

## 4.

**Anwendungen der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.**(Vom Hrn. Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

**U**nter den Aufgaben der elementaren Statik ist die wichtigste unstreitig diejenige, welche die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften verlangt, die nach gegebenen Richtungen auf gegebene Punkte eines freibeweglichen festen Körpers wirken: zwischen Kräften also, deren Angriffspunkte in unveränderlichen Entfernungen von einander stehen. Diese Bedingung für die Angriffspunkte läßt sich auch dadurch ausdrücken, daß sie eine sich immer gleich und ähnlich bleibende Figur bilden sollen; und man kann hierdurch veranlaßt werden, nach den Bedingungen des Gleichgewichts zu fragen, wenn die Angriffspunkte nur dergestalt mit einander verbunden sind, daß sie auch in jede andere der anfänglichen bloß ähnliche Figur gebracht werden können.

Die hierdurch sich bildende Aufgabe habe ich für den Fall, wenn die Punkte und die auf sie wirkenden Kräfte in einer Ebene enthalten sind, bereits in meinem „Lehrbuche der Statik“ zu lösen gesucht. Ich dachte mir nämlich ein System von Geraden, welche sich unter unveränderlichen Winkeln in einem beweglichen Punkte treffen, mit einem andern Systeme von derselben Beschaffenheit dergestalt verbunden, daß eine Gerade des einen Systems mit einer Geraden des anderen zusammenfiel und längs derselben verschiebbar war, und suchte nun die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche ich auf die gegenseitigen Durchschnitte der Geraden des einen und andern Systems wirken ließ; denn offenbar mußten diese Punkte bei der angenommenen Beweglichkeit eine sich ähnlich bleibende Figur bilden.

Es giebt aber, wie ich in meinem „*Barycentr. Calcul*“ gezeigt habe, aufser der Gleichheit und Aehnlichkeit und der bloßen Aehnlichkeit noch einige andere Verwandtschaften, in denen Figuren zu einander stehen können, und welche gleichfalls in das Gebiet der niedern Geometrie gehören; namentlich die bloße Gleichheit, die Affinität und die Verwandtschaft der Collineation.

Man kann daher auf analoge Weise die Bedingungen des Gleichgewichts zu erforschen suchen, wenn die Beweglichkeit der Angriffspuncte der Kräfte dadurch bestimmt wird, daß sie eine sich immer bloß gleich, oder affin, oder collinear verwandt bleibende Figur bilden sollen. Da je zwei einander gleiche und ähnliche Figuren auch in jeder entfernten Verwandtschaft zu einander stehen, so werden die bekannten Bedingungen des Gleichgewichts, welche bei Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen der Angriffspuncte Statt finden, auch bei jeder entfernten Verwandtschaft, an welche die Beweglichkeit der Angriffspuncte gebunden wird, wiederkehren, zu ihnen aber neue, von der Natur der jedesmaligen Verwandtschaft abhängige, hinzutreten, und dieses in desto größerer Zahl, je entfernter die Verwandtschaft, und je größer folglich die Beweglichkeit der Puncte ist.

Die im Obigen gedachte Untersuchung in Betreff sich ähnlich bleibender ebener Figuren habe ich daher späterhin noch auf die Aehnlichkeit im Raume und auf die entfernteren Verwandtschaften ausgedehnt, und dieses vorzüglich mit aus dem Grunde, weil zu erwarten stand, auf diesem Wege zu einigen neuen Eigenschaften der Verwandtschaften selbst zu gelangen. Ich veröffentliche jetzt diese Untersuchungen in der Hoffnung, daß es vielleicht auch Andern angenehm sein dürfte, die Gleichgewichtsbedingungen, welche bei den entfernten Verwandtschaften hinzutreten, und die etwaigen daraus gezogenen geometrischen Folgerungen kennen zu lernen. Uebrigens habe ich mich hier stets des Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, als des einfachsten dabei anzuwendenden Mittels, bedient und mit Hilfe desselben die frühere Untersuchung sich ähnlich bleibender Figuren von Neuem angestellt.

## I. Bedingungen des Gleichgewichts bei sich ähnlich bleibenden Figuren.

1. In Bezug auf zwei rechtwinklige Coordinatensysteme in einer Ebene seien  $x, y$  und  $t, u$  die Coordinaten eines Punctes der Ebene. Man hat alsdann:

$$\begin{aligned} x &= f + t \cos \alpha - u \sin \alpha, \\ y &= g + t \sin \alpha + u \cos \alpha, \end{aligned}$$

wo  $f$  und  $g$  die Coordinaten des Anfangspunctes des Systems der  $t$  und  $u$ ,

in Bezug auf das System der  $x$  und  $y$  sind,  $\alpha$  aber der Winkel der Axe der  $t$  mit der Axe der  $x$  ist.

Setzen wir nun, daß auf gleiche Weise noch mehrere andere Punkte der Ebene auf beide Coordinatensysteme bezogen seien, daß diese Punkte gegen das System der Axen  $t$  und  $u$  eine unveränderliche Lage haben, daß aber dieses Axensystem sammt den Punkten seiner Lage gegen das in der Ebene ruhig bleibende System der Axen  $x$  und  $y$  beliebig ändern könne: so sind in den obigen Gleichungen  $t$  und  $u$  constant, dagegen  $f$ ,  $g$ ,  $\alpha$  beliebig veränderlich, und damit auch  $x$  und  $y$  veränderlich.

Wir wollen jetzt die Lage der Punkte gegen die Axen der  $t$  und  $u$  nicht mehr constant, jedoch nur dergestalt veränderlich annehmen, daß die von ihnen mit den Axen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt. Zu dem Ende haben wir nur für  $t$  und  $u$  ....  $\frac{t}{n}$  und  $\frac{u}{n}$  zu schreiben, wo  $n$ , eben so wie  $f$ ,  $g$  und  $\alpha$ , von einem Punkte zum andern gleich groß, aber mit der Zeit beliebig veränderlich ist. Hiermit werden die obigen Gleichungen, wenn wir noch  $a$  und  $b$  für  $nf$  und  $ng$  setzen:

$$1. \quad \begin{cases} nx = a + t \cos \alpha - u \sin \alpha, \\ ny = b + t \sin \alpha + u \cos \alpha. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen, in denen nur  $t$  und  $u$  constant sind, werden daher Punkte  $(x, y)$  in der Ebene bestimmt, die ihre Lage dergestalt auf jede Weise ändern können, daß die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt.

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt:

$$2. \quad \begin{cases} n dx + x dn = da - (ny - b) d\alpha, \\ n dy + y dn = db + (nx - a) d\alpha. \end{cases}$$

Wirkt nun auf jeden Punkt  $(x, y)$  des Systems eine Kraft  $(X, Y)$ , d. h. eine Kraft, welche, nach den Axen der  $x, y$  zerlegt, die Kräfte  $X$  und  $Y$  giebt, so hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Bedingung des Gleichgewichts zwischen allen diesen Kräften die Gleichung  $\Sigma(Xdx + Ydy) = 0$ , und wenn man darin für  $dx$  und  $dy$  ihre Werthe aus (2) substituirt:

$$(da + b d\alpha) \Sigma X + (db - a d\alpha) \Sigma Y + n d\alpha \Sigma (Yx - Xy) - dn \Sigma (Xx + Yy) = 0.$$

Da aber die Differentiale  $da, db, d\alpha$  und  $dn$  von einander ganz unab-

hängig sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende vier einzelne:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum (Yx - Xy) = 0, \quad \sum (Xx + Yy) = 0.$$

Die drei ersten derselben sind die bekannten Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die gegenseitige Lage der Angriffspunkte der Kräfte unveränderlich ist. Die vierte kommt wegen der gemachten Voraussetzung hinzu, daß die gegenseitige Lage der Punkte zwar veränderlich sein soll, jedoch nur so, daß die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt.

2. Zusatz. Nach dem §. 122. meines Lehrbuchs der Statik ergeben sich diese vier Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf Punkte in einer Ebene wirken, auch in dem Falle, wenn die gegenseitige Lage der Punkte unveränderlich ist und wenn das Gleichgewicht nicht bloß bei einer bestimmten Lage des Systems der Punkte in der Ebene Statt findet, sondern auch noch bei jeder beliebigen Drehung in der Ebene, während die Kräfte mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderten Intensitäten auf dieselben Punkte zu wirken fortfahren, noch besteht. Hiernach kann man folgende zwei Sätze (ebend. §§. 235. u. 236.) aufstellen:

„Sind mehrere Punkte in einer Ebene dergestalt beweglich, daß die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt, und halten sich Kräfte, welche auf sie in der Ebene wirken, das Gleichgewicht, so herrscht auch noch Gleichgewicht bei jeder andern Lage, welche man den Punkten zufolge ihrer Beweglichkeit geben kann, wenn nur die Kräfte ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben;“ und umgekehrt:

„Sind Kräfte, welche auf fest mit einander verbundene Punkte in einer Ebene wirken, im Gleichgewichte, und dauert dasselbe noch fort, wenn das System der Punkte in seiner Ebene beliebig verschoben wird, die Kräfte aber parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirken, so wird das Gleichgewicht auch nicht unterbrochen, wenn man den Punkten eine solche gegenseitige Beweglichkeit noch beilegt, bei welcher die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt.“

3. Um von dieser Theorie eine Anwendung auf die einfachsten Fälle zu machen, wollen wir zuerst setzen, das System bestehe nur aus zwei Punkten  $(x, y)$  und  $(x_1, y_1)$ , auf welche resp. die Kräfte  $(X, Y)$  und  $(X_1, Y_1)$  wirken. Die vier Bedingungen des Gleichgewichts sind alsdann:

$$X + X_1 = 0, \quad Y + Y_1 = 0, \quad Yx - Xy + Y_1x_1 - X_1y_1 = 0$$

$$Xx + Yy + X_1x_1 + Y_1y_1 = 0.$$

Die Elimination von  $X_1$  und  $Y_1$  aus diesen Gleichungen giebt:

$Y(x-x_1) - X(y-y_1) = 0$ ,  $-X(x-x_1) + Y(y-y_1) = 0$ ; und wenn wir hieraus noch  $X$  und  $Y$  wegschaffen:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = 0,$$

folglich  $x_1 = x$  und  $y_1 = y$ ; d. h. die beiden Angriffspunkte müssen zusammenfallen. Auch folgt dieses schon aus der Natur der Sache selbst. Denn ein System von zwei nicht zusammenfallenden Punkten bleibt bei jeder Aenderung ihrer gegenseitigen Lage sich ähnlich. Zwei Kräfte aber, angebracht an zwei Punkten, deren gegenseitige Lage beliebig veränderlich ist, können nicht im Gleichgewichte sein.

Anders verhält es sich, wenn zu den zwei Punkten ein dritter  $(x_2, y_2)$ , getrieben von der Kraft  $(X_2, Y_2)$ , hinzukommt. Die vier Gleichgewichtsbedingungen sind in diesem Falle:

$$(A.) \quad \begin{cases} X + X_1 + X_2 = 0, & Y + Y_1 + Y_2 = 0, \\ Yx - Xy + Y_1x_1 - X_1y_1 + Y_2x_2 - X_2y_2 = 0, \\ Xx + Yy + X_1x_1 + Y_1y_1 + X_2x_2 + Y_2y_2 = 0. \end{cases}$$

Man multiplicire von diesen Gleichungen die erste, zweite und vierte resp. mit  $-f$ ,  $-g$  und 1, addire sie hierauf und setze zur Bestimmung von  $f$  und  $g$ :

$$(a.) \quad X(x-f) + Y(y-g) = 0, \quad X_1(x_1-f) + Y_1(y_1-g) = 0,$$

so ist auch

$$(b.) \quad X_2(x_2-f) + Y_2(y_2-g) = 0.$$

Betrachtet man nun  $f, g$  als die Coordinaten eines Punktes und bezeichnet die Punkte  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(f, g)$  mit  $A, A_1, A_2, F$  und die drei Kräfte  $(X, Y)$  etc. mit  $P, P_1, P_2$ , so sind nach (a.) die Linien  $FA$  und  $FA_1$  resp. auf  $P$  und  $P_1$  rechtwinklig, d. h.  $F$  ist der Durchschnitt der auf  $P$  und  $P_1$  in  $A$  und  $A_1$  errichteten Perpendikel. Den so bestimmten Punkt  $F$  muß aber nach (b.) auch das auf  $P_2$  in  $A_2$  errichtete Perpendikel treffen, und die Bedingung wegen der dauernden Aehnlichkeit besteht hiernach darin, daß sich die drei auf den Kräften in ihren Angriffspunkten errichteten Perpendikel in einem Punkte  $F$  schneiden.

Noch anders kann diese Bedingung ausgedrückt werden, wenn man sich erinnert, daß die Richtungen dreier sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte sich in einem Punkte begegnen (eine Eigenschaft, welche auch unmittelbar aus den drei ersten der obigen vier Gleichungen (A.) hergeleitet werden kann). Ist nun  $K$  dieser gemeinschaftliche Punkt der

Richtungen von  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , so sind dem Vorigen zufolge  $FAK$ ,  $FA_1K$ ,  $FA_2K$  rechte Winkel, und  $K$  liegt folglich mit  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  in einem Kreise.

„Sollen demnach in einer Ebene drei Kräfte an drei Punkten, welche ein sich ähnlich bleibendes Dreieck zu bilden genöthigt sind, im Gleichgewichte sein, so muß, nächst den Bedingungen des Gleichgewichts für den Fall, wenn die Punkte in unabänderlicher Entfernung von einander sind, auch noch die erfüllt werden, daß die drei Punkte mit demjenigen, in welchem sich die Richtungen der drei Kräfte schneiden, in einem Kreise liegen.“

Eine leichte Folgerung hieraus ist, daß die Winkel, welche die Kräfte mit einander bilden, den Supplementen der Winkel des Dreiecks  $AA_1A_2$  gleich sind, nämlich der Winkel der Kräfte an  $A_1$  und  $A_2$ ,  $= 180^\circ - A_1AA_2$ , etc. und daß deshalb, und weil beim Gleichgewichte zwischen drei Kräften jede Kraft dem Sinus des von den beiden andern Kräften gebildeten Winkels proportional ist, die Kräfte sich wie die ihren Angriffspunkten  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks  $AA_1A_2$  verhalten.

Man bemerke hierbei noch, wie von dem Umstande, daß der gegenseitige Durchschnitt der drei Kräfte mit ihren Angriffspunkten in einem Kreise liegt, die Fortdauer des Gleichgewichts bei der Drehung des Dreiecks  $AA_1A_2$  in seiner Ebene eine unmittelbare Folge ist. Ob nämlich das Dreieck gedreht wird, während jede Kraft ihrer anfänglichen Richtung parallel bleibt, oder ob das Dreieck in Ruhe bleibt und jede Kraft um einen gleich großen Winkel um ihren Angriffspunkt gedreht wird, kommt hier, wo es sich nur um die gegenseitige Lage handelt, offenbar auf dasselbe hinaus. Wenn aber drei von  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  ausgehende Geraden um diese Punkte um gleich große Winkel gedreht werden, so rücken ihre Durchschnitte mit dem durch  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  zu beschreibenden Kreise um gleich große Bogen fort. Wenn folglich diese drei Geraden sich anfangs in einem Punkte  $K$  des Kreises schnitten, so wird dieses auch nach der Drehung noch der Fall sein; folglich u. s. w.

4. Die im Vorigen für eine Ebene angestellten Untersuchungen wollen wir jetzt auf den Raum ausdehnen. Seien daher bei einem System von Punkten im Raume die Coordinaten eines derselben in Bezug auf zwei rechtwinklige Axensysteme  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$ ,  $u$ ,  $v$ , so kann man setzen:

$$x = f + \alpha t + \alpha' u + \alpha'' v,$$

$$y = g + \beta t + \beta' u + \beta'' v,$$

$$z = h + \gamma t + \gamma' u + \gamma'' v,$$

wo  $\alpha = \cos x^{\wedge} t$ ,  $\alpha' = \cos x^{\wedge} u$ , etc. und  $f, g, h$ , die Coordinaten des Anfangspunctes des Systems der  $t, u, v$  in Bezug auf das System der  $x, y, z$  sind.

Hieraus läßt sich, wie im Obigen, weiter folgern, dafs, wenn man

1.  $nx = a + \alpha t + \alpha' u + \alpha'' v$ ,  $ny = b + \beta t + \dots$ ,  $nz = c + \dots$  setzt und dabei  $t, u, v$  constant,  $n, a, b, c$  aber und  $\alpha, \beta', \gamma''$ , wovon die übrigen  $\alpha', \alpha'', \beta$ , etc. auf bekannte Weise abhängen, veränderlich annimmt: dafs dann das System der Puncte, zu welchen  $(x, y, z)$  gehört, bei beliebiger Aenderung von  $n, a, b, c, \alpha, \beta'', \gamma''$  seine Lage sowohl als Gröfse beliebig ändert, sich dabei aber stets ähnlich bleibt.

Ist nun  $(X, Y, Z)$  die auf den Punct  $(x, y, z)$  wirkende Kraft, und soll zwischen ihr und den an den übrigen Puncten des Systems angebrachten Kräften Gleichgewicht herrschen, so mufs bei allen Verrückungen, deren das System fähig ist,

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

sein. Es findet sich aber, wenn man hierin für  $dx, dy, dz$  ihre aus der Differentiation von (1) fliefsenden Werthe setzt:

$$\begin{aligned} 2. \quad & \Sigma(Xx + Yy + Zz)dn - \Sigma X(da + tda + u\alpha' + \dots) \\ & - \Sigma Y(db + t\beta + \dots) - \Sigma Z(dc + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Da das Differential  $dn$  von den übrigen hierin vorkommenden Differentialen unabhängig ist, so ergiebt sich, als erste Bedingung des Gleichgewichts,

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = 0.$$

Um die übrigen Bedingungsgleichungen zu erhalten, hat man in dem übrigen Theile der Gleichung (2) die Coordinaten  $t, u, v$  mittelst (1) durch  $x, y, z$  auszudrücken und dann noch die 9 Differentiale  $da, d\alpha', \dots d\gamma''$  auf drei von einander unabhängige zu reduciren. Ohne aber diese etwas weidläufige Rechnung anzustellen, sieht man schon im Voraus, dafs die auf solche Weise zu erhaltenden Bedingungsgleichungen keine andern als die bekannten sechs sein können, welche Statt finden müssen, wenn die gegenseitige Lage der Angriffspuncte unveränderlich ist. Denn da der übrige Theil der Gleichung (2) von  $n$  unabhängig ist, so müssen die aus ihm zu folgernden Gleichungen einerlei sein mit denen, welche man erhält, wenn man  $n$  constant setzt. Ist aber  $n$  constant, so bleibt sich das System der Puncte  $(x, y, z)$  nicht blofs ähnlich, sondern auch gleich; folglich u. s. w.

Der Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht an einem sich ähnlich bleibenden Systeme von Punkten im Raume giebt es demnach in Allem sieben: nämlich die bekannten sechs

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, & \Sigma Y &= 0, & \Sigma Z &= 0, \\ \Sigma(Yz - Zy) &= 0, & \Sigma(Zx - Xz) &= 0, & \Sigma(Xy - Yx) &= 0,\end{aligned}$$

und die vorhin zuerst gefundene:

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = 0.$$

5. Zusätze. a) Bezeichnet  $A$  den Punkt  $(x, y, z)$  des Systems,  $P$  die auf ihn wirkende Kraft  $(X, Y, Z)$ , und  $O$  den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist der summatorische Ausdruck

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = \Sigma OA \cdot P \cos OAP;$$

er ist folglich unabhängig von dem durch  $O$  gelegten Systeme der Coordinatenachsen, was auch für Kräfte  $P$  auf die Punkte  $A$  wirken mögen. Gegenwärtig aber, wo zugleich  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma Z = 0$  sein soll, ist jener Ausdruck auch von dem Anfangspunkte der Coordinaten unabhängig. Denn für einen neuen Anfangspunkt, dessen Coordinaten in Bezug auf den alten,  $= a, b, c$  sind, wird der Ausdruck

$$= \Sigma(X(x-a) + Y(y-b) + Z(z-c)):$$

und dieser ist von dem vorigen  $\Sigma(Xx + \dots)$  um  $a\Sigma X + b\Sigma Y + c\Sigma Z$ , das heisst um nichts verschieden.

Die specielle Bedingung, unter welcher Kräfte an einem Systeme von Punkten, welches sich immer ähnlich bleiben soll, im Gleichgewichte sind, kann hiernach folgendergestalt ausgedrückt werden:

„Wählt man beliebig einen Punkt ( $O$ ) und multiplicirt jede Kraft ( $P$ ) in den Abstand  $OP \cos OAP$  ihres Angriffspunctes ( $A$ ) von einer durch den erstern Punkt ( $O$ ) perpendicular auf die Richtung der Kraft gelegten Ebene, so muß die Summe dieser Producte Null sein.“

b) Sind sämtliche Kräfte mit einander parallel, und nimmt man mit ihnen die Axe der  $z$  parallel an, so werden  $X$  und  $Y$  Null, und die obigen 7 Bedingungsgleichungen reduciren sich auf folgende vier:

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma Zx = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zz = 0;$$

d. h. der Angriffspunkt jeder Kraft ist der Mittelpunkt der jedesmal übrigen.

Denn sind aufser  $Z$  die übrigen Kräfte  $Z_1, Z_2, \dots$  und  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \text{etc.}$  ihre Angriffspuncte, so kann man statt der letzten vier Gleichungen auch schreiben:

$$\begin{aligned}Z + \Sigma Z_1 &= 0, & Zx + \Sigma Z_1 x_1 &= 0, & Zy + \Sigma Z_1 y_1 &= 0, \\ Zz + \Sigma Z_1 z_1 &= 0.\end{aligned}$$



Hieraus folgt:

$$x = \frac{\sum Z_1 x_1}{\sum Z_1}, \quad y = \frac{\sum Z_1 y_1}{\sum Z_1}, \quad z = \frac{\sum Z_1 z_1}{\sum Z_1}.$$

Die so bestimmten Werthe von  $x, y, z$ , sind aber die Coordinaten des Mittelpuncts der Kräfte  $Z_1, Z_2, \dots$ .

c) Liegen daher die Angriffspuncte aller parallelen Kräfte, bis auf einen, in einer Ebene, so muß auch der letztere in dieser Ebene enthalten sein, wenn das System unter der Bedingung bleibender Aehnlichkeit im Gleichgewichte verharren soll. Denn der Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte, deren Angriffspuncte in einer Ebene liegen, ist gleichfalls in dieser Ebene begriffen.

Uebrigens sieht man von selbst, wie die jetzt gemachten Schlüsse mit gehöriger Modification auf den früher behandelten Fall anwendbar sind, wo die Puncte und die auf sie wirkenden Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten waren.

6. Eine besondere Betrachtung wollen wir noch dem einfachen Falle widmen, wenn das System aus vier Kräften  $P, P_1, P_2, P_3$  besteht, welche auf vier nicht in einer Ebene liegende Puncte  $A, A_1, A_2, A_3$  wirken. Durch einen beliebigen fünften Punct  $O$  lege man vier Ebenen perpendicular auf die Richtungen von  $P, P_1, P_2, P_3$  und nenne  $D, D_1, D_2, D_3$  die Durchschnitte dieser Ebenen mit den Richtungen von  $P, P_1, \dots$ . Alsdann ist nach No. 5. a. die specielle Bedingung des Gleichgewichts, welche bei der Annahme dauernder Aehnlichkeit des Systems der Angriffspuncte erfüllt werden muß:

$$DA.P + D_1 A_1.P_1 + D_2 A_2.P_2 + D_3 A_3.P_3 = 0.$$

Man wähle nun zum Puncte  $O$  denjenigen, in welchem sich drei auf  $P, P_1, P_2$  resp. in  $A, A_1, A_2$  perpendicular gelegte Ebenen schneiden, so sind  $DA, D_1 A_1, D_2 A_2$  einzeln Null. Zuzufolge der Bedingungsgleichung muß daher bei dem also bestimmten  $O$  auch  $D_3 A_3 = 0$  sein, d. h. die durch  $O$  perpendicular auf  $P_3$  gesetzte Ebene muß  $P_3$  in  $A_3$  treffen, und wir schließen hieraus:

„Sind vier Puncte im Raume dergestalt beweglich, daß die von ihnen gebildete Figur sich immer ähnlich bleibt, und sollen vier auf sie wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so muß außer den zum Gleichgewichte nöthigen Erfordernissen, wenn die Puncte fest mit einander verbunden sind, auch noch die Bedingung erfüllt werden, daß die vier

Ebenen, welche durch die vier Punkte, jede perpendicular auf der Richtung der den Punkt treibenden Kraft, gelegt werden, sich in einem Punkte ( $O$ ) schneiden."

Zum Gleichgewichte zwischen vier Kräften, deren Angriffspunkte fest mit einander verbunden sind, ist unter anderen erforderlich, daß jede Gerade, welche die Richtungen dreier der vier Kräfte schneidet, auch der Richtung der vierten begegnet (Lehrb. der St. §. 99. a.). Wenn daher drei Richtungen, welche nicht in einer Ebene enthalten sind, sich in einem Punkte  $K$  schneiden, so muß auch die vierte Richtung den Punkt  $K$  treffen. Bei dieser speciellen Lage der Richtungen läßt sich die besondere Bedingung des Gleichgewichts, wegen der Aehnlichkeit, auf analoge Weise als wie oben beim Gleichgewichte zwischen drei Kräften, ausdrücken. Es müssen nämlich die vier Winkel  $OAK$ ,  $OA_1K$ ,  $OA_2K$ ,  $OA_3K$  rechte Winkel sein, d. h. „es muß der gemeinschaftliche Durchschnitt der vier Richtungen in der durch die vier Angriffspunkte zu beschreibenden Kugelfläche liegen."

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)