

11.

Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben.

(Von Herrn Theodor Schönemann zu Berlin.)

§. 1.

Lehnsatz. Bezeichnet a irgend eine ganze Zahl, und $b_0, b_1, b_2, \dots \dots b_{a-1}$ die kleinsten Reste, welche die Zahlen $0b, 1b, 2b, \dots (a-1)b$ durch a getheilt lassen, so werden diese alle von einander verschieden sein, wenn b keinen gemeinschaftlichen Theiler mit a hat; denn wären irgend zwei jener Zahlen, deren Indices ν und μ sein mögen, gleich, also $b_\nu = b_\mu$, so müßte $\nu b - \mu b = b(\nu - \mu)$ durch a aufgehen, welches offenbar nicht möglich ist, da b zu a relative Primzahl ist, und $\nu - \mu$ kleiner als a ist und nicht 0 sein kann, da ν von μ verschieden ist. Da also sämtliche Reste $b_0, b_1, b_2, \dots b_{a-1}$ von einander verschieden sind, und es nur die a verschiedenen Reste $0, 1, 2, \dots a-1$ giebt, so folgt, daß jene Zahlen mit diesen, wenn auch in anderer Ordnung übereinstimmen werden. Hätte nun aber b mit a einen gemeinschaftlichen Theiler, und bezeichnet man den größten gemeinschaftlichen Theiler beider Zahlen durch δ , so werden die Reste der Zahlen $0 \cdot \frac{b}{\delta}, 1 \cdot \frac{b}{\delta}, 2 \cdot \frac{b}{\delta}, \dots a-1 \cdot \frac{b}{\delta}$ wieder mit den Resten $0, 1, 2, \dots a-1$ übereinstimmen. Denkt man sich diese Zahlen aber als Reste nach dem Divisor $\frac{a}{\delta}$, so ist klar, daß die Reste der Zahlen $0 \cdot \frac{b}{\delta}, 1 \cdot \frac{b}{\delta}, \dots \left(\frac{a}{\delta} - 1\right) \frac{b}{\delta}$ mit den Zahlen $0, 1, 2, \dots \frac{a}{\delta} - 1$ übereinstimmen und daß diese Zahlen in den Resten der Zahlen $0 \cdot \frac{b}{\delta}, 1 \cdot \frac{b}{\delta}, 2 \cdot \frac{b}{\delta}, \dots a-1 \cdot \frac{b}{\delta}, \delta$ mal enthalten sein werden.

§. 2.

Betrachtet man jetzt die Gleichung $x^a - 1 = 0$ und bezeichnet eine primitive Wurzel derselben durch α , so kann man bekanntlich die

sämmtlichen Wurzeln jener Gleichung durch $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^{a-1}$ darstellen. Die b ten Potenzen dieser Wurzeln, werden folglich durch $\alpha^{0 \cdot b}, \alpha^{1 \cdot b}, \dots \alpha^{a-1 \cdot b}$ dargestellt. Hat nun b mit a den grössten gemeinschaftlichen Theiler δ , so kann man jene Ausdrücke auch so schreiben: $(\alpha^\delta)^{0 \cdot \frac{b}{\delta}}, (\alpha^\delta)^{1 \cdot \frac{b}{\delta}}, (\alpha^\delta)^{2 \cdot \frac{b}{\delta}}, \dots (\alpha^\delta)^{a-1 \cdot \frac{b}{\delta}}$. Nun wird aber α^δ selbst eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}} - 1 = 0$ sein, und die Zahlen $0 \cdot \frac{b}{\delta}, 1 \cdot \frac{b}{\delta}, \dots a-1 \cdot \frac{b}{\delta}$ werden, durch $\frac{a}{\delta}$ getheilt, δ mal die Reste $0, 1, 2, \dots \dots \frac{a}{\delta} - 1$ erzeugen: also werden die Ausdrücke $(\alpha^\delta)^{0 \cdot \frac{b}{\delta}}, (\alpha^\delta)^{1 \cdot \frac{b}{\delta}}, (\alpha^\delta)^{2 \cdot \frac{b}{\delta}}, \dots, (\alpha^\delta)^{a-1 \cdot \frac{b}{\delta}}, \delta$ mal die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{a}{\delta}} - 1 = 0$ enthalten. Die Gleichung für die b ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ wird also unter der Form $(x^{\frac{a}{\delta}} - 1)^\delta = 0$ auftreten. Die Coefficienten dieser Gleichung werden folglich ganze positive oder negative Zahlen, oder 0 sein. Ich behaupte nun, daß jede symmetrische Function der Ausdrücke $\alpha^0, \alpha^1, \dots \alpha^{a-1}$ sich als ganze Function solcher Coefficienten, folglich als ganze positive oder negative Zahl oder auch als 0 wird darstellen lassen.

Um jedes Mißverständniß zu vermeiden, bemerke ich, daß ich hier und für die Folge unter einer ganzen Function gegebener Ausdrücke eine ganze in ganzen Zahlen ausgedrückte rationale Function dieser Ausdrücke verstehe.

Bevor wir nun zu dem allgemeinen Schluß übergehen, auf dem unsere Aussage beruht, wollen wir eine allgemeine Bezeichnung für symmetrische Functionen gegebener Elemente einführen.

Eine symmetrische Function von m Elementen, die aus lauter einzelnen Producten zusammengesetzt ist, in denen n verschiedene Elemente vorkommen, von denen das erste in die c_1^{te} , das zweite in die c_2^{te} , \dots das n^{te} in die c_n^{te} Potenz erhoben ist (und jede symmetrische ganze Function ist bekanntlich ein Aggregat solcher Functionen), bezeichnen wir durch $[c_1 c_2 \dots c_n]$; so daß also z. B. für die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die symmetrische Function $\alpha\beta\gamma^2 + \alpha\beta\delta^2 + \alpha\gamma\beta^2 + \alpha\gamma\delta^2 + \alpha\delta\beta^2 + \alpha\delta\gamma^2 + \beta\gamma\alpha^2 + \beta\gamma\delta^2 + \beta\delta\alpha^2 + \beta\delta\gamma^2 + \gamma\delta\alpha^2 + \gamma\delta\beta^2$ durch $[1, 1, 2]$ dargestellt wird. Fallen jene m Elemente mit den a Ausdrücken $\alpha^0, \alpha^1, \dots \alpha^{a-1}$ zusammen, so wird

sich der Coefficient von x^{a-n} in der Entwicklung von $(x^{\frac{a}{\delta}} - 1)^{\delta}$ durch $(-1)^n [b_1 b_2 \dots b_n]$ darstellen lassen, wo $b = b_1 = b_2 = \dots = b_n$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der Identität der beiden Ausdrücke $(x^{\frac{a}{\delta}} - 1)^{\delta}$ und $(x - \alpha^{0 \cdot b})(x - \alpha^{1 \cdot b})(x - \alpha^{2 \cdot b}) \dots (x - \alpha^{(a-1) \cdot b})$.

Der oben ausgesprochene Satz wird nun auch in dem allgemeineren und wichtigeren Satze enthalten sein, daß sich jede symmetrische Function $[c_1 c_2 \dots c_n]$ als ganze Function anderer symmetrischer Functionen, die durch lauter gleiche, in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeutet werden, ausdrücken läßt. Von diesem Satze möge man sich erst an einigen, leicht zu verfolgenden Beispielen überzeugen, nemlich:

1) $[8, 5, 3] = [8][5][3] - [13, 3] - [11, 5] - [8, 8]$. Es ist aber $[13, 3] = [13][3] - [16]$ und $[11, 5] = [11][5] - [16]$, folglich

$$[8, 5, 3] = [8][5][3] - [8, 8] - [13][3] - [11][5] + 2[16].$$

2) $[8, 8, 3] = [8, 8][3] - [11, 8]$; $[11, 8] = [11][8] - [19]$, also $[8, 8, 3] = [8, 8][3] - [11][8] + [19]$.

3) $[8, 8, 3, 3] = [8, 8][3, 3] - [11, 8, 3] - [11, 11]$; $[11, 8, 3] = [11][8][3] - [19, 3] - [14, 8] - [11, 11]$; $[19, 3] = [19][3] - [22]$; $[14, 8] = [14][8] - [22]$, folglich

$$[8, 8, 3, 3] = [8, 8][3, 3] - [11][8][3] + [19][3] + [14][8] - 2[22].$$

Betrachten wir nun die allgemeine symmetrische Function $[c_1 c_2 \dots c_n]$, welche von der Beschaffenheit sein mag, daß von den Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n eine Anzahl μ gleich α_1 , eine zweite Anzahl ν gleich β_1 , eine dritte Anzahl ρ gleich γ_1 etc. wird. Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_\mu$, $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\nu$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_\rho$ und bildet das Product $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\rho]$ etc., so wird dies offenbar aus $[c_1 c_2 \dots c_n]$ und anderen symmetrischen Functionen bestehen, deren einzelne Summanden jedoch nur eine geringere Anzahl von Elementen enthalten kann als n andeutet. (Wesentlich ist es auch, hierbei zu bemerken, daß $[c_1 c_2 \dots c_n]$ nur einmal in diesem Product als Summand vorkommen kann.) Wir erhalten demnach $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\rho] = [c_1 c_2 \dots c_n] + \Sigma$, wo Σ ein Aggregat einfacher symmetrischer Functionen bezeichnet, in deren einzelnen Summanden weniger als n verschiedene Elemente auftreten. Demnach ist

$$[c_1 c_2 \dots c_n] = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu][\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu][\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\rho] - \Sigma;$$

und da man jede einzelne Function, die in Σ enthalten ist, wieder ähn-

lich wie $[c_1 c_2 \dots c_n]$ transformiren kann, so ist klar, daß $[c_1 c_2 \dots c]$ zuletzt als Aggregat von Producten hervorgehen muß, deren jedes aus symmetrischen Functionen besteht, die durch gleiche eingeklammerte Zahlen angedeutet werden.

Setzt man nun die Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ als Elemente der symmetrischen Functionen, so werden die, durch lauter gleiche in Klammern eingeschlossene Zahlen angedeuteten Functionen mit den positiven oder negativen Coefficienten der Gleichungen für die ganzen Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^a - 1 = 0$ übereinstimmen, folglich nach dem Vorhergehenden ganze Zahlen sein; und da sich ferner jede ganze symmetrische Function jener Wurzeln als ganze Function dieser Zahlen entwickeln läßt, so folgt, daß diese Function selbst durch ganze Zahlen oder 0 darstellbar sein.

§. 3.

Aufgabe. Wenn eine Gleichung vom n ten Grade $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ vorliegt, eine andere Gleichung aufzustellen, welche die p ten Potenzen der Wurzeln der vorliegenden Gleichung als Wurzeln enthält; vorausgesetzt p bedeute irgend eine ganze positive Zahl.

Gesetzt es wären b_1, b_2, \dots, b_n die Wurzeln der vorliegenden Gleichung, also $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$, so erhielt man die verlangte Gleichung, indem man das Product $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p) \dots (x^p - b_n^p)$ entwickelte, dies gleich 0 setzte und für x^p irgend eine andere Unbekannte z einführte. Bezeichnet nun α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, so ist bekanntlich $x^p - b^p = (x - b)(x - b\alpha)(x - b\alpha^2) \dots (x - b\alpha^{p-1})$. Werden auf diese Weise sämtliche Factoren zerlegt, so geht das Product $(x^p - b_1^p)(x^p - b_2^p) \dots (x^p - b_n^p)$ in folgendes über:

$$\begin{aligned} & (x-b_1) \quad (x-b_2) \quad (x-b_3) \quad \dots (x-b_n). \\ & (x-b_1\alpha) (x-b_2\alpha) (x-b_3\alpha) \quad \dots (x-b_n\alpha). \\ & (x-b_1\alpha^2) (x-b_2\alpha^2) (x-b_3\alpha^2) \quad \dots (x-b_n\alpha^2). \end{aligned}$$

$$(x - b_1 \alpha^{p-1})(x - b_2 \alpha^{p-1})(x - b_3 \alpha^{p-1}) \dots (x - b_n \alpha^{p-1}).$$

Jedes der p Producte, die in einer Horizontalreihe enthalten sind, kann man leicht durch die ursprüngliche Gleichung und durch α darstellen. Man erhält dann das obige Product durch

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n).$$

$$(x^n + a_1 \alpha x^{n-1} + a_2 \alpha^2 x^{n-2} + \dots + \alpha^n a_n).$$

$$(x^n + a_1 \alpha^2 x^{n-1} + a_2 \alpha^{2^2} x^{n-2} + \dots + a_n \alpha^{2^n}).$$

$$\dots \dots \dots (x^n + a_1 \alpha^{p-1} x^{n-1} + a_2 \alpha^{2(p-1)} x^{n-2} + \dots + a_n \alpha^{(p-1)^n}).$$

Dieser besteht aus einer Summe von Gliedern, deren jedes ein Product aus den verschiedenen Coefficienten der ersten Gleichung ist, multiplicirt in eine symmetrische Function der Ausdrücke $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-1}$. Stellen wir nun das Product der Coefficienten durch $a_{a_0} a_{a_1} a_{a_2} \dots a_{a_{p-1}}$ dar, wo also $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = pn - q$ ist und alle Zahlen a kleiner als n , aber positiv oder 0 sind, (a_0 bedeutet den Coefficienten von x^n also 1): so können wir die symmetrische Function von $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{p-1}$, die in jenen Ausdruck noch multiplicirt werden muß, durch

$$\sum \alpha^{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + \dots + (p-1)a_{p-1}}$$

ausdrücken. Die Summe wird hervorgebracht, wenn man alle mögliche Vertauschungen unter den Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{p-1} macht, während die Zahlen 0, 1, 2, $\dots, p-1$ ungeändert bleiben, jedoch so, daß die Vertauschungen der gleichen Elemente a unter einander, indem die übrigen ungeändert bleiben, nur für eine zählen, und daß man dann sämtliche Potenzen von α , die auf diese Weise hervorgebracht werden, addirt. Dies folgt aus der Bildungsweise eines Products. Da nun in der Entwicklung des obigen Products der Coefficient einer q ten Potenz von x durch

$$\sum a_{a_0} a_{a_1} \dots a_{a_{p-1}} \sum \alpha^{0a_0 + 1a_1 + \dots + p-1 \cdot a_{p-1}},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = pn - q$$

dargestellt wird, und verschwinden muß, wenn $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$ nicht mit p aufgeht, die Größen $a_{a_0}, a_{a_1}, a_{a_2}, \dots, a_{a_{p-1}}$ mögen beschaffen sein wie sie wollen: so folgt hieraus der für die folgende Untersuchung wichtige Satz, daß $\sum \alpha^{0a_0 + 1a_1 + \dots + p-1 \cdot a_{p-1}}$ selbst 0 sein werde, wenn $a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}$ nicht mit p aufgeht. (Auf anderem Wege hat schon Meier Hirsch diesen Satz im §. 95. seiner Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, Berlin, 1809, bewiesen.)

Wenden wir uns nun zur Bestimmung von $\sum \alpha^{0a_0 + 1a_1 + 2a_2 + \dots + p-1 \cdot a_{p-1}}$ für den Fall, wo $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$ mit p aufgeht. Ich bemerke zuerst, daß man diese Summe auch bilden könne, indem man alle möglichen Vertauschungen unter den Elementen a_0, a_1, \dots, a_{p-1} vornimmt,

so als wenn alle diese Zahlen a unter einander verschieden wären, und hernach die erhaltene Zahl durch $1.2.3....\mu.1.2.3....\nu.1.2.3....\rho$ etc. dividirt, wo μ, ν, ρ etc. bezeichnen, wie viele von den Elementen a als unter einander gleich zu achten sind. Denn es ist offenbar, daß durch die obige Annahme, alle Elemente wären ungleich, statt jedes einzelnen Ausdrucks $1.2.3....\mu.1.2.3....\nu.1.2.3....\rho$ etc. gleiche Ausdrücke gesetzt worden sind.

Wir werden also im Folgenden unter $\Sigma \alpha^{0a_0+1a_1+\dots+p-1.a_{p-1}}$ diejenige Summe verstehen, in der bei der Bildung auf die Gleichheit mehrerer Elemente a keine Rücksicht genommen worden ist; wir haben mithin, um auf die frühere Bedeutung des Ausdruckes zurückzukommen, den erhaltenen Ausdruck durch $1.2....\mu.1.2....\nu.1.2....\rho$ etc. zu dividiren. Kommen nun unter den Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$, $p-n$ Zahlen vor, die mit p aufgehen, und bezeichnen wir die übrigen durch a_1, a_2, \dots, a_n , so wird $\Sigma \alpha^{0a_0+1a_1+\dots+p-1.a_{p-1}} = 1.2.3....n \Sigma \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n}$ werden, so daß man den Ausdruck auf der rechten Seite erhält, wenn man sämtliche Zahlen $0, 1, 2, \dots, p-1$ zu n combinirt, dann permutirt und sie an die Stelle der ξ setzt. Denn es ist klar, daß man auch $\Sigma \alpha^{0a_0+1a_1+2a_2+\dots+p-1.a_{p-1}}$ erhalten werde, wenn man die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ als fest betrachtet und die Zahlen $0, 1, 2, \dots, p-1$ permutirt, da durch beide Operationen derselbe Effect erreicht wird, nämlich alle die Verbindungen aufzustellen, die man erhält, wenn man immer eine der Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{p-1} mit einer der Zahlen $0, 1, \dots, p-1$ verbindet. Daß die zweite Bildungsweise aber auf den Ausdruck $1.2.3....n \Sigma \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n}$ führt, ist einleuchtend, und zugleich auch hieraus, daß in jedem einzelnen Ausdrucke $\alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n}$ alle Zahlen ξ verschieden sein müssen.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß $\Sigma \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n}$ 0 sein werde, wenn $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ nicht mit p aufgeht. Geht $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ mit p auf, so sei $a_1 + a_2 + \dots + a_n = mp$, oder $a_n = mp - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}$, folglich

$$\alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n} = \alpha^{a_1(\xi_1 - \xi_n) + a_2(\xi_2 - \xi_n) + \dots + a_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_n)}.$$

Bezeichnen wir nun $\xi_1 - \xi_n$ durch z_1 , $\xi_2 - \xi_n$ durch z_2 , \dots , $\xi_{n-1} - \xi_n$ durch z_{n-1} , so wird keine der Zahlen z mit p aufgehen können, weil sämtliche Zahlen ξ kleiner als p und unter einander verschieden sind.

Aus dem letzten Grunde werden auch sämmtliche Zahlen z unter einander verschieden sein; denn wäre $z_\nu - z_\mu = 0$, so wäre auch $\xi_\nu - \xi_\mu = 0$. Liegt nun irgend ein Ausdruck $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{n-1} z_{n-1}$ vor, wo die Zahlen z alle unter einander verschieden und der Reihe 1, 2, ..., $p-1$ entnommen sind, so kann man aus solchem Ausdrücke p verschiedene Ausdrücke von der Form $\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n$ bilden, für welche sich die Werthe von ξ aus den unbestimmten Gleichungen

$$z_1 = \xi_n - \xi_1, \quad z_2 = \xi_n - \xi_2, \quad z_3 = \xi_n - \xi_3, \quad \dots \quad z_{n-1} = \xi_n - \xi_{n-1}$$

ergeben, die offenbar p Systeme von Lösungen haben, welche man erhält, wenn man statt ξ_n der Reihe nach 0, 1, 2, ..., $p-1$ setzt. Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß man für die Werthe von ξ , die hiernach einen negativen Werth erhalten, die positiven Zahlen setzen kann, welche man erhält, wenn man zu ihnen p addirt. Ferner ist klar, daß aus zwei verschiedenen Ausdrücken in z durchaus auch verschiedene Ausdrücke in ξ entstehen müssen. Woraus denn folgt, daß man aus sämmtlichen Ausdrücken $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{n-1} z_{n-1}$ nach obiger Weise sämmtliche Ausdrücke $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$ einfach bilden kann. Hieraus schliessen wir nun, daß $\sum \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n} = p \sum \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_{n-1} a_{n-1}}$ sein werde. Denn damit die durch z ausgedrückte Summe in die durch ξ ausgedrückte übergehe, muß jeder Ausdruck in ihr mit p vervielfacht werden. Die Aufgabe besteht also jetzt darin, $\sum \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_{n-1} a_{n-1}}$ zu

entwickeln; wo für z nur die Werthe 1, 2, 3, ..., $p-1$ eintreten dürfen. Um dies auszuführen, wollen wir im Allgemeinen die Summe $\sum \alpha^{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_m a_m}$ durch C_m und die Summe $\sum \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_m a_m}$ durch C'_m bezeichnen; wir bezeichnen ferner die Summe der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in C_m der Reihe nach eine der Gröfsen a verschwinden läßt, durch SC_{m-1} , die Summe der Ausdrücke, die man erhält wenn man je zwei Gröfsen a in C_m verschwinden läßt, durch SC_{m-2} , und allgemein die Summe der Ausdrücke, die man erhält wenn man in C_m je n Gröfsen a verschwinden läßt, durch SC_{m-n} . Eben so bezeichnen wir die Summe der Ausdrücke, die man erhält, wenn man je n Zahlen a in C'_m verschwinden läßt, durch SC'_{m-n} . So ist z. B.

$$\begin{aligned} C'_3 &= \sum \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3}, \\ SC'_{3-1} &= \sum \alpha^{z_1 a_1 + z_2 a_2} + \sum \alpha^{z_1 a_1 + z_3 a_3} + \sum \alpha^{z_2 a_2 + z_3 a_3} \quad \text{und} \\ SC'_{3-2} &= \sum \alpha^{z_1 a_1} + \sum \alpha^{z_2 a_2} + \sum \alpha^{z_3 a_3}. \end{aligned}$$

Zuerst findet man nun leicht aus der Bedeutung der Ausdrücke $C'_m = C_m - SC'_{m-1}$. SC'_{m-1} besteht aber aus m einzelnen Ausdrücken von der Form $'C'_{m-1}$, wo durch den Index links angedeutet werden soll, daß eine bestimmte Zahl a , unter denen a_1, a_2, \dots, a_n , in C_m gleich 0 gesetzt sei. Man findet aber wie vorher $'C'_{m-1} = 'C'_{m-1} - S'C'_{m-2}$. Es besteht aber $S'C'_{m-2}$ aus $m-1$ Ausdrücken. Läßt man diesen Ausdruck $S'C'_{m-2}$ aus C'_m auf vielfache Weise entstehen, indem man nämlich der Reihe nach a_1 , dann a_2 etc. gleich 0 setzt, und addirt diese sämtlichen $m \cdot m - 1$ Ausdrücke, so ist klar, daß in jedem einzelnen Ausdrucke zwei Zahlen a fehlen und daß ferner diese Ausdrücke zusammen in Bezug auf die Größen a symmetrisch sind. Hieraus schließt man, daß jene $m \cdot m - 1$ Ausdrücke ein Vielfaches von SC'_{m-1} sein müssen, und man findet leicht, da SC'_{m-2} nur aus $\frac{m \cdot m - 1}{2}$ Ausdrücken besteht, daß die Summe jener $m \cdot m - 1$ Ausdrücke $2SC'_{m-2}$ ist. Setzt man nun die Gleichung $'C'_{m-1} = 'C'_{m-1} - S'C'_{m-2}$ auf alle mögliche Weise zusammen, indem man $'C'_{m-1}$ aus C'_m auf alle Arten entstehen läßt, und addirt diese Ausdrücke sämtlich, so wird man offenbar $SC'_{m-1} = SC'_{m-1} - 1 \cdot 2SC'_{m-2}$ erhalten.

Betrachten wir nun im Allgemeinen SC'_m , so wird dies aus $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ Ausdrücken von der Form $'C'_{m-n}$ bestehen. Jeder dieser Ausdrücke nach der angegebenen Art zerlegt, giebt eine Gleichung von der Form $'C'_{m-n} = 'C'_{m-n} - S'C'_{m-n-1}$. Addirt man alle diese Gleichungen, so mag das Resultat der Operation durch $\Sigma'C'_{m-n} = \Sigma'C'_{m-n} - \Sigma'C'_{m-n-1}$ bezeichnet werden. Es ist aber offenbar $\Sigma'C'_{m-n} = SC'_{m-n}$, $\Sigma'C'_{m-n} = SC'_{m-n}$ und $\Sigma'C'_{m-n-1}$ ist ein Vielfaches von SC'_{m-n-1} ; denn in jedem einzelnen Ausdrucke kommen nur $m-n-1$ Elemente a vor, und die Summe aller Ausdrücke ist auch in Bezug auf die Elemente a_1, a_2, \dots, a_m symmetrisch. $\Sigma'C'_{m-n-1}$ wird aus $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot m - n$ Ausdrücken von der Form $'C'_{m-n-1}$ bestehen, SC'_{m-n-1} hingegen nur aus $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 1}$ Ausdrücken, woraus in Verbindung mit dem Vorhergehenden $\Sigma'C'_{m-n-1} = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots n + 1}{m \cdot m - 1 \dots m - n} SC'_{m-n-1} = (n+1)SC'_{m-n-1}$ folgt. Setzen wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhal-

ten wir ganz allgemein $SC'_{m-n} = SC_{m-n} - (n+1)SC'_{m-n-1}$. Giebt man nun dem n der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, ..., $m-1$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} C'_m &= C_m - SC'_{m-1}, \\ SC'_{m-1} &= SC_{m-1} - 2SC'_{m-2}, \\ 2.SC'_{m-2} &= 2SC_{m-2} - 2.3SC'_{m-3}, \\ 2.3SC'_{m-3} &= 2.3SC_{m-3} - 2.3.4SC'_{m-4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$2.3\dots m-2.SC'_{m-(m-2)} = 2.3\dots m-2SC_{m-(m-2)} - 2.3\dots m-1.SC'_{m-(m-1)}.$$

Substituirt man diese Werthe nach einander in die erste Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned} C'_m &= C_m - SC_{m-1} + 2SC_{m-2} - 2.3SC_{m-3} + 2.3.4SC_{m-4} - \dots \\ &\dots (-1)^{m-1} 2.3\dots m-1 SC'_1. \end{aligned}$$

SC'_1 besteht aus m Ausdrücken von der Form $\Sigma \alpha^{a_i}$; jeden solchen Ausdruck kann man aber in $\Sigma \alpha^{a_i} - 1$ transformiren, woraus dann schließlic

$$\begin{aligned} C'_m &= C_m - SC_{m-1} + 2SC_{m-2} - 2.3SC_{m-3} + \dots \\ &\dots (-1)^{m-1} 2.3\dots m-1 SC_1 + (-1)^m 2.3\dots m \end{aligned}$$

folgt.

So hätten wir nun jede durch die z ausgedrückte Summe auf einen durch die ξ bestimmten Ausdruck reducirt. Sind nun die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ von der Beschaffenheit, daß nicht etwa eine gewisse Anzahl von ihnen, die kleiner als n ist, mit p aufgehen kann, so werden die $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - n + 1}{1 \cdot 2 \dots n}$ Ausdrücke, aus denen SC_{m-n} besteht und die sämmtlich von der Form $\Sigma \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_{m-n} \xi_{m-n}}$ sind, dem Früheren zufolge, verschwinden. Da nun hierdurch auf der rechten Seite alle Ausdrücke außer dem letzten verschwinden, so erhält man für diesen Fall $C'_m = (-1)^m 2.3\dots m$.

Ist aber $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ durch p theilbar, so folgte $\Sigma \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n} = p C'_{n-1}$; mithin für den zuletzt erwähnten Fall $\Sigma \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n} = (-1)^{n-1} p.1.2.3\dots n-1$. Sind indessen die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n von der Beschaffenheit, daß eine kleinere Anzahl von ihnen, als n , mit p aufgehen kann, so werden nicht wie vorhin alle Ausdrücke der Entwicklung von $C'_{(n-1)}$ verschwinden, wohl aber gewiß der erste $C_{(n-1)}$, weil $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ nicht mit p aufgehen

kann, da $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ durch p aufgeht und a_n nicht durch p aufgeht. Aus letzterem Grunde wird auch C_1 , also auch immer das vorletzte Glied der Entwicklung verschwinden. Es wäre nun möglich, daß einige Ausdrücke in $SC_{(n-1)-1}$ nicht verschwänden, wenn nämlich die Summe zweier Zahlen a mit p aufginge; alsdann könnte man aber auf jeden dieser Ausdrücke die Entwicklung $C_{(n-2)} = p C'_{(n-3)} = p [C_{(n-3)} - C_{(n-3)-1} + 2 C_{(n-3)-2} - \text{etc.}]$ anwenden. $C_{(n-3)}$ müßte nun wieder verschwinden, und es ist überhaupt ersichtlich, daß, wenn man den Gang der Operation gleichmäÙig fortsetzt, die Bestimmung von $C_{(n-2)}$ zuletzt nothwendigerweise auf solche Ausdrücke $\sum a^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots}$ wird reducirt werden, in welchen keine kleinere Anzahl Elemente a als unter dem Summenzeichen vorkommt, durch p aufgehen und folglich nach dem Vorhergehenden berechnet werden kann. Aehnlich kann man bei den folgenden Ausdrücken verfahren. Zweckmäßiger würde es aber sein, die Rechnung umgekehrt zu ordnen und mit der Bestimmung der letzten Glieder der Entwicklung anzufangen. Die so erhaltenen Ausdrücke könnten dann auch zugleich zur Bestimmung der vorhergehenden dienen.

Zur Erläuterung des Gesagten diene folgendes Beispiel. Es sei $p=7$ und es handle sich um die Bestimmung von $\sum a^{1\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 + 5\xi_5 + 6\xi_6}$, so wird dieser Ausdruck $= 7 \sum a^{1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5}$ sein. Es ist übrigens nach dem Vorhergehenden ganz gleichgültig, welche der Zahlen a , also hier der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, die in der durch die ξ ausgedrückten Summe vorkommen, man in der durch die z ausgedrückten Summe ausläßt. Es wird daher $\sum a^{1\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 + 5\xi_5} = 7 \sum a^{1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5} = 7 \sum a^{1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 6z_5} = \text{etc.}$ sein.

Es ist aber $\sum a^{1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5} = C'_5$ und

$$C'_5 = C_5 - SC_4 + 1.2 SC_3 - 1.2.3 SC_2 + 1.2.3.4 SC_1 - 1.2.3.4.5.$$

Nun ist $SC_1 = 0$, $SC_2 = \sum a^{2\xi_1 + 5\xi_2} + \sum a^{3\xi_1 + 4\xi_2} = 2.7 [C_1 - 1] = -2.7$, und jede dieser Summen ist einzeln gleich -7 . $SC_3 = \sum a^{1\xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3} = 7C'_2 = 7(C_2 - C_1 + 1.2)$ also $SC_3 = 7.2$.

Ferner ist $SC_4 = \sum a^{2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 + 5\xi_4} = 7C'_3 = 7(C_3 - SC_2 + 2SC_1 - 2.3)$. Es ist aber hier $SC_1 = 0$, $SC_2 = \sum a^{3\xi_1 + 4\xi_2} = -7$, nach dem Obigen; folglich $SC_4 = 7[7 - 2.3]$; C_5 aber ist 0. Mithin geben diese Werthe, in die obige Formel substituirt,

$$C'_5 = -[7(7 - 2.3)] + 1.2(7.2) - 1.2.3(-2.7) - 1.2.3.4.5;$$

und folglich

$$\sum \alpha^{1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+4\xi_4+5\xi_5+6\xi_6} = 7[-7(7-2.3)+1.2.7.2+1.2.3.2.7-1.2.3.4.5] \\ = -35.$$

Bei der Bestimmung der Coefficienten der Gleichung für die p ten Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen, hat der Coefficient der $(n-1)$ ten Potenz der Unbekannten z , oder, nach obiger Entwicklung, der Coefficient von $x^{(n-1)p}$, ein besonderes Interesse. Dieser drückt nämlich bekanntlich die negative Summe der p ten Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung aus, und die einzelnen Glieder desselben lassen sich allgemein bestimmen. Der allgemeine Ausdruck eines solchen Gliedes ist nach dem Vorigen $a_{a_0} a_{a_1} a_{a_2} \dots a_{a_{p-1}} \sum \alpha^{0a_0+1a_1+\dots+p-1.a_{p-1}}$, wo $a_0+a_1+a_2+\dots+a_{p-1} = p$ ist. Da alle Zahlen a positiv sind, so müssen mehrere gleich 0 werden, wenn nicht jede = 1 ist. Werden nun $p-m$ Zahlen a gleich 0, und bezeichnet man die übrigen durch $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$, so wird der obige Ausdruck folgende Gestalt annehmen:

$$a_{a_1} a_{a_2} \dots a_{a_m} \sum \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m}.$$

Macht man unter den Größen ξ sämtliche Variationen, ganz abgesehen davon, ob mehrere der Zahlen a gleich werden, so ist

$$\sum \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m} = p[C_{m-1} - SC_{m-2} \dots (-1)^{m-1} 2.3 \dots m-1].$$

Da aber $a_1 + a_2 + \dots + a_m = p$ ist, so ist klar, daß die Summe einer geringeren Anzahl von Elementen a , als p anzeigt, nicht durch p aufgehen kann; folglich sind alle in den Klammern befindlichen Ausdrücke, außer dem letzten, gleich 0 und es ist

$$\sum \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m} = (-1)^{m-1} p.2.3 \dots m-1.$$

Sollen nun bloß die Variationen unter den Größen ξ vorgenommen werden, welche verschiedene Verbindungen mit den Elementen a hervorbringen, so ist noch zu unterscheiden, wie viele unter einander gleiche Elemente in $a_1, a_2, \dots a_m$ enthalten sind. Nennt man diese Anzahlen μ, ν, ρ etc., so wird der obige Werth für $\sum \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m}$ noch durch $1.2.3 \dots \mu.1.2 \dots \nu.1.2 \dots \rho$ zu dividiren sein, um den der jetzigen Voraussetzung entsprechenden Werth von $\sum \alpha^{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m}$ zu geben. Demnach wird der Coefficient von $a_{a_1} a_{a_2} \dots a_{a_m}$ gleich

$$p \frac{1.2.3 \dots m-1}{1.2 \dots \mu.1.2 \dots \nu.1.2 \dots \rho} (-1)^{m-1} \text{ sein. Ist aber } a_1 = p \text{ und die übrigen Elemente sind 0, so wird der Coefficient von } a_p \text{ offenbar } \sum \alpha^{p\xi} = p.$$

Sollte also z. B. die Summe der 6ten Potenzen der Wurzeln einer vorliegenden Gleichung, deren Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. sind, bestimmt werden, so würde man für dieselbe folgende Entwicklung erhalten:

$$\begin{aligned}
 & - \left[a_1^6 \cdot \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5.6} (-1)^5 + a_1^4 a_2 \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} (-1)^4 + a_1^2 a_2^2 \cdot \frac{1.2.3}{1.2.1.2} (-1)^3 \right. \\
 & + a_2^3 \cdot \frac{1.2}{1.2.3} (-1)^2 + a_1^3 a_3 \cdot \frac{1.2.3}{1.2.3} (-1)^3 + a_1 a_2 a_3 \cdot 1.2 (-1)^2 + a_2^2 \cdot \frac{1}{1.2} (-1) \\
 & \left. + a_1^2 a_4 \cdot \frac{1.2}{1.2} (-1)^2 + a_2 a_4 \cdot \frac{1.2}{1.2} (-1)^2 + a_2 a_4 \cdot 6 (-1) + a_1 a_5 \cdot 6 (-1) + a_6 \cdot 6 \right] \\
 & = a_1^6 - 6 a_1^4 a_2 + 9 a_1^2 a_2^2 - 2 a_2^3 + 6 a_1^3 a_3 - 12 a_1 a_2 a_3 + 3 a_2^2 - 6 a_1^2 a_4 + 6 a_2 a_4 \\
 & \quad + 6 a_1 a_5 - 6 a_6.
 \end{aligned}$$

(Der Schluss im nächsten Hefte.)