Umgebung einer beliebigen Stelle des Gebietes

$$\lim_{\nu=\infty} g_\nu(z) = f(z)$$

ist. Sei dann a eine Stelle des Gebietes, an welcher $f(z)$ von der r -ten Ordnung verschwindet. Um diese Stelle a grenze ich einen kleinen ganz im Innern von G liegenden Bereich B ab, innerhalb dessen (einschliesslich des Randes) die Function $f(z)$ nicht verschwindet, ausser an der Stelle a . Es ist dann längs des Randes von B beständig

$$|f(z)| > \varepsilon,$$

wo ε eine positive von Null verschiedene Zahl bedeutet. Nun kann

aber ferner nach Voraussetzung N so gross angenommen werden, dass für alle Stellen des Bereiches B

$$|f(z) - g_v(z)| < \varepsilon$$

wird, sobald $v \geq N$ ist. Daher folgt nach dem vorausgeschickten Hilfssatze, dass von $v = N$ ab jede Function $g_v(z)$ ebenso oft wie $f(z)$, also r Mal im Innern von B verschwindet. Hierbei ist noch zu bemerken, dass der Bereich B beliebig verkleinert werden kann, so dass die r Nullstellen von $g_v(z)$ mit unendlich wachsendem v der Stelle a unendlich nahe rücken.

Liegen umgekehrt in jeder noch so kleinen Umgebung von $z = a$ unendlich viele Wurzeln der Gleichungen $g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \dots$, so ist a nothwendig eine Nullstelle von $f(z)$. Andernfalls würde man nämlich um $z = a$ einen kleinen Bereich abgrenzen können, innerhalb dessen $|f(z)| > \varepsilon$ ist, wo ε eine positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet. Da andererseits v so gross gewählt werden kann, dass erstens $g_v(z)$ für einen Punkt z_0 jenes Bereiches verschwindet und zweitens $|f(z) - g_v(z)| < \varepsilon$ ist, so ergibt sich für die Stelle z_0 der Widerspruch, dass gleichzeitig $|f(z_0)| > \varepsilon$ und $|f(z_0)| < \varepsilon$ ist. Daher ist die Annahme, $f(z)$ sei für $z = a$ von Null verschieden, unzulässig.

Hiernach kann man folgenden Satz aussprechen:

„Es sei in einem endlichen Gebiete G die Function $f(z)$ die gleichmässige Grenze der Reihe von Functionen $g_1(z), g_2(z), \dots, g_v(z), \dots$, also $\lim g_v(z) = f(z)$. Innerhalb G möge ferner jede einzelne der genannten Functionen den Charakter einer rationalen Function besitzen.

Dann sind im Innern von G die Nullstellen der Function $f(z)$ identisch mit denjenigen Stellen, an welchen sich die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \dots, g_v(z) = 0, \dots$$

verdichten. Und zwar liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle a , welche eine r -fache Nullstelle von $f(z)$ ist, genau r Wurzeln der Gleichung $g_v(z) = 0$, sobald v eine bestimmte von der Grösse jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet.“

Der entsprechende Satz gilt auch für die Unendlichkeitsstellen der Function $f(z)$, sowie für die Stellen, an welchen $f(z) = C$ wird, unter C eine beliebige Constante verstanden. Ferner ist in diesem Satze als ein besonderer Fall der oben genannte enthalten, nach welchem die

Bestimmung der Nullstellen einer Potenzreihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ mit beliebiger Genauigkeit durch die Auflösung der algebraischen Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

geschehen kann.

§ 2.

Die Bessel'sche Reihe als Grenze einer besonderen rationalen Function.

Will man den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz verwenden, um die Nullstellen irgend einer besonderen Function $f(z)$ zu bestimmen, so wird es sich zunächst immer um eine zweckmässige Wahl der Functionen $g_1(z)$, $g_2(z)$, ..., $g_r(z)$, ... handeln. In dem Falle der Bessel'schen Reihe

$$(7) \quad f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \dots$$

sind es die Zähler und Nenner der Kettenbruchentwicklung von $\frac{f_n(z)}{f_{n+1}(z)}$, welche passend als Functionen $g_r(z)$ gewählt werden. Diese Functionen sind von Heine, Christoffel und Lommel behandelt worden.*) Der Vollständigkeit halber will ich jedoch die Formeln, welche für den vorliegenden Zweck von Wichtigkeit sind, kurz entwickeln.

Man verificirt zunächst ohne Weiteres die bekannten Gleichungen

$$(8) \quad \frac{df_n}{dz} = f_{n+1},$$

$$(9) \quad f_{n-1} = n f_n + z f_{n+1},$$

wobei ich, wie in der Folge mehrfach, kurz f_n statt $f_n(z)$ geschrieben habe. Durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung (9) erhält man eine Gleichung der Form

$$f_{n-1} = g_v f_{n+v-1} + z h_v \cdot f_{n+v},$$

wo g_v und h_v ganze Functionen von z und n bezeichnen. Um letztere zu bestimmen ersetze man f_{n+v-1} nach (9) durch $(n+v)f_{n+v} + z f_{n+v+1}$; dann erkennt man, dass h_{v+1} mit g_v und g_{v+1} mit $(n+v)g_v + z h_v$ identisch ist. Hiernach hat man:

$$(10) \quad f_{n-1} = g_v f_{n+v-1} + z g_{v-1} f_{n+v},$$

$$(11) \quad g_{v+1} = (n+v)g_v + z g_{v-1}.$$

Man findet vermöge dieser Gleichungen nach und nach:

$$g_{-1} = 0, g_0 = 1, g_1 = n, g_2 = n(n+1) + z,$$

$$g_3 = n(n+1)(n+2) + 2(n+1)z, \dots$$

Zur Auffindung des allgemeinen Ausdruckes für g_v , bemerke ich, dass die Recursionsformel (11) befriedigt wird, wenn man statt g_v entweder

$$(-1)^v f_{-n-v} \quad \text{oder} \quad (-1)^v z^{v+1} f_{n+v}$$

einträgt. Daher ist allgemein

*) Heine, l. c. Bd. 1, pag. 234, Christoffel, Crelle's Journal, Bd. 58, pag. 91, Lommel, diese Annalen Bd. 4, pag. 108ff.

$$g_\nu = (-1)^\nu (\varphi f_{-\nu} - \psi z^{\nu+1} f_{\nu+1}),$$

wenn die Factoren φ und ψ so bestimmt werden, dass letztere Gleichung für $\nu = -1$ und $\nu = 0$ richtig ist. Es müssen also φ und ψ die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi f_{-n+1} - \psi f_{n-1} &= 0, \\ \varphi f_{-n} - \psi z f_n &= 1\end{aligned}$$

befriedigen. Nun ist aber die Determinante $f_{-n} f_{n-1} - z f_{-n+1} f_n$ von z unabhängig; denn ihr nach z genommener Differentialquotient verschwindet zufolge der Relationen (8) und (9). Der Werth jener Determinante ergibt sich, indem man $z = 0$ setzt, und man findet so

$$(12) \quad f_{-n} f_{n-1} - z f_{-n+1} f_n = \frac{\sin n\pi}{\pi}$$

und somit

$$\varphi = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot f_{n-1}, \quad \psi = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot f_{-n+1}.$$

Nach Eintragung dieser Werthe von φ und ψ kommt:

$$(13) \quad g_\nu = \frac{(-1)^\nu \pi}{\sin n\pi} [f_{n-1} f_{-\nu} - z^{\nu+1} f_{n+1} f_{-\nu+1}].$$

Ersetzt man die Functionen f durch ihre Reihenentwicklungen so erhält man nach den erforderlichen Reductionen:

$$(14) \quad g_\nu = \sum_r (\nu-r)_r \frac{\Gamma(n+\nu-r)}{\Gamma(n+r)} z^r,$$

wobei a_r den r^{ten} Binomialcoefficienten von a bezeichnet und die Summation von $r = 0$ bis $r = \frac{\nu}{2}$ oder $r = \frac{\nu-1}{2}$ auszudehnen ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.*) Zur besseren Uebersicht will ich die Anfangs- und Endglieder von $g_{2\nu}$ und $g_{2\nu+1}$ hier ausführlich hinschreiben; es ist

$$(15) \quad \begin{cases} g_{2\nu} = z^\nu + (\nu+1)_2 (n+\nu)(n+\nu-1) z^{\nu-1} + \dots \\ \quad + (2\nu-1) \cdot (n+1) \dots (n+2\nu-2) z + n(n+1) \dots (n+2\nu-1), \\ g_{2\nu+1} = (\nu+1)(n+\nu) z^\nu + (\nu+2)_3 (n+\nu-1)(n+\nu)(n+\nu+1) z^{\nu-1} \\ \quad + \dots + 2\nu(n+1) \dots (n+2\nu-1) z + n(n+1) \dots (n+2\nu). \end{cases}$$

Trägt man jetzt in die Formel (13) für $f_{-\nu}$ und $f_{\nu+1}$ die Reihenentwicklungen ein, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichung $\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$:

*) Die Function g_ν befriedigt, beiläufig bemerkt, die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}z^2 y^{IV} - 2(\nu-2) z^2 y''' + [(\nu-1)(\nu-2) - n(n+\nu-1) - 4z] z y'' \\ + [n\nu(n+\nu-1) + (4\nu-6)z] y' - \nu(\nu-1)y = 0,\end{aligned}$$

aus welcher ebenfalls ihr allgemeiner Ausdruck (14) abgeleitet werden kann.

$$(16) \quad \frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)} = f_{n-1} \left[1 + \frac{z}{-n-\nu+1} + \dots \right] \\ + \frac{(-1)^{n+1} \pi}{\sin n\pi} f_{-n+1} \frac{z^{n+1}}{\Gamma(n+\nu)\Gamma(n+\nu+1)} \left[1 + \frac{z}{n+\nu+1} + \dots \right].$$

Ich schliesse nun Einfachheit halber den Fall eines ganzzahligen n von der Betrachtung aus. Ist dann G ein beliebig grosses aber endliches Gebiet der z -Ebene, so kann man der Gleichung (16) zufolge N so gross wählen, dass für jede Stelle des Gebietes $\frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)}$ sich um weniger als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse von f_{n-1} unterscheidet, sobald $\nu \geq N$ genommen wird.

Es ist also in jedem endlichen Gebiete f_{n-1} die gleichmässige Grenze von $\frac{g_\nu}{\Gamma(n+\nu)}$ und man kann daher nach dem Satze des vorigen Paragraphen die Nullstellen von $f_{n-1}(z)$ mit beliebiger Genauigkeit durch Auflösung der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ finden.

§ 3.

Ueber eine Art Sturm'scher Reihen.

Ehe ich zu der Untersuchung der Gleichung $g_\nu(z) = 0$ übergehe, will ich zur Vereinfachung der Darstellung einen allgemeinen Satz vorausschicken.

Es seien

$$(17) \quad V_m, V_{m-1}, \dots, V_{\mu+1}, V_\mu, V_{\mu-1}, \dots, V_1, V_0$$

ganze Functionen von z mit reellen Coefficienten, der Grad von V_i sei gleich i und der Coefficient der höchsten Potenz eine positive Grösse, insbesondere V_0 eine positive Constante. Die Functionen mögen ferner folgenden Bedingungen genügen:

- 1) Sobald für einen reellen Werth von z eine der Functionen V_i , wo $i \geq \mu$ ist, verschwindet, besitzen die benachbarten Functionen V_{i+1} , V_{i-1} nichtverschwindende Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen; wenn dagegen V_μ verschwindet, so haben $V_{\mu+1}$ und $V_{\mu-1}$ nicht verschwindende Werthe von demselben Vorzeichen.
- 2) Wenn z die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so geht der Quotient $\frac{V_m}{V_{m-1}}$ überall, wo er verschwindet, von negativen zu positiven Werthen über.
- 3) Die Gleichung $V_m = 0$ hat keine mehrfachen reellen Wurzeln.

Aus diesen Voraussetzungen lässt sich nun Folgendes erschliessen. Betrachtet man die Reihe

$$(18) \quad V_\mu, V_{\mu-1}, \dots, V_1, V_0,$$

so bietet dieselbe μ Zeichenwechsel für $z = -\infty$ und μ Zeichenfolgen für $z = +\infty$. Da nun die Reihe nur dadurch einen Zeichenwechsel verlieren kann, dass z eine Wurzel der Gleichung $V_\mu = 0$ passiert und dabei zugleich $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ von negativen zu positiven Werthen übergeht, so folgt:

„Die Wurzeln der Gleichung $V_\mu = 0$ sind sämmtlich reell und von einander verschieden. Der Quotient $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ geht, wenn z eine Wurzel der Gleichung $V_\mu = 0$ überschreitet, stets von negativen zu positiven Werthen über.“

Eine Folge hiervon ist, dass die Zahl der Wurzeln von $V_\mu = 0$, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen, genau gleich der Zahl der Zeichenwechsel ist, welche die Reihe (18) verliert, während z von α bis β wächst.

Betrachtet man jetzt die Reihe (17), so verliert dieselbe, wenn z von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst m Zeichenwechsel. Der Verlust eines Zeichenwechsels tritt nun ein, erstens beim Ueberschreiten einer Nullstelle von V_m und zweitens beim Ueberschreiten einer Nullstelle von V_μ und zwar gehen im letzteren Falle immer zwei Zeichenwechsel verloren. Denn da $\frac{V_\mu}{V_{\mu-1}}$ kurz vor einer Nullstelle von V_μ negativ ist, so bieten die Functionen $V_{\mu+1}$, V_μ , $V_{\mu-1}$ kurz vor resp. kurz nach dem Ueberschreiten einer Nullstelle die Zeichen ε , $-\varepsilon$, ε , resp. ε , ε , ε dar, wo ε entweder $+$ oder $-$ sein kann. Bezeichnet daher r die Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$, so ist

$$r + 2\mu = m,$$

und also 2μ die Zahl der imaginären Nullstellen von V_m . Man hat also den Satz:

„Die Gleichung $V_m = 0$ hat 2μ imaginäre und $m - 2\mu$ reelle Wurzeln.“

Um die Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$ zu bestimmen, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen, bezeichne man mit A die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (17), mit A' die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (18) verliert, wenn z von α bis β wächst. Es ist dann

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta} + 2r'_{\alpha\beta} &= A, \\ r'_{\alpha\beta} &= A', \end{aligned}$$

wo r_β die gesuchte Zahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$ und $r'_{\alpha\beta}$ die Zahl der in den Grenzen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegenden Wurzeln von $V_\mu = 0$ bedeutet.

Man hat hiernach

$$(19) \quad r_{\alpha\beta} = A - 2A'$$

als Anzahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$, welche zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$ liegen.

§ 4.

Die Nullstellen der Functionen g_v .

Eliminirt man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} g_v &= (n+v-1)g_{v-1} + zg_{v-2}, \\ g_{v+1} &= (n+v)g_v + zg_{v-1}, \\ g_{v+2} &= (n+v+1)g_{v+1} + zg_v \end{aligned}$$

die Functionen g_{v+1} und g_{v-1} , so erhält man

$$(20) \quad (n+v-1)g_{v+2} = c_v g_v - (n+v+1)z^2 g_{v-2},$$

wo zur Abkürzung

$$(21) \quad c_v = (n+v)[(n+v-1)(n+v+1) + 2z]$$

gesetzt ist. Wird nach und nach $v = 2, 4, 6, \dots$ genommen, so ergibt sich die Gleichungskette

$$(22) \quad \begin{cases} (n+1)g_4 = c_2 g_2 - (n+3)z^2 g_0, \\ (n+3)g_6 = c_4 g_4 - (n+5)z^2 g_2, \\ (n+5)g_8 = c_6 g_6 - (n+7)z^2 g_4, \\ \dots \end{cases}$$

neben welche sich eine andere für die Functionen g_1, g_3, g_5, \dots stellt, die ich indessen im Folgenden nicht verwende.

Sei nun n eine reelle Grösse und seien erstens die Zahlen

$$n+1, n+3, n+5, \dots$$

sämmtlich positiv. Dann ergiebt die Sturm'sche Deduction angewandt auf die Reihe g_0, g_2, g_4, \dots , dass die Gleichung $g_{2v} = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt. Also:

„Wenn $n > -1$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichungen

$$g_2(z) = 0, g_4(z) = 0, \dots, g_{2v}(z) = 0, \dots$$

sämmtlich reell.“

Die Zahl der positiven Wurzeln von $g_{2v} = 0$ ist in diesem Falle gleich der Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe g_0, g_2, \dots, g_{2v} bei dem Uebergang von $z=0$ bis $z=\infty$ verliert. Es ist aber für $z=0$

$$(23) \quad g_0 = 1, g_2 = n(n+1), g_4 = (n+2)(n+3)g_2, \dots \\ \dots, g_{2v+2} = (n+2v)(n+2v+1)g_{2v}, \dots$$

Da nun $n > -1$ ist, so bietet diese Reihe einen oder keinen Zeichenwechsel dar, je nachdem $n < 0$ oder $n > 0$ ist. Also folgt:

Die Gleichung $g_{2\nu}(x) = 0$ hat eine positive und $\nu - 1$ negative Wurzeln, wenn n zwischen -1 und 0 liegt, dagegen sind für $n > 0$ alle Wurzeln jener Gleichung negativ.

Sei nun zweitens in der Reihe

$$n + 1, n + 3, n + 5, \dots$$

$n + 2\mu + 1$ die erste Zahl, welche positiv ist, wobei $\mu > 0$ vorausgesetzt wird. Dann sind für die Functionenreihe

$$V_0 = g_0, V_1 = g_2, \dots, V_\mu = g_{2\mu}, \dots, V_\nu = g_{2\nu}$$

die Bedingungen 1) des vorigen Paragraphen erfüllt, wie dies sofort aus den Gleichungen (22) hervorgeht. Da nun, wie sogleich gezeigt werden soll, auch die Bedingungen 2) und 3) erfüllt sind, sobald ν eine gewisse Grösse überschreitet, so folgt:

Wenn n zwischen $-2\mu - 1$ und $-2\mu + 1$ liegt, so besitzt die Gleichung

$$g_{2\nu}(x) = 0$$

genau 2μ imaginäre Wurzeln, falls ν eine gewisse Zahl N überschreitet. Zugleich ist von den reellen Wurzeln dieser Gleichung eine oder keine positiv, je nachdem n zwischen $-2\mu - 1$ und -2μ oder zwischen -2μ und $-2\mu + 1$ liegt.

Der letzte Zusatz ergibt sich aus (19) indem man bemerkt, dass die Reihe $g_0, g_2, \dots, g_{2\nu}$ nach (23) entweder einen oder keinen Zeichenwechsel aufweist, je nachdem $(n + 2\mu)(n + 2\mu + 1)$ negativ oder positiv ist.

Um den Nachweis zu führen, dass von einem bestimmten ν ab die Bedingungen 2) und 3) des vorigen Paragraphen erfüllt sind, bemerke ich, dass diese Bedingungen dann und nur dann erfüllt sind, wenn der Differentialquotient von $\frac{V_\nu}{V_{\nu-1}} = \frac{g_{2\nu}}{g_{2\nu-2}}$ oder was auf dasselbe hinausläuft, die Functionaldeterminante $g_{2\nu-2}g'_{2\nu} - g_{2\nu}g'_{2\nu-2}$ für jede reelle Nullstelle von $g_{2\nu}$ einen positiven (nicht verschwindenden) Werth besitzt. Jene Functionaldeterminante drückt sich aber vermöge (11) durch

$$g_{2\nu-2}^2 + (n + 2\nu - 1)\Delta_{2\nu-1}$$

aus, wenn allgemein

$$(24) \quad \Delta_\nu = g_{\nu-1}g'_\nu - g'_\nu g_{\nu-1}$$

gesetzt wird. Ich werde nun zeigen, dass $\Delta_{2\nu-1}$ von einem gewissen Werthe von ν ab für jeden reellen Werth von x positiv ist, woraus dasselbe dann für jene Functionaldeterminante folgt.

Zu dem Ende benutze ich den Ausdruck (13) für g_ν ; vermöge desselben ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(25) \Delta_\nu = \left(\frac{\pi}{\sin n\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\Gamma(n-\nu+2)}\right)^2 \cdot f_{n-1}^2 \left[\frac{1}{n+\nu-1} + \dots\right] + \dots,$$

wo die durch Punkte angedeuteten Terme gegen den berücksichtigten mit unendlich wachsendem ν verschwinden. Wenn indessen z einen Werth besitzt, für welchen f_{n-1} verschwindet, so ist die Formel (25) zu ersetzen durch

$$(26) \Delta_\nu = \left(\frac{\pi}{\sin n\pi}\right)^4 (-z)^{\nu-1} + \dots$$

Aus diesen Formeln folgt nun: Beschränkt man z auf irgend ein endliches reelles Intervall, so kann man N so gross wählen, dass $\Delta_{2\nu-1}$ für das ganze Intervall positiv ist, sobald $\nu > N$ genommen wird. Nun findet man aus (11) und (15):

$$(27) \Delta_{2\nu-1} = \frac{\nu(\nu-1)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{6} [2\nu^2 + 2\nu(n-2) - n] z^{2\nu-2} + \dots,$$

$$(28) \Delta_{\nu+2} = (n+\nu)g_\nu^2 + z^2 \Delta_\nu,$$

und hieraus geht hervor, dass $\Delta_{2\nu-1}$ für unendlich grosse Werthe von z positiv ist, sobald ν eine gewisse Zahl überschreitet und dass $\Delta_{2\nu+1}$ für die eventuellen äussersten Nullstellen von $\Delta_{2\nu-1}$ noch positiv ist, also nur zwischen diesen Nullstellen negativ werden könnte. Alle diese Betrachtungen zusammen ergeben nun die Richtigkeit des erwähnten Satzes:

„Setzt man $\Delta_\nu = g_{\nu-1}g'_\nu - g'_{\nu-1}g_\nu$, so ist für jeden reellen Werth von z $\Delta_{2\nu-1}$ positiv, sobald ν eine gewisse Zahl überschreitet.“

Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass derselbe Satz für $\Delta_{2\nu}$ gilt, wenn $f_{n-1}(z)$ für keinen positiven Werth von z verschwindet. Für die Umgebung einer positiven Nullstelle von $f_{n-1}(z)$ besitzt hingegen $\Delta_{2\nu}$ für genügend grosse Werthe von ν das negative Zeichen, wie aus (26) ersichtlich ist.

§ 5.

Die Nullstellen der Bessel'schen Reihe für reelle Indices.

Da die Nullstellen der Function $f_{n-1}(z)$ mit den Verdichtungsstellen der Wurzeln von

$$g_2(z) = 0, g_4(z) = 0, \dots, g_{2\nu}(z) = 0, \dots$$

übereinstimmen, so ergibt sich aus den Resultaten des vorigen Paragraphen ohne Weiteres:

„Die Wurzeln der Gleichung

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \dots + \frac{z^n}{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} + \dots = 0$$

sind sämmtlich reell, falls $n > -2$ ist. Diese Wurzeln sind für

$n > -1$ sämmtlich negativ; dagegen ist eine derselben positiv und die übrigen negativ, wenn n zwischen -2 und -1 liegt.“

Der Fall, wo $n < -2$ ist, erfordert indessen noch weitere Entwicklungen, da die Verdichtungstellen eines Systems reeller Werthe freilich reell, aber diejenigen eines Systems imaginärer Werthe nicht nothwendig imaginär sind.

Ich betrachte zunächst die Gleichung

$$(29) \quad g_{2\nu}(z) + \lambda g_{2\nu+1}(z) = 0,$$

in welcher λ irgend eine reelle Constante bezeichnet. Ist $\lambda = 0$ und hat ν einen genügend grossen Werth, so besitzt die Gleichung (29) 2μ imaginäre Wurzeln. Wenn nun λ von Null bis zu irgend einem Werthe λ_0 variirt, so kann die Zahl der imaginären Wurzeln sich nur dann verändern, wenn λ einen Werth passirt, für welchen (29) eine Doppelwurzel erhält. Für diese Doppelwurzel würde aber

$$\Delta_{2\nu+1} = g_{2\nu+1}g'_{2\nu} - g_{2\nu}g'_{2\nu+1}$$

verschwinden, was nach dem vorigen Paragraphen nicht angeht. Also:

„Die Gleichung (29) hat für jeden reellen Werth von λ genau 2μ imaginäre Wurzeln.“

Wenn daher λ von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt, so durchlaufen die imaginären Wurzeln der Gleichung (29) eine Curve, welche aus 2μ getrennten Zügen besteht. Sei

$$(30) \quad z = x + iy, \quad z' = x - iy,$$

so ist die Gleichung der genannten Curve

$$(31) \quad \varphi_\nu(x, y) = \frac{g_{2\nu+1}(z)g_{2\nu}(z') - g_{2\nu+1}(z')g_{2\nu}(z)}{z - z'} = 0$$

und die Glieder höchster Dimension von $\varphi_\nu(x, y)$ lauten:

$$c \cdot (zz')^{\nu-1} = c(x^2 + y^2)^{\nu-1},$$

wo

$$c = \frac{(\nu+1)\nu(n+\nu)(n+\nu-1)}{6} [2\nu^2 + 2n\nu + n - 2]$$

ist. Die Curve $\varphi_\nu(x, y) = 0$ ist also von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung und trifft die unendlich ferne Gerade nur in den imaginären Kreispunkten, welche $(\nu-1)$ -fache Punkte der Curve sind.

Die 2μ Züge der Curve sind daher ganz im Endlichen liegende Ovale.

Da für $y = 0$, also $z = z'$, die Function $\varphi_\nu(x, y)$ in $\Delta_{2\nu+1}$ übergeht, welches beständig positiv ist, so treffen die Ovale nicht die Axe der reellen Zahlen und es geht $\varphi_\nu(x, y)$, wenn der Punkt $z = x + iy$ von einem reellen Werthe ausgehend sich so bewegt, dass er eines der Ovale überschreitet, von positiven zu negativen Werthen über. Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichung (11):

$$(32) \quad \varphi_{\nu+1}(x, y) = (n + 2\nu + 1)g_{2\nu+1}(z)g_{2\nu+1}(z') + zz'\varphi_\nu(x, y),$$

und es ist also φ_{r+1} noch positiv, wenn φ_r verschwindet, abgesehen von denjenigen Punkten $z = x + iy$, welche die Gleichung $g_{2r+1}(z) = 0$ befriedigen und welche gleichzeitig auf den Curven $\varphi_{r+1} = 0$ und $\varphi_r = 0$ liegen.

Hieraus geht hervor, dass jedes Oval der Curve $\varphi_{r+1} = 0$ je ein Oval der Curve $\varphi_r = 0$ in einem Punkte, für welchen $g_{2r+1}(z) = 0$ ist, von Innen berührt*). Die 2μ Ovale werden sich ferner mit wachsendem ν immermehr verkleinern, bis sie sich für $\nu = \infty$ auf 2μ Punkte zusammengezogen haben. Da nämlich die Grenzstellen der Punkte eines Ovals Nullstellen von $f_{n-1}(z)$ sind und letztere discret über die Ebene vertheilt sind, so kann die Grenze jedes Ovals nur ein Punkt sein. Auf demselben Grunde beruht die Richtigkeit der stillschweigend gemachten Annahme, dass die 2μ Ovale der Curve $\varphi_r = 0$ sämmtlich ausser einander liegen.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun der Satz:

„Die Gleichung

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2)\Gamma(2)} + \cdots + \frac{z^\nu}{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} + \cdots = 0$$

hat für negative, zwischen $-2\mu - 2$ und -2μ liegenden Werthe von n genau 2μ paarweis conjugirte imaginäre und übrigens unendlich viele reelle Wurzeln**). Zur näheren Bestimmung der imaginären Wurzeln hat man eine unendliche Reihe algebraischer Curven

$$\varphi_\nu(x, y) = 0, \varphi_{\nu+1}(x, y) = 0, \dots$$

von denen jede einzelne aus 2μ im Endlichen und ausser einander liegenden Ovalen besteht. Das einzelne Oval der Curve $\varphi_x = 0$ berührt und umschliesst je ein Oval der nächstfolgenden Curve und enthält zugleich in seinem Innern je eine imaginäre Nullstelle von $f_n(z)$. Auf diese Nullstelle zieht sich das Oval mit wachsendem x immer mehr und mehr zusammen.“

Was nun die reellen Wurzeln betrifft, so folgt aus dem vorigen Paragraphen:

„Von den reellen Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ sind entweder alle oder alle bis auf eine negativ, je nachdem n zwischen $-2\mu - 1$ und -2μ oder zwischen $-2\mu - 2$ und $-2\mu - 1$ liegt.“

*) Siehe die Fig. 1, welche diese Verhältnisse qualitativ veranschaulichen soll. Die Figur bezieht sich auf den Fall $\mu = 1$ (vgl. unten § 8).

**) Wenn n continuirlich in einen ganzzahligen Werth übergeht, so werden die imaginären Wurzeln sämmtlich unendlich klein.

§ 6.

Die reellen Nullstellen von $f_n(z)$.

Der zuletzt genannte Satz lässt sich auch direct aus der Reihenentwicklung von $f_n(z)$ ableiten, wie ich nunmehr zeigen will.

Ich stütze mich dabei auf folgende Sätze:

„Wenn die Function

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{2\nu} x^{2\nu}$$

für alle reellen Werthe von x positiv ist, so gilt Gleiches von der Function

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi'(x) + \dots + \varphi^{(2\nu)}(x).$$

In der That ist

$$\psi(x) = e^x \int_x^\infty e^{-x} \varphi(x) dx,$$

aus welcher Darstellung der Satz unmittelbar hervorgeht.

„Unter derselben Voraussetzung besitzt die Function

$$\chi(x) = \frac{c_0}{\Gamma(a)} + \frac{c_1}{\Gamma(a+1)} x + \dots + \frac{c_{2n}}{\Gamma(a+2n)} x^{2n}$$

für alle reellen Werthe von x dasselbe Vorzeichen wie $\sin a\pi$. Dabei bedeutet a eine Constante, welche der Bedingung $a + 2n < 1$ genügt.“

Zum Beweise bemerke man, dass für $a < 1$ die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi} \Gamma(1-a) = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-a} dx$$

gilt. Vermöge derselben ergibt sich:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-a} \left[c_0 - c_1 \frac{x}{x} + c_2 \frac{x^2}{x^2} - + \dots \right] dx \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^{-a} \varphi\left(-\frac{x}{x}\right) dx, \end{aligned}$$

woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ich wende den ersten Satz auf die Function $\varphi(x) = \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$ an und erhalte:

„Die Summe der ersten 2ν Glieder der Exponentialreihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

besitzt für jeden reellen Werth von x einen positiven Werth.“*)

*) Dieser Satz ist auf andere Weise von Hermite bewiesen (Cours d'Analyse p. 34).

Es möge nun der Index n der Besselschen Reihe zwischen $-2\mu-1$ und -2μ liegen. Dann haben die Glieder der Reihe, welche mit $z^{2\mu+1}$, $z^{2\mu+3}$, ... multiplicirt sind, sämmtlich positive Coefficienten. Die Summe der vorhergehenden Glieder ist

$$\chi(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \frac{z}{\Gamma(n+2) \cdot 2!} + \cdots + \frac{z^{2\mu}}{\Gamma(n+2\mu+1) \cdot (2\mu)!}.$$

Diese Summe besitzt aber nach den vorausgeschickten Sätzen für alle reellen Werthe von z das Vorzeichen von $\sin(n+1)\pi$, welches das positive ist, da $(n+1)\pi$ zwischen $-2\mu\pi$ und $(-2\mu+1)\pi$ liegt. Daher ist a fortiori $f_n(z)$ für alle positiven Werthe von z positiv, und die reellen Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ sind also sämmtlich negativ.

Wenn nun zweitens der Index n zwischen $-2\mu-2$ und $-2\mu-1$ liegt, so schreibe man

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} + R,$$

wo R die Summe der auf das erste Glied der Reihe folgenden Glieder bedeutet. Der Term $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$ besitzt einen negativen Werth, während der Differentialquotient von R , welcher gleich $f_{n+1}(z)$ ist, für alle positiven Werthe von z positiv ist. Lässt man daher z von Null aus wachsen, so wächst R von Null ausgehend beständig und folglich wird für einen und nur einen positiven Werth von z die Gleichung $R = -\frac{1}{\Gamma(n+1)}$, also $f_n(z) = 0$ erfüllt werden.*)

§ 7.

Verwendung der Integralsätze.

Die schon oben erwähnten Integralformeln gestatten es, einen Theil der erhaltenen Resultate aufs Neue zu beweisen und nach einigen Richtungen zu ergänzen. Man erhält jene Formeln bekanntlich, indem man von der Differentialgleichung

$$(33) \quad \frac{d^2 \left(z^{\frac{n}{2}} f_n(z) \right)}{(d \log z)^2} = z^{\frac{n}{2}} f_n(z) \left(z + \frac{n^2}{4} \right)$$

ausgeht. Es seien m, n, r, s irgend welche complexe Constante und t eine reelle Variable; ferner werde zur Abkürzung

$$(34) \quad t^{\frac{m}{2}} f_m(rt) = u, \quad t^{\frac{n}{2}} f_n(st) = v$$

*) Wegen der numerischen Berechnung der negativen Wurzeln von $f_n(z) = 0$ vergleiche man Stern, l. c. pag. 35 ff. und Crelle's Journal Bd. 33, pag. 363.

gesetzt. Dann ist nach (33):

$$(35) \quad \frac{d^2 u}{(d \log t)^2} = u \left(r t + \frac{m^2}{4} \right), \quad \frac{d^2 v}{(d \log t)^2} = v \left(s t + \frac{n^2}{4} \right),$$

und hieraus folgt

$$(36) \quad \frac{d}{d \log t} \left[A u \frac{dv}{d \log t} + B v \frac{du}{d \log t} \right] = (A+B) \frac{du}{d \log t} \frac{dv}{d \log t} + uv \left[A \left(s t + \frac{n^2}{4} \right) + B \left(r t + \frac{m^2}{4} \right) \right],$$

wobei A und B beliebige Constante bedeuten.

Wenn nun $A = 1$, $B = -1$ und $m = n$ genommen wird, so besitzt das Anfangsglied in der Entwicklung von

$$A u \frac{dv}{d \log t} + B v \frac{du}{d \log t}$$

den Exponenten $\frac{m+n}{2} + 1 = n + 1$ und der Ausdruck verschwindet also für $t = 0$, wenn der reelle Bestandtheil von n grösser als -1 ist. Die Integration der Gleichung (36) zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ ergibt dann

$$[t(uv' - vu')]_{t=1} = (s-r) \int_0^1 uv dt,$$

oder in Rücksicht auf (34) und die Relation $f'_n = f_{n+1}$:

$$(37) \quad s f_{n+1}(s) f_n(r) - r f_{n+1}(r) f_n(s) = (s-r) \int_0^1 t^n f_n(rt) f_n(st) dt.$$

Im Allgemeinen wird dagegen die Entwicklung des Ausdrucks

$$A u \frac{dv}{d \log t} + B v \frac{du}{d \log t}$$

mit dem Terme $t^{\frac{m+n}{2}}$ beginnen, und es wird folglich nur unter der Annahme, dass $m+n$ einen positiven reellen Bestandtheil besitze, jener Ausdruck für $t = 0$ verschwinden. Die Integration der Gleichung (36) ergibt dann:

$$(38) \quad A f_m(r) \left[f_n(s) + \frac{n}{2} f_{n+1}(s) \right] + B f_n(s) \left[f_m(r) + \frac{m}{2} f_{m+1}(r) \right] \\ = (A+B) \int_0^1 t u' v' dt + (A n^2 + B m^2) \frac{1}{4} \int_0^1 u v \frac{dt}{t} \\ + (A s + B r) \int_0^1 u v dt.$$

Es seien nun in der Formel (37) $s = z$ und $r = z'$ conjugirt complexe Grössen, dagegen n reell. Dann ist das auf der rechten Seite auftretende Integral positiv, da alle seine Elemente positiv sind. Es folgt also:

„Ist n reell und grösser als -1 , bezeichnen ferner z und z' conjugirt complexe Grössen, so besitzt der Quotient

$$\frac{zf_{n+1}(z)f_n(z') - z'f_{n+1}(z')f_n(z)}{z - z'}$$

stets einen von Null verschiedenen positiven Werth.“

Ich setze nun in diesem Satze $n + \nu - 1$ an Stelle von n , unter n jetzt eine beliebige reelle Zahl und unter ν eine ganze Zahl verstanden, welche der Bedingung $n + \nu > 0$ genügt. Ich nehme ferner an, dass z und z' conjugirte Wurzeln der Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ sind.

Dann ist nach (10)

$$\begin{aligned} z f_{n+\nu}(z) \cdot g_{\nu-1}(z) &= -g_{\nu}(z) f_{n+\nu-1}(z), \\ z' f_{n+\nu}(z') \cdot g_{\nu-1}(z') &= -g_{\nu}(z') f_{n+\nu-1}(z'), \end{aligned}$$

und unser Satz ergibt, dass der Quotient

$$\frac{g_{\nu}(z)g_{\nu-1}(z') - g_{\nu-1}(z)g_{\nu}(z')}{z - z'}$$

negativ ist. Dies lässt sich, wenn noch $z = x + iy$, $z' = x - iy$ gesetzt wird, so aussprechen:

„Die imaginären Wurzeln der Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ liegen in denjenigen Gebieten der Ebene, in welchen die Function

$$(39) \quad \psi_{\nu}(x, y) = \frac{g_{\nu}(z)g_{\nu-1}(z') - g_{\nu-1}(z)g_{\nu}(z')}{z - z'}$$

negativ ist. Dabei bezeichnet ν eine ganze Zahl, welche der Bedingung $n + \nu > 0$ genügt.“

Die im Satze genannten Gebiete werden durch die Curve $\psi_{\nu}(x, y) = 0$ abgegrenzt, wobei indessen nicht ausgeschlossen ist, dass diese Curve keinen oder nur isolirte reelle Punkte besitzt, in welchem Falle nur ein einziges von der ganzen Ebene gebildetes Gebiet vorhanden ist. Die Function $\psi_{2\nu+1}(x, y)$ ist nach (31) mit $\varphi_{\nu}(x, y)$ identisch, und es lassen sich daher, wie leicht zu sehen, die im § 5 entwickelten Sätze aus dem vorstehenden Satze ableiten. Der letztere enthält indessen mehr, insofern die ganze Zahl ν nicht wie in § 5 eine nicht näher bezeichnete Zahl zu überschreiten braucht, sondern nur der Bedingung $n + \nu > 0$ genügen muss.

§ 8.

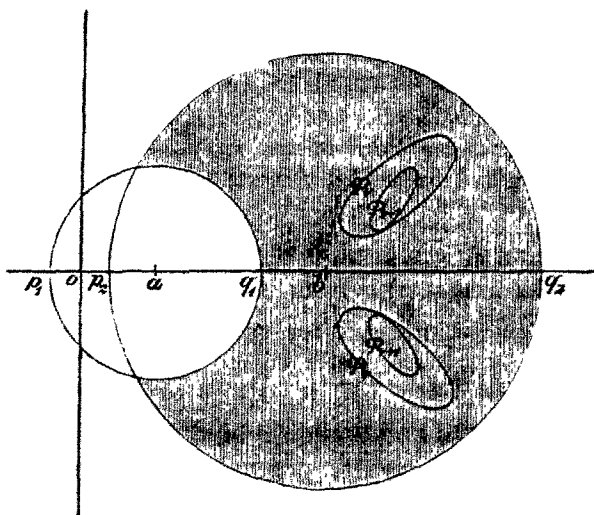
Beispiel.

Betrachten wir beispielsweise die Gleichung

$$f_{n-1}(z) = 0,$$

wo n zwischen -2 und $-2 + \frac{4}{5}$ liegt. Dann kann $\nu = 2, 3, 4, \dots$ sein. Nun ist

$$(40) \quad \begin{cases} \psi_4 = 2(n+1)(x^2+y^2) + 2n(n+1)(n+2)x + (n+2)n^2(n+1)^2, \\ \psi_5 = (n+1)(n+2)(5n+6)(x^2+y^2) + 4n(n+1)^2(n+2)(n+3)x \\ \quad + n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3). \end{cases}$$



Figur 1.

Daher stellen $\psi_4 = 0$ und $\psi_5 = 0$ zwei Kreise vor, deren Gleichungen in die Form

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} \psi_4 \equiv (x-a)^2 + y^2 - \varrho^2 = 0, \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)(5n+6)} \psi_5 \equiv (x-b)^2 + y^2 - \sigma^2 = 0 \end{cases}$$

gesetzt werden können, wobei dann

$$(42) \quad \begin{cases} a = -\frac{n(n+2)}{2}, & \varrho = -\frac{n}{2} \sqrt{-n(n+2)}, \\ b = -\frac{2n(n+1)(n+3)}{5n+6}, & \sigma = -\frac{n^2 \sqrt{-(n+1)(n+3)}}{5n+6} \end{cases}$$

ist.

Die Function ψ_4 hat im Innern des Kreises $\psi_4 = 0$ offenbar das Vorzeichen von $-2(n+1)$, also das positive Vorzeichen. Dagegen hat ψ_5 im Innern des Kreises $\psi_5 = 0$ das negative Vorzeichen. Es folgt daher:

„Die beiden imaginären Wurzeln der Gleichung $f_{n-1}(z) = 0$ befinden sich, wenn n zwischen -2 und $-2 + \frac{4}{5}$ liegt, ausserhalb des ersten und im Innern des zweiten der beiden Kreise (41).“

Ueber die Lage dieser beiden Kreise*) geben die folgenden Ungleichungen Aufschluss, welche man mit Hülfe von (42) leicht bestätigt:

$$(43) \quad b > a > 0; \quad a^2 < \varrho^2 < (b-a)^2 < \sigma^2 < b^2.$$

Wenn p_1, q_1 und p_2, q_2 die Werthe bezeichnen, welche den Durchschnittspunkten des ersten bez. zweiten Kreises mit der Axe der reellen Zahlen entsprechen, so folgt aus (43), dass

$$p_1 < 0 < p_2 < a < q_1 < b < q_2$$

ist. Daher müssen sich die beiden Kreise schneiden, so dass das Gebiet, in welchem die Wurzeln von $f_n(z) = 0$ liegen, durch eine (in Fig. 1 schraffierte) Kreissichel vorgestellt wird.

§ 9.

Die Gleichung $f_n(z) = 0$ für imaginäre Werthe von n .

Zum Schluss will ich noch den Fall betrachten, in welchem der Index n einen imaginären Werth mit positivem reellen Bestandtheil besitzt. Sei in der Formel (38) m die zu n conjugirte Grösse, und

$$(44) \quad s = z = x + iy, \quad r = z' = x - iy$$

Wurzeln der Gleichungen

$$f_n(z) = 0 \text{ resp. } f_m(z') = 0.$$

Dann ergibt (38):

$$(45) \quad (A+B)J_1 + (An^2+Bm^2)\frac{1}{4}J_2 + (As+Br)J_3 = 0,$$

wobei ich die in (38) vorkommenden Integrale zur Abkürzung mit J_1, J_2, J_3 bezeichnet habe. Diese Integrale besitzen positive Werthe, da u und v (siehe (34)) für jeden reellen Werth von t conjugirte Grössen sind. Ueberdies hat man

$$(46) \quad J_2 > J_3,$$

weil der im Integrale J_2 vorkommende Factor $\frac{1}{t}$ in dem ganzen Integrationsintervall grösser als 1 ist. Sei nun

*) Siehe Figur 1.

$$(47) \quad -\frac{n^2}{4} = \alpha + \beta i, \quad -\frac{m^2}{4} = \alpha - \beta i,$$

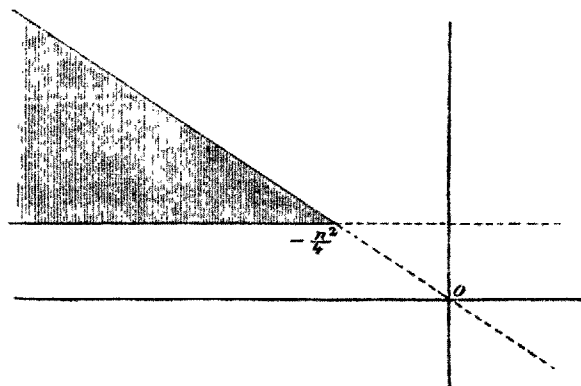
so folgt aus (45) in Rücksicht auf (44)

$$\begin{aligned} (A+B)J_1 + [(A+B)x + i(A-B)y]J_3 \\ = [(A+B)\alpha + i(A-B)\beta]J_2 \end{aligned}$$

oder, da A und B willkürliche Constanten bedeuten:

$$(48) \quad J_1 + xJ_3 = \alpha J_2, \quad yJ_3 = \beta J_2.$$

Die letzte dieser beiden Gleichungen besagt, dass y dasselbe Vorzeichen besitzt wie β und absolut grösser ist als β . Dies lässt sich auch so ausdrücken: Man construirt den Punkt $-\frac{n^2}{4} = \alpha + \beta i$ und zerlege die Ebene in zwei Theile, indem man durch jenen Punkt eine



Figur 2.

Parallele zur Axe der reellen Zahlen zieht. Dann liegt der Punkt $z = x + iy$ in demjenigen Theile, welcher die Axe der reellen Zahlen nicht enthält. Aus (48) folgt nun ferner

$$\beta J_1 + (x\beta - y\alpha)J_3 = 0$$

und es ist also $\frac{x\beta - y\alpha}{\beta}$ negativ. Construirt man daher, unter X, Y laufende Coordinaten verstanden, die Gerade $X\beta - Y\alpha = 0$, welche den Nullpunkt mit dem Punkte $-\frac{n^2}{4}$ verbindet, so liegt $z = x + iy$ auf derjenigen Seite dieser Geraden, welche die Axe der negativen reellen Zahlen in sich aufnimmt. Aus alledem ergibt sich nun der Satz (vgl. Fig. 2):

„Es sei n eine Zahl mit positivem reellen Bestandtheil. Man ziehe durch den Punkt $-\frac{n^2}{4}$ zwei Halbstrahlen, von welchen der erste parallel

zur Axe der negativen reellen Zahlen läuft, während die Verlängerung des zweiten durch den Nullpunkt geht, Die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f_n(z) = 0$ liegen dann in dem von den genannten Strahlen begrenzten (convexen) Winkelraum.“

Dieser Raum reducirt sich auf ein doppelt überdecktes Stück der Axe der reellen negativen Zahlen, wenn n einen reellen Werth besitzt, wie es nach den früheren Sätzen zu erwarten stand.

Königsberg i. Pr., den 2. Juni 1888.
