

SUL MOTO DEI SOLIDI NEI FLUIDI VISCOSI.

UMBERTO CRUDELI.

I. — Diverse critiche sono state mosse, da qualche tempo a questa parte, alla teoria (che diremo classica) dei fluidi viscosi, critiche concernenti il valore fisico della teoria stessa. E, mentre nella teoria classica vengono trattati, dal punto di vista analitico, vari casi di movimento dei fluidi viscosi incompressibili, nella teoria termodinamica (svolta dal Duhem) si perviene alla radicale conclusione che l'ipotesi di un fluido viscoso incompressibile è contraddittoria con la definizione di fluido ¹⁾).

Nella teoria classica, la completa aderenza fra solidi e fluido viene definita semplicemente (al fine di non introdurre condizioni esuberanti per certi problemi analitici) prestabilendo l'eguaglianza fra la velocità del fluido e dei solidi nei punti delle loro comuni superficie. Ora, non si comprende, senz'altro, quale valore fisico possa avere l'aderenza completa così definita, senza stabilire una qualche ipotesi ausiliaria, della quale occorre allora specificare la natura fisica. Diversamente, la suddetta definizione di aderenza completa avrebbe un valore fisico soltanto qualora in ogni punto delle superficie di contatto fra solidi e fluido, l'azione di viscosità ²⁾ fosse normale alla corrispondente superficie. Condizione che, nella completa aderenza, conduce, come vedremo, all'annullarsi dell'azione stessa sopra le superficie suddette. Il Duhem ha mostrato (considerando il fluido viscoso incompressibile, a tempe-

¹⁾ Duhem « Recherches sur l'hydrodynamique ». *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e serie; 1903; pag. 385.

²⁾ È noto ciò che s'intende, nella teoria elastica, per viscosità. Del resto la sua definizione verrà implicitamente richiamata nel paragrafo seguente.

ratura costante, della teoria classica) alcuni casi in cui ciò non avviene. E, precisamente, sotto certe restrizioni, i seguenti casi ⁴⁾:

1) Movimento continuo permanente di un fluido indefinito compreso fra due pareti fisse parallele

2) Moto continuo permanente di un fluido indefinito (in tutti i sensi) nel quale sia immerso un cilindro indefinito dotato di moto uniforme secondo una direzione normale alle generatrici

3) Movimento continuo permanente di un fluido secondo filetti paralleli

4) Movimento continuo permanente di un fluido compreso fra due pareti indefinite parallele, delle quali una sia fissa e l'altra scorra su se stessa con moto rettilineo uniforme

5) Movimento continuo permanente di un fluido compreso fra due cilindri di rivoluzione (aventi lo stesso asse) dei quali uno sia fisso e l'altro ruoti uniformemente intorno a quell'asse.

Fra gli studi fondamentali (che si fanno nella teoria classica e che noi qui vogliamo prendere in considerazione) vi è anche quello del fluido incompressibile, occupante uno spazio finito, limitato esternamente da una parete fissa (necessariamente chiusa) e nel quale siano immersi dei solidi in movimento o, per fissare le idee, sia immerso un solido in movimento nell'ipotesi della completa aderenza (definita soltanto dal punto di vista cinematico) fra la parete ed il fluido e fra il solido immerso ed il fluido. Data l'importanza che hanno tali questioni nei riguardi dell'esperienza, io qui desidero mostrare come in questo caso (intendendo che le forze di massa, agenti sul fluido, derivino da un potenziale) non esistono certamente moti traslatori del solido compatibili con moti continui lenti stazionari del fluido, oppure con moti continui lenti nell'ipotesi che il fluido parta dalla quiete, tali (sia gli uni come gli altri) che in ogni punto della superficie di contatto fra solido e fluido (compresa la parete) l'azione di viscosità resulti normale alla corrispondente superficie ovvero

⁴⁾ Loc. cit., pag. 201.

nulla, qualunque sia l'intervallo di tempo, durante il quale venga supposto traslatorio il moto del solido e qualunque sia la forma del solido stesso.

II. — Siano u_s, v_s, w_s le componenti della velocità di un punto generico del solido immerso. Avremo, giacchè intendiamo il solido rigido,

$$\begin{cases} u_s = u_o + qz - ry \\ v_s = v_o + rx - pz \\ w_s = w_o + py - qx \end{cases}$$

dove è manifesto il significato dei simboli.

Come è noto, le azioni specifiche di viscosità, nell'interno del fluido incompressibile sono così espresse (nella teoria classica)

$$(1) \begin{cases} X_x = -2k \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad X_y = Y_x = -k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ Y_y = -2k \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad Y_z = Z_y = -k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ Z_z = -2k \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad Z_x = X_z = -k \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{cases}$$

avendo indicato con k il coefficiente di viscosità.

E, indicando con α, β, γ i coseni di direzione della normale relativa al contorno del solido (volta verso l'interno del fluido) le componenti dell'azione di viscosità, in un punto generico della superficie di contatto fra il solido ed il fluido, sono

$$(2) \begin{cases} p_x = -(\alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z) \\ p_y = -(\alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z) \\ p_z = -(\alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z) \end{cases}$$

Sicchè la ipotesi che, in ogni punto della superficie di contatto fra solido e fluido, l'azione di viscosità resulti normale alla superficie stessa si traduce così

$$(3) \begin{cases} \beta p_z - \gamma p_y = 0 \\ \gamma p_x - \alpha p_z = 0 \\ \alpha p_y - \beta p_x = 0 \end{cases}$$

Ora, osserviamo che le tre funzioni

$$f = u - u_0 - qz + ry$$

$$g = v - v_0 - rx + pz$$

$$h = w - w_0 - py + qx$$

si annullano, per ipotesi, in ogni punto della superficie di contatto fra solido e fluido. E, quindi, ricordando il significato di α , β , γ , osserviamo che esisterà, applicato in ogni punto di quella superficie, un vettore (F, G, H) tale che

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha F, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta F, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \gamma F \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \alpha G, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \beta G, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \gamma G \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha H, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \beta H, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \gamma H \end{array} \right.$$

dove qui, naturalmente, le derivate si riferiscono al punto medesimo. Per cui, sulla superficie suddetta sarà

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta F - r, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma F + q \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha G + r, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta G, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma G - p \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha H - q, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \beta H + p, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma H. \end{array} \right.$$

E, quindi, ricordando le (1) e (2),

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = k \alpha (\alpha F + \beta G + \gamma H) + k F \\ p_y = k \beta (\alpha F + \beta G + \gamma H) + k G \\ p_z = k \gamma (\alpha F + \beta G + \gamma H) + k H \end{array} \right.$$

Talchè, per le (3), avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta H - \gamma G = 0 \\ \gamma F - \alpha H = 0 \\ \alpha G - \beta F = 0. \end{array} \right.$$

Per cui esisterà una quantità R tale che

$$(6) \quad F = \alpha R, \quad G = \beta R, \quad H = \gamma R.$$

Ma dalle (4) si ottiene anche

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha F + \beta G + \gamma H.$$

E poichè il fluido è stato supposto incompressibile,

$$\alpha F + \beta G + \gamma H = 0.$$

Quindi, per le (6), $R = 0$. Per cui

$$F = G = H = 0.$$

Talchè dalle (4) si ricava intanto questo risultato (dovuto al Duhem): Sulla superficie di contatto fra solido e fluido, le derivate che figurano nelle (4) stesse sono allora nulle. E allora risulta sulla superficie medesima $p_x = p_y = p_z = 0$. Viceversa, se fossimo partiti dall'ipotesi $p_x = p_y = p_z = 0$, avremmo trovato quel medesimo risultato. Infatti, essendo, per l'incompressibilità $\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$, si ha $p_x = k F$, $p_y = k G$, $p_z = k H$. Sicchè l'ipotesi $p_x = p_y = p_z = 0$ conduce al risultato $F = G = H = 0$ sul contorno.

Ciò premesso, supponiamo (nell'intento di giungere ad un assurdo) che, durante un certo intervallo di tempo, a partire dall'istante t_0 , il moto del solido sia traslatorio e compatibile con un moto continuo lento del fluido, nelle seguenti ipotesi:

1) Il fluido (omogeneo) occupi uno spazio finito, limitato da una parete fissa

2) Il fluido aderisca completamente alla parete ed al solido immerso

3) L'azione di viscosità resulti, in ogni punto delle superficie di contatto fra solidi e fluido (compresa la parete) normale alla corrispondente superficie ovvero nulla

4) Il fluido parta dalla quiete od almeno, per $t = t_0$, non esistano vortici

5) Le forze di massa derivino da un potenziale.

Osserviamo che, nell'ipotesi del moto traslatorio del solido, le componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ del vortice sono (in virtù delle (5) e del risultato $F = G = H = 0$) nulle sulla superficie di contatto fra il solido ed il fluido. E, poichè mediante un ragionamento analogo a quello riportato precedentemente, si ricava che le derivate prime delle u, v, w rispetto ad x, y, z , sono nulle sulla superficie di contatto fra la parete ed il fluido, risulta che le componenti del vortice saranno nulle su tutto il contorno dello spazio S occupato dal fluido.

Ora, ricordiamo che, indicando con ω una qualsiasi delle componenti del vortice, si ha, nel moto lento,

$$(7) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \Delta^2 \omega$$

avendo supposto che le forze di massa derivino da un potenziale ed essendo noto il significato di μ . La (7) ha la forma della ben nota equazione della teoria della propagazione del calore. Ma, nel nostro caso, la superficie di contatto fra il solido immerso ed il fluido si sposta in seno al fluido stesso. Osservo, perciò, che si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{d\omega}{dt} - \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)$$

sicchè

$$\frac{1}{2} \int_S \frac{d\omega^2}{dt} dS - \int_S \omega \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dS = \mu \int_S \omega \Delta^2 \omega dS.$$

Ora, il fluido essendo incompressibile e la ω essendo nulla sul contorno, si ha

$$\begin{aligned} & \int_S \omega \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dS = \\ & = \int_S \omega \left[\omega \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} + \frac{\partial(w\omega)}{\partial z} \right] dS = - \\ & - \int_S \omega \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dS. \end{aligned}$$

Da cui

$$\int_S \omega \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dS = 0.$$

Si ha poi, in virtù della suddetta circostanza al contorno,

$$\int_S \omega \Delta^2 \omega dS = - \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dS.$$

Quindi, per la (8),

$$\frac{1}{2} \int_S \frac{d\omega^2}{dt} dS = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = 0.$$

Ma, richiamando le definizioni stesse di derivata e d'integrale, risulta facilmente, *in virtù dell'incompressibilità*, che dato un integrale della forma $\int_S \frac{dT}{dt} d$ (dove $\frac{d}{dt}$ è simbolo di

derivata totale rispetto al tempo) ed intendendo che, negli istanti successivi a t , la lettera S rappresenti lo spazio occupato da una massa fluida, la quale, al tempo t , occupava lo spazio indicato con la medesima lettera, si ha

$$\int_S \frac{dR}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_S R dS$$

intendendo che la R sia una funzione continua del punto dello spazio e del tempo, avente le derivate prime, le quali siano pure continue. Per cui, nel nostro caso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S \omega^2 dS + \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dS = 0.$$

E, integrando fra t_0 e t , dopo avere ricordato che per t_0 la ω per ipotesi è nulla, si ha

$$\frac{1}{2} \int_S \omega^2 dS + \int_{t_0}^t \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dS dt = 0.$$

Da cui $\omega = 0$.

Dunque sarà ovunque

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ora, osservo che, data l'incompressibilità, cioè

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

si ha

$$\Delta^2 u = \Delta^2 u - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

E analogamente

$$\Delta^2 v = 0 \quad \Delta^2 w = 0.$$

Ma, intendendo di avere assunto come asse z un asse parallelo alla direzione del supposto moto traslatorio del solido, si ha $u = v = 0$ sul contorno del fluido, per cui le u e v sarebbero funzioni (continue e monodrome) armoniche, nulle sul contorno dello spazio S . Sarebbe, dunque, dappertutto $u = v = 0$. Ma, allora, in virtù dell'incompressibilità, $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, cioè la w sarebbe ovunque indipendente dalla z . E ciò è assurdo. Basta osservare che, sulla superficie di contatto fra il solido immerso ed il fluido, la w è stata supposta eguale alla velocità del solido stesso, mentre è stata supposta nulla sulla superficie che limita esternamente il fluido.

III. — Nell'ipotesi di moti stazionari del fluido, si avrebbe $\Delta^2 \omega = 0$, per cui, nella supposizione della completa aderenza, non esistono neppure moti traslatori del solido compatibili con moti continui lenti stazionari del fluido tali che, in ogni punto delle superficie di contatto fra solidi e fluido (compresa la parete) l'azione di viscosità resulti normale alla corrispondente superficie ovvero nulla.

(Giunta il 15 marzo 1912).