

1.

Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen.

(Vom Herrn Dr. M. A. Stern zu Göttingen.)

(Eine von der Königlich-Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift.)

Ἄλλ' ἐθέλω ὑμῶν καὶ πειρηθῆμεναι ἀντην.

Vorwort.

Die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Copenhagen hatte im Jahre 1837 folgende Preisfrage gestellt.

Proponitur quaestio de aequationum transcendentium radicibus indagandis et quidem postulatur:

1. Ut plene et perfecte deducantur interque se comparentur methodi ipsarum radices inveniendi, ita ut quanam cuiuscunque sint virtutes quanam imperfectiones accurate indicetur, quibusve casibus unaquaeque sit magis minusve accommodata.
2. Ut diligenter inquiretur quatenus vel quibus saltem adhibitibus cautionibus methodos, quibus vulgo in algebraicis aequationibus radices reales aut ab imaginariis separentur aut inter se, ad transcendentibus quoque extendere liceat.
3. Ut exponatur conspectus, quantum fieri possit, plenus tam specialium aequationum quam generum earum, quae quidem forma transcendentibus in gravissimis analyseos applicatae partibus occurrunt, simul cum regulis, quin fortasse tabulis ad usum ipsum accommodatis, quibus revera faciliores ac breviores reddantur calculi illi radicum, alias saepe prolixissimi.

Das Folgende ist ein genauer Abdruck der Schrift, die ich der Königl. G. d. W. im December 1837 überreicht habe; ich habe mir nur einige aufserwesentliche Aenderungen erlaubt, wie namentlich, daßs ich da, wo ich, der Bestimmung der Schrift gemäfs, von meinen eigenen Arbeiten als denen eines Dritten sprechen mußte, dies nun geändert habe.

Göttingen, den 5. Januar 1840.

Die Königliche Societät der Wissenschaften hat als Preisfrage die Aufgabe gestellt, die Wurzeln der transcendenten Gleichungen zu finden. Indem ich es unternehme, diese Frage zu beantworten, will ich zuvor Folgendes bemerken. Ich setzte voraus, daß die Königl. Societät d. W. nur die Auflösung der *numerischen* transcendenten Gleichungen verlangt, und zwar bloß solcher, in welchen nur eine unbekannte Gröfse vorkommt. Eine allgemeine Auflösung der *litteralen* transcendenten Gleichungen kann wohl nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft nicht verlangt werden, da man noch nicht im Stande ist, dasselbe in Beziehung auf die litteralen algebraischen Gleichungen zu leisten. Aus demselben Grunde glaube ich, die Aufgabe, aus mehreren transcendenten Gleichungen, in welchen eben so viele unbekannte Gröfsen vorkommen, die Werthe dieser Gröfsen zu finden, bei Seite setzen zu dürfen. Um diese Aufgabe zu lösen, müßte man alle unbekannten Gröfsen, bis auf eine, eliminiren. Diese Elimination aber, welche schon in dem Falle, wenn die Gleichungen algebraische sind, bedeutende Schwierigkeiten darbietet, stößt bei den transcendenten Gleichungen auf unübersteigliche Hindernisse. Ich werde daher die Untersuchung darauf beschränken, zu zeigen, wie man bei jeder gegebenen numerischen transcendenten Gleichung die *reellen* Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit *berechnen* und das Vorhandensein der imaginären Wurzeln *entdecken* kann. Was dagegen die numerischen Werthe der imaginären Wurzeln betrifft, so kann deren Berechnung um so weniger verlangt werden, da bis jetzt keine Methode existirt, die solches mit Bequemlichkeit für die algebraischen Gleichungen leistet. Die einzige sichere Methode, welche man besitzt, um die Werthe der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen zu finden, ist die, welche *Fourier* zuerst angedeutet hat. Ich werde später zu zeigen suchen, in wiefern diese Methode auf die transcendenten Gleichungen anwendbar ist.

Die Societät d. W. hat in dem Programme die Frage in drei Theile getheilt. Ich werde, dieser Eintheilung folgend, zuerst von den vorhandenen Methoden zur Auflösung der transcendenten Gleichungen sprechen; alsdann zeigen, wie man diese Gleichungen wirklich auflösen kann, und zuletzt Anwendungen davon auf besonders häufig vorkommende Beispiele machen.

I. Aeltere Methoden.

1. Eine besondere Behandlung der Auflösung der transcendenten Gleichungen findet sich, so viel mir bekannt ist, nirgendwo. In einzelnen Fällen hat man solche Gleichungen entweder durch bloßes Probiren aufzulösen gesucht, welches Verfahren, als unsicher und unwissenschaftlich, keine weitere Beachtung verdient, oder man hat die bereits bekannten Methoden zur Auflösung der algebraischen Gleichungen auch auf die transcendenten ausgedehnt. Bekanntlich hat aber zuerst *Lagrange* eine sichere Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen gegeben, während die älteren Methoden mit Mängeln behaftet sind, die sie ganz unbrauchbar machen und die ich hier nicht besonders hervorzuheben brauche, da dieser große Mathematiker sie bereits in das hellste Licht gesetzt hat. Es versteht sich daher von selbst, daß die Anwendung dieser älteren Methoden auf die transcendenten Gleichungen dieselben Mängeln haben; wo sie häufig noch viel bedeutender sein können.

So z. B. wendet *Euler* *) die *Newtonsche* Approximations-Methode an, um mehrere transcendente Gleichungen aufzulösen. Die Mängel dieser Methode hat aber bereits *Lagrange* **) nachgewiesen. An einem andern Orte ***) hat *Euler* die *Bernoullische* Methode angewandt um die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{2} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \dots$$

zu finden, wobei er jedoch selbst bemerkt, daß diese Methode nur selten zur Erfindung der Wurzeln transcendenten Gleichungen angewandt werden könne. Dieselbe Methode hat *Euler* auch später benutzt †), um die kleinsten Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen zu finden. Die ausführliche Darstellung, welche *Euler* ††) der Bernoullischen Methode gewidmet hat und die Bemerkungen, welche *Lagrange* später hinzugefügt hat, zeigen zur Genüge, daß die Anwendung dieser Methode, selbst auf algebraische Gleichungen, sehr beschränkt ist und daher noch weniger zur allgemeinen Auflösung der transcendenten Gleichungen gebraucht werden kann. Man er-

*) Instit. calc. diff. T. II. §. 242 seqq.

**) Résol. des équât. num. No. V.

***) Introd. in anal. inf. l. I. §. 355.

†) Nova act. Acad. Petr. Tom. IX. p. 28 seqq.

††) Introd. in an. inf. l. I. C. 17.

hält nemlich mittelst dieser Methode nur Näherungswerthe der größten und kleinsten Wurzel, und zwar nur in dem Falle, wenn die Gleichung kein Paar zusammengehörender imaginärer Wurzeln hat, deren Product größer ist als das Quadrat der größten reellen Wurzel. Im entgegengesetzten Falle ist die Methode unbrauchbar. In der neuesten Zeit hat freilich *Fourier* *) Andeutungen gegeben, wie die Bernoullische Methode verbessert und zur Auffindung aller Wurzeln gebraucht werden könne und ich **) habe nachgewiesen, daß sich diese Andeutungen allerdings realisiren lassen. In wie fern nun diese Ausbildung der Bernoullischen Methode sich auch auf die transcendenten Gleichungen anwenden lasse, werde ich später untersuchen.

Die *Lagrange'sche* Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen ist zwar, von theoretischer Seite betrachtet, streng richtig, aber in ihrer Anwendung, wie bekannt, großen Schwierigkeiten unterworfen. Ihr wesentlichster Mangel liegt darin, daß man eine Zahl kennen muß, die kleiner als der kleinste Unterschied der Wurzeln ist. Die Aufsuchung dieser Zahl aber erfordert, sobald die Gleichung von einem hohen Grade ist, fast unausführbare Rechnungen; wie es *Lagrange* selbst schon bemerkt hat. Noch viel schwieriger muß die Aufsuchung dieser Zahl sein, sobald die gegebene Gleichung eine transcendente ist, und man kann sie in diesem Falle, wie auch schon *Poisson* bemerkt hat ***), als völlig unausführbar ansehen.

2. In dem 24sten Bande der Memoiren der Berliner Academie hat *Lagrange* eine Methode gegeben, um die Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch unendliche Reihen auszudrücken, und es haben später mehrere bedeutende Mathematiker diese Untersuchung aufgenommen und vervollkommenet. Diese Methode kommt zuletzt auf die Umkehrung der Reihen zurück, indem sie zeigt wie man, wenn eine Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \dots$$

gegeben ist, den Werth von x durch eine nach Potenzen von y geordnete Reihe ausdrücken kann, so daß man

$$x = A + By + Cy^2 + \dots$$

hat. *Lagrange* bemerkt im Eingange zu dieser Abhandlung, daß diese

*) Analyse des équations p. 6. 8 seqq.

**) *Crelle* Journ. für die Math. Bd. 11. p. 293 ff.

***) Journ. de l'école polyt. cah. 19. p. 382.

Methode auch bei den transcendenten Gleichungen brauchbar sei, welche Logarithmen und Kreisbogen enthalten, woraus also hervorgeht, daß er sie selbst nicht für eine allgemein auf transcendente Gleichungen anwendbare Methode gehalten hat. In der That ist sie aber auch erheblichen Schwierigkeiten unterworfen. Soll nemlich der Werth von x durch die nach Potenzen von y geordnete Reihe gefunden werden, so muß diese Reihe convergiren; sie kann aber auch häufig divergiren und die Untersuchung, ob das eine oder das andere Statt findet, ist schwierig, da die Reihen häufig sehr verwickelt sein können. *Lagrange* selbst hat zwar gesucht Kennzeichen anzugeben, vermittelt welcher man die Convergenz oder Divergenz beurtheilen könne: diese Kennzeichen sind aber schon aus dem Grunde ungenügend, weil sie auf einer falschen Definition der Convergenz beruhen. *Lagrange* nennt nemlich convergirend eine Reihe, deren Glieder unendlich klein werden, und er sucht daher nur zu bestimmen, ob die Reihen, welche die Wurzeln der Gleichungen ausdrücken, diese Eigenschaft haben, oder nicht. Es ist aber hinlänglich bekannt, daß die Glieder einer Reihe unendlich klein werden können, während die Reihe dennoch divergirt, das heißt, während ihr Werth über alle Grenzen hinaus wächst und also zur Berechnung untauglich ist. Hierzu kommt noch, daß wenn man auch den Werth einer Wurzel durch eine convergirende Reihe gefunden hat, es doch äußerst schwierig ist, die verschiedenen Reihen, welche verschiedene Wurzeln ausdrücken, zu finden und von einander zu unterscheiden; wie man es schon aus *Lagrange's* Untersuchungen sehen kann, die sich nur auf algebraische Gleichungen beziehen. Auch darf nicht übersehen werden, daß es nicht möglich ist, auf diesem Wege die einzelnen Wurzeln allmählig nach ihrer Größe zu finden; was doch ein wesentliches Erforderniß einer tauglichen Auflösungsmethode ist, da es besonders bei den transcendenten Gleichungen in der Regel nur darauf ankommt, die kleinsten Wurzeln zu kennen. In dem besonderen Falle, wo man den Werth der Wurzeln schon beinahe kennt, kann diese Methode allerdings oft mit Nutzen gebraucht werden, um genauere Werthe zu finden.

3. Einen anderen Weg hat *Cauchy* eingeschlagen *). Seine Methode beruht auf dem Verfahren, dessen sich *Legendre* bedient **), um einen

*) Leçons sur le calcul différentiel ch. 14.

**) Théorie des nombres T. 1. art. 119.

ersten Näherungswerth einer imaginären Wurzel algebraischer oder transcendenten Gleichungen zu finden. Ist nemlich die Gleichung $Fx = 0$ gegeben, so setzt *Legendre* $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, wo α und β beliebige reelle Zahlen sind, und substituirt diesen Werth in $F(x)$, so dafs $F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}$ ist, wo P und Q wieder reelle Gröfsen sind. Ferner substituirt man diese Werthe von x in $\frac{\partial Fx}{\partial x}$ und es sei unter dieser Voraussetzung $\frac{\partial Fx}{\partial x} = M + N\sqrt{-1}$. Nimmt man nun eine reelle oder imaginäre unbestimmte Gröfse ω , die aber im Verhältnifs zu $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ sehr klein ist, so hat man, wenn man $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ setzt und die höheren Potenzen von ω vernachlässigt,

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega) = P + Q\sqrt{-1} + \omega(M + N\sqrt{-1}).$$

Da nun ω willkürlich ist, so kann man

$$\omega(M + N\sqrt{-1}) = -n(P + Q\sqrt{-1})$$

setzen, wo n ein ächter Bruch ist. Man hat also einen neuen Näherungswerth

$$F(x) = (1-n)(P + Q\sqrt{-1}),$$

welcher im Verhältnifs von $1-n$ zu 1 kleiner ist als der frühere Näherungswerth. Führt man auf diese Weise fort, indem man wieder x um eine unbestimmte reelle oder imaginäre Gröfse wachsen läfst, deren Werth man nachher genauer bestimmt, so kann man sich dem wahren Werthe von x immer mehr nähern. Würde $\frac{\partial Fx}{\partial x}$ durch die Substitution eines Werthes von $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf Null reducirt, so müfste man, statt dieser Function, die Function $\frac{\partial^2 Fx}{\partial x^2}$ betrachten und überhaupt mufs man sich, wenn mehrere der Functionen $\frac{\partial Fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Fx}{\partial x^2}$, durch einen Werth $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf Null reducirt werden, an den ersten Differentialquotienten halten, der nicht Null wird. Auf diese Weise glaubt *Legendre* zu beweisen, dafs jede algebraische oder transcendente Gleichung eine Wurzel von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ hat, wo β auch Null sein kann. Dieses Resultat ist aber nicht richtig, und es läfst sich auch leicht zeigen, dafs *Legendre's* Verfahren mit mehreren bedeutenden Irrthümern behaftet ist. *Legendre* selbst hat schon eine Mangelhaftigkeit desselben bemerkt *), welche darin besteht, dafs man den ersten Näherungswerth ganz willkürlich annimmt, so dafs dieser hypothetische Werth vom wahren Werthe

*) Théor. des nombres ed. 3. T. II. p. 420.

bedeutend abweichen kann und man daher nothwendig sehr weitläufige Rechnungen machen muß. Dies ist aber nur eine Unbequemlichkeit. Unrichtig ist es dagegen, daß *Legendre* bei der Entwicklung von $F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ nur die zwei ersten Glieder berücksichtigt, die vermittelt der *Taylor'schen* Reihe gefunden werden, und den Rest ganz vernachlässigt. Dieses Verfahren, welches der *Newton'schen* Approximationsmethode ähnlich ist, leidet auch an demselben Fehler, indem die successiven Näherungswerthe, statt gegen den wahren Werth zu convergiren, auch divergiren können, da man Glieder vernachlässigt, deren Werth man nicht kennt. Ferner kann es aber auch sein, daß die Substitution von $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ für x einen der Differentialquotienten auf $\frac{1}{2}$ reducirt, und alsdann hört natürlich die Brauchbarkeit des Verfahrens ganz auf.

Diese Fehler hat *Cauchy* dadurch vermieden, daß er nicht eine beliebige Function $F(x)$ betrachtet, sondern die Untersuchung auf Functionen beschränkt, welche nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten für alle endlichen reellen oder imaginären Werthe von x endlich und stetig bleiben, und unendlich groß werden, wenn der Modulus der Veränderlichen x unendlich groß wird. *Cauchy* zeigt alsdann, wie man bei solchen Functionen nach *Legendre's* Verfahren unter gewissen Voraussetzungen Näherungswerthe finden und die Grenzen der begangenen Fehler bestimmen kann. Mithin ist diese Methode keine allgemein gültige. Ich begnüge mich daher, nur Folgendes darüber zu bemerken. Vermittelst dieser Methode will man sowohl die imaginären als die reellen Wurzeln finden. Soll die Wurzel reell sein, so muß der imaginäre Theil des gefundenen Werthes verschwinden. Hat nun aber die Gleichung reelle Wurzeln und man hat durch fortgesetzte Annäherung einen Werth $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ gefunden, in welchem β sehr klein ist, so kann man immer noch nicht wissen, ob β eigentlich gleich Null und also eine reelle Wurzel der Gleichung $= \alpha$ ist, oder ob die Gleichung eine imaginäre Wurzel $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ hat, in welcher β sehr klein ist. Grade die reellen Wurzeln, welche vom wichtigsten Interesse sind, können also nach dieser Methode am wenigsten sicher gefunden werden.

4. In der neuesten Zeit haben wir durch *Fourier* eine Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen erhalten, welche, insofern man diese Auflösung auf die Bestimmung des Werthes der reellen Wurzeln und das Erkennen der imaginären einschränkt, vollkommen genügt. *Fourier* hat nun mehrfach die Behauptung ausgesprochen, daß seine Methode nicht

auf die algebraischen Gleichungen beschränkt sei, sondern auch auf die transcendenten angewandt werden könne. Es sollte sogar das leider nicht erschienene fünfte Buch seines Werkes über die Gleichungen, wie wir aus dem *Exposé synoptique* ersehen, diese Anwendung seiner Methode ausführlich behandeln. Ich werde mich im Folgenden bemühen, mit Hülfe der Andeutungen, die *Fourier* an mehreren Orten, und besonders in dem erwähnten *Exposé* gegeben hat, diesen Theil seines Werkes wieder herzustellen und zu zeigen, wie man mittelst der *Fourierschen* Methode die transcendenten Gleichungen vollständig auflösen kann, und hoffe auf diese Weise der zweiten Anforderung der Societät d. W. Genüge zu leisten.

II. Auflösung der transcendenten Gleichungen.

5. Der Begriff der *Wurzel* einer *algebraischen* Gleichung kann auf zweierlei Arten erklärt werden, die ihrem Wesen nach identisch sind. Ist nemlich eine solche Gleichung

$$1. \quad f(x) = 0$$

gegeben, so nennt man jeden Werth von x , der statt x in fx substituirt, diese Function auf Null reducirt, eine Wurzel der Gleichung (1.). Ausserdem weifs man aber auch, dafs $f(x)$ das Product einer Anzahl einfacher reeller oder imaginärer Factoren ist, so dafs man

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots$$

hat, wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ reelle oder imaginäre Gröfsen sind. Da nun $f(x)$ nur dann den Werth Null annehmen kann, wenn einer dieser Factoren verschwindet und unter dieser Voraussetzung gleich Null wird, da das Product der übrigen Factoren immer eine endliche Gröfse bleibt, so kann man auch sagen: die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, welche den einfachen Factoren von $f(x)$ entsprechen. Man kann daher auch behaupten, dafs der erste Theil einer algebraischen Gleichung dem Producte der einfachen Factoren gleich ist, die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechen. Anders aber ist es bei den *transcendenten* Gleichungen. Für diese paßt nur die erste Definition des Begriffs der Wurzel und man muß sagen: die Wurzel einer transcendenten Gleichung $f(x) = 0$ ist jeder Werth von x , welcher $f(x)$ auf Null reducirt. Weifs man nemlich, dafs $f(x) = (x - a)F(x)$ ist, so folgt hieraus noch keinesweges, dafs a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist. Denn substituirt man statt x den Werth a , so wird zwar $x - a = 0$, aber es

kann sein, daß zu gleicher Zeit $F(a) = \infty$ wird. Man hätte daher in diesem Falle $f(a) = 0 \cdot \infty$, welcher Ausdruck keinesweges immer $= 0$ sein muß. Mithin ist zwar hier $x - a$ ein einfacher Factor von $f(x)$, aber dennoch ist a keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, und es folgt hieraus, daß bei den transcendenten Gleichungen keinesweges jeder einfache Factor des ersten Theils der Gleichung einer Wurzel entspricht, obwohl umgekehrt jede Wurzel einem einfachen Factor. Ist z. B. die Gleichung

$$\tan x = 0$$

gegeben, so kann man $\tan x$ als das Product der zwei Factoren $\sin x$ und $\sec x$ ansehen. Der Factor $\sin x$ ist nun bekanntlich das Product einer unendlichen Anzahl einfacher Factoren, da

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

ist; und dieses Product wird Null, sobald man einen der Factoren gleich Null setzt; das heißt, die Wurzeln der Gleichung

$$\sin x = 0$$

sind $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 3\pi$, Diese Wurzeln sind zugleich Wurzeln der Gleichung $\tan x = 0$; denn sobald $\sin x = 0$ ist, ist $\sec x = 1$, also in diesem Falle $\tan x = 0 \cdot 1 = 0$. Dagegen sind die Wurzeln der Gleichung $\sec x = 0$ keinesweges Wurzeln der Gleichung $\tan x = 0$. Soll nemlich $\sec x$ oder $\frac{1}{\cos x}$ Null werden, so muß $\cos x$ unendlich groß sein.

So lange aber x eine reelle Größe ist, kann dies nicht sein, das heißt, die Gleichung $\sec x = 0$ hat keine reelle Wurzel. Setzt man dagegen $x = y + z\sqrt{-1}$, wo y und z reelle Größen sind, so ist $\cos x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \cos y - \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \sin y \sqrt{-1}$. Soll nun dieser Ausdruck unendlich groß werden, so muß z unendlich groß sein. In diesem Falle hat man also

$$\cos x = \frac{1}{2}e^\infty (\cos y - \sin y \sqrt{-1}).$$

Nun ist aber, wenn man $x = y + z\sqrt{-1}$ setzt,

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \sin y + \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \cos y \sqrt{-1}$$

und, wenn man $z = \infty$ setzt,

$$\sin x = \frac{1}{2}e^\infty (\sin y + \cos y \sqrt{-1});$$

also ist $\sin x = \infty$, wenn $\frac{1}{\cos x} = 0$ ist, das heißt: wenn man statt x eine

Wurzel der Gleichung $\sec x = 0$ substituirt, so wird $\tan x = 0.\infty$; was nicht nothwendig Null ist. Auch sieht man leicht, dafs unter diesen Umständen $\tan x$ wirklich einen anderen Werth als Null hat. Denn es ist in diesem Falle

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y + \cos y \sqrt{-1}}{\cos y - \sin y \sqrt{-1}} = \sqrt{-1} *).$$

Das Product aller einfachen Factoren, welche den Wurzeln der Gleichung $\tan x = 0$ entsprechen, giebt also keinesweges $\tan x$, sondern $\sin x$.

6. Es kann auch sein, dafs es transcendente Functionen giebt, welche durch keinen reellen oder imaginären Werth von x auf Null reducirt werden können; wiewohl vielleicht noch keine solche Function bis jetzt bekannt ist. In diesem Falle würde also die Gleichung $f(x) = 0$ gar keine Wurzel haben. Es giebt zwar viele, sowohl algebraische als transcendente Functionen, von welchen sich nachweisen läfst, dafs sie durch keinen *endlichen* reellen oder imaginären Werth von x auf Null reducirt werden können (dahin gehören die Functionen $\frac{1}{x}$, e^x , $e^{x\sqrt{-1}}$): dennoch aber darf nicht behauptet werden, dafs z. B. die Gleichung $e^x = 0$ keine Wurzel habe, indem sich vielmehr nachweisen läfst, dafs sie deren unendlich viele hat, die sämmtlich in der Form $x = -\infty$ enthalten sind. Es wäre aber offenbar eine Einseitigkeit, wenn man die unendlich grofsen Werthe nicht als Wurzeln gelten lassen wollte; auch wird sich später zeigen (§. 31.), dafs die Betrachtung dieser Wurzeln in bestimmten Fällen durchaus nothwendig ist. Eben so hat die Gleichung $e^{x\sqrt{-1}} = 0$ eine unendliche Zahl von Wurzeln, die sämmtlich in der Form $x = -\infty \sqrt{-1}$ enthalten sind. Wenn ich aber sage, dafs eine transcendente Gleichung $f(x) = 0$ gar keine Wurzeln hat, so verstehe ich darunter, dafs sie weder durch endliche noch durch unendliche Werthe auf Null reducirt werden kann, und es ist bis jetzt nicht ausgemacht, ob solche Functionen vorhanden sein können oder nicht **).

*) Dafs $\tan x = \sqrt{-1}$ wird, wenn $\sec x = 0$ ist, hat bereits *Fourier* in einer Abhandlung bewiesen, die jedoch bis jetzt nicht erschienen ist. Man vergleiche *Mém. de l'acad. d. sc. T. X. pag. 129.*

**) Auch *Fourier* drückt sich darüber zweifelhaft aus, indem er sagt (*Exposé synopt. p. 65, 4*): „Mais s'il pouvait exister un facteur Fx qui ne cesserait point d'avoir une valeur finie, quelque valeur réelle ou imaginaire que l'on attribuat à x .“

7. Ist mithin eine transcendente Function gegeben (sie heiße $f(x)$) und man kennt alle reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, nemlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ und bezeichnet durch $\Phi(x)$ das Product

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) \dots$$

aller einfachen Factoren, welche den Wurzeln der Gleichung $\Phi(x) = 0$ entsprechen, so kann es sein, daß dieses Product nicht $= f(x)$ ist. Es kann nemlich, wenn $fx = \Phi x \cdot Fx$ ist, der Factor Fx so beschaffen sein, daß er nur durch solche Werthe von x auf Null reducirt wird, die, in Φx substituirt, diese Function auf ∞ reduciren, so daß die Wurzeln von Fx nicht zugleich Wurzeln von fx sind; oder es kann auch Fx eine Function sein, die durch keinen reellen oder imaginären Werth von x auf Null gebracht wird *). Läßt sich dagegen die Function fx in einfache Factoren zerlegen, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen, so daß man

$$fx = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) \dots$$

hat und diese Factoren so beschaffen sind, daß, wenn man einen derselben gleich Null setzt und den daraus entspringenden Werth von x in die übrigen Factoren substituirt, keiner dieser übrigen Factoren unendlich groß wird, so kann die Gleichung keine anderen Wurzeln als $\alpha, \beta, \gamma \dots$ haben. Denn substituirt man statt x irgend einen anderen Werth, so kann dieser keinen der Factoren, aus welchen fx besteht, und also auch fx selbst nicht auf Null reduciren.

8. Das Aufsuchen der reellen Wurzeln einer transcendenten, wie einer algebraischen Gleichung, geschieht dadurch, daß man Grenzen sucht, zwischen welchen die einzelnen Wurzeln enthalten sind und daß man diese Grenzen immer enger zusammenzieht. Eine algebraische Function fx ist aber immer eine continuirliche, das heißt, eine Function, die nur um ein unendlich Kleines wächst, wenn die Veränderliche x einen unendlich kleinen Zuwachs erhält. Der Werth einer solchen Function kann daher nicht vom Positiven zum Negativen und umgekehrt übergehen, ohne dazwischen Null zu werden. Eine transcendente Function fx dagegen kann auch eine discontinuirliche sein, das heißt, es können Grenzwerte von x vorkommen, die so beschaffen sind, daß einem unendlich kleinen Zuwachse von x ein

*) Es versteht sich von selbst, daß das Product der den Wurzeln entsprechenden einfachen Factoren einer Gleichung $A \cdot fx = 0$, wenn A eine Constante ist, nicht $A \cdot fx$, sondern nur fx werden kann.

endlicher oder unendlich großer Zuwachs von fx entspricht. Zwischen solchen zwei benachbarten Grenzwerten, bei welchen die Continuität aufhört, wird also die transcendente Function continuirlich sein. Sucht man daher die Wurzeln einer transcendenten Gleichung $fx = 0$, so muß man zuerst sehen, ob fx eine continuirliche oder eine discontinuirliche Function ist. Diese Untersuchung gehört nicht in das Gebiet der Theorie der Gleichungen. Dieselbe setzt sie vielmehr voraus. Hat man gefunden, daß fx eine discontinuirliche Function ist, und kennt man die Grenzwerte, bei welchen die Continuität aufhört, so betrachtet man, statt der Function im Allgemeinen, die einzelnen Theile derselben, welche zwischen je zwei Grenzwerten enthalten sind und sucht die in diesen Zwischenräumen enthaltenen Wurzeln. Insofern man daher voraussetzt, *wie es im Folgenden immer geschieht*, daß man die in den transcendenten Gleichungen vorkommenden Functionen nur innerhalb der Grenzen betrachtet, zwischen welchen sie continuirliche Größen sind, gilt auch für diese Gleichungen folgender Lehrsatz.

„Wenn die Gleichung $fx = 0$ gegeben ist, und man substituirt statt x die Werthe x_1 und x_2 , so werden, wenn fx_1 und fx_2 entgegengesetzte Zeichen haben, eine oder mehrere Wurzeln dieser Gleichung zwischen den Grenzen x_1 und x_2 enthalten sein. Liegt keine reelle Wurzel der Gleichung zwischen diesen Grenzen, so haben fx_1 und fx_2 gleiche Zeichen.“

Der Beweis dieses Satzes ist bekannt und folgt unmittelbar aus dem Begriffe der Continuität.

9. Ein anderer, ebenfalls bekannter Satz, von welchem später häufig Gebrauch gemacht werden wird, ist folgender.

„Wenn eine Function fx , so wie auch ihre Differentialquotienten $\frac{\partial fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}$ zwischen den Grenzen x und $x+a$ continuirliche Größen sind, so hat man

$$f(x+a) = fx + \frac{a \cdot \partial f(x, x+a)}{\partial x},$$

$$f(x+a) = fx + \frac{a \cdot \partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, x+a)}{\partial x^2},$$

$$f(x+a) = fx + \frac{a \cdot \partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{a^3}{2 \cdot 3} \frac{\partial^3 f(x, x+a)}{\partial x^3}$$

etc. etc.,

wo $(x, x+a)$ eine Größe bedeutet, die zwischen x und $x+a$ enthalten ist, aber in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Werthe haben

kann. Den Beweis dieses Satzes findet man z. B. in *Lagrange Leçons sur le calc. des fonct. leç. 9*. Er gilt auch für den Fall, wenn fx eine continuirliche imaginäre Function ist.

10. Nach diesen Vorbereitungen will ich nun zuerst zeigen, wie man die Grenzen finden kann, zwischen welchen die reellen Wurzeln der transcendentalen Gleichungen enthalten sind. Wiewohl ich die Untersuchungen *Fourier's* über die Theorie der algebraischen Gleichungen als bekannt voraussetzen muß, will ich doch zuerst, zur deutlicheren Einsicht, in der Kürze das Verfahren andeuten, mittelst dessen er die Grenzen der reellen Wurzeln findet.

Ist eine algebraische Gleichung

$$fx = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

gegeben, so bilde man die successiven Differenzialquotienten $f^1 x$, $f^2 x$, $f^3 x$, Der letzte Differentialquotient $f^m x$ ist eine constante Gröfse. Nimmt man statt x irgend eine Zahl a und substituirt dieselbe in die Ausdrücke

$$f^m x, f^{m-1} x, \dots, f^1 x, fx,$$

so werden die sich hieraus ergebenden Werthe das Zeichen von Positiv oder Negativ vor sich haben. Diese Zeichen schreibe man in der Ordnung, wie man sie erhält, neben einander, in eine horizontale Reihe, von der Linken zur Rechten fortgehend, und bezeichne die Reihe von Zeichen durch $[a]$. Die Zeichenreihe $[-\infty]$ wird nur Zeichenwechsel enthalten, die Zeichenreihe $[\infty]$ nur Zeichenfolgen; und zwar verliert die Zeichenreihe ihre Zeichenwechsel beim Uebergange von $-\infty$ zu ∞ allmählig, ohne jemals einen Zeichenwechsel, den sie verloren hat, wieder zu erhalten, oder neue zu bekommen. Sobald man nämlich statt x eine reelle Zahl α substituirt, welche fx auf Null reducirt, so verliert die Zeichenreihe einen Zeichenwechsel, den sie nicht wieder erhält. Sie kann aber auch Zeichenwechsel dadurch verlieren, daß einer oder mehrere der Differentialquotienten Null wird, ohne daß fx Null wird. In diesem Falle verliert sie aber die Zeichenwechsel immer paarweise, und der Verlust eines jeden solchen Paares von Zeichenwechseln deutet auf zwei imaginäre Wurzeln. Man besitzt nun Mittel, um zu unterscheiden, ob der Verlust der Zeichenwechsel von reellen oder imaginären Wurzeln berührt. Sind daher α und β zwei reelle Zahlen, ist $\beta > \alpha$ und man findet, daß $[\alpha]$ n Zeichenwechsel mehr enthält als $[\beta]$, so werden zwischen den Grenzen α und β n Wurzeln angedeutet und man kann alsdann untersuchen, ob und wie

viele reelle Wurzeln wirklich zwischen diesen Grenzen liegen, oder ob der Verlust der Zeichenwechsel ganz oder theilweise von imaginären Wurzeln herrührt.

11. Die besondere Eigenthümlichkeit einer ganzen algebraischen Function $f x$ besteht darin, daß man durch fortgesetzte Differentiation zuletzt zu einem Differentialquotienten kommt, der einen constanten Werth hat; und vermöge dieser Eigenthümlichkeit ist es möglich, jedesmal die Anzahl der Zeichenwechsel in den zwei Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ zu bestimmen und hieraus zu schliessen, wie viel Wurzeln zwischen den Grenzen α und β enthalten sind. Bei den transcendenten Functionen dagegen kann man die Differentiation in's Unendliche fortsetzen, und kommt nie zu einem constanten Werthe. Eben deswegen kann man bei den transcendenten Gleichungen nicht ohne Weiteres bestimmen, wie viele reelle Wurzeln zwischen zwei *beliebig gewählten* Grenzen enthalten sind, wenn auch die transcendente Function, welche den ersten Theil der Gleichung bildet, zwischen diesen Grenzen continuirlich ist. Dennoch aber kann man auch bei diesen Gleichungen, auf ganz ähnliche Weise wie bei den algebraischen, alle reelle Wurzeln, die zwischen $-\infty$ und ∞ enthalten sind, mit Bestimmtheit entdecken, sobald man nur diesen Zwischenraum in kleinere Zwischenräume theilt, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden müssen. Man kann nemlich für jede transcendente Function $f x$ einen Differentialquotienten $f' x$ finden, der so beschaffen ist, daß er zwischen zwei Grenzen α und β sein Zeichen nicht ändert, daß also die Gleichung $f' x = 0$ zwischen diesen Grenzen keine Wurzel hat; und dieser Differentialquotient spielt in Beziehung auf diese Grenzen dieselbe Rolle, wie der constante Differentialquotient bei den algebraischen Gleichungen, indem man vermittlest desselben bestimmen kann, wie viele Wurzeln die transcendente Gleichung $f x = 0$ zwischen den Grenzen α und β hat. Daß man wirklich jedesmal einen solchen Differentialquotienten finden kann, ist klar. Denn die gegebene Gleichung $f x = 0$ ist nothwendig eine bestimmte, das heisst, die Function $f x$ ist von der Art, daß man aus ihr für jeden Werth γ , den man statt x substituirt, den Werth von $f(\gamma)$ mit Bestimmtheit finden kann, sei es nun, daß man ihn genau angeben, oder in beliebig enge Grenzen einschliessen kann; was z. B. der Fall ist, wenn $f x$ eine convergirende Reihe ist. Wäre $f x$ eine unbestimmte Function, so könnte natürlich von der Auflösung der Gleichung $f x = 0$ nicht die Rede sein.

Es müssen mithin auch die successiven Differentialquotienten von $f x$ nothwendig bestimmte Functionen sein. Man wird also aus der Natur irgend eines Differentialquotienten erkennen können, ob er für einen bestimmten Werth $x = \alpha$, positiv oder negativ ist, und da dieser Differenzialquotient, wie hier immer vorausgesetzt wird, zwischen bestimmten Grenzen eine continuirliche Gröfse ist, so wird man immer einen Zuwachs δ von x bestimmen können, so beschaffen, dafs der Differentialquotient, welcher $f^n x$ heifsen mag, innerhalb der Grenzen $x = \alpha$, $x = \alpha + \delta$, immer dasselbe Zeichen behält. Sobald diese Grenzen gefunden sind, kann man, auf dieselbe Weise wie bei den algebraischen Gleichungen, bestimmen, wie viele Wurzeln die gegebene Gleichung zwischen diesen Grenzen hat. Es mufs nur eine Modification in Beziehung auf die Bildung der Zeichenreihen eintreten. Bei den algebraischen Gleichungen bildet man die Zeichenreihe, indem man zuerst alle Differentialquotienten, vom letzten anfangend, in eine Reihe schreibt, und alsdann statt x den Werth α substituirt. Die hieraus entspringende Zeichenreihe wurde oben durch $[\alpha]$ bezeichnet. Bei den transcendenten Gleichungen sucht man zuerst einen Differentialquotienten, der zwischen zwei Grenzen α und β dasselbe Zeichen behält *). Schreibt man diesen Differentialquotienten, und alle folgenden, nach der Ordnung in eine horizontale Linie und substituirt alsdann statt x einen Werth a , der zwischen α und β liegt, in alle diese Functionen, so erhält man wieder eine Reihe von Zeichen, die im Allgemeinen theils positiv, theils negativ sein werden. Diese Zeichenreihe soll im Folgenden durch $[a]$ bezeichnet werden. Ich werde auch zur Abkürzung die zwei Grenzen, zwischen welchen ein bestimmter Differentialquotient sein Zeichen nicht ändert, die *bestimmenden Grenzen* und diesen Differentialquotienten den *bestimmenden* nennen.

12. Liegt eine Zahl a zwischen den bestimmenden Grenzen α und β , so ist es einleuchtend, dafs die Zeichenreihe $[a]$ mit der Zeichenreihe $[\alpha]$ identisch ist, so lange nicht zwischen α und a eine Zahl liegt, die, statt x substituirt, eine oder mehrere der auf den bestimmenden Differentialquotienten folgenden Functionen auf Null reducirt. Denn eine Aenderung in der Zeichenreihe kann nur dadurch entstehen, dafs eine oder mehrere die-

*) Es wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dafs β , mit Rücksicht auf das Zeichen, immer gröfser ist als α .

ser Functionen vom Positiven zum Negativen, und umgekehrt, übergehen; und da vorausgesetzt wird, daß alle Functionen zwischen den bestimmenden Grenzen continuirlich sind, so kann dieser Uebergang nicht Statt haben, wenn die Functionen nicht durch den Werth Null gehen. Man nehme daher zuerst an, die Zahl a sei so beschaffen, daß sie nur fx und keine der übrigen Functionen auf Null reducirt, so daß also a eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ ist. Man setze in allen Functionen statt x nach einander die drei Werthe $a - \partial a$, a , $a + \partial a$ und schreibe die hierdurch entstehenden drei Zeichenreihen $[a - \partial a]$, $[a]$, $[a + \partial a]$ auf drei horizontale Linien unter einander. Diese drei Zeichenreihen werden nur in Absicht auf das letzte Zeichen verschieden sein; denn da der Werth von ∂a ganz unbestimmt ist und nach der Voraussetzung die Substitution von a für x nur fx auf Null reducirt, so kann man ihn immer so klein annehmen, daß keine der übrigen Functionen ihr Zeichen zwischen den Grenzen $a - \partial a$ und $a + \partial a$ ändert. Es wird aber $f(a + \partial a)$ positiv oder negativ und $f(a - \partial a)$ negativ oder positiv sein, je nachdem $f'a$ positiv oder negativ ist. Ist $f'a$ positiv, so hat man das Schema

$$[a - \partial a] = \dots + -$$

$$[a] = \dots + 0$$

$$[a + \partial a] = \dots + +$$

Ist $f'a$ negativ, so hat man das Schema

$$[a - \partial a] = \dots - +$$

$$[a] = \dots - 0$$

$$[a + \partial a] = \dots - -$$

In beiden Fällen verliert also die Zeichenreihe einen Zeichenwechsel beim Uebergange von $a - \partial a$ zu $a + \partial a$, sobald a eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ ist.

13. Ist dagegen die zwischen den bestimmenden Grenzen enthaltene Zahl a so beschaffen, daß sie eine der auf den bestimmenden Differentialquotienten folgenden Functionen, z. B. $f^n x$, und nur diese auf Null reducirt, so werden auch in diesem Falle alle Zeichen der drei Reihen $[a - \partial a]$, $[a]$ und $[a + \partial a]$ bezüglich gleich sein, bis auf dasjenige, welches durch die Substitution der drei Werthe $a - \partial a$, a und $a + \partial a$ in $f^n x$ entsteht, und man hat daher nur nöthig, die drei auf einander folgenden Functionen $f^{n+1} x$, $f^n x$, $f^{n-1} x$ zu betrachten, wenn man wissen will, wie sich die drei Reihen $[a - \partial a]$, $[a]$ und $[a + \partial a]$ gegen einander verhalten. Die Function

$f^n(a - \partial a)$ ist negativ oder positiv, die Function $f^n(a + \partial a)$ positiv oder negativ, je nachdem $f^{n+1}a$ positiv oder negativ ist. Die Function $f^{n-1}a$ kann aber ebenfalls positiv oder negativ sein. Hierdurch entstehen vier verschiedene Combinationen. Sind nemlich $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ positiv, so hat man, wenn man nur die Zeichen der Functionen $f^{n+1}x$, $f^n x$, $f^{n-1}x$, schreibt:

$$[a - \partial a] = \dots + - + \dots$$

$$[a] = \dots + 0 + \dots$$

$$[a + \partial a] = \dots + + + \dots$$

Sind $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ beide negativ, so hat man

$$[a - \partial a] = \dots - + - \dots$$

$$[a] = \dots - 0 - \dots$$

$$[a + \partial a] = \dots - - - \dots$$

Ist $f^{n+1}a$ negativ und $f^{n-1}a$ positiv, so hat man

$$[a - \partial a] = \dots - - + \dots$$

$$[a] = \dots - 0 + \dots$$

$$[a + \partial a] = \dots - + + \dots$$

Ist $f^{n+1}a$ positiv und $f^{n-1}a$ negativ, so hat man

$$[a - \partial a] = \dots + - - \dots$$

$$[a] = \dots + 0 - \dots$$

$$[a + \partial a] = \dots + + - \dots$$

In den zwei Fällen, wenn $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ gleiche Zeichen haben, enthält also $[a + \partial a]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[a - \partial a]$. In den zwei Fällen dagegen, wenn diese Functionen verschiedene Zeichen haben, enthält $[a + \partial a]$ eben so viele Zeichenwechsel als $[a - \partial a]$.

14. Es ist noch der Fall übrig, wenn die Zahl a so beschaffen ist, daß sie, statt x substituirt, mehrere auf einander folgende der zu betrachtenden Functionen auf Null reducirt. Da indessen die Untersuchung dieses Falles ebenfalls ganz auf dieselbe Weise ausgeführt werden kann wie bei den algebraischen Gleichungen, für welche sie schon *Fourier* ausführlich angestellt hat, so will ich nur das Resultat hersetzen, wie es in Beziehung auf die transcendenten Gleichungen ausgesprochen werden muß. Man nehme an, es sei eine zwischen den bestimmenden Grenzen α und β liegende Zahl so beschaffen, daß sie, statt x substituirt, die i auf einander folgenden Functionen

$$f^n x, f^{n-1} x, \dots, f^{n-i+1} x$$

auf Null reducirt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist i eine gerade Zahl, so enthält $[a + \partial a]$ die Zahl i von Zeichenwechseln weniger als $[a - \partial a]$; ist aber i eine ungerade Zahl, so kommt es darauf an, ob $f^{n+1}a$ und $f^{n-i}a$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Im ersten Falle hat $[a + \partial a]$ $i + 1$, im zweiten $i - 1$ Zeichenwechsel weniger als $[a - \partial a]$. Verschwinden nun durch die Substitution eines Werthes a von x , an verschiedenen Stellen verschiedene Gruppen von Functionen, so dafs die Anzahl der verschwindenden Functionen an einer Stelle i , an einer andern i' u. s. w. beträgt, so braucht man nur für jede Gruppe die Regeln in Anwendung zu bringen, die so eben für eine einzelne Gruppe gegeben worden sind und findet auf diese Weise die Totalsumme der Zeichenwechsel, die $[a + \partial a]$ weniger enthält als $[a - \partial a]$.

15. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich deutlich, wie man die Zahl finden kann, welche angiebt, wie viele reelle Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ zwischen den bestimmenden Grenzen α und β liegen können. So lange nemlich zwischen α und β keine Zahl liegt, welche eine oder mehrere der zu betrachtenden Functionen auf Null reducirt, sind die Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ identisch. Diese Zeichenreihen können nur dann von einander verschieden sein, wenn die Function fx , oder einer ihrer Differentialquotienten zwischen den Grenzen α und β Null wird. In diesem Falle mufs aber die Zeichenreihe $[\beta]$ immer weniger Zeichenwechsel als die Reihe $[\alpha]$ haben, indem, wenn man den Werth von x wachsen läfst, nur Zeichenwechsel verschwinden, nie aber die verlorenen wieder erscheinen, oder neue hinzu kommen können.

Liegen n reelle Wurzeln zwischen α und β , so mufs $[\beta]$ wenigstens n Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$ enthalten. Denn bezeichnet man die Wurzeln, nach ihrer Gröfse geordnet, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, so hat $[\alpha_1 + \partial \alpha_1]$ wenigstens einen Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$; eben so $[\alpha_2 + \partial \alpha_2]$ wenigstens einen Zeichenwechsel weniger als $[\alpha_1 + \partial \alpha_1]$ u. s. w.

Umgekehrt darf man aber aus dem Umstande, dafs $[\beta]$ die Zahl n von Zeichenwechseln weniger enthält als $[\alpha]$, nicht schliessen, dafs zwischen α und β wirklich n reelle Wurzeln liegen, weil das Verschwinden der Zeichen auch daraus entstehen kann, dafs einer oder mehrere der Differentialquotienten von fx durch die Substitution eines zwischen α und β liegenden Werthes auf Null reducirt werden, ohne dafs dies bei fx der Fall wäre. Soviel aber ist gewifs, dafs, wenn n eine ungerade Zahl ist, zwischen α

und β wenigstens eine reelle Wurzel liegt, weil, wenn einer oder mehrere der Differentialquotienten Null werden, entweder gar kein Zeichenwechsel, oder eine gerade Zahl von Zeichenwechseln verschwindet.

16. Der Zweifel, ob der Verlust der Zeichenwechsel auf reelle Wurzeln deute, die zwischen den bestimmenden Grenzen α und β enthalten sind, oder ob er davon herrühre, daß einer oder mehrere der Differentialquotienten zwischen diesen Grenzen Null werden, kann bei den transcendenten Gleichungen durch dieselbe Regel gelöst werden, die *Fourier* für den ähnlichen Fall bei den algebraischen Gleichungen gegeben hat. Ich werde hier aber um so lieber einen analytischen Beweis hersetzen, der auf die transcendenten und algebraischen Gleichungen zugleich anwendbar ist, als *Fourier* diese Regel durch geometrische Betrachtungen erwiesen hat.

Man betrachte zuerst den Fall, wenn $[\alpha]$ nur zwei Zeichenwechsel mehr als $[\beta]$ hat, und setze zugleich voraus, daß dieser Unterschied sich erst in den zwei letzten Zeichen jeder Reihe zeigt, so daß die vorhergehenden, sich entsprechenden Zeichen in beiden Reihen dieselben sind, so ist ein doppeltes Schema möglich. Entweder ist

$$[\alpha] = \dots + - +$$

$$[\beta] = \dots + + +$$

oder

$$[\alpha] = \dots - + -$$

$$[\beta] = \dots - - -$$

In beiden Fällen hat $f^2x=0$ keine Wurzel, die zwischen α und β enthalten ist, weil, sobald man die zwei letzten Zeichen vernachlässigt, die Zeichenreihe $[\alpha]$ nicht mehr Zeichenwechsel hat als die Zeichenreihe $[\beta]$. Man kann daher f^2x als die bestimmende Function annehmen. Dagegen hat $f^1x=0$ eine Wurzel zwischen diesen Grenzen und es entsteht nun die Frage ob $fx=0$ zwei reelle Wurzeln oder keine zwischen diesen Grenzen habe. Es wird hierbei vorausgesetzt, daß man sich schon versichert hat, die Gleichung $fx=0$ habe nicht zwei gleiche Wurzeln zwischen α und β , das heißt, daß man untersucht hat, ob fx und f^1x einen gemeinschaftlichen Factor haben und ob dieser gemeinschaftliche Factor, wenn er existirt, eine Wurzel zwischen α und β habe.

Man betrachte zunächst das erste Schema. Man sieht sogleich, daß, wenn α die Wurzel der Gleichung $f^1x=0$ ist, die zwischen α und β liegt, alsdann die Zeichenreihe $[\alpha]$ mit $+ 0 -$ schließen muß, sobald zwischen

α und β zwei reelle Wurzeln der Gleichung $fx=0$ liegen sollen, weil in dem anderen Falle, der hier noch möglich ist, wenn nemlich $[a]$ mit $+0+$ schließt, hieraus von selbst das Nichtvorhandensein der reellen Wurzeln folgt. Denn im letzteren Falle hätte man

$$[a-\partial a] = \dots + - +$$

$$[a+\partial a] = \dots + + +$$

Die zwei Zeichenwechsel würden also zwischen den Grenzen $a-\partial a$ und $a+\partial a$, zwischen welchen nach der Voraussetzung keine reelle Wurzel der Gleichung $fx=0$ liegt, verloren gehen. Mithin muß man, wenn die zwei reellen Wurzeln vorhanden sind, nothwendig folgendes Schema haben:

$$[\alpha] = \dots + - +$$

$$[a-\partial a] = \dots + - -$$

$$[a+\partial a] = \dots + + -$$

$$[\beta] = \dots + + +$$

und es ist eine reelle Wurzel zwischen α und $a-\partial a$, die andere zwischen $a+\partial a$ und β enthalten. Es sei die kleinere Wurzel $x_1 = \alpha + b$, die grössere $x_2 = \beta - b'$. Hieraus folgt (9)

$$f(\alpha + b) = f\alpha + bf'(\alpha, \alpha + b) = f\alpha + (x_1 - \alpha)f'(\alpha, \alpha + b) = 0$$

oder

$$x_1 = \alpha - \frac{f\alpha}{f'(\alpha, \alpha + b)}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$x_2 = \beta - \frac{f\beta}{f'(\beta - b', \beta)}.$$

Da $f'x$ zwischen den Grenzen α und β continuirlich ist, so bleibt der Werth dieser Function negativ, so lange man für x eine Zahl substituirt, die zwischen α und a liegt; und zwar wird der numerische Werth der Function kleiner, je näher die statt x substituirt Zahl dem Werthe a kommt. Aus demselben Grunde bleibt $f'x$ positiv, so lange man statt x eine Zahl substituirt, die zwischen a und β liegt, und der Werth dieser Function wächst, je mehr sich die statt x substituirt Zahl dem Werthe β nähert. Es ist also (ohne Rücksicht auf das Zeichen)

$$f'(\alpha, \alpha + b) < f'\alpha$$

$$f'(\beta - b', \beta) < f'\beta,$$

folglich

$$x_1 > \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}$$

$$x_2 < \beta - \frac{f\beta}{f'\beta},$$

und um so mehr

$$\alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} < \beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$$

da x_1 kleiner als x_2 ist, das heisst, es muß

$$\frac{f\beta}{f'\beta} + \frac{f\alpha}{-f'\alpha} < \beta - \alpha$$

sein.

Dasselbe Resultat findet man aus dem zweiten Schema, wenn man bedenkt, daß in diesem Falle die Zeichenreihe $[a]$ mit den Zeichen $-0+$ schliessen muß, wenn a die zwischen α und β liegende Wurzel der Gleichung $f'x = 0$ ausdrückt. Man hat daher folgende Regel. Soll die Gleichung $fx = 0$ unter den erwähnten Umständen zwei reelle Wurzeln haben, die zwischen α und β liegen, so muß die Summe der Quotienten $\frac{f\beta}{f'\beta}$, $\frac{f\alpha}{-f'\alpha}$ kleiner sein als der Unterschied der Grenzen; im entgegengesetzten Falle kann man mit Sicherheit annehmen, daß zwischen den erwähnten Grenzen keine Wurzel liegt. Ist aber diese Summe wirklich kleiner als $\beta - \alpha$, so folgt daraus noch nicht, daß die zwei reellen Wurzeln wirklich vorhanden sind, sondern man sieht daraus nur, daß die Grenzen nicht eng genug gezogen sind. In diesem Falle substituirt man statt x eine zwischen α und β liegende Zahl c . Hat fc nicht dasselbe Zeichen wie $f\alpha$ und $f\beta$, so folgt daraus, daß eine reelle Wurzel zwischen α und c , die andere zwischen c und β liegt. Hat aber fc dasselbe Zeichen, so sehe man ob $f'c$ in Absicht auf das Zeichen mit $f'\alpha$ oder $f'\beta$ übereinstimmt. Man nenne δ diejenige der Zahlen α und β , die, in $f'x$ substituirt, ein Resultat giebt, dessen Zeichen dem von $f'c$ entgegengesetzt ist. Die zwei möglicherweise vorhandenen Wurzeln müssen also zwischen c und δ liegen. Man wende daher auf diese Grenzen dasselbe Verfahren an, welches früher bei den Grenzen α und β angewandt wurde. Führt man auf diese Weise fort, so findet man zuletzt, entweder daß keine reelle Wurzel zwischen den Grenzen α und β liegt, oder man gelangt dahin, die Wurzeln zu trennen.

Bisher ward f^2x als die bestimmende Function angenommen. Nähme man aber einen höheren Differentialquotienten zur bestimmenden Function, so könnte es sein, daß der Unterschied der Zwischenwechsel in den Reihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ größer als 2 wäre; auch könnte sich dieser Unterschied früher als bei den zwei letzten Zeichen zeigen. Da indessen schon *Fourier* ausführlich gezeigt hat, daß auch in diesen Fällen dieselbe Regel hin-

reicht, um das Vorhandensein oder die Abwesenheit der reellen Wurzeln zu erkennen, und dieselben Betrachtungen ohne irgend eine Aenderung auch für die Wurzeln einer transcendenten Gleichung gelten, die zwischen den bestimmenden Grenzen α und β angedeutet werden, so halte ich es für überflüssig, diese Betrachtungen zu wiederholen.

17. Durch das Vorhergehende ist die Frage, wie man die Grenzen finden kann, zwischen welchen die einzelnen reellen Wurzeln enthalten sind, erledigt. Es kommt bloß darauf an, daß man den Zwischenraum von $-\infty$ zu ∞ in Unterabtheilungen theilt, so daß für jede solche Unterabtheilung irgend ein Differentialquotient zwischen den Grenzen, die diese Unterabtheilung einschließen, dasselbe Zeichen behält; alsdann findet man, wie viele Wurzeln zwischen diesen Grenzen liegen. Dies Verfahren wird durch die folgenden Beispiele noch deutlicher werden. Ich will nur noch eine Bemerkung hier anknüpfen. Da eine algebraische Gleichung vom m ten Grade immer das Product von m einfachen Factoren ist, die den m reellen oder imaginären Wurzeln entsprechen, so kann man aus dem Verluste der Zeichenwechsel, die nicht reellen Wurzeln der Gleichung entsprechen, schließen, daß die Gleichung eben so viel imaginäre Wurzeln hat, als sie solcher Zeichenwechsel verliert. Denn da die Zeichenreihe überhaupt zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ immer m Zeichenwechsel verliert und jeder reellen Wurzel der Verlust eines Zeichenwechsels entspricht, so folgt daraus, daß die Zeichenwechsel, welche nicht wegen reeller Wurzeln verloren gehen, eben so viele imaginäre Wurzeln andeuten. Dieser Schluss ist aber auf die transcendenten Gleichungen im Allgemeinen nicht anwendbar. Denn, wie früher bewiesen wurde, bestehen diese Gleichungen nicht immer aus Producten einfacher Factoren, die den Wurzeln der Gleichung entsprechen. Wenn man daher findet, daß zwischen den zwei bestimmenden Grenzen α und β mehr Zeichenwechsel verloren gehen als reelle Wurzeln zwischen diesen Grenzen enthalten sind, so folgt daraus noch nicht, daß die Gleichung imaginäre Wurzeln hat.

18. Sobald einmal die reellen Wurzeln getrennt sind, so geht die genauere Berechnung ihrer Werthe ohne allen Unterschied auf dieselbe Weise fort, wie bei den algebraischen Gleichungen. Wendet man die verbesserte Newtonsche Näherungsmethode an, wie man sie bei Fourier findet, so muß man von dem in (9.) gegebenen Satze Gebrauch machen, und verfährt auf dieselbe Weise, wie Fourier im zweiten Buche seines Werkes

über die Gleichungen. Ich kann daher wieder nur auf dieses Werk verweisen und will blofs in der Kürze die Regeln der Berechnung zusammenstellen, damit ihre Anwendung auf die Lösung einzelner Gleichungen, die später folgen soll, deutlicher werde.

Man zieht zuerst die Grenzen so eng zusammen, dafs nur eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ und keine Wurzel der Gleichungen $f''x = 0$, $f'x = 0$ zwischen denselben enthalten ist. Es ist immer möglich, so enge Grenzen zu ziehen, sobald die Functionen $f''x$ und $f'x$ nicht einen gemeinschaftlichen Factor mit fx haben; im entgegengesetzten Falle müßte man erst diesen Factor suchen und absondern. Sind diese Grenzen gefunden und nennt man die kleinere α , die gröfsere β , so bemerke man, welche derselben so beschaffen ist, dafs sie, statt x in f^2x und fx substituirt, diesen Functionen gleiche Zeichen giebt: diese Grenze heisse die äufsere. Man bezeichne sie durch ∂ , so sind

$$\alpha - \frac{f\alpha}{f'\partial}, \quad \beta - \frac{f\beta}{f'\partial}$$

zwei neue Näherungswerthe von x , und zwar liegt der erste zwischen α und x , der zweite zwischen x und β . Mit diesen neuen Näherungswerthen kann man wieder wie mit α und β verfahren und daraus zwei andere Näherungswerthe herleiten, die der Wurzel noch näher liegen, und dieses Verfahren läfst sich so weit man will fortsetzen. Man wird aber diese zwei Grenzen nicht jedesmal zu berechnen, sondern nur folgende Regel zu beobachten haben. Man ziehe zuerst die Grenzen α und β so eng zusammen, dafs sie nur um eine Decimal-Einheit verschieden sind: ihr Unterschied sei $(\frac{1}{10})^n$. Man nehme alsdann diejenige der Gröfsen $f''\alpha$ und $f''\beta$, deren numerischer Werth der gröfste ist, und dividire ihn durch diejenige der Gröfsen $2f'\alpha$, $2f'\beta$, die den kleinsten Zahlenwerth hat. Es sei $(\frac{1}{10})^k$ die Decimal-Einheit, welche unmittelbar gröfser ist als dieser Quotient. Man untersuche nun ob n gleich $1-k$, oder gröfser als diese Zahl ist. Ist $n < 1-k$, so mufs man die Grenzen enger zusammenziehen, bis die Bedingung $n \geq 1-k$ erfüllt ist. Man nehme alsdann, wenn β die äufsere Grenze ist, den Quotienten $\frac{f\beta}{f'\beta}$ und entwickle ihn bis zur $2n+k^{\text{ten}}$ Decimalstelle einschliesslich. Die letzte Stelle des Quotienten vermehre man um eine Einheit und addire den so gefundenen Werth zur Grenze β , oder ziehe ihn davon ab, je nachdem $f\beta$ und $f'\beta$ verschiedene oder gleiche Zeichen haben. Der so ent-

stehende neue Näherungswerth β' kann gröfser oder kleiner als die Wurzel sein; was man leicht erfährt, wenn man β' statt x in fx substituirt. In jedem Falle aber ist β' von x um eine Gröfse verschieden, die weniger als $(\frac{1}{10})^{2n+k}$ beträgt. Wenn man daher die letzte Decimalstelle im Werthe von β' um eine Einheit vermehrt oder vermindert, so findet man eine zweite Grenze, die kleiner oder gröfser als die Wurzel ist, je nachdem β' gröfser oder kleiner als diese ist. Mit diesen neuen Grenzen verfähre man wieder wie mit den vorhergehenden, so erhält man allmählig Resultate, die bis auf die Decimalstellen vom Range $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$ u. s. w. genau sind.

III. Beispiele.

19. Ich werde nun, theils um das Vorhergehende zu erläutern, theils um der dritten Anforderung der Societät Genüge zu leisten, die Werthe einiger Wurzeln verschiedener transcendenten Gleichungen berechnen, und will nur noch eine allgemeine Bemerkung machen. Im Allgemeinen steht es frei, irgend einen beliebigen Differentialquotienten als bestimmende Function zu nehmen, sobald man Grenzen kennt, zwischen welchen er beständig dasselbe Zeichen behält. In der Regel wird es aber am zweckmäfsigsten sein, die Grenzen zu suchen, zwischen welchen $f''x$ dasselbe Zeichen behält, da gewöhnlich die Differentialquotienten einer transcendenten Function desto verwickelter werden, je weiter man die Differentiation fortsetzt, es also auch schwerer sein wird, die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen eine solche Function dasselbe Zeichen behält. Besteht aber der erste Theil der Gleichung theils aus transcendenten, theils aus algebraischen Functionen, so wird es häufig nützlich sein, die Differentiation so weit fortzusetzen, bis die algebraischen Functionen verschwunden sind. Hätte man z. B. die Gleichung

$$fx = \sin x + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0,$$

so würde man viermal zu differentiiren haben. Dies giebt $f^4x = \sin x$, und man nimmt alsdann $\sin x$ als bestimmende Function.

20. In Beziehung auf die Schwierigkeit, welche die Auflösung der transcendenten Gleichungen im Verhältnifs zu der der algebraischen Gleichungen macht, kann man die transcendenten Gleichungen in verschiedene Classen eintheilen.

Am leichtesten sind offenbar diejenigen Gleichungen aufzulösen, deren einzelne Glieder nur ganze oder gebrochene Potenzen einer und derselben transcendenten Function enthalten. Solche Gleichungen sind z.B. die folgenden:

$$1. \quad A(\sin x)^{\alpha} + B(\sin x)^{\beta} + C(\sin x)^{\gamma} + \dots M(\sin x)^{\mu} = 0,$$

$$2. \quad Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t} + \dots Me^{\mu t} = 0,$$

wo $A, B, C, \dots M$ bestimmte Zahlen und α, β, γ ebenfalls reelle, ganze oder gebrochene Zahlen sind. Solche Gleichungen kann man nemlich unmittelbar auf algebraische bringen. Man braucht nur statt $\sin x$ in der ersten oder statt e^t in der zweiten Gleichung eine neue unbekannte Gröfse, etwa y zu setzen, so gehen die Gleichungen in folgende Gleichung über:

$$3. \quad Ay^{\alpha} + By^{\beta} + Cy^{\gamma} + \dots My^{\mu} = 0.$$

Dasselbe ist der Fall bei der Gleichung

$$4. \quad Aa^x + Bb^x + Cc^x + \dots + Mm^x = 0,$$

wo A, B, C, \dots beliebige Zahlen und a, b, c, \dots positive Zahlen sind. Man braucht nur $a = e^{\alpha}$, $b = e^{\beta}$, $c = e^{\gamma}$ zu setzen, so geht die Gleichung (4.) in die Gleichung (2.) über. Sind die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ in der Gleichung (3.) ganze positive Zahlen, so ist die Gleichung eine gewöhnliche algebraische. Sind aber einige dieser Exponenten negative oder gebrochene Zahlen, so hat man nicht nöthig, wie es gewöhnlich in solchen Fällen geschieht, diese Exponenten durch Potenziiiren wegzuschaffen, sondern man kann sie unmittelbar nach denselben Regeln behandeln, welche *Fourier* für die gewöhnlichen algebraischen Gleichungen gegeben hat. Da hierüber *Sturm* schon eine Abhandlung geschrieben hat, die vielleicht bereits gedruckt ist, so werde ich mich nicht länger bei diesem Gegenstande aufhalten und verweise auf dessen Bemerkungen*).

21. Znnächst lasse ich die transcendenten Gleichungen folgen, bei welchen sich zwar der erste Theil der Gleichung selbst nicht auf eine algebraische Function zurückführen läfst, aber die sämtlichen Differentialquotienten algebraische Functionen sind. Dies ist der Fall, wenn in der Gleichung die Functionen $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctang x$ etc. vorkommen. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$x \log x - 100 = 0,$$

welche *Euler* behandelt hat**). Hier ist, wenn man die natürlichen Loga-

*) Bulletin des sciences par *Férussac*, Sect. I. T. II. 1829.

**) Institut. calc. différ. Tom. II. §. 243.

rithmen anwendet,

$$\begin{aligned}fx &= x \log x - 100, \\f'x &= \log x + 1, \\f''x &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Da $f''x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=\infty$ positiv ist, so nehme man diese Function zwischen diesen Grenzen als die bestimmende an. Da x und $\log x$ fortwährend wachsen, so folgt, daß zwischen diesen Grenzen nur eine Wurzel der Gleichung $fx=0$ liegen kann. Setzt man $x=3$, und dann $x=4$, so findet man

$$\begin{aligned}[3] &= \frac{+}{\frac{1}{2}} \quad \frac{+}{2,098 \dots} \quad \frac{-}{0,3093 \dots} \\[4] &= \frac{+}{\frac{1}{2}} \quad \frac{+}{2,386 \dots} \quad \frac{+}{0,940 \dots}\end{aligned}$$

Es liegt also die Wurzel zwischen 3 und 4. Nun ist $4-3 = (\frac{1}{10})^0$ und $\frac{\frac{1}{2}}{2.2,098} = 0,07$, also (nach §. 18.)

$$k = 1, \quad n = 0,$$

mithin $n = 1 - k$. Die Grenzen sind also eng genug zur nähernden Berechnung gezogen. Die äußere Grenze ist hier 4, mithin $\frac{f\beta}{f'\beta} = \frac{0,940}{2,386}$, und da $2n + k = 1$ ist, so muß die Division bis zur ersten Decimalstelle ausgeführt werden: also ist $\frac{f\beta}{f'\beta} = 0,3$ und mithin *der erste Näherungswerth* $= 4 - 0,4 = 3,6$.

Substituirt man in fx statt x den Werth 3,6, so erhält man ein *positives* Resultat. Der Werth 3,6 ist also zu groß, und die Wurzel liegt zwischen 3,5 und 3,6. Nun ist $n = 1$, also $2n + k = 3$. Da 3,6 die äußere Grenze ist, so hat man $\frac{f(3,6)}{f'(3,6)} = \frac{0,00619 \dots}{2,28093 \dots} = 0,002$; also ist *der zweite Näherungswerth* $3,6 - 0,003 = 3,597$ bis auf $(\frac{1}{10})^3$ genau. Da $f(3,597)$ negativ ist, so liegt die Wurzel zwischen 3,597 und 3,598, und da 3,598 die äußere Grenze ist, so hat man $\frac{f(3,598)}{f'(3,598)} = \frac{0,00163032}{2,28037813}$, welcher Quotient bis zur 7ten Decimalstelle entwickelt werden muß, indem $2n + k = 7$ ist. Dies giebt 0,0007149; also ist *der dritte Näherungswerth* $3,598 - 0,000715 = 3,597285$ bis auf $(\frac{1}{10})^7$ genau, und zwar liegt der Werth zwischen 3,5972850 und 3,5972851. *Euler* findet 3,5972852.

22. Ich werde nun einige Gleichungen abhandeln, für welche die Differentialquotienten ebenfalls transcendente Größen sind, jedoch von der Art, daß die numerischen Werthe der darin vorkommenden transcendenten Functionen bereits in Tafeln berechnet sind. Hierher gehören zunächst die trigonometrischen Functionen. Es sei also z. B. die Gleichung

$$fx = x - \cos x = 0$$

gegeben, welche *Euler* ebenfalls behandelt hat *). Es ist einleuchtend, daß diese Gleichung *nur eine* reelle Wurzel haben kann. Nun ist

$$f'x = 1 + \sin x,$$

$$f''x = \cos x.$$

Da $\cos x$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = 90^\circ$ immer positiv ist, so kann $f''x$ zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function angenommen werden; $x - \cos x$ ist aber negativ, wenn man $x = 0$ setzt, und positiv, wenn man $x = 90^\circ$ setzt, woraus schon folgt, daß eine Wurzel der Gleichung $x - \cos x = 0$ zwischen diesen Grenzen enthalten ist. Zieht man die Grenzen enger zusammen und nimmt als solche zuerst $x = 0,7$, $x = 0,8$, so findet man

$$[0,7] = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 0,764 \dots & 1,644 \dots & 0,064 \dots \end{array}$$

$$[0,8] = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 0,696 \dots & 1,717 \dots & 0,103 \dots \end{array}$$

Hier ist $\frac{0,764}{2,1,644} = 0,2$ also $k = 0$; auch ist $m = 1$; mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Die äußere Grenze ist $x = 0,8$, und da $2n + k = 2$ ist, so entwickle man $\frac{f(0,8)}{f'(0,8)} = \frac{0,103}{1,717}$ bis zur zweiten Decimalstelle. Dies giebt 0,06: also ist *der erste Näherungswerth* $= 0,8 - 0,07 = 0,73$ bis auf $(\frac{1}{10})^2$ genau. Substituirt man diesen Werth statt x , so findet man, daß er zu klein ist; der Werth von x liegt also zwischen 0,73 und 0,74 und man hat $\frac{f(7,4)}{f'(7,4)} = \frac{0,001531}{1,674 \dots}$, welcher Quotient bis auf die vierte Decimalstelle entwickelt werden muß. Dies giebt 0,0009; also ist *der zweite Näherungswerth* $0,74 - 0,001 = 0,739$ bis auf $(\frac{1}{10})^4$ genau. Durch Substitution dieses Werthes statt x findet man, daß die Wurzel zwischen 0,739 und 0,7391 liegt. Der nächste Quotient muß bis auf die 8te Decimalstelle berechnet werden. Dies giebt $\frac{f(0,7391)}{f'(0,7391)} =$

*) Introd. in anal. infinit. L. II. §. 531.

$\frac{0,000024887 \dots}{1,67362 \dots} = 0,00001487$; also ist der *dritte Näherungswerth* 0,7391
 $-0,00001488 = 0,73908512$ bis auf $(10)^8$ genau. *Euler* findet 0,7390847.

23. Es sei ferner die Gleichung

$$x - \tan x = 0$$

gegeben, welche in der Theorie der Schwingungen elastischer Körper und in der Theorie der Wärme vorkommt. Statt dieser Gleichung kann man auch schreiben $\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$, und man kann hier wieder wie früher beweisen, daß die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\cos x} = 0$ nicht Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. (Vergl. §. 5.) Man braucht daher nur die Gleichung $x \cos x - \sin x = 0$ zu betrachten. Da diese Gleichung unverändert bleibt, wenn man $-x$ statt x setzt, so folgt, daß jeder positiven Wurzel α eine negative $-\alpha$ entspricht. Man braucht daher nur die positiven Wurzeln zu suchen. Es ist

$$f x = x \cos x - \sin x,$$

$$f' x = -x \sin x,$$

$$f'' x = -(x \cos x + \sin x).$$

Die kleinste Wurzel ist $x = 0$. Bezeichnet man durch ω ein Unendlich-Kleines, so ist klar, daß $f'' x$ zwischen den Grenzen $x = \omega$ und $x = 90$ immer negativ ist. Man hat also

$$[\omega] = \text{---}$$

$$[90^\circ] = \text{---}$$

Zwischen diesen Grenzen liegt mithin keine Wurzel. Es ist ferner einleuchtend, daß keine Wurzel zwischen den Grenzen $x = 90^\circ$ und $x = 180^\circ$ enthalten ist, da $\cos x$ zwischen diesen Grenzen immer negativ und $\sin x$ immer positiv ist. Zwischen den Grenzen $x = 180^\circ$ und $x = 270^\circ$ ist $f'' x$ immer positiv, und kann daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function angenommen werden. Nun findet man

$$[180^\circ + \omega] = \text{++}$$

$$[270^\circ] = \text{+++};$$

also hat die Zeichenreihe $[180 + \omega]$ einen Zeichenwechsel mehr als die Zeichenreihe $[270^\circ]$, und es liegt daher eine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Zieht man die Grenzen enger zusammen, so ergibt sich, daß die Wurzel zwischen $x = 4,4$ und $x = 4,5$ liegt, und zwar ist

$$[4,4] = \frac{+}{2,3} \quad \frac{+}{4,187\dots} \quad \frac{-}{0,4006\dots}$$

$$[4,5] = \frac{+}{1,92} \quad \frac{+}{4,398885} \quad \frac{+}{0,028949}$$

Nun ist $\frac{2,3}{8,37} = 0,2$, also $k = 0$; ferner ist $n = 1$; mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Die äußere Grenze ist 4,5. Man muß also den Quotienten $\frac{0,028\dots}{4,398\dots}$ bis auf die zweite Decimalstelle entwickeln. Dies giebt 0,00. Mithin ist der erste Näherungswerth $4,5 - 0,01 = 4,49$. Da $f(4,49)$ negativ ist, so folgt hieraus, daß die Wurzel zwischen 4,49 und 4,5 enthalten ist. Nun ist 4,5 die äußere Grenze, und der Quotient $\frac{0,028949}{4,398885}$, auf vier Decimalstellen entwickelt, giebt 0,0065; also ist der zweite Näherungswerth $4,5 - 0,0066 = 4,4934$. Dieser Werth ist zu klein; also liegt die Wurzel zwischen 4,4934 und 4,4935. Der Quotient $\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627}$ auf 8 Decimalstellen entwickelt, giebt 0,00009035: also ist der dritte Näherungswerth $4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964$ bis auf $(\frac{1}{10})^8$ genau. In Bogen-Einheiten ausgedrückt, giebt dieses $257^0 27' 12''$, 268. *Euler* findet den Näherungswerth $257^0 27' 12'' = 4,49340834^*)$. Man kann aber vermittelst der *Eulerschen* Methode den Werth noch genauer finden, wenn man alle Glieder der Reihe, die er zur Berechnung anwendet und welche noch auf die achte Decimalstelle Einfluß haben, berücksichtigt. Man findet alsdann, nahe mit unserem Resultate zusammentreffend, den Werth $4,49340968$. *Poisson* findet **) $4,49331$, welcher Werth schon in der vierten Decimalstelle ungenau ist und wahrscheinlich $4,49341$ heißen soll.

Auf dieselbe Weise, wie hier die kleinste positive Wurzel gefunden wurde, können nun auch die übrigen Wurzeln berechnet werden. Es ist aber einleuchtend, daß es unendlich viele solche Wurzeln giebt und daß die n te Wurzel zwischen den Grenzen $n\pi$ und $(n + \frac{1}{2})\pi$ enthalten ist, wo π die halbe Peripherie bedeutet.

Bemerkenswerth ist auch die Art, wie *Euler* durch Umkehrung der Reihen Näherungswerthe für jede n te Wurzel findet, die desto genauer sind,

*) Introd. in anal. infinit. L. II. §. 539.

**) Mém. de l'acad. des sciences T. VIII. p. 420. Als Werth der zweiten Wurzel giebt *Poisson* 7,73747, was schon in der zweiten Decimalstelle unrichtig ist, indem der wahre Werth 7,725.... ist.

je größer n ist. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens in diesem besondern Falle hängt aber von dem besondern Umstande ab, daß sich die n te Wurzel dem Werthe $(n + \frac{1}{2}\pi)$ immer mehr nähert, je größer n ist (vergl. §. 2.).

24. Eine andere Gleichung dieser Art, welche in der Theorie der Schwingungen einer elastischen Kugel vorkommt, ist folgende:

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0.$$

Auch hier entspricht jeder positiven Wurzel α eine negative $-\alpha$; man braucht daher nur die positiven Wurzeln zu suchen. Die kleinste entspricht dem Werthe $x = 0$. Die nächste Wurzel findet man wie folgt. Es ist

$$fx = (4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x,$$

$$f'x = -x(3x \cos x + 2 \sin x),$$

$$f''x = (3x^2 - 2) \sin x - 8x \cos x.$$

Die Function $f''x$ ist zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 45^\circ$ immer negativ. Denn ist $3x^2 < 2$ oder $x < \sqrt{\frac{2}{3}}$, das heißt $x < 45^\circ$, so ist $3x^2 - 2$ und also auch $f''x$ negativ: mithin kann $f''x$ zwischen diesen Grenzen zur bestimmenden Function genommen werden. Bezeichnet man durch ω ein Unendlich-Kleines, so hat man

$$[\omega] = - - -$$

$$[45^\circ] = - - -.$$

Es liegt also keine Wurzel zwischen 0 und 45° . Zwischen den Grenzen $x = 45^\circ$ und $x = 90^\circ$ kann aber $f''x$ nicht als bestimmende Function gebraucht werden, weil sie zwischen diesen Grenzen das Zeichen wechselt. Man könnte nun zwar den Zwischenraum in kleinere theilen, wird aber schneller zum Ziele kommen, wenn man die höhern Differentialquotienten entwickelt. Denn es ist

$$f'''x = (3x^2 - 10) \cos x + 14x \sin x$$

$$f''x = (24 - 3x^2) \sin x + 20x \cos x.$$

Offenbar ist $f''x$ zwischen den Grenzen 0 und 90° immer positiv und folglich zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function zu gebrauchen. Die Zeichenreihen sind

$$[\omega] = + - - - -$$

$$[90^\circ] = + + + - -.$$

Da nun jede Zeichenreihe nur einen Zeichenwechsel enthält, so liegt keine Wurzel zwischen diesen Grenzen.

Zwischen den Grenzen $x = 90^\circ$ und $x = 180^\circ$ ist $f''x$ immer positiv und daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function brauchbar.

Man findet

$$[90^\circ] = + - -$$

$$[180^\circ] = + + +;$$

also ist zwischen diesen Grenzen eine Wurzel enthalten. Die Grenzen sind aber noch nicht eng genug zur nähernden Berechnung, da auch $f'x = 0$ eine Wurzel zwischen diesen Grenzen hat. Zieht man die Grenzen enger zusammen und setzt allenfalls $x = 2,5$ und $x = 2,6$, so hat man

$$[2,5] = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 26,04 & 12,029 & 0,816 \dots \end{array}$$

$$[2,6] = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 27,2 & 14,707 & 0,519 \dots \end{array}$$

Hier ist $\frac{27,2}{2.12,029} = 1, \dots$, also $k = -1$; auch ist $n = 1$; mithin wird die Bedingung $n > 1 - k$ nicht erfüllt und die Grenzen müssen enger gezogen werden. Setzt man $x = 2,56$, $x = 2,57$, so findet man

$$[2,56] = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 26,81 & 13,901 \dots & \end{array}$$

$$[2,57] = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 26,92 & 13,88437 & 0,09057 \dots \end{array}$$

Hier ist $\frac{26,92}{2.13,8} = 0,9$, also $k = 0$; ferner $n = 2$; folglich sind die Grenzen hinlänglich nahe. Die äußere Grenze ist 2,57; der Quotient $\frac{0,09057}{13,88437}$ auf vier Stellen entwickelt, giebt 0,0065: also ist der *erste Näherungswerth* $2,75 - 0,0066 = 2,5634$. Dieser Werth ist zu klein; die Wurzel liegt also zwischen 2,5634 und 2,5635. Bei der nächsten Operation erhält man den Werth bis auf 8 Stellen genau, und zwar ist

$$\frac{f(2,5635)}{f'(2,5635)} = \frac{0,00090157}{13,7095659} = 0,00006576,$$

also der *zweite Näherungswerth* $2,5635 - 0,00006577 = 2,56343423$. *Poisson* findet 2,56334 *).

Zwischen den Grenzen $x = 180^\circ$ und $x = 270^\circ$ ist fx immer, positiv, mithin keine Wurzel zwischen diesen Grenzen enthalten. Im vierten Quadranten dagegen liegt eine Wurzel; denn $f''x$ ist zwischen diesen Grenzen immer negativ. Man kann also diese Function wieder als bestimmende ansehen und findet

$$[270^\circ] = - + +$$

$$[360^\circ] = - - -$$

*) Mémoires de l'acad. des sc. T. VIII. p. 420.

Die Zeichenreihe $[360^\circ]$ hat also einen Zeichenwechsel weniger als die Zeichenreihe $[270^\circ]$. Zieht man die Grenzen enger zusammen, so findet man

$$[6,0] = \frac{\quad}{75,7} \quad \frac{\quad}{100,34} \quad \frac{+}{6,01}$$

$$[6,1] = \frac{\quad}{67,95} \quad \frac{\quad}{107,53} \quad \frac{\quad}{4,38}$$

Hier ist $\frac{75,7}{2 \cdot 100,34} = 0,3$, also $k = 0$, $n = 1$ und $n = 1 - k$.

Da 6,1 die äußere Grenze ist, so entwickle man den Quotienten $\frac{4,38}{107,53}$ bis auf die zweite Decimalstelle. Dies giebt 0,04; also ist der *erste Näherungswerth* $6,1 - 0,05 = 6,05$. Da $f(6,05)$ negativ ist, so liegt die Wurzel zwischen 6,05 und 6,06. Nun ist $\frac{f(6,06)}{f'(6,06)} = \frac{0,1393}{104,75} = 0,0013$; also ist der *zweite Näherungswerth* $6,06 - 0,0014 = 6,0586$. Dieser Werth ist zu klein und daher die Wurzel zwischen 6,0586 und 6,0587 enthalten. Nun ist $\frac{f(6,0587)}{f'(6,0587)} = \frac{0,0031285}{104,6627} = 0,00002989$; also ist der *dritte Näherungswerth* $6,0587 - 0,0000299 = 6,0586701$ bis auf $(\frac{1}{10})^8$ genau. *Poisson* hat 6,05973.

Es ist einleuchtend, dafs auch diese Gleichung unendlich viele reelle Wurzeln hat und dafs die n te Wurzel zwischen $(n - \frac{1}{2})\pi$ und $n\pi$ enthalten ist. Jede dieser Wurzeln kann nach dem vorhergehenden Verfahren bis auf jede beliebige Decimalstelle genau gefunden werden. Wo es sich aber nur um eine ungefähre Annäherung handelt, kann man auch hier mit Nutzen das bei dem früheren Beispiele erwähnte *Eulersche* Verfahren anwenden und durch Umkehrung der Reihen eine Formel finden, welche die folgenden Wurzeln desto genauer giebt, je gröfser n ist.

26. Ich werde nun einige Aufgaben behandeln, bei welchen aufser den trigonometrischen Functionen auch die Functionen $e^x + e^{-x}$ und $e^x - e^{-x}$ vorkommen. Auch zur Berechnung dieser Functionen besitzen wir jetzt Tafeln in der vortrefflichen Abhandlung *Gudermanns* über die Theorie der Potenzialfunctionen*). Ich werde nach dem Vorgange dieses Gelehrten zur Abkürzung $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{Cos } x$ und $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{Sin } x$ setzen.

Es sei nun die Gleichung

$$fx = (e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$$

*) *Crelle*, Journal für die Mathematik, Bd. 6. u. 7.

gegeben, statt welcher man auch

$$\cos x \cos x - 1 = 0$$

setzen kann. Es ist klar, daß jeder positiven Wurzel x eine negative $-x$ und eine imaginäre $\pm x\sqrt{-1}$ entspricht.

Hier hat man nun

$$\begin{aligned}fx &= \cos x \cos x - 1, \\f'x &= \cos x \sin x - \sin x \cos x, \\f''x &= -2 \sin x \sin x.\end{aligned}$$

Die kleinste positive Wurzel der Gleichung ist $x = 0$. Bezeichnet alsdann ω ein Unendlich-Kleines, so ist $f''x$ zwischen den Grenzen $x = \omega$ und $x = 90^\circ$ immer negativ und kann daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden. Es ist aber

$$\begin{aligned}[\omega] &= - - - \\[90^\circ] &= - - - ;\end{aligned}$$

also liegt keine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Daß zwischen $x = 90^\circ$ und $x = 270^\circ$ keine Wurzel liegt, ist von selbst klar, da fx zwischen diesen Grenzen immer negativ ist. Zwischen den Grenzen $x = 270^\circ$ und $x = 360^\circ$ ist $f''x$ immer positiv und kann daher wieder als bestimmende Function gebraucht werden. Nun ist

$$\begin{aligned}[270^\circ] &= + + - \\[360^\circ - \omega] &= + + + ;\end{aligned}$$

also ist eine Wurzel zwischen diesen Grenzen enthalten. Zieht man die Grenzen enger zusammen und setzt zuerst $x = 4,7$ und dann $x = 4,8$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}[4,7] &= + \quad + \quad - \\&\quad 109,8 \quad 54,28 \quad 1,68 \\[4,8] &= + \quad + \quad + \\&\quad 118,2 \quad 65,84 \quad 4,31.\end{aligned}$$

Es ist aber $\frac{118,2}{2 \cdot 54,2} = 1$, ..., also $k = -1$, $n = 1$, das heißt, die Grenzen sind nicht eng genug zur nähernden Berechnung. Setzt man ferner $x = 4,73$, $x = 4,74$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}[4,73] &= + \quad + \quad - \\&\quad 113,26 \quad 57,6409 \quad 0,0023 \\[4,74] &= + \quad + \quad + \\&\quad 114,38 \quad 58,7791 \quad 0,5796.\end{aligned}$$

Hier ist $\frac{114,3}{2 \cdot 57,6} = 0,9$, also $k = 0$, $n = 2$.

Die äußere Grenze ist 4,74 und der Quotient $\frac{f(4,74)}{f'(4,74)} = \frac{0,5796}{58,7791}$ muß auf vier Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,0098; also ist der erste Näherungswerth $4,74 - 0,0098 = 4,7301$. Dieser Werth ist zu groß, mithin die Wurzel zwischen 4,7300 und 4,7301 enthalten. Der Quotient $\frac{f(4,7301)}{f'(4,7301)}$ auf 8 Decimalstellen entwickelt, giebt $\frac{0,00340159}{57,6512988} = 0,00005900$; also ist der zweite Näherungswerth $4,7301 - 0,00005901 = 4,73004099$.

Die hier abgehandelte Gleichung kommt bekanntlich in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Statt des hier gefundenen Werthes der ersten Wurzel hat *Poisson* 4,73003 *).

26. Auch die Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0,$$

statt welcher man

$$\cos x \operatorname{Cos} x + 1 = 0$$

schreiben kann, kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Hier ist

$$\begin{aligned} fx &= \cos x \operatorname{Cos} x + 1, \\ f'x &= \cos x \operatorname{Sin} x - \sin x \operatorname{Cos} x, \\ f''x &= -2 \sin x \operatorname{Sin} x. \end{aligned}$$

Zwischen $x=0$ und $x=90^\circ$ ist fx immer positiv; es kann also keine Wurzel zwischen diesen Grenzen liegen. Zwischen den Grenzen $x=90^\circ$ und $x=180^\circ$ ist $f''x$ immer negativ und kann daher als bestimmende Function gebraucht werden. Man hat

$$\begin{aligned} [90^\circ] &= --- + \\ [180^\circ] &= --- -; \end{aligned}$$

es liegt also eine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Nimmt man nun die engeren Grenzen $x=1,8$ und $x=1,9$, so findet man

$$\begin{aligned} [1,8] &= \frac{-}{5,7} \frac{-}{3,69} \frac{+}{0,29} \\ [1,9] &= \frac{-}{6,11} \frac{-}{4,29} \frac{-}{0,10} \end{aligned}$$

Hier ist $\frac{6,1}{2,3,69} = 0,8$, also $k=0$, $n=1$; der Quotient $\frac{0,10}{4,29}$ muß da-

*) Mém. de l'acad. des sc. T. VIII. p. 485. In dem *Traité de mécanique* ed. 2. T. 2. p. 389 dagegen steht der Werth 4,74503; was aber offenbar 4,73003 heißen muß, da dieser Werth $= \frac{2}{3}\pi + 0,01765$ sein soll.

her auf zwei Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,02; also ist der erste Näherungswerth $1,9 - 0,03 = 1,87$. Nun ist $f(1,87)$ positiv; folglich muß die Wurzel zwischen 1,87 und 1,88 liegen. Man hat $\frac{f(1,88)}{f'(1,88)} = \frac{0,02033}{4,16792} = 0,0048$; also ist der zweite Näherungswerth $1,88 - 0,0049 = 1,8751$. Dieser Werth ist zu klein; mithin liegt die Wurzel zwischen 1,8751 und 1,8752. Der folgende Näherungswerth kann bis auf 8 Stellen genau gefunden werden, und zwar findet man $\frac{f(1,8752)}{f'(1,8752)} = \frac{0,00039722}{4,138717} = 0,00009597$; also ist der dritte Näherungswerth $1,8752 - 0,00009598 = 1,87510402$. *Poisson* findet in der erwähnten Abhandlung 1,8756 *).

27. Ich will nun noch einige Gleichungen abhandeln, bei welchen der Werth von fx in einer convergirenden Reihe ausgedrückt ist, für welche noch keine Tafeln berechnet sind. Ich nehme zuerst die Gleichung

$$1. \quad fx = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \dots = 0,$$

welche bekanntlich in der Theorie der Bewegung der Wärme in einem Cylinder und bei mehreren anderen physikalisch-mathematischen Untersuchungen vorkommt **). Diese Gleichung kann keine negativen Wurzeln haben, da alle Glieder der Reihe positiv werden, sobald man statt x eine negative Zahl setzt. Man braucht also nur die positiven Wurzeln zu suchen. Hier ist

$$2. \quad f'x = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2.3} + \frac{x^3}{2^2.3^2.4} - \frac{x^4}{2^2.3^2.4^2.5} + \dots$$

$$3. \quad f''x = \frac{1}{2} - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2^2.3.4} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5} + \dots$$

Die drei Reihen (1., 2., 3.) sind nach bekannten Sätzen convergirende Reihen, und es kann daher mittelst ihrer der Werth von fx , $f'x$, $f''x$ für jedes gegebene x mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnet werden, sobald x eine endliche, reelle GröÙe ist. Bei diesen Reihen kommt man nemlich, wenn man statt x irgend einen beliebigen endlichen reellen Werth setzt, jedesmal an ein Glied, von welchem an gerechnet der Zahlenwerth

*) Der Werth 1,87011, den *Poisson* im *Traité de méc.* T. II. p. 390 giebt, ist offenbar unrichtig und muß 1,87511 heißen, da dieser Werth $= \frac{1}{4}\pi + \delta'$ sein soll, wo $\delta' = 0,30431$ ist.

**) Auch diese Gleichung behandelt *Poisson* in der erwähnten Abhandlung p. 522.

jedes Gliedes gröfser ist als der des nachfolgenden. Bei der Reihe (1.) z. B. erhält man aus jedem Gliede $\frac{x^m}{2^2 \cdot 3^2 \dots m^2}$, wenn man es mit $\frac{x}{(m+1)^2}$ multiplicirt, das nachfolgende. Sobald also m so grofs ist, dafs $x < (m+1)^2$ ist, so wird jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende und die Glieder convergiren zu dem Werthe Null hin. Bezeichnet man daher im Allgemeinen diese Reihe durch

$f(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} \dots$,
setzt $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{m-1} = S$ und nimmt an, dafs von a_m an jedes Glied gröfser ist als das folgende, so hat man

$$fx > S, \quad fx < S + a_m, \quad fx > S + a_m - a_{m+1} \text{ etc.},$$

so dafs man also, indem man die einzelnen Glieder der Reihe zusammen addirt, sich nicht blofs dem wahren Werthe immer mehr nähert, sondern auch fortwährend zwei Grenzen hat, zwischen welchen der Werth der Reihe eingeschlossen ist. Die ersten Ziffern, welche den beiden Grenzen gemeinschaftlich sind, müssen daher auch nothwendig dem wahren Werthe der Reihe angehören, und man kann mithin diesen Werth bis auf jede beliebige Stelle genau berechnen. Aehnliches gilt auch von den übrigen Reihen.

In der Reihe $f''x$ werden zwei auf einander folgende Glieder allgemein durch

$$\frac{x^m}{2^2 \cdot 3^2 \dots m^2 (m+1)(m+2)}, \quad \frac{x^{m+1}}{2^2 \cdot 3^2 \dots (m+1)^2 (m+2)(m+3)}$$

ausgedrückt. Soll nun $\frac{x^m}{2^2 \cdot 3^2 \dots m^2 (m+1)(m+2)} > \frac{x^{m+1}}{2^2 \cdot 3^2 \dots (m+1)^2 (m+2)(m+3)}$ sein, so mufs $1 > \frac{x}{(m+1)(m+3)}$ oder $x < (m+1)(m+3)$ sein. Setzt man $m=2$, so ist $(m+1)(m+3)=15$: sobald also x kleiner als 15 ist, ist jedes positive Glied der Reihe $f''x$, von $\frac{x^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 4}$ an gerechnet, gröfser als das nachfolgende negative: so lange aber x nicht gröfser als 3 ist, bleibt auch $\frac{1}{2} - \frac{x}{2 \cdot 3}$ positiv. Die Function $f''x$ ist daher zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=3$ immer positiv und kann als bestimmende Function gebraucht werden.

Es ist

$$[0] = + - +$$

$$[3] = + - -;$$

mithin ist zwischen diesen Grenzen eine Wurzel der Gleichung $fx=0$ enthalten. Zieht man die Grenzen enger zusammen, damit sie nur um eine

Decimal-Einheit verschieden sind, so findet man

$$\begin{aligned}[1] &= \frac{+}{0,35} \quad \frac{-}{0,57} \quad \frac{+}{0,2} \\ [2] &= \frac{+}{0,23} \quad \frac{-}{0,28} \quad \frac{-}{0,19 *}).\end{aligned}$$

Hier ist 1 die äufere Grenze. Nun ist $\frac{0,35}{2,0,28} = 0,6$; also $k = 0$, und ausserdem $n = 0$; mithin sind die Grenzen nicht eng genug zur nähernden Berechnung. Setzt man $x = 1,4$ und $x = 1,5$, so findet man

$$\begin{aligned}[1,4] &= \frac{+}{0,303} \quad \frac{-}{0,445} \quad \frac{+}{0,020} \\ [1,5] &= \frac{+}{0,292} \quad \frac{-}{0,415} \quad \frac{-}{0,0232}.\end{aligned}$$

Nun ist $\frac{0,303}{2,0,415} = 0,3$, also $k = 0$, $n = 1$; mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Der Quotient $\frac{0,020}{0,445}$, auf zwei Decimalstellen berechnet, giebt 0,04; also ist *der erste Näherungswerth* $1,4 + 0,05 = 1,45$. Dieser Werth ist zu grofs und die Wurzel ist zwischen 1,44 und 1,45 enthalten. Da 1,44 die äufere Grenze ist, so mufs man den Quotienten $\frac{f(1,44)}{f'(1,44)}$ auf vier Decimalstellen entwickeln. Dieses giebt $\frac{0,002508}{0,4334} = 0,0057$; also ist *der zweite Näherungswerth* $1,44 + 0,0058 = 1,4458$ bis auf $\left(\frac{1}{10}\right)$ genau. Auch *Poisson* findet 1,4457.

Die nächste Wurzel findet man am leichtesten durch folgende Betrachtungen. So wie früher nachgewiesen wurde, dafs die Function $f''x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 3$ immer positiv ist, so lassen sich auch leicht ähnliche, aber weitere Grenzen angeben, zwischen welchen die folgenden Differentialquotienten beständig dasselbe Zeichen haben. Denn man hat

$$4. \quad f'''x = -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots\right),$$

$$5. \quad f^{IV}x = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$6. \quad f^Vx = -\left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots\right),$$

*) Man bemerke, dafs es nur nöthig ist, die Werthe von zwei der Functionen $f''x$, $f'x$, fx zu berechnen, indem man daraus den Werth der dritten finden kann, da diese drei Functionen durch die Gleichung

$$fx + f'x = -xf''x$$

mit einander verbunden sind.

$$7. f^{vi}x = \frac{1}{2.3.4.5.6} - \frac{x}{1.3.4.5.6.7} + \frac{x^2}{2^1.3.4.5.6.7.8} - \frac{x^3}{2^1.3^1.4.5.6.7.8.9} + \dots,$$

$$8. f^{vii} = -\left(\frac{1}{2.3.4.5.6.7} - \frac{x}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{x^2}{2^1.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{x^3}{2^1.3^1.4.5.6.7.8.9.10} + \dots\right).$$

In der Reihe (4.) ist nun der Zahlenwerth jedes Gliedes grösser als der des folgenden, sobald x nicht grösser als 4 ist: daher ist $f^{iii}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=4$ immer negativ. Eben so findet man aus den Reihen (5., 6., 7., 8.), dass $f^{iv}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=5$ immer positiv ist, dass f^vx zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=6$ immer negativ ist, dass $f^{vii}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=7$ immer positiv ist und $f^{viii}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=8$ immer negativ. Man kann daher jede dieser Functionen zwischen den entsprechenden Grenzen als bestimmende Function ansehen. Nimmt man z. B. $f^{viii}x$ als bestimmende Function, so hat man

$$\begin{array}{cccccccc} f^{viii}x & f^{vii}x & f^vx & f^{vi}x & f^{v}x & f^{iv}x & f^{iii}x & f^{ii}x & f^ix & fx \\ [0] & = - & + & - & + & - & + & - & + & \\ [8] & = - & + & - & + & - & - & + & + & *) \end{array}$$

Die obere Reihe enthält 7, die untere 5 Zeichenwechsel: es sind also zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=8$ zwei Wurzeln der Gleichung $fx=0$ enthalten. Da wir aber bereits wissen, dass eine Wurzel, und nur eine zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=3$ enthalten ist, so muss die andere nothwendig zwischen den Grenzen $x=3$ und $x=8$ liegen. Substituiert man allmählig die dazwischen fallenden Werthe 4, 5, 6, 7, so findet man, dass die Wurzel zwischen 7 und 8 enthalten ist; denn es ist

$$[7] = - + - + - - + - ,$$

das heisst die Zeichenreihe [7] hat 6 Zeichenwechsel, während die Zeichenreihe [8] nur 5 hat. Zugleich ergibt sich aus dem Vergleiche der zwei Reihen [7] und [8], dass die Gleichung $f^{vi}x=0$ zwischen den Grenzen $x=7$ und $x=8$ keine Wurzel hat und dass also $f^{vi}x$ zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden kann. Und zwar

*) Da je drei aufeinanderfolgende Differentialquotienten $f^n x$, $f^{n+1} x$, $f^{n+2} x$ durch die Gleichung

$$f^n x + (n+1)f^{n+1}x + xf^{n+2}x = 0$$

mit einander verbunden sind, so ist klar, dass man die Werthe aller folgenden Differentialquotienten unmittelbar aus den Werthen von fx und $f'x$ finden kann.

hat man

$$\begin{aligned} [7] &= \frac{-}{0,007} \quad \frac{+}{0,13} \quad \frac{-}{0,07} \\ [8] &= \frac{-}{0,02} \quad \frac{+}{0,27} \quad \frac{+}{0,04} \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{0,02}{2 \cdot 0,13} = 0,07$, also $k=1$; auch ist $n=0$; mithin die Bedingung $n=1-k$ erfüllt. Hier ist 7 die äußere Grenze und es muß der Quotient $\frac{0,07}{0,13}$ auf eine Decimalstelle entwickelt werden. Dies giebt 0,5; also ist *der erste Näherungswerth* $7 + 0,6 = 7,6$. Dieser Werth ist zu klein; mithin liegt die Wurzel zwischen 7,6 und 7,7. Ferner hat man, wenn man den Quotienten $\frac{f(7,6)}{f'(7,6)} = \frac{0,002}{0,123}$ auf drei Decimalstellen entwickelt, 0,016; also ist *der zweite Näherungswerth* $7,6 + 0,017 = 7,617$. Dieser Werth ist zu klein. Die Wurzel liegt mithin zwischen 7,617 und 7,618. Der Quotient $\frac{f(7,617)}{f'(7,617)} = \frac{0,0001005}{0,12326}$ kann auf 7 Stellen entwickelt werden. Dieses giebt 0,0008153; also ist *der dritte Näherungswerth* 7,6178153. *Poisson* findet 7,6243, welcher Werth schon in der zweiten Decimalstelle unrichtig ist.

Auf dieselbe Weise können nun auch die übrigen Wurzeln leicht mit Hülfe der höheren Differentialquotienten gefunden werden.

28. Die Gleichung

$$Fx = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3 \cdot 2^2} - \frac{x^3}{4(2 \cdot 3)^2} + \frac{x^4}{5(2 \cdot 3 \cdot 4)^2} \dots = 0,$$

welche in der Theorie der Bewegung eines elastischen Membrans vorkommt, steht mit der vorhergehenden in genauer Verbindung, indem $Fx = -f'x$ ist. Diese Gleichung hat ebenfalls nur positive Wurzeln und es ergiebt sich aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen, daß $F''x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=4$ immer positiv ist und mithin zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden kann. Man findet

$$\begin{aligned} [0] &= + - + \\ [4] &= + + - \end{aligned}$$

Offenbar liegt also eine Wurzel der Gleichung zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=4$. Da aber auch eine Wurzel der Gleichung $F'x=0$ zwischen diesen Grenzen liegt, so muß man engere Grenzen nehmen. Man findet

$$\begin{aligned} [3] &= + - + \\ [4] &= + + - \end{aligned}$$

Diese Grenzen sind noch nicht eng genug. Dagegen hat man

$$[3,6] = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ 0,06 & 0,11 & 0,007 \end{array}$$

$$[3,7] = \begin{array}{ccc} + & - & - \\ 0,05 & 0,10 & 0,003. \end{array}$$

Hier ist $\frac{0,06}{2 \cdot 0,10} = 0,3$, also $k = 0$, $n = 1$. Die äußere Grenze ist 3,6 und man hat $\frac{0,007}{0,11} = 0,06$; also ist der erste Näherungswerth $3,6 + 0,07 = 3,67$. Dieser Werth ist zu klein; also ist die Wurzel zwischen 3,67 und 3,68 enthalten. Ferner ist $\frac{F(3,67)}{F'(3,67)} = \frac{0,000053}{0,1097} = 0,0004$, also der zweite Näherungswerth 3,6705 bis auf $(\frac{1}{10})^4$ genau. Statt dieses Werthes hat Poisson den Werth 3,55, der schon in der ersten Decimalstelle abweicht *).

Um die nächste Wurzel zu finden, betrachte man die höheren Differentialquotienten. Es ergiebt sich aus dem Früheren, daß allgemein $F^{2m}x$ positiv ist zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=2m+2$, und daß $F^{2m+1}x$ negativ ist zwischen den Grenzen $x=0$, $x=2m+3$. Diese Functionen können also zwischen den entsprechenden Grenzen als bestimmende gebraucht werden. Nimmt man z. B. die Function $F^{x1}x$ zur bestimmenden, so weiß man, daß diese Function zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=13$ beständig negativ ist. Nun ist

$$F^{x1}x \quad F^x x \quad F^{1x}x \quad F^{x11}x \quad F^{1x1}x \quad F^{x11}x \quad F^{1x1}x \quad F^{1x1}x \quad F^{111}x \quad F^{111}x \quad F^{111}x \quad F^x x$$

$$[0] = - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

$$[13] = - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$$

Die Zeichenreihe [0] enthält 11 Zeichenwechsel, die Zeichenreihe [13] nur 9. Es werden also zwischen den Grenzen 0 und 13 zwei Wurzeln der Gleichung $Fx=0$ angedeutet, und da man schon weiß, daß eine dieser Wurzeln zwischen 0 und 4 enthalten ist, so muß die andere zwischen 4 und 13 liegen.

Uebrigens wäre es nicht nöthig gewesen, bis zur Function $F^{x11}x$ zurückzugehen, um zu finden, wie viele Wurzeln zwischen den Grenzen 0 und 13 liegen. Das vorstehende Schema zeigt nämlich, daß die Gleichung $F^{111}x=0$ zwischen den Grenzen 0 und 13 keine Wurzel hat, und daß $F^{111}x$ zwischen diesen Grenzen beständig negativ ist. Dies hätte

*) In der angeführten Abhandlung p. 506.

man auch unmittelbar aus der Reihe finden können, welche den Werth von $F'''x$ angiebt. Substituirt man in derselben statt x den Werth 13, so ist zwar das erste Glied $\frac{1}{2.3.4}$ kleiner als das darauf folgende $\frac{13}{2.3.4.5}$: bei den spätern Gliedern ist aber jedes positive Glied gröfser als das darauf folgende negative; mithin ist die Summe dieser Glieder positiv. Nun ist aber schon der Werth der Summe der ersten Glieder

$$\frac{1}{2.3.4} - \frac{13}{2.3.4.5} + \frac{13^2}{2^2.3.4.5.6} - \frac{13^3}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \frac{13^4}{2^2.3^2.4^2.5.6.7.8} - \frac{13^5}{2^2.3^2.4^2.5^2.6.7.8.9}$$

positiv: mithin ist um so mehr $-F'''13$ positiv oder $F'''13$ negativ; und eben so ist es bei den kleineren Zahlen. Um die zweite Wurzel zu finden, braucht man daher nur das Schema

$$\begin{array}{cccc} & F''' & F''x & F'x & Fx \\ [4] & = & - & + & + & - \\ [13] & = & - & - & + & + \end{array}$$

zu betrachten. Da aber $F''x$ zwischen diesen Grenzen eine Wurzel hat, so muß man die Grenzen enger ziehen. Man findet

$$\begin{array}{ccc} [12] & = & - \quad + \quad - \\ & & 0,003 \quad 0,025 \quad 0,007 \\ [13] & = & - \quad + \quad + \\ & & 0,004 \quad 0,021 \end{array}$$

Hier ist $\frac{0,004}{2.0,021} = 0,9$; also ist $k = 0$, $n = 0$. Die Grenzen sind daher nicht eng genug zur nähernden Berechnung.

Man findet ferner

$$\begin{array}{ccc} [12, 3] & = & - \quad + \quad - \\ & & 0,004 \quad 0,024 \quad 0,000113 \\ [12, 4] & = & - \quad + \quad + \\ & & 0,004 \quad 0,024 \end{array}$$

Es ist $\frac{0,004}{2.0,024} = 0,08$, also $k = 1$; auch ist $n = 1$, mithin die Bedingung $n > 1 - k$ erfüllt. Da $2n + k = 3$ ist, so muß der Quotient $\frac{0,000113}{0,024}$ auf drei Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,004; also ist der *erste Näherungswerth* 12,305. Dieser Werth ist zu groß; mithin ist die Wurzel zwischen 12,304 und 12,305 enthalten. Der nächste Näherungswerth kann nun auf 7 Decimalstellen genau gefunden werden. Es ist

$$\frac{F(12,304)}{F'(12,304)} = \frac{0,000014980}{0,024393} = 0,0006141;$$

also ist der nächste Näherungswerth 12,3046142. *Poisson* findet den Werth 12,41 (ebend.).

29. Diese Beispiele werden genügen, um zu zeigen, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren hat, und um zu beweisen, daß man vermittelst der angegebenen Methode alle reellen Wurzeln der transcendenten Gleichungen mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden kann. Ich will nun schliesslich noch eine besonders interessante Frage berühren, nemlich die, wie man erkennen kann, ob eine transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln hat. Auf diese Frage ist man besonders durch mathematisch-physikalische Untersuchungen gekommen, welche häufig auf transcendente Gleichungen führen, und wo es sich oft unmittelbar aus der Natur der Untersuchung selbst ergibt, daß solche Gleichungen keine imaginären Wurzeln haben. Es kommt darauf an, dasselbe auf rein analytischem Wege nachzuweisen. Allgemeine Regeln, vermittelst deren man in jedem Falle unmittelbar aus dem Bau der Gleichung entscheiden könnte, ob eine transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln hat, giebt es bis jetzt nicht; und dies darf um so weniger auffallen, da die ähnliche Untersuchung in Beziehung auf die algebraischen Gleichungen ebenfalls nicht ohne Schwierigkeiten ist. Durch verschiedene besondere Betrachtungen kann man aber allerdings von einer Menge transcenderter Gleichungen beweisen, daß sie *nur* reelle Wurzeln haben. Am einfachsten geschieht es natürlich in dem Falle, wenn eine Gleichung $fx = 0$ gegeben ist und man weiß, daß fx das Product einer Anzahl einfacher Factoren ist, die alle reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung entsprechen. So z. B. hat die Gleichung $\sin x = 0$ nothwendig nur reelle Wurzeln, da

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

ist; dasselbe ist bei der Gleichung $\cos x = 0$ der Fall.

Eine andere sehr fruchtbare Betrachtungsweise besteht darin, daß man in der gegebenen Gleichung $fx = 0$ statt x seines Werths $a + b\sqrt{-1}$ substituirt, wo a und b reelle Größen bedeuten, und dann nachweist, daß die Annahme auf Widersprüche führt, wenn man nicht $b = 0$ setzt. Diese Beweisführung scheint zuerst *Fourier* angewendet zu haben, welcher bemerkt *), daß es hinreiche, den Werth $a + b\sqrt{-1}$ statt x in die Gleichung $x - \lambda \tan x = 0$ zu substituiren, wo λ eine Zahl bedeutet, die kleiner als die Einheit ist, um zu beweisen, daß die Gleichung keine Wurzel dieser Art haben könne. Später hat *Cauchy* in einer besonderen Abhandlung

*) Théorie de la chaleur p. 366.

diese Idee ausführlich behandelt und auf eine große Anzahl von Gleichungen angewendet *). Indem ich auf diese Abhandlung verweise, werde ich mich begnügen, hier noch einige Gleichungen abzuhandeln, die nicht bei *Cauchy* vorkommen, und Gelegenheit finden, dabei noch einige besondere Kunstgriffe anzuwenden. Ich werde besonders die im Früheren abgehandelten Gleichungen berücksichtigen.

Die Gleichung

$$\sin x = a$$

kann keine imaginären Wurzeln von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben, wenn a eine Zahl bedeutet, die nicht größer als die Einheit ist. Denn substituiert man statt x den Werth $y + z\sqrt{-1}$, so erhält man die zwei Gleichungen

$$1. \quad \sin y \cdot \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a,$$

$$2. \quad \cos y \cdot \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = 0.$$

Soll nun z nicht 0 sein, so kann man der zweiten Gleichung nur dann Genüge leisten, wenn man $\cos y = 0$ setzt. In diesem Falle ist aber $\sin y = 1$, also ginge die Gleichung (1.) in folgende über

$$3. \quad \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots > 1:$$

also kann die Gleichung (3.) nicht bestehen, wenn a der Einheit gleich oder kleiner als dieselbe ist. Der Beweis gilt auch noch in dem Falle, wenn $y = 0$ ist.

Auch die Gleichung

$$\cos x = a$$

kann keine imaginären Wurzeln von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$ haben, wenn a nicht größer als die Einheit ist. Denn substituiert man diesen Werth statt x , so findet man die zwei Gleichungen

$$4. \quad \cos y \cdot \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a,$$

$$5. \quad \sin y \cdot \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = 0.$$

Soll nun z nicht gleich Null sein, so muß $\sin y = 0$, also $\cos y = 1$ sein; mithin hat man wieder

$$\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a;$$

welche Gleichung nicht bestehen kann, wenn $a \geq 1$ ist.

Auch die in §. 24. abgehandelte Gleichung

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0$$

*) *Cauchy Exercices des Mathemat. T. I. p. 297 ff.*

hat keine imaginären Wurzeln. Diese Gleichung kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$6. \quad \operatorname{tang} x = \frac{-\frac{a}{3}x}{x^2 - \frac{a}{3}};$$

sie ist mithin in der allgemeineren Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{ax}{x^2 + b}$$

enthalten, welche bereits *Cauchy* in der erwähnten Abhandlung (§. 4.) abgehandelt hat. Gerade den Fall aber, der hier zur Betrachtung kommt, wo nemlich a negativ und $b = a$ ist, hat er nicht erörtert. Man kann nun zuerst beweisen, daß die Gleichung (6.) keine imaginäre Wurzel von der Form $x = y\sqrt{-1}$ haben kann; oder, man kann noch allgemeiner beweisen, daß die Gleichung

$$7. \quad \operatorname{tang} x = -\frac{ax}{x^2 - a}$$

keine solche Wurzel haben kann, sobald $a > 3$ ist. Denn setzt man in (7.) statt x den Werth $y\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\frac{a}{a + y^2} = \frac{1 + \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} + \dots}{1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots}$$

oder

$$8. \quad a + \frac{ay^2}{1.2} + \frac{ay^4}{1.2.3.4} + \dots = a + \frac{a}{1.2.3} \left\{ y^2 + \frac{a}{1.2.3.4.5} \right\} y^4 + \dots$$

$$+ 1 \left\{ + \frac{1}{1.2.3} \right\}$$

Ist nun aber $a < 3$, so ist offenbar der Coefficient jeder Potenz von y in der ersten Reihe kleiner als der Coefficient der entsprechenden Potenz in der zweiten, nemlich

$$\frac{a}{1.2} < 1 + \frac{a}{1.2.3},$$

$$\frac{a}{1.2.3.4} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{a}{1.2.3.4.5},$$

$$\frac{a}{1.2.3.4.5.6} < \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{a}{1.2.3.4.5.6.7}$$

etc.

und die Gleichung (8.) kann daher unter diesen Umständen nicht Statt finden. Auf dieselbe Weise läßt sich auch zeigen, daß die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{-ax}{x^2 - b}$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y\sqrt{-1}$ hat, sobald $a < 3$ und $b > a$ ist.

Die Gleichung (7.) kann aber auch keine Wurzel von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$ haben, sobald a kleiner als 3 ist. Um dies zu beweisen, setze man $y + z\sqrt{-1} = \varrho(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$ und substituirt diesen Werth statt x . Dieses giebt

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3 \dots 7} \dots}{1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \dots 7} \dots}$$

$$= \frac{-a}{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}) - a}.$$

Hieraus findet man

$$-a \left[1 - \frac{\varrho^2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}}{1.2} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \dots 6} \dots \right]$$

$$= \varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}) - \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$-a \left[1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \dots 7} \dots \right]$$

und wenn man die reellen Glieder einander gleich setzt,

$$\frac{a}{1.2} \varrho^2 \cos 2\alpha - \frac{a}{1.2.3.4} \varrho^4 \cos 4\alpha + \frac{a}{1.2 \dots 6} \varrho^6 \cos 6\alpha - \dots$$

$$= \left(1 + \frac{a}{1.2.3}\right) \varrho^2 \cos 2\alpha - \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{a}{1.2.3.4.5}\right) \varrho^4 \cos 4\alpha$$

$$+ \left(\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{a}{1.2.3 \dots 7}\right) \varrho^6 \cos 6\alpha - \dots$$

also

$$\frac{a}{1.2} = 1 + \frac{a}{1.2.3},$$

$$\frac{a}{2.3.4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{a}{1.2.3.4.5}$$

etc.,

welche Gleichungen, wie schon früher bemerkt wurde, nicht Statt haben können, sobald $a < 3$ ist.

Aus denselben Gründen folgt, dafs auch die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{-ax}{x^2 - b}$$

keine Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben kann, sobald $b > a$ und $a < 3$ ist.

Die in §§. 25. und 26. abgehandelten Gleichungen

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0,$$

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0$$

haben zwar, wie schon dort bemerkt wurde, imaginäre Wurzeln, deren

reeller Theil Null ist: sie können aber keine imaginären Wurzeln haben, von welchen der reelle Theil nicht Null ist. Ich will zuerst die Gleichung

$$9. \quad (e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$$

betrachten. Man substituirt statt x den Werth $y + z\sqrt{-1}$, so findet man

$$10. \quad e^{y+z\sqrt{-1}} + e^{-(y+z\sqrt{-1})} = (e^y + e^{-y}) \cos z + (e^y - e^{-y}) \sin z \sqrt{-1},$$

$$11. \quad \cos(y + z\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos y - \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin y \sqrt{-1}.$$

Man erhält also statt der Gleichung (9.) die zwei Gleichungen

$$12. \quad (e^y + e^{-y}) \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \cos y \cos z + (e^y - e^{-y}) \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \sin y \sin z = 2.$$

$$13. \quad (e^y - e^{-y}) \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \cos y \sin z - (e^y + e^{-y}) \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \sin y \cos z = 0.$$

Statt der Gleichung (13.) kann man auch schreiben

$$14. \quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Soll nun diese Gleichung bestehen, ohne dafs y oder z Null sind, so mufs nothwendig $y = z$ sein. Alsdann geht aber die Gleichung (12.) in folgende über:

$$15. \quad (e^y + e^{-y})^2 (\cos y)^2 + (e^y - e^{-y})^2 (\sin y)^2 = 4,$$

oder, wenn man statt $(\sin y)^2$ seinen Werth $1 - (\cos y)^2$ setzt, und reducirt, in

$$16. \quad (e^y - e^{-y})^2 + 4(\cos y)^2 = 4,$$

$$\text{also in } (e^y - e^{-y})^2 = 4(\sin y)^2,$$

$$\text{oder } e^y - e^{-y} = 2 \sin y;$$

welches ungereimt ist, da $e^y - e^{-y}$ immer gröfser als $2 \sin y$ ist.

Man sieht zugleich, dafs die Gleichung (9.) nur ein specieller Fall einer allgemeineren Gleichung ist, indem man auf dieselbe Weise zeigen kann, dafs die Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - a = 0$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ hat, sobald a nicht gröfser als 2 ist *).

*) Die specielle Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$$

kann auch auf eine andere Gleichung zurückgeführt werden, von welcher schon *Cauchy* bewiesen hat, dafs sie keine imaginäre Wurzeln hat, von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$. Man hat nemlich, da allgemein

$$\tan \frac{1}{2} x = \pm \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wenn man statt $\cos x$ den Werth $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ substituirt,

$$\tan \frac{1}{2} x = \pm \frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}};$$

für welche Gleichung *Cauchy* bewiesen hat, dafs x nicht $= y + z\sqrt{-1}$ sein kann.

Aus einem noch allgemeineren Gesichtspuncte kann man die Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0$$

betrachten, indem man die Behauptung aufstellt, dafs die Gleichung

$$17. \quad (e^x + e^{-x}) \cos x + a = 0$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben kann, sobald a irgend eine positive Zahl bedeutet. Denn substituirt man wirklich $y + z\sqrt{-1}$ statt x , so erhält man die zwei Gleichungen

$$18. \quad (e^y + e^{-y})^{\frac{1}{2}} (e^z + e^{-z}) \cos y \cos z + (e^y - e^{-y})^{\frac{1}{2}} (e^z - e^{-z}) \sin y \sin z = -a,$$

$$19. \quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Aus (19.) folgt aber $y = z$; also geht die Gleichung (18.) in folgende über:

$$(e^y + e^{-y})^2 (\cos y)^2 + (e^y - e^{-y})^2 (\sin y)^2 = -2a;$$

was ungereimt ist, da der erste Theil der Gleichung positiv und der zweite negativ ist.

30. Die vorhergehende Beweisführung scheint, so weit sie auch ausreicht, dennoch auf Gleichungen, wie die in §. 27. behandelte, nicht wohl anwendbar zu sein. *Fourier* hat aber bewiesen, dafs auch diese Gleichung keine imaginären Wurzeln hat. Die Methode, die er hierzu anwendet, ist insofern allgemeiner als die erste, dafs man nicht, wie dort, nöthig hat anzunehmen, dafs die imaginären Wurzeln in der Form $y + z\sqrt{-1}$ enthalten sind, sondern den Beweis ganz unabhängig von der Form der Wurzeln führen kann; und sie erfordert um so mehr eine ausführliche Darstellung, da *Fourier* dieselbe nicht völlig entwickelt und man auch ihre Richtigkeit in Zweifel gezogen hat. Für die algebraischen Gleichungen hat bekanntlich schon vorlängst *de Gua* ein Kennzeichen angegeben, durch welches man mit Bestimmtheit erkennen kann, dafs alle Wurzeln gewisser Gleichungen reell sind, und der darauf bezügliche Satz zeigt sich als eine sehr einfache Folgerung aus *Fourier's* Theorie der Gleichungen. Bei einer algebraischen Gleichung vom m ten Grade, $fx = 0$, enthält nemlich die Zeichenreihe $[-\infty]$ m Zeichenwechsel und die Zeichenreihe $[\infty]$ gar keinen Zeichenwechsel, und diese Zeichenwechsel gehen zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ aus zwei Gründen verloren. Es entspricht nemlich *erstens* jeder reellen, zwischen diesen Grenzen liegenden Wurzel ein Zeichenverlust; es können aber *zweitens* auch Zeichenwechsel verloren gehen, ohne dafs

solches auf eine reelle Wurzel deutete. So viele Zeichenwechsel nun auf diese zweite Art verloren gehen: eben so viel reelle Wurzeln fehlen der Gleichung, und sie muß daher nothwendig eben so viele imaginäre Wurzeln haben, weil jede algebraische Gleichung vom m ten Grade nicht mehr und nicht weniger als m reelle oder imaginäre Wurzeln hat. Der Verlust von Zeichenwechseln, der nicht auf reelle Wurzeln deutet, kann aber nur in dem Falle vorkommen, wenn es einen reellen Werth α giebt, der so beschaffen ist, daß zwar $f(\alpha)$ nicht Null ist, daß aber eine der algebraischen Functionen, etwa $f^n x$, durch die Substitution dieses Werthes statt x auf Null reducirt wird, während zu gleicher Zeit die abgeleiteten Functionen $f^{n+1}x$ und $f^{n-1}x$ dasselbe Zeichen behalten. Sobald also jeder reelle Werth von x , der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, zwei Ausdrücke mit entgegengesetztem Zeichen giebt, wenn man ihn in die vorhergehende und in die folgende Function substituirt, so kann die algebraische Gleichung nur reelle Wurzeln haben. Dies ist der *de Gua'sche* Satz, den auch *Fourier* in seinem Werke ausführlich abgehandelt hat. Diese Betrachtungen lassen sich aber nicht unmittelbar auf die transcendenten Gleichungen ausdehnen. Ich habe zwar im Früheren gezeigt, daß die Grenzen der reellen Wurzeln der transcendenten Gleichungen auf ganz ähnliche Weise gefunden werden, wie die der algebraischen Gleichungen: ich habe aber zugleich auf einen Unterschied zwischen den algebraischen und den transcendenten Gleichungen aufmerksam gemacht, welcher im Wesentlichen darin besteht, daß der erste Theil einer algebraischen Gleichung immer eine continuirliche Gröfse und zugleich das Product einer Anzahl einfacher reeller oder imaginärer Factoren ist, die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, während der erste Theil einer transcendenten Gleichung auch eine discontinuirliche Gröfse sein und von dem Producte der einfachen Factoren, die den Wurzeln entsprechen, wesentlich verschieden sein kann. Hieraus folgt schon, daß man bei diesen Gleichungen von der Abwesenheit reeller Wurzeln nicht auf das Vorhandensein imaginärer, und umgekehrt, schließen darf. Es wurde ferner früher gezeigt, daß man die Grenzen, zwischen welchen die reellen Wurzeln liegen, auf folgende Weise findet. Man sucht zuerst die Grenzen α und β , zwischen welchen eine der abgeleiteten Functionen, etwa $f^{m_x} x$, immer dasselbe Zeichen behält, und bildet alsdann die zwei Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$, so entspricht jeder reellen Wurzel, die zwischen diesen Grenzen enthalten ist, der Verlust eines Zeichenwechsels, den die Reihe $[\beta]$

weniger enthält als $[a]$. Es können aber, wie gezeigt wurde, auch hier Zeichenwechsel verloren gehen, ohne das solches auf reelle Wurzeln deutete; jedoch nur in dem Falle, wenn ein zwischen diesen Grenzen liegender Werth eine der in Betracht kommenden abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, während er der vorhergehenden und der folgenden Function, wenn er in dieselben substituirt wird, gleiche Zeichen giebt. Enthält nun die Zeichenreihe $[\beta]$ etwa $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[a]$, und weiß man, daß zwischen den Grenzen α und β keine reelle Wurzel liegt, so darf man hieraus nicht, wie bei den algebraischen Gleichungen, schließen, daß die Gleichung $2n$ imaginäre Wurzeln habe, weil hier die Abwesenheit der reellen Wurzeln durchaus nicht auf das Vorhandensein imaginärer deutet. Weiß man umgekehrt, daß es keinen Werth giebt, der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, während er, in die vorhergehende und folgende substituirt, Resultate von gleichem Zeichen giebt, so darf man daraus nicht schließen, daß die transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln habe: es kann vielmehr sein, daß weder reelle noch imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Anders aber verhält es sich, wenn man mit Bestimmtheit weiß, daß die transcendente Gleichung $fx = 0$ so beschaffen ist, daß fx das Product einer unendlichen Anzahl einfacher, reeller oder imaginärer Factoren ist, die eben so vielen Wurzeln der Gleichung entsprechen. In diesem Falle ist fx , und jeder daraus abgeleitete Differentialquotient, für jeden Werth von x eine continuirliche Gröfse. Sind nun z. B. α und β zwei bestimmende Grenzen, und enthält die Zeichenreihe $[b]$ eine Anzahl δ von Zeichenwechseln weniger als die Zeichenreihe $[a]$, so kann die Gleichung zwischen diesen Grenzen nicht mehr als δ reelle Wurzeln haben; sind dagegen weniger als δ reelle Wurzeln zwischen diesen Grenzen enthalten, so müssen nothwendig mehrere Zeichenwechsel zwischen den Grenzen α und β verloren gehen, deren Verlust nicht auf reelle Wurzeln deutet, das heißt, es müssen eine oder mehrere der abgeleiteten Functionen durch einen zwischen α und β liegenden Werth auf Null reducirt werden, während die vorhergehende und die folgende Function dasselbe Zeichen behält. Sobald es also keinen solchen Werth giebt, so müssen die sämtlichen δ Wurzeln reell sein. Dieselbe Betrachtung gilt für jede zwei andere bestimmende Grenzen. Sobald es also *gar keinen reellen Werth* von x giebt, der so beschaffen ist, daß er, während er eine abgeleitete Function auf Null reducirt, der vorhergehenden und den folgenden gleiche Zeichen giebt, so kann

auch die Gleichung keine imaginäre Wurzel haben, sondern die Wurzeln müssen sämmtlich reell sein.

Auf diesem Wege hat *Fourier* bewiesen, dafs die Gleichung

$$1. \quad fx = 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \dots = 0$$

keine imaginäre Wurzeln hat. Es wurde schon früher bemerkt (§. 27.), dafs je drei auf einander folgende Differentialquotienten durch die Gleichung

$$A. \quad f^n x + (n+1)f^{n+1}x + x f^{n+2}x = 0$$

mit einander verbunden sind. Es ist nun einleuchtend, dafs weder fx noch irgend eine der abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x$, durch einen negativen Werth von x auf Null reducirt werden können. Nimmt man nun an, dafs $f^{n+1}x$ durch irgend einen reellen positiven Werth von x auf Null reducirt wird, so folgt aus der Gleichung (A.)

$$f^n x = -x f^{n+2}x.$$

Hieraus folgt also, dafs jeder reelle Werth von x , der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, der vorhergehenden und folgenden Function verschiedene Zeichen giebt. Man kann nun ferner zeigen, dafs fx das Product einer unendlichen Zahl einfacher Factoren ist. *Fourier* thut dies, indem er die transcendente Gleichung auf eine algebraische zurück führt. Diese Gleichung heifst

$$2. \quad Fy = 1 - ny + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots = 0,$$

wo n eine ganze Zahl ist. Die Anzahl der Glieder dieser Gleichung ist $n+1$, und wenn man n unendlich grofs setzt, so geht sie in die Gleichung (1.) über, sobald man $ny = x$ setzt. Da nun die Gleichung (2.), als eine algebraische, sich immer in Factoren zerlegen läfst, wie grofs auch n sein mag, so folgt hieraus, dafs es auch noch der Fall ist, wenn n unendlich grofs ist, das heifst, es mufs auch fx das Product einer unendlichen Zahl von Factoren sein, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen. Diese Factoren müssen aber sämmtlich reell sein; wie aus dem Zusammenhange der Differentialquotienten folgt; und es ist daher bewiesen, dafs fx das Product von lauter reellen Factoren ist, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen.

Auf dieselbe Weise könnte man auch, wenn es nicht schon bekannt wäre, zeigen, dafs die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ aus dem Producte einfacher reeller Factoren zusammengesetzt sind, das heifst, dafs die Gleichungen $\sin x = 0$ und $\cos x = 0$ keine imaginären Wurzeln haben. Denn

die Gleichung

$$3. \quad fx = \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots = 0$$

ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung

$$4. \quad Fy = ny - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} y^5 - \dots = 0,$$

indem man in der Gleichung (4.) nur $n = \infty$ und $ny = x$ zu setzen braucht, um die Gleichung (3.) zu erhalten. Da nun die Gleichung (4.) immer in Factoren zerlegbar ist, so folgt das Nemliche für die Gleichung (3.). Nun ist ferner

$$\begin{aligned} fx &= \sin x, \\ f^1 x &= \cos x, \\ f^{11} x &= -\sin x, \\ f^{111} x &= -\cos x, \\ f^{1111} x &= \sin x: \end{aligned}$$

es ist also allgemein $f^n x = -f^{n+2} x$, und diese Ausdrücke haben also auch entgegengesetzte Zeichen, wenn man $f^{n+1} x = 0$ setzt. Hieraus folgt, daß $\sin x = 0$ nur reelle Wurzeln hat. Dasselbe folgt auch für die Gleichung $\cos x = 0$.

31. Dieses von *Fourier* aufgestellte Princip, um die Realität sämtlicher Wurzeln gewisser transcendenten Gleichungen zu erkennen, von welchem *Cauchy* sagt *), daß es mehreren Schwierigkeiten unterworfen sei, ist von *Poisson* gradezu für falsch erklärt worden. *Poisson* will dies durch folgendes Beispiel beweisen. Es sei gegeben die Gleichung

$$fx = e^x - be^{ax} = e^x(1 - be^{(a-1)x}),$$

wo a und b bekannte Größen sind und a positiv ist. Diese Gleichung hat nun offenbar unendlich viele imaginäre Wurzeln, die sämtlich in der Form

$$x = \frac{\log b + 2i\pi V - 1}{1 - a}$$

enthalten sind. Differentiirt man aber, so findet man

$$\begin{aligned} f^n x &= e^x - b a^n e^{ax}, \\ f^{n+1} x &= e^x - b a^{n+1} e^{ax}, \\ f^{n+2} x &= e^x - b a^{n+2} e^{ax}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $f^{n+1} x = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f^n x &= -b(1-a)a^n e^{ax}, \\ f^{n+2} x &= +b(1-a)a^{n+1} e^{ax}, \end{aligned}$$

*) Exercices des mathém. T. I. p. 338.

folglich $f^n x \cdot f^{n+2} x = -b^2(1-a)^2 \cdot a^{2n+1} \cdot e^{2ax}$, welcher Werth für jeden reellen Werth von x negativ ist. Hieraus würde also folgen, daß jede reelle Wurzel von $f^{n+1} x$, welche man in die zwei Functionen $f^n x$ und $f^{n+2} x$ substituirt, Resultate von verschiedenem Zeichen giebt, und es würde mithin nach *Fourier's* Regel folgen, daß die Gleichung $f x = 0$ keine imaginären Wurzeln habe; was doch nicht der Fall ist. Hier ist aber wohl ein Trugschluss. Der Ausdruck $f^{n+1} x$ enthält nemlich den Factor e^x , und wird Null, sobald dieser Factor Null wird: e^x wird aber Null, sobald man $x = -\infty$ setzt. Die Gleichung $e^x = 0$ hat mithin unendlich viele *reelle* Wurzeln, welche sämmtlich in dem Ausdruck $x = -\infty$ enthalten sind. Substituirt man aber einen dieser reellen Werthe in $f^n x$ und $f^{n+2} x$, so werden diese Functionen ebenfalls auf Null reducirt und man kann daher in diesem Falle nicht sagen, daß sie verschiedene Zeichen haben. Es ist also nicht richtig, daß jeder reelle Werth von x , der $f^{n+1} x$ auf Null reducirt, den Functionen $f^n x$ und $f^{n+1} x$ verschiedene Zeichen giebt, sondern es gilt dies nur für den reellen Werth, der sich aus dem Factor $1 - b a^{n+1} e^{(a-1)x}$ ergibt. Dagegen giebt es unendlich viele Werthe von x , welche $f^{n+1} x$ auf Null reduciren und die dennoch, in $f^n x$ und $f^{n+2} x$ substituirt, nicht Resultate von verschiedenen Zeichen hervorbringen. Daher darf man auch nicht schliessen, daß die Gleichung $e^x - b e^{ax} = 0$ nur reelle Wurzeln haben könne *).

32. Eine dritte, sehr scharfsinnige Methode hat *Poisson* mehrfach angewendet, um die Abwesenheit der imaginären Wurzeln in gewissen transcendenten Gleichungen nachzuweisen. Diese Methode ist aber schon deswegen in ihrer Anwendung beschränkt, weil sie die Abwesenheit der imaginären Wurzeln nicht unmittelbar aus der Natur der Gleichung beweiset, sondern nur da anwendbar ist, wo man durch besondere Untersuchungen, die zu einer solchen transcendenten Gleichung geführt haben, zugleich einen anderen Ausdruck erhält, welchen man zum Beweise gebrauchen kann. Auch findet man vermittelst dieser Methode nur, daß die transcendente Gleichung keine imaginären Wurzeln hat, die aus einem reellen und einem imaginären Theile bestehen, also in der Form $a + b\sqrt{-1}$ enthalten sind, wo weder a

*) *Fourier* hat den hier besprochenen Lehrsatz zuerst in seinem Werke *Théorie de la chaleur* p. 372 kurz vorgetragen. *Poisson* hat darauf in dem *Journal de l'école polyt. cah. 19* p. 382 dessen Unrichtigkeit zu erweisen gesucht und dasselbe später in den *Mém. de l'acad. des sc. T. VIII. p. 367* und ausführlicher *T. IX. p. 89* wiederholt. *Fourier* hat hierauf zuerst kurz in *T. VIII. p. 616* und ausführlicher *T. X. p. 119* geantwortet.

noch b Null sind. Dagegen läßt sie es unbestimmt, ob die gegebene Gleichung nicht Wurzeln habe, die bloß aus einem imaginären Theile bestehen, also in der Form $b\sqrt{-1}$ enthalten sind. Ich habe früher (§. 29.) gezeigt, daß die Gleichung

$$A. (4 - 3\mu l) \sin \mu l - 4\mu l \cos \mu l = 0$$

keine imaginären Wurzeln hat: weder solche, bei welchen der reelle Theil Null ist, noch andere, welche aus einem reellen und einem imaginären Theile bestehen *). Auf diese Gleichung wird *Poisson* in seinen Untersuchungen über die Schwingungen einer elastischen Kugel geführt**), und er zeigt auf folgende Weise, daß sie keine imaginären Wurzeln hat. Er findet nemlich durch dieselbe Untersuchung auch noch die Gleichung

$$B. (\mu^2 - \mu'^2) \int^r RR' \partial r = 0,$$

wo μ und μ' zwei Wurzeln der Gleichung (A.) bedeuten, die so beschaffen sind, daß μ^2 und μ'^2 verschiedene Werthe haben, also $\mu^2 - \mu'^2$ nicht Null und $R = (\mu r \cos \mu r - \sin \mu r) \frac{1}{r}$ ist, R' dagegen Dasjenige bedeutet, was R wird, wenn man in dem Werthe von R statt μ den Werth μ' substituirt. Hätte nun die Gleichung (A.) imaginäre Wurzeln, so daß etwa $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$ ein Paar solcher Wurzeln wären, so könnte man $\mu = p + q\sqrt{-1}$ und $\mu' = p - q\sqrt{-1}$ setzen und durch $R = P + Q\sqrt{-1}$ und $R' = P - Q\sqrt{-1}$ die entsprechenden Werthe von R und R' bezeichnen. Die Gleichung (B.) ginge also in

$$\int^r (P^2 + Q^2) \partial r = 0$$

über. Da aber alle Elemente dieses Integrals positiv sind, so könnte es nicht Null werden, wenn man nicht $P = 0$ und $Q = 0$ für jeden Werth von r hätte. Aus diesen Werthen würden sich also Werthe von p und q ergeben, die von r abhängen; was unzulässig ist: also kann auch die Voraussetzung, daß die Gleichung imaginäre Wurzeln habe, nicht richtig sein. Indessen sieht man, daß dieser Schluß darauf beruht, daß μ^2 und μ'^2 ungleiche Werthe haben. Hätte aber die Gleichung (A.) zwei Wurzeln $q\sqrt{-1}$, $-q\sqrt{-1}$ und man substituirt dieselben statt μ und μ' , so würde der Ausdruck (B.) Null werden, ohne daß $\int RR' \partial r$ Null wird, und also der Schluß nicht mehr gelten ***).

*) Man erhält nemlich diese Gleichung, wenn man in der dort behandelten Gleichung $(4 - 3x) \sin x - 4x \cos x = 0$ statt x den Werth μl substituirt.

**) Mémoire de l'acad. des sc. T. VIII. p. 417.

***). Eine andere Beweisführung von *Sturm* findet sich auch im Journ. des Mathém. par *Liouville* Nov. 1836 p. 384.

33. Wir wollen nun zeigen, in wiefern die *Bernoullische Methode* auch auf die transcendenten Gleichungen angewendet werden darf. (Vergl. §. 1.) Diese Methode beruht wesentlich auf der Eigenschaft der algebraischen Gleichungen, daß der erste Theil derselben das Product einer Anzahl einfacher, reeller oder imaginärer Factoren vom ersten Grade ist. Es folgt nemlich aus dieser Eigenschaft, daß die Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung bestimmte Functionen der Wurzeln sind; und gerade diese Eigenschaft ist es, auf welcher die Anwendung der recurrirenden Reihen auf die Auflösung der Gleichungen beruht. Es ergibt sich mithin von selbst, daß die recurrirenden Reihen keinesweges zur *allgemeinen* Auflösung der transcendenten Gleichungen angewendet werden können. Denn es ist im Früheren nachgewiesen worden, daß der erste Theil einer transcendenten Gleichung häufig von dem Producte der den Wurzeln der Gleichung entsprechenden Factoren wesentlich verschieden ist (§. 5. u. 6.). Auf eine solche Gleichung läßt sich also die *Bernoullische Methode* nicht anwenden, weil ihr diejenige Eigenschaft fehlt, auf welcher allein sie gegründet ist; oder man muß wenigstens im Stande sein, den Factor des ersten Theils der Gleichung zu finden, welcher dem Producte aller den Wurzeln der Gleichung entsprechenden Factoren gleich ist. Sobald indessen die transcendente Gleichung von der Art ist, daß ihr erstes Glied das Product von Factoren ist, die den Wurzeln der Gleichung entsprechen, so werden auch die Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung auf dieselbe Weise, wie es bei den algebraischen Gleichungen der Fall ist, aus den Wurzeln der Gleichung zusammengesetzt sein, und es kann daher bei solchen transcendenten Gleichungen die *Bernoullische Methode* auf dieselbe Weise wie bei den algebraischen gebraucht werden.

Es ist schon oben (§. 1.) bemerkt worden, daß die Ausbildung der *Bernoullischen Methode* früher sehr mangelhaft war. Gegenwärtig besitzt man mehrere Bearbeitungen derselben, welche zeigen, wie man alle Wurzeln algebraischer Gleichungen finden kann und die daher ohne Schwierigkeit auf solche transcendente Gleichungen angewandt werden können, welche der oben angegebenen Bedingung entsprechen.

Ich habe zuerst *) mit Hülfe der bei *Fourier* vorkommenden Andeutungen eine solche Methode nachgewiesen. Einfacher ist die Methode,

*) *Crelle's Journ.* für die Mathem. Bd. 11. p. 293 ff.

welche *Jacobi* später gegeben hat *) und die ohne Zweifel mit derjenigen, welche *Fourier* selbst beabsichtigte, ganz identisch ist.

Ich werde mich hier begnügen, zu zeigen, wie man mittelst dieser letzteren Methode die zwei grössten oder kleinsten, reellen oder imaginären Wurzeln der transcendenten Gleichungen finden kann. In Beziehung auf algebraische Gleichungen habe ich das hier anzuwendende Verfahren bereits früher mitgetheilt **).

34. Es sei also eine transcendente Gleichung

$$Fx = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \dots = 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 \dots$$

gegeben, so dafs $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ die reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung sind; nach der zunehmenden Gröfse geordnet. Setzt man

$$A_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \dots$$

$$A_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \dots$$

$$A_3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \frac{1}{\delta^n} + \dots$$

so hat man bekanntlich

$$A_1 = A,$$

$$A_2 = AA_1 - 2B,$$

$$A_3 = AA_2 - BA_1 + 3C,$$

$$\dots \dots \dots$$

Ist nun α die kleinste Wurzel und zugleich reell, so kann man, wenn n grofs genug genommen wird, näherungsweise

$$A_n = \frac{1}{\alpha^n},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}},$$

setzen; und hieraus ergibt sich der Werth der kleinsten Wurzel $\alpha = \frac{A_n}{A_{n+1}}$.

Bildet man daher eine Reihe, deren allgemeines Glied A_n ist, und dividirt jedes Glied dieser Reihe durch das folgende, so nähert sich der

*) *Crelle's Journ.* für die Mathem. Bd. 13. p. 399 ff.

**) *Ebend.* Bd. 9. p. 305.

Quotient immer mehr dem Werthe α . Diese Reihe werde ich im Folgenden (S) nennen.

Setzt man ferner näherungsweise

$$A_n = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n}.$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}},$$

$$A_{n+2} = \frac{1}{\alpha^{n+2}} + \frac{1}{\beta^{n+2}},$$

$$A_{n+3} = \frac{1}{\alpha^{n+3}} + \frac{1}{\beta^{n+3}},$$

$$A_{n+4} = \frac{1}{\alpha^{n+4}} + \frac{1}{\beta^{n+4}},$$

.

so findet man

$$A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2 = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\beta^n} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2,$$

$$A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2 = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \cdot \frac{1}{\beta^{n+1}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2,$$

$$A_{n+2} \cdot A_{n+4} - (A_{n+3})^2 = \frac{1}{\alpha^{n+2}} \cdot \frac{1}{\beta^{n+2}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2,$$

.

also

$$\frac{A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2}{A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2} = \alpha\beta.$$

Bildet man daher eine Reihe, deren allgemeines Glied $A_n A_{n+2} - (A_{n+1})^2$ ist, und dividirt jedes Glied durch das folgende, so nähert man sich immer mehr dem Werthe $\alpha\beta$. Diese Reihe werde ich im Folgenden (S_1) nennen.

Ist α reell, und hat man seinen Werth aus der Reihe (S_1) gefunden, so findet man den Werth von β , wenn man den aus der Reihe (S_1) gefundenen Werth von $\alpha\beta$ durch den gefundenen Werth von α dividirt. Ist dagegen α imaginär, so divergirt die Reihe (S_1) und es kann der Werth von α nicht aus derselben gefunden werden. Die Reihe (S_1) convergirt aber auch in diesem Falle und giebt den Werth von $\alpha\beta$. Um nun auch in diesem Falle die Werthe von α und β zu finden, bilde man eine dritte Reihe (S_2), deren allgemeines Glied

$$\frac{A_n \cdot A_{n+3} - A_{n+1} A_{n+2}}{A_n A_{n+2} - (A_{n+1})^2}$$

ist. Die Glieder dieser Reihe nähern sich dem Werthe $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ desto mehr,

je größer n ist; und diese Reihe wird immer convergiren, da α und β ein zusammengehörendes Paar imaginärer Wurzeln sind. Aus $\alpha\beta$ und $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ findet man alsdann den Werth von α und β .

35. Ich will diese Erörterungen zunächst anwenden, um die zwei kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \dots = 0$$

zu finden. Bildet man die Reihe (S), so ergibt sich

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{33}{144}, \quad \frac{19}{120}, \quad \frac{473}{4320}, \quad \frac{229}{3024}, \quad \frac{101369}{1935360}, \quad \dots$$

Dividirt man das letzte Glied durch das vorletzte, so findet man als Näherungswerth der kleinsten Wurzel 1,4458....; was mit dem früher gefundenen Werthe (§. 27.) übereinstimmt.

Die ersten Glieder der Reihe (S₁) sind

$$\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{288}, \quad \frac{1}{3840}, \quad \frac{23}{1036800}, \quad \frac{257}{130636800}, \quad \frac{10359}{58525286400}, \quad \dots$$

Dividirt man das vorletzte Glied durch das letzte, so findet man 11,1145.... welches also das Product der zwei kleinsten Wurzeln ist, und wenn man diesen Werth durch den gefundenen Werth der ersten Wurzel dividirt, so ergibt sich als Näherungswerth der zweiten Wurzel 7,68...; was schon bis zur zweiten Decimalstelle mit dem oben gefundenen Werthe übereinstimmt.

36. Ich will bei dieser Gelegenheit einen Lehrsatz beweisen, den *Fourier* in dem Exposé synoptique*) angedeutet hat. *Fourier* sagt nemlich, daß wenn man mittelst der angegebenen Methode die erste Wurzel sucht, und diese reell ist, daß alsdann die Reihe der Quotienten so gegen den wahren Werth der Wurzel convergire, daß zuletzt die Fehler, welche man bei der Annäherung begeht, wie die Glieder einer geometrischen Progression abnehmen, deren Exponent das Verhältniß der zweiten Wurzel zur ersten sei. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die erste Wurzel die größte ist. In dem anderen Falle, welcher uns hier besonders interessirt, wo nemlich die erste Wurzel die kleinste ist, muß dieser Satz so modificirt werden, daß man als Exponenten der geometrischen Progression das Verhältniß der ersten Wurzel zur zweiten nehmen muß. Der Beweis ist

*) Analyse des équations p. 71.

für beide Fälle derselbe; ich werde daher nur den zweiten berücksichtigen. Um den Werth der Wurzel α zu finden, setzt man $\frac{A_n}{A_{n+1}} = \alpha$: in Wahrheit ist aber

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \alpha + \frac{\frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \frac{1}{\delta^n} + \dots - \alpha \left(\frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \frac{1}{\delta^{n+1}} + \dots \right)}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \frac{1}{\delta^{n+1}} + \dots}.$$

Der begangene Fehler ist also

$$\frac{\frac{1}{\beta^n} + \frac{1}{\gamma^n} + \frac{1}{\delta^n} + \dots - \alpha \left(\frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \frac{1}{\delta^{n+1}} + \dots \right)}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \frac{1}{\delta^{n+1}} + \dots}.$$

Ist jedoch n hinlänglich groß, so kann man statt dessen auch

$$\frac{\frac{1}{\beta^n} - \alpha \cdot \frac{1}{\beta^{n+1}}}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}}} = \frac{(\beta - \alpha) \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}}{1 + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}}$$

setzen, und da, wenn n sehr groß, $\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}$ ein so kleiner Bruch ist, daß man ihn gegen die Einheit vernachlässigen kann, so convergiren die Fehler gegen die Grenze $(\beta - \alpha) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}$ hin und nehmen mithin im Verhältniß der Glieder einer geometrischen Progression ab, deren Exponent $\frac{\alpha}{\beta}$ ist.

37. Um auch noch ein Beispiel der Berechnung der zwei kleinsten imaginären Wurzeln zu geben, nehme ich die Gleichung

$$x = e^x.$$

Diese Gleichung kann keine reelle Wurzel haben, da, so lange x reell ist, immer $x < e^x$ ist. Entwickelt man e^x in eine Reihe, so geht die Gleichung in folgende über:

$$x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

oder in

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der algebraischen Gleichung

$$1 + \frac{n \cdot n - 1}{2} y^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots = 0,$$

so kann man wieder zeigen, daß sie das Product einer unendlichen Anzahl von Factoren ist. Sie kann mithin durch die *Bernoullische* Methode aufgelöst werden.

Bildet man die Reihe (S), so ergibt sich

$$\begin{array}{cccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{3}{8} & -\frac{1}{4.5} & -\frac{31}{2.3.4.6} & -\frac{29}{3.5.6.7} & +\frac{63}{2^2.4.5.8} & +\frac{2087}{3.4.6.7.8.9} \dots \end{array}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{A_7 A_9 - A_8^2}{A_8 A_{10} - A_9^2} &= \frac{1364243616}{722045476} = 1,889415 \text{ und} \\ \frac{A_7 A_{10} - A_8 A_9}{A_7 A_9 - A_8^2} &= \frac{14356678}{42632613} = 0,336753. \end{aligned}$$

Nennt man nun die kleinsten Wurzeln α und β , so ist

$$\alpha\beta = 1,889415 \text{ und}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 0,336753;$$

mithin kann man, da α und β ein Paar conjugirte imaginäre Wurzeln sind,

$$\alpha = a + b\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = a - b\sqrt{-1}$$

setzen und findet mittelst der Werthe von $\alpha\beta$ und $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$:

$$a = 0,318133,$$

$$b = 1,337238.$$

Die Wurzeln sind also $0,318133 \pm 1,337238\sqrt{-1}$.

Cauchy*) findet auf anderem Wege

$$0,3181317 \pm 1,3372357\sqrt{-1}.$$

38. Während ich im Begriff bin diese Abhandlung zu endigen, erhalte ich das *Compte rendu* No. 10. 1837, welches eine neue Methode von Cauchy enthält, die Näherungswerthe der reellen Wurzeln zu finden, welche zugleich auf transcendenten Gleichungen anwendbar ist. Das Wesentlichste derselben ist in Folgendem enthalten. Es sei

$$1. \quad fx = 0$$

eine Gleichung, deren erstes Glied fx zwischen den Grenzen $x = x_0$ und $x = X$ continuirlich bleibt. Ferner sei die Function fx in zwei andere

$$\Phi x - \chi x$$

zerlegt, die ebenfalls zwischen den gegebenen Grenzen continuirlich und so beschaffen sind, daß die Werthe von Φx und χx mit den Werthen von x wachsen. Nennt man nun $-\frac{1}{\alpha}$ das kleinste und $-\frac{1}{\beta}$ das größte der Verhältnisse

$$\frac{\varphi'x_0 - \chi'X}{fx_0}, \quad \frac{\varphi'X - \chi'x_0}{fx_0}$$

*) Leçons sur le calc. diff., leç. 14.

und $\frac{1}{A}$ das kleinste, $\frac{1}{B}$ das grösste der Verhältnisse

$$\frac{\varphi'x_0 - \chi'X}{fX}, \quad \frac{\varphi'X - \chi x_0}{fX},$$

und sind zwischen x_0 und X Wurzeln der Gleichung enthalten, so sind auch $x_0 + \alpha$, $X - A$ zwischen diesen Grenzen enthalten und bilden zugleich Grenzen jener Wurzeln. Ist übrigens eine der Grössen $x_0 + \beta$, $X - B$, zwischen den Grenzen x_0 und X enthalten, so hat die Gleichung (1.) gewifs Wurzeln zwischen diesen Grenzen.

Ist fx eine ganze Function, so kann man sie immer leicht in $\Phi x - \chi x$ zerlegen, wenn man für x_0 und X positive Grenzen nimmt, indem man die Summe der positiven Glieder durch Φx , die Summe der negativen Glieder durch $-\chi x$ bezeichnet. Da man aber die negativen Wurzeln einer Gleichung, wie bekannt, immer in positive verwandeln kann, wenn man $-x$ statt x setzt, so kann man auch durch dieses Verfahren alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden, sobald man zwei Werthe kennt, zwischen welchen die Wurzeln enthalten sind. Dasselbe findet bei einer transcendenten Gleichung

$$fx = 0$$

statt, sobald man die Function fx in zwei andere $\Phi x - \chi x$ zerlegen kann, die so beschaffen sind, dafs Φx und χx immer wachsen, wenn x gröfser wird.

Ich will nun zeigen, wie dieses Verfahren auch aus *Fourier's* Methode abgeleitet werden kann.

Ist nemlich eine Gleichung $fx = 0$ gegeben, und ist eine Wurzel zwischen zwei Grenzen enthalten, so kann man immer so enge Grenzen x_0 und X ziehen, dafs eines der vier folgenden Schemata Statt findet:

		$f''x$	$f'x$	fx
I.	{	$[x_0] = \dots +$	$+$	$-$
	{	$[X] = \dots +$	$+$	$+$
II.	{	$[x_0] = \dots -$	$-$	$+$
	{	$[X] = \dots -$	$-$	$-$
III.	{	$[x_0] = \dots +$	$-$	$+$
	{	$[X] = \dots +$	$-$	$-$
IV.	{	$[x_0] = \dots -$	$+$	$-$
	{	$[X] = \dots -$	$+$	$+$

In den zwei ersten Fällen hat man die Näherungswerthe

$$X - \frac{fX}{f'X} > x, \quad x_0 - \frac{fx_0}{f'x_0} < x,$$

in den zwei andern die Näherungswerthe

$$X - \frac{fX}{f'x_0} > x, \quad x_0 - \frac{fx_0}{f'x_0} < x.$$

Setzt man nun $fx = \Phi x - \chi x$, also $f'x = \Phi'x - \chi'x$, so gehen diese Werthe in folgende über. Nämlich in den zwei ersten Fällen hat man

$$X - \frac{fX}{\Phi'X - \chi'X} > x, \quad x_0 - \frac{fx_0}{\Phi'X - \chi'X} < x$$

und in den zwei andern

$$X - \frac{fX}{\Phi'x_0 - \chi'x_0} > x, \quad x_0 - \frac{fx_0}{\Phi'x_0 - \chi'x_0} < x.$$

Im ersten Falle ist $\Phi'X - \chi'X$ positiv und kleiner als $\Phi'X - \chi'x_0$, mithin ist auch der letztere Ausdruck positiv, folglich, da fX positiv ist,

$$\frac{fX}{\Phi'X - \chi'x_0} < \frac{fX}{\Phi'X - \chi'X},$$

mithin

$$X - \frac{fX}{\Phi'X - \chi'x_0} > X - \frac{fX}{\Phi'X - \chi'X} > x.$$

Nun ist $\Phi'X - \chi'x_0 > \Phi'x_0 - \chi'X$, also ist, nach *Cauchy's* Bezeichnung,

$$\frac{fX}{\Phi'X - \chi'x_0} = A$$

und $X - A < \frac{x}{X}$.

Eben so findet man im vierten Falle, daß $\Phi'x_0 - \chi'x_0$ positiv und kleiner als $\Phi'X - \chi'x_0$ ist; also muß auch letzterer Ausdruck positiv sein. Da nun fX positiv ist, so hat man wieder

$$X - \frac{fX}{\Phi'X - \chi'x_0} > X - \frac{fX}{\Phi'x_0 - \chi'x_0} > x,$$

folglich $X - A > \frac{x}{X}$.

Im zweiten Falle dagegen ist $-(\Phi'X - \chi'X)$ positiv, oder $\chi'X - \Phi'X$ positiv. Nun ist $\chi'X - \Phi'x_0 > \chi'X - \Phi'X$, folglich auch $-(\Phi'x_0 - \chi'X)$ positiv, und da fX negativ ist,

$$X - \frac{fX}{\Phi'x_0 - \chi'X} > X - \frac{fX}{\Phi'X - \chi'X} > X.$$

Offenbar ist aber hier $\frac{\varphi'x_0 - \chi'X}{fX} = \frac{\chi'X - \varphi'x_0}{-fX}$ gröfser als $\frac{\varphi'X - \chi'x_0}{fX} = \frac{\chi'x_0 - \varphi'X}{-fX}$, mithin nach *Cauchy's* Bezeichnung $\frac{fX}{\varphi'x_0 - \chi'X} = A$, und daher $X - A > \frac{x}{X}$. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs auch im dritten Falle

$$X - \frac{fX}{\varphi'x_0 - \chi'X} > X - \frac{fX}{\varphi'x_0 - \chi'x_0} > X \text{ ist.}$$

Dieselbe Betrachtung führt nun auch zur Bestimmung des zweiten Näherungswerthes, der zwischen x_0 und x liegt.

Im ersten Falle ist $\Phi'x - \chi'X$ positiv, also auch der gröfsere Werth $\Phi'X - \chi'x_0$ positiv. Da nun fx_0 negativ ist, so ist $\frac{-fx_0}{\varphi'X - \chi'x_0}$ etwas kleineres Positives als $\frac{-fx_0}{\varphi'X - \chi'X}$, mithin

$$x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'X - \chi'x_0} < x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'X - \chi'X} < x,$$

und da $\Phi'X - \chi'x_0 > \Phi'x_0 - \chi'X$, so ist nach *Cauchy's* Bezeichnung

$$x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'X - \chi'x_0} = x_0 + \alpha, \text{ indem, da } fx_0 \text{ negativ ist,} \\ \frac{\varphi'X - \chi'x_0}{fx_0} < \frac{\varphi'x_0 - \chi'X}{fx_0} \text{ ist.}$$

Eben so findet man im vierten Falle

$$x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'X - \chi'x_0} < x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'x_0 - \chi'x_0} < x.$$

Im zweiten Falle findet man

$$x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'x_0 - \chi'X} < x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'X - \chi'X} < x$$

und im dritten

$$x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'x_0 - \chi'X} < x_0 - \frac{fx_0}{\varphi'x_0 - \chi'x_0} < x.$$

Es ergibt sich aus dieser Uebersicht, dafs bei der *Fourier'schen* Methode die Grenzen noch enger sind als bei der von *Cauchy*.