

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 785.

Ueber die strenge Berechnung des geocentrischen Ortes eines Gestirnes, wenn der scheinbare mit
Parallaxe afficirte Ort desselben gegeben ist,
von Dr. William Charles Goetze.

§ 1.

Das parallactische Problem, oder die Aufgabe die Einwirkung der Parallaxe auf die Lage der uns sichtbaren Himmelskörper zu berechnen, ist so häufig und in so vielen verschiedenen Gestalten abgehandelt worden, dass man kaum erwarten dürfte, noch irgend eine Seite desselben auffinden zu können, welche nicht schon bearbeitet und erschöpft worden wäre; dieses ist jedoch nicht der Fall, indem alle früheren Schriftsteller, welche diesen Gegenstand behandelt haben, und deren sind sehr viele, gewissermaassen immer nur einseitig verfahren sind, indem sie sich hauptsächlich mit dem folgenden Probleme beschäftigt haben, welches wir das erste nennen wollen, nämlich:

den scheinbaren mit Parallaxe afficirten Ort eines Himmelskörpers zu berechnen, wenn der geocentrische Ort desselben gegeben ist,

aber es giebt noch ein zweites hierhergehöriges Problem,

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \cos b' \sin(l' - N) &= \Delta \cos b \sin(l - N) - R \cos B \sin(L - N) \\ \Delta' \cos b' \cos(l' - N) &= \Delta \cos b \cos(l - N) - R \cos B \cos(L - N) \\ \Delta' \sin b' &= \Delta \sin b - R \sin B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Ihre Entwicklung ist leicht, und kann uns um so füglicher erlassen werden, da sie sich beinahe in allen Schriften über sphärische Astronomie findet, bemerkt sei es aber, dass die Formeln (1) ganz allgemein sind und sich auf jede beliebige Ebene, die wir durch (I) bezeichnen wollen, beziehen können. Es bedeuten alsdann: l, b, Δ die geocentrischen Polarcoordinaten des Centrums des Himmelskörpers, wo l die geocentrische Länge dieses Himmelskörpers ist, und zwar in der Ebene (I) fortgezählt und auf eine feste Richtung \mathcal{V} in dieser Ebene bezogen, b die geocentrische Breite desselben, ebenfalls auf (I) bezogen, und Δ die Entfernung des Centrums des Himmelskörpers vom Centrum der Erde; ebenso sind l', b', Δ' die Polarcoordinaten des Centrums des Himmelskörpers, aber auf einen Punkt der Erdoberfläche bezogen, dessen geocentrische Polarcoordinaten L, B, R sind, und endlich ist N ein willkürlicher Winkel. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass alle drei Längen

welches gewissermaassen die Umkehrung dieses ersten ist, und etwa so lauten würde:

den geocentrischen Ort eines Himmelskörpers zu finden, wenn der scheinbare mit Parallaxe afficirte Ort desselben gegeben ist,

und dieses Problem ist es, womit wir uns hier beschäftigen wollen, da es ebenso vortheilhafte Anwendungen wie das erste gestattet *), von allen früheren Schriftstellern aber, so gut wie gänzlich vernachlässigt worden ist, indem sie nur indirecte Auflösungen dafür gegeben haben, welche also durch wiederholte Versuche bewerkstelligt werden müssen und somit auf blosse Tatonnements hinauslaufen.

§ 2.

Ehe wir nun weiter gehen, sei es uns zuerst erlaubt, die bekannten drei Grundgleichungen herzusetzen, auf welche sich alle parallactischen Rechnungen zurückführen lassen, diese sind nämlich:

l, l' und L von der festen Richtung \mathcal{V} in der Ebene (I) abzuzählen sind, und dass für den Fall, dass unter der Ebene (I) der Aequator verstanden werden soll, alsdann auch: L = der Sternzeit der Beobachtung oder der sogenannten Rectascension des Meridianes für die Beobachtungszeit, so wie ebenfalls alsdann auch l und b die geocentrische AR. und Decl. des Himmelskörpers und l' und b' die mit Parallaxe afficirte AR. und Decl. desselben bedeuten werden; B wird endlich in diesem Falle mit der sogenannten geocentrischen Breite des Beobachtungsortes identisch sein.

*) Nämlich bei der Bestimmung der geographischen Länge und der Tafelfehler der Gestirne aus Sternbedeckungen; wofür ich eine sehr leichte Methode gefunden habe, welche vollkommen streng ist, und gewissermaassen auf der gegenwärtigen Abhandlung beruht. Sie wird nächstens ebenfalls in den Astronomischen Nachrichten erscheinen.

Dividirt man nun die drei Gleichungen unter (1) mit Δ , und bedenkt man zugleich, dass $\frac{R}{\Delta} = \sin \pi$, wo π die Horizontal-Parallaxe des Centrums des Himmelskörpers für den Beobachtungsort sein wird, dessen Lage auf der Erdoberfläche, durch die Polarcoordinaten L, B, R bestimmt ist, so folgt, wenn man zugleich $N = l'$ setzt, dass:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \cos b \sin(l-l') - \sin \pi \cos B \sin(L-l') \\ \frac{\Delta'}{\Delta} \cos b' &= \cos b \cos(l-l') - \sin \pi \cos B \cos(L-l') \\ \frac{\Delta'}{\Delta} \sin b' &= \sin b - \sin \pi \sin B \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich auch so schreiben:
 $\sin(l-l') = \sin \pi \cos B \sec b \sin(L-l') \dots \dots \dots (3)$

und ebenso erhält man, wenn die zweite Gleichung unter (2) mit $\sin b'$, die dritte dagegen mit $\cos b'$ multiplicirt wird, und das eine Product vom anderen abgezogen wird, auf sehr leichte Weise:

$$\sin(b-b') = \sin \pi \sin B \cos b' - \sin \pi \cos B \sin b' \cos(L-l') - 2 \sin b' \cos b \sin^2 \frac{1}{2}(l-l') \dots \dots \dots (4)$$

Nun wird aber mit Rücksicht auf (3):

$$2 \sin^2 \frac{1}{2}(l-l') = \sin(l-l') \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l-l') = \sin \pi \cos B \sec b \sin(L-l') \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l-l') \dots \dots \dots (5)$$

und also auch, wenn man diese Gleichungen in (4) substituirt:

$$\sin(b-b') = \sin \pi \sin B \cos b' - \sin \pi \cos B \sin b' \cos(L-l') - \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l-l') \dots (6)$$

oder auch:

$$\sin(b-b') = \sin \pi \sin B \cos b' - \sin \pi \cos B \sin b' \cos(L - \frac{1}{2}(l+l')) \sec \frac{1}{2}(l-l') \dots \dots \dots (7)$$

Setzt man nun aber:

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} B \cos \frac{1}{2}(l-l') \sec(L - \frac{1}{2}(l+l')) \dots \dots \dots (8)$$

so wird also:

$$\sin(b-b') = \sin \pi \sin B \cos b' - \sin \pi \sin B \cos b' \cdot \cotg \eta \dots \dots \dots (9)$$

und daher endlich:

$$\sin(b-b') = \sin \pi \sin B \sin(\eta-b') \operatorname{cosec} \eta \dots \dots \dots (10)$$

Will man also den geocentrischen Ort eines Himmelskörpers aus dem gegebenen scheinbaren Orte desselben herleiten, so wird man die Formeln (3), (8) und (10) zu nehmen haben, oder:

$$\left. \begin{aligned} \sin(l-l') &= \sin \pi \cos B \sec b \sin(L-l') \\ \operatorname{tg} \eta &= \operatorname{tg} B \cos \frac{1}{2}(l-l') \sec(L - \frac{1}{2}(l+l')) \\ \sin(b-b') &= \sin \pi \sin B \operatorname{cosec} \eta \cdot \sin(\eta-b') \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

und dieses sind die bekannten Formeln, deren man sich bis jetzt zur Erlangung dieses Zweckes immer zu bedienen pflegte; sie lassen sich aber in dieser Gestalt nur durch Versuche auflösen, indem man zuerst $b = b'$ setzt, damit findet man alsdann einen genäherten Werth von $(l-l')$ oder l ; mit dem man ferner einen genäherten Werth von η , und damit endlich einen genäherten Werth von $(b-b')$ oder b erhält. Mit diesem gefundenen Werthe von b wird die Rech-

nung auf die eben beschriebene Weise von neuem geführt, und überhaupt so lange mit der Approximation fortgefahren, bis zwei successiv gefundene Werthe von $l-l'$ und $b-b'$ identisch werden. Gewöhnlich werden nun hierzu drei Substitutionen erforderlich sein, die zwar dadurch etwas abgekürzt werden können, dass man sich der Proportionaltheile in den Logarithmentafeln bedient, aber immer doch weitläufig und unbequem bleiben.

§ 3.

Statt des soeben auseinandergesetzten Tatonnements werde ich jetzt ein ganz directes und sehr bequemes Verfahren lehren, welches nichts zu wünschen übrig lässt. Es folgt nämlich aus den Gleichungen (6) und (3), dass:

$$\left. \begin{aligned} \sin(b-b') &= \sin \pi \sin B \cos b' - \sin \pi \cos B \sin b' \cos(L-l') - \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(l-l') \\ \sin(l-l') &= \sin \pi \cos B \sin(L-l') \sec b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

oder, wenn man $b-b' = p_0$ und $l-l' = q_0$ setzt, und zugleich einen Hülfswinkel ϵ , von solcher Beschaffenheit einführt, dass:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \operatorname{tg} B \sec(L-l') \dots \dots \dots (13)$$

so wird auch:

$$\left. \begin{aligned} \sin p_0 &= \sin \pi \sin B \sin(\epsilon-b') \operatorname{cosec} \epsilon - \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 \\ \sin q_0 &= \sin \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b'+p_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Setzt man nun aber:

$$\sin p = \sin \pi \sin B \operatorname{cosec} \epsilon \sin(\epsilon-b') \dots \dots \dots (15)$$

$$p_0 = p + p' \dots \dots \dots (16)$$

so wird also auch:

$$\sin p_0 = \sin p + 2 \cos(p + \frac{1}{2}p') \sin \frac{1}{2}p' \dots\dots\dots(17)$$

und daher mit Rücksicht auf (14) und (15):

$$\sin \frac{1}{2}p' = -\frac{1}{2} \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \sec(p + \frac{1}{2}p') \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}q_0 \dots\dots\dots(18)$$

Setzt man auf ähnliche Weise:

$$\sin q = \sin \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b' + p) \dots\dots\dots(19)$$

$$q_0 = q + q' \dots\dots\dots(20)$$

so wird gleichfalls:

$$\sin q_0 = \sin q + 2 \cos(q + \frac{1}{2}q') \sin \frac{1}{2}q' \dots\dots\dots(21)$$

und da aus (14) mit Rücksicht auf (19) und (20) folgt, dass:

$$\sin q_0 = \sin q \sec(b' + p + p') \cos(b' + p) \dots\dots\dots(22)$$

so wird also auch:

$$\sin q_0 = \sin q + 2 \sin q \sin(b' + p + \frac{1}{2}p') \sec(b' + p + p') \sin \frac{1}{2}p' \dots\dots\dots(23)$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (21), dass:

$$\sin \frac{1}{2}q' = \sin q \sin(b' + p + \frac{1}{2}p') \sec(b' + p + p') \sec(q + \frac{1}{2}q') \sin \frac{1}{2}p' \dots\dots\dots(24)$$

oder mit Hülfe von (18), dass:

$$\sin \frac{1}{2}q' = -\frac{1}{2} \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \sin(b' + p + \frac{1}{2}p') \sec(b' + p + p') \sec(p + \frac{1}{2}p') \sec(q + \frac{1}{2}q') \sin q \operatorname{tg} \frac{1}{2}q_0 \dots\dots(25)$$

Nun ist aber:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2} \sin q_0 \sec^2 \frac{1}{2}q_0 \dots\dots\dots(26)$$

und daher folgt endlich aus (18) und (25) mit Rücksicht auf (19) und (22), dass:

$$\sin \frac{1}{2}p' = -\frac{1}{4} \sin^2 q \sin b' \cos(b' + p) \times M \dots\dots\dots(27)$$

$$\sin \frac{1}{2}q' = -\frac{1}{4} \sin^3 q \sin b' \sin(b' + p) \times N \dots\dots\dots(28)$$

wo M und N folgende Werthe haben werden, nämlich:

$$M = \sec(b' + p + p') \cos(b' + p) \sec(p + \frac{1}{2}p') \sec^2 \frac{1}{2}(q + q') \dots\dots\dots(29)$$

$$N = \sin(b' + p + \frac{1}{2}p') \operatorname{cosec}(b' + p) \sec^2(b' + p + p') \cos^2(b' + p) \sec(p + \frac{1}{2}p') \sec(q + \frac{1}{2}q') \sec^2 \frac{1}{2}(q + q') \dots\dots(30)$$

und daher beide immer sehr nahe ≈ 1 sein müssen:

Die Werthe p' und q' werden nun nach den obigen Formeln (27) und (28), ihr Maximum erreichen müssen, wenn q sein Maximum erreicht, und dieses findet nach der Formel (19) alsdann statt, wenn π und b' ihre grössten Werthe annehmen, und zugleich p ein Keinstes wird. Für den Mond, der uns am nächsten ist, wird aber π stets kleiner als 62 Bogenminuten sein müssen, und für den Fall, dass die Ebene (I) der Aequator ist, wird beim Monde b' höchstens $\pm 30^\circ$ betragen können. Setzt man nun diese Werthe in die Formeln (27) und (28) ein, so folgt unmittelbar, dass für den Mond:

p' stets $<$ als $\pm 19,37$ Bogensekunden, und dass

q' stets $<$ als $\pm 0,23$ „

sein muss, und daher können wir denn auch unbedenklich, sogar beim Monde, wenn die Ebene (I) nicht mehr als 30° gegen die Mondbahn geneigt ist, statt der strengen Formeln für p' und q' , unter (27) und (28), ohne weiteres folgende annehmen, nämlich:

$$p' = -103132'' \sin^2 q \sin b' \cos(b' + p) \dots\dots(31)$$

$$q' = -103132'' \sin^3 q \sin b' \sin(b' + p) \dots\dots(32)$$

auch selbst dann, wenn man bis auf Tausendtheile von

Bogensekunden genau rechnen wollte, wobei zu bemerken ist, dass:

$$\log \operatorname{brig} 103132,4 = 5,0133951$$

Die ganze Berechnung wird also in folgendem bestehen; man sucht nämlich zuerst:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= \operatorname{tg} B \sec(L-l') \\ \sin p &= \sin \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon \\ \sin q &= \sin \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b' + p) \\ p' &= -[5,01340] \sin^2 q \sin b' \cos(b' + p) \\ q' &= -[5,01340] \sin^3 q \sin b' \sin(b' + p) \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

und alsdann wird:

$$\left. \begin{aligned} l &= l' + q + q' \\ b &= b' + p + p' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

Ein Beispiel wird die Berechnung noch besser erläutern, und es werde deswegen angenommen, dass:

$$\begin{aligned} \text{Scheinbare AR. } \zeta &= l' = 106^\circ 17' 55'' 99 \\ \text{Scheinbare Decl. } \zeta &= b' = + 22^\circ 35' 58,18 \\ \text{Sternzeit der Beobachtung} &= L = 13^\circ 41' 51,00 \\ \text{Stundenwinkel} &= L - l' = 267^\circ 23' 55,01 \end{aligned}$$

und es sei ferner die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe $= \Pi = 59' 47'' 48$ und die geographische Breite des Beobachtungs-

ortes = $\varphi = 48^\circ 12' 35'' 00$; damit findet man ferner, wenn die Erdabplattung = $\frac{1}{300}$ gesetzt wird, nach bekannten Vorschriften, dass die:

$$\text{locale Horizontal-Parallaxe} = \pi = 59' 40'' 857$$

$$\text{geocentrische Breite} = B = 48^\circ 1' 10,38$$

und alsdann steht die Rechnung nach den Formeln (33), folgendermaassen in extenso:

$lg \operatorname{tg} B = 0,0458606$	$lg \sin \pi = 8,2395400$	$lg \sin \pi = 8,2395400$	$lg \cos B = 9,8253462$	$lg \cos B = 9,8253462$	$lg \sin^2 q = 6,20273$	$lg \sin^2 q = 6,20273$	$lg \sin^3 q = 4,30409n$	$lg \sin^3 q = 4,30409n$
$lg \sec(L-l) = 1,3430671n$	$lg \sin B = 9,8712068$	$lg \cos B = 9,8253462$	$lg \sin(L-l) = 9,9995322n$	$lg \sin(L-l) = 9,9995322n$	$lg \sin b' = 9,58466$	$lg \sin b' = 9,58466$	$lg \sin b' = 9,58466$	$lg \sin b' = 9,58466$
$lg \operatorname{tg} \varepsilon = 1,3889277n$	$lg \cos \varepsilon = 0,0003619$	$lg \sec(b'+p) = 0,0369257$	$lg \cos(b'+p) = 9,96307$	$lg \cos(b'+p) = 9,96307$	$lg \sin(b'+p) = 9,59709$	$lg \sin(b'+p) = 9,59709$	$lg \sin(b'+p) = 9,59709$	$lg \sin(b'+p) = 9,59709$
$\varepsilon = 92^\circ 20' 18'' 92$	$lg \sin p = 8,0833696$	$log \sin q = 8,1013641n$	$lg p' = 0,76386n$	$lg p' = 0,76386n$	$lg q' = 8,49924$	$lg q' = 8,49924$	$lg q' = 8,49924$	$lg q' = 8,49924$
$b' = +22 35 58,18$	$p = + 0^\circ 41' 39'' 225$	$q = - 0^\circ 43' 24'' 959$	$p' = -5,806$	$p' = -5,806$	$q' = +0,032$	$q' = +0,032$	$q' = +0,032$	$q' = +0,032$
$\varepsilon - b' = +69 44 20,74$	$b' = +22 35 58,180$	$q' = +0,032$	$q + q' = - 0^\circ 43' 24'' 927$	$q + q' = - 0^\circ 43' 24'' 927$	$l' = 106 17 55,990$	$l' = 106 17 55,990$	$l' = 106 17 55,990$	$l' = 106 17 55,990$
	$b + p = +23 17 37,405$	$l = 105^\circ 34' 31'' 063$						
	$p' = -5,806$							
	$b = +23^\circ 17' 31'' 599$							

Wir finden also, dass:

$$\text{Wahre AR. } \zeta = l = 105^\circ 34' 31'' 063$$

$$\text{Wahre Decl. } \zeta = b = + 23 17 31,599$$

welche Werthe noch bis auf's Tausendstel scharf sein würden, wenn 7 stellige Logarithmen eine solche Genauigkeit zu gewähren im Stande wären. In der Praxis werden übrigens 6stellige, ja meistens sogar 5stellige Logarithmen zu dieser Berechnung vollkommen genügen.

§ 4.

Obgleich die im vorigen Paragraphen gegebene Auflösung unseres Problems schon einfach genug ist, so lässt sie sich doch noch etwas bequemer machen, wenn man eine Hülfs-tafel einführt, wodurch das Aufschlagen der Sinusse der kleinen Winkelgrössen π , p und q unnötig gemacht wird.

Dieses wird nun am leichtesten geschehen können, wenn man in der Formel (14), statt $\sin \pi$ und $\sin p_0$ folgende Werthe einführt, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \sin \pi &= \pi \operatorname{arc} 1'' + \pi \operatorname{arc} 1'' \cdot \delta \pi \\ \sin p_0 &= p_0 \operatorname{arc} 1'' + p_0 \operatorname{arc} 1'' \cdot \delta p_0 \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

wo π und p_0 , als in Bogensecunden ausgedrückt angenommen werden; die Grössen $\delta \pi$ und δp_0 *) werden dabei durch folgende Gleichungen näher bestimmt, indem nämlich:

$$\delta \pi = \frac{\sin \pi - \pi \operatorname{arc} 1''}{\pi \operatorname{arc} 1''} \dots (36)$$

$$\delta p_0 = \frac{\sin p_0 - p_0 \operatorname{arc} 1''}{p_0 \operatorname{arc} 1''} \dots (37)$$

oder wenn man in Reihen auflöst, so wird:

$$\delta \pi = -\frac{1}{6} \pi^2 \operatorname{arc}^2 1'' + \frac{1}{120} \pi^4 \operatorname{arc}^4 1'' - \frac{1}{5040} \pi^6 \operatorname{arc}^6 1'' + \dots (38)$$

$$\delta p_0 = -\frac{1}{6} p_0^2 \operatorname{arc}^2 1'' + \frac{1}{120} p_0^4 \operatorname{arc}^4 1'' - \frac{1}{5040} p_0^6 \operatorname{arc}^6 1'' + \dots (39)$$

so dass also $\delta \pi$ und δp_0 von der zweiten Ordnung, und daher nothwendig sehr klein sein werden. Gehen wir nun auf die Gleichung (14) in § 3. zurück, zufolge welcher in aller Strenge:

$$\sin p_0 = \sin \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon - \sin \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 \dots (40)$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf (35), dass:

$$p_0 = \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon - \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 + p'' \dots (41)$$

welche Gleichung ebenfalls noch vollkommen streng ist, und in welcher zur Abkürzung:

$$p'' = \frac{\sin p_0}{\sin \pi} \cdot \pi \delta \pi - p_0 \delta p_0 \dots (42)$$

gesetzt worden ist. Da aber zugleich nach (35):

$$\frac{\sin p_0}{\sin \pi} = \frac{p_0}{\pi} \cdot \frac{1 + \delta p_0}{1 + \delta \pi} \dots (43)$$

so ist auch:

$$p'' = \frac{p_0(1 + \delta p_0)}{1 + \delta \pi} \cdot \delta \pi - p_0 \delta p_0 = \frac{p_0(\delta \pi - \delta p_0)}{1 + \delta \pi} \dots (44)$$

Statt dieses strengen Ausdrucks kann man sich aber, des folgenden viel bequemer bedienen, der bis auf Grössen der 3ten Ordnung inclusive genau ist, und daher noch lange kein Zehntausendstel einer Bogensecunde (innerhalb der Grenzen in welchen π sich bewegt) ungenau sein kann. Mit Hülfe der

*) Das griechische δ wird hier als Functionszeichen gebraucht und nicht etwa als Variationszeichen.

obigen Reihen unter (38) und (39) findet man nämlich, aus (44), dass:

$$p'' = \frac{1}{8} p_0 (p_0^2 - \pi^2) \operatorname{arc}^2 1'' \dots\dots(45)$$

Dieser Werth von p'' wird immer sehr klein sein müssen, denn sein Maximum, sogar beim Monde, wird höchstens $\pm 0''078$ in Bogen betragen können, welches dann stattfindet, da p_0 niemals grösser werden kann als π , wenn $p_0 = \pm \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ und $\pi = 62'$ in Bogen ist, alsdann wird nämlich:

$$p'' = \pm \frac{1}{27} \sqrt{3} \times \pi^3 \operatorname{arc}^2 1'' = \pm 0''078 \text{ in Bogen}$$

Auf ähnliche Weise wird man auch den Werth von $\sin q_0$ transformiren können, denn da nach (14) in § 3.:

$$\sin q_0 = \sin \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b' + p_0) \dots\dots(46)$$

so wird auch, wenn man:

$$\sin q_0 = q_0 \operatorname{arc} 1'' + q_0 \operatorname{arc} 1'' \cdot \delta q_0 \dots\dots(47)$$

setzt, und die Gleichung (35) zu Hülfe nimmt, auch gleichfalls:

$$q_0 = \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b' + p_0) + q'' \dots\dots(48)$$

wo also ähnlich wie vorher:

$$\left. \begin{aligned} \delta q_0 &= \frac{\sin q_0 - q_0 \operatorname{arc} 1''}{q_0 \operatorname{arc} 1''} \\ q'' &= \frac{q_0(\delta\pi - \delta q_0)}{1 + \delta\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

und daher auch bis auf Grössen der 3ten Ordnung inclusive:

$$q'' = \frac{1}{8} q_0 (q_0^2 - \pi^2) \operatorname{arc}^2 1'' \dots\dots\dots(50)$$

wo also ebenso wie vorher; wenn die Ebene (I) der Aequator ist und $\pi < 62'$, alsdann auch q'' höchstens $\pm 0''078$ in Bogen betragen kann.

Die beiden Werthe p'' und q'' lassen sich daher leicht in eine Tafel mit doppeltem Eingang bringen, und demzufolge findet man auch alle Werthe welche p'' und q'' möglicher-

weise annehmen können, natürlich nur innerhalb der Grenzen, in denen π sich beim Monde bewegt, in der Tafel II zusammengestellt. Ueber den Gebrauch dieser Tafel wäre etwa folgendes zu bemerken. Man geht in die horizontale Columne oben oder unten mit der Horizontal-Parallaxe als Argument ein, und an der Seite in vertikaler Richtung mit p oder q , je nachdem man p'' oder q'' suchen will. Dabei ist ferner zu bemerken, dass p'' stets das entgegengesetzte Zeichen von p_0 haben muss, welches unmittelbar aus der Formel (45) folgt, da p_0 stets kleiner als, oder doch nur höchstens gleich π werden kann und daher $p_0^2 - \pi^2$ stets negativ oder doch gleich 0 sein muss; q'' dagegen kann sowohl das entgegengesetzte Zeichen von q_0 , als auch dasselbe Zeichen mit q_0 haben. Der erstere Fall findet dann statt, wenn $q_0 < \pi$ und dieser Fall tritt am häufigsten ein, wogegen der Fall dass $q_0 > \pi$, für welchen nämlich q'' dasselbe Zeichen wie q_0 haben muss, selten ist und überhaupt nur dann eintreten kann, wenn $\sin(L-l') > \cos b \sec B$, wie man aus der Formel 14 in § 3. unmittelbar ersehen kann. Soll nun aber $\sin(L-l') > \cos b \sec B$ werden, so wird auch $\sec B$ immer kleiner als $\sec b$ sein müssen, weil nämlich sonst $\sin(L-l')$ grösser wie 1 werden würde, welches unmöglich ist, folglich wird auch B numerisch genommen, und zwar ohne Rücksicht auf Zeichen, stets kleiner wie b sein müssen, wenn überhaupt $q_0 > \pi$ werden soll, und ausserdem wird es hierzu nöthig sein, dass $L-l'$ zwischen den Grenzen $90^\circ - (b-B)$ und $90^\circ + (b-B)$, oder zwischen den Grenzen $270^\circ - (b-B)$ und $270^\circ + (b-B)$ liegen muss. Alsdann kann möglicherweise $q_0 > \pi$ werden. In der Tafel II. ist auf diesen Umstand Rücksicht genommen worden, indem bei denjenigen Werthen von q'' , welche einem q_0 angehören, welches grösser als π ist, das Zeichen (*) angehängt worden ist.

§ 5.

Wir haben es also nunmehr mit den Formeln unter (41) und (48) in § 4. zu thun, wonach nämlich in aller Strenge:

$$p_0 = \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon - \pi \cos B \sin b' \sin(L-l') \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 + p'' \dots\dots\dots(51)$$

$$q_0 = \pi \cos B \sin(L-l') \sec(b' + p_0) + q'' \dots\dots\dots(52)$$

Setzt man nun:

$$n = \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon, \text{ und } \dots\dots\dots(53)$$

$$m = \pi \cos B \sin(L-l') \dots\dots\dots(54)$$

so folgt unmittelbar, dass:

$$p_0 = n - m \sin b' \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 + p'' \dots\dots\dots(55)$$

$$q_0 = m \sec(b' + p_0) + q'' \dots\dots\dots(56)$$

Setzt man ferner:

$$n' = -m \sin b' \operatorname{tg} \frac{1}{2} q_0 = -\frac{1}{2} m \sin b' \sin q_0 \sec^2 \frac{1}{2} q_0 \dots\dots\dots(57)$$

so wird mit Hülfe von (14) in § 3.:

$$n' = -\frac{1}{2} m^2 \sin b' \sec(b' + p_0) \operatorname{arc} 1'' \times \frac{\sin \pi \sec^2 \frac{1}{2} q_0}{\pi \operatorname{arc} 1''} \dots\dots\dots(58)$$

Da aber der grösste Werth, welchen n' beim Monde annehmen kann, wenn die Ebene I. der Aequator ist, höchstens $\pm 19^{\circ}37'$ betragen kann, so wird man ohne weiteres, statt des strengen Werthes für n' unter (58):

$$n' = -\frac{1}{2} m^2 \sin b' \sec(b' + n) \operatorname{arc} 1'' \dots \dots (59)$$

setzen können, selbst wenn man bis auf Tausendtheile von Bogensekunden genau rechnen wollte. Die obigen Formeln zur schärfsten Berechnung von p_0 und q_0 , werden daher nach der eben geführten Untersuchung folgende einfache und elegante Gestalt annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \lg \varepsilon &= \lg B \sec(L-l') \\ n &= \pi \sin B \sin(\varepsilon - b') \operatorname{cosec} \varepsilon \\ m &= \pi \cos B \sin(L-l') \\ n' &= -m^2 \sin b' \sec(b' + n) \operatorname{arc} \frac{1}{2}'' \\ \text{wo } \log \operatorname{arc} \frac{1}{2}'' &= 4,3845449 - 10 \end{aligned} \right\} \dots (60)$$

und dann wird:

$$\left. \begin{aligned} b &= b' + n + n' + p'' \\ l &= l' + m \sec b + q'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (61)$$

wobei es angedeutet werden kann, dass man zu m nicht die

$\log \lg B = 0,0458606$	$\log \pi = 3,5539870$
$\log \sec(L-l') = 1,3430671n$	$\log \sin B' = 9,8712068$
$\log \lg \varepsilon = 1,3889277n$	$\log \sin(\varepsilon - b') = 9,9722609$
$\varepsilon = 92^{\circ}20'18''92$	$\log \operatorname{cosec} \varepsilon = 0,0003619$
$b' = +22 \ 35 \ 58,18$	$\log n = 3,3978166$
$\varepsilon - b' = +69 \ 44 \ 20,74$	$n = +0^{\circ}41'39''290$
	$b' = +22 \ 35 \ 58,180$
	$b' + n = +23^{\circ}17'37''470$
	$n' = -5,806$
	$p'' = -0,064$
	$b = +23 \ 17 \ 31,600$

Die hier gefundenen Werthe von l und b stimmen, wie man sieht, sehr genau mit den früheren in § 3. überein; während die Berechnung wie sie hier geführt worden ist, jedenfalls bequemer als die frühere ist, da man jetzt keine Sinusse von kleinen Winkeln aufzuschlagen braucht.

§ 6.

Wir wollen nun noch einer kleinen Erleichterung erwähnen, deren man sich aber nicht blos bei unserem Probleme, sondern bei allen parallactischen Rechnungen überhaupt bedienen kann, wenn die Ebene I. der Aequator ist, welches so ziemlich immer der Fall sein wird. Man kann nämlich alsdann die Berechnung der geocentrischen Breite und die Berechnung der localen Horizontal-Parallaxe, so gut wie gänzlich ersparen, wenn man einige beinahe constante Factoren einführt, deren Beschaffenheit sogleich näher erläutert werden soll.

Zahl, sondern nur dessen Logarithmus bedarf, so wie ferner, dass n' stets das entgegengesetzte Zeichen von b' haben muss; ebenso hat p'' immer das entgegengesetzte Zeichen von $n + n'$, mit welchem es als Argument in Tafel (I) aufgeschlagen wird, und endlich hat q'' das entgegengesetzte Zeichen seines Arguments $m \sec b$, wenn $m \sec b < \pi$; dagegen dasselbe Zeichen wie $m \sec b$, wenn $m \sec b > \pi$.

Um nun den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wollen wir dasselbe Beispiel wie in § 3. danach berechnen, für welches nämlich:

Scheinbare AR. ($= l' =$	$106^{\circ}17'55''99$
Scheinbare Decl. ($= b' =$	$+22 \ 35 \ 58,18$
Sternzeit der Beob.	$= L =$	$13 \ 41 \ 51,00$
Geocentrische Breite	$= B =$	$48 \ 1 \ 10,38$
Locale Horiz.-Parallaxe	$= \pi = 0$	$59 \ 40,857 = 3580''857$

und damit haben wir nach den obigen Formeln unter (60) und (61), folgendes Rechnungsschema, bei welchem keine Ziffer unterdrückt ist:

$\log \pi = 3,5539870$	$\log \operatorname{const} = 4,38454n$
$\log \cos B = 9,8253462$	$\log m^2 = 6,75777$
$\log \sin(L-l') = 9,9995522n$	$\log \sin b' = 9,58466$
$\log m = 3,3788854n$	$\log \sec(b' + n) = 0,03693$
$\log \sec b = 0,0369205$	$\log n' = 0,76390n$
$\log m \sec b = 3,4158059n$	$n' = -5''806$
$m \sec b = -0^{\circ}43'24''989$	
$q'' = +0,061$	
$l' = 106 \ 17 \ 55,990$	
$l = 105 \ 34 \ 31,062$	

Zuerst muss es indessen erwähnt werden, dass bei allen parallactischen Rechnungen ohne Ausnahme, die locale Horizontal-Parallaxe $= \pi$ und die geocentrische Breite $= B$ nur in folgenden Verbindungen vorkommen können, nämlich als:

$$\begin{aligned} \sin \pi \sin B \\ \sin \pi \cos B \\ \lg B \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe durch Π , so ist bekanntlich:

$$\sin \pi = \sin \Pi \cdot \frac{R}{a} \dots \dots (62)$$

wo a den Aequatorial-Halbmesser der Erde, und R den Erdhalbmesser für den Beobachtungsort bezeichnet, dessen geocentrische Breite $= B$ ist. Wir haben daher auch nach (62):

$$\left. \begin{aligned} \sin \pi \sin B &= \frac{R}{a} \sin \Pi \sin B \\ \sin \pi \cos B &= \frac{H}{a} \sin \Pi \cos B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

Nun ist aber aus bekannten Gründen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{a} \sin B &= \frac{1-e^2}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} \cdot \sin \varphi \\ \frac{H}{a} \cos B &= \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} \cdot \cos \varphi, \text{ und endlich:} \\ \operatorname{tg} B &= (1-e^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

wo φ die geographische Breite des Beobachtungsortes und e die Excentricität des Erdmeridianes bezeichnet. Setzt man aber:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1-e^2}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} \\ \mu &= \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} \\ \nu &= 1-e^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

so wird ν ein constanter Factor sein, und ebenso werden λ und μ wenigstens nahezu constant sein; es bezeichnet ferner λ das Stück der Normalen vom Beobachtungsorte bis zur Aequatorialaxe unter der Annahme $a = 1$, ebenso ist μ das Stück der Normalen vom Beobachtungsorte bis zur Polaraxe unter derselben Annahme, und endlich ist ν das constante Verhältniss dieser beiden Stücke zu einander. Setzt man nun die Abplattung der Erde $= \omega = \frac{1}{300 + \eta}$, so wird η nur eine kleine Zahl sein können, und da bekanntlich:

$$e^2 = \omega(2-\omega) \dots\dots\dots (66)$$

so wird auch alsdann:

$$e^2 = \frac{599 + 2\eta}{(300 + \eta)^2} \dots\dots\dots (67)$$

Bezeichnet man nun die Werthe von λ , μ und ν , welche in der Annahme berechnet werden, dass $\eta = 0$ ist, durch λ_0 , μ_0 und ν_0 , so erhält man zufolge des *Taylor'schen* Theoremes, wenn die zweiten und höheren Potenzen von η vernachlässigt werden:

$$\left. \begin{aligned} \log \lambda &= \log \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \eta \\ \log \mu &= \log \mu_0 + \mu_1 \cdot \eta \\ \log \nu &= \log \nu_0 + \nu_1 \cdot \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 + e^2 \cos^2 \varphi)}} = \frac{\cos M}{\sqrt{(1-e^2)}} \dots\dots\dots (78)$$

und folglich auch:

$$\lambda = \frac{1-e^2}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} = \cos M \sqrt{(1-e^2)} \dots\dots\dots (79)$$

Setzt man nun in diesen Ausdrücken:

$$\omega = \frac{1}{300} \text{ oder } e^2 = \frac{599}{90000}$$

wo also λ , μ , und ν , die Differenzialquotienten erster Ordnung von $\log \lambda$, $\log \mu$ und $\log \nu$ nach η sein werden, wenn man nach vollbrachter Differenziation $\eta = 0$ oder $\omega = \frac{1}{300}$ setzt.

Nun ist aber nach (65):

$$\log \mu = -\frac{1}{2} \log (1-e^2 \sin^2 \varphi) \dots\dots\dots (69)$$

und daher, wie man leicht einsieht, auch:

$$\frac{d \log \mu}{d \eta} = M \mu^2 \sin^2 \varphi \cdot \frac{d e}{d \eta} \dots\dots\dots (70)$$

wo M den Modulus des *Brigg'schen* Logarithmen-Systems bedeutet, und da zufolge der Gleichung (66):

$$\frac{d e}{d \eta} = \frac{1-\omega}{e} \cdot \frac{d \omega}{d \eta} = -\frac{\omega^2 (1-\omega)}{e} \dots\dots\dots (71)$$

so wird auch endlich:

$$\frac{d \log \mu}{d \eta} = -M \omega^2 (1-\omega) \cdot \mu^2 \sin^2 \varphi \dots\dots\dots (72)$$

Ebenso folgt nun aus (65), dass:

$$\frac{d \log \nu}{d \eta} = -\frac{2 M e}{1-e^2} \cdot \frac{d e}{d \eta} = +\frac{2 M \omega^2}{1-\omega} \dots\dots (73)$$

und da ferner $\lambda = \mu \cdot \nu$, so wird auch:

$$\frac{d \log \lambda}{d \eta} = \frac{d \log \mu}{d \eta} + \frac{d \log \nu}{d \eta} \dots\dots\dots (74)$$

mithin endlich, zufolge der Gleichungen (72) und (73):

$$\frac{d \log \lambda}{d \eta} = M \omega^2 \left(\frac{2}{1-\omega} - (1-\omega) \mu^2 \sin^2 \varphi \right) \dots\dots (75)$$

Setzt man nun in den drei Ausdrücken unter (72), (73) und (75), $\omega = \frac{1}{300}$, so wird man also λ , μ , und ν , erhalten, und zwar findet man mittelst einer leichten numerischen Rechnung, da $\log M = 9,6377843$ ist, dass:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= +0.0000096.8327 - 0.0000048.0941 \mu_0^2 \sin^2 \varphi \\ \mu_1 &= -0.0000048.0941 \mu_0^2 \sin^2 \varphi \\ \nu_1 &= +0.0000096.8327 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

Um nun λ_0 und μ_0 bequem berechnen zu können, kann man einen Hülfswinkel M einführen, der so beschaffen ist, dass:

$$\operatorname{tg} M = \frac{e}{\sqrt{(1-e^2)}} \cdot \cos \varphi \dots\dots\dots (77)$$

denn alsdann wird:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2 + e^2 \cos^2 \varphi)}} = \frac{\cos M}{\sqrt{(1-e^2)}} \dots\dots\dots (78)$$

so wird man die entsprechenden Werthe von λ_0 und μ_0 leicht durch folgende logarithmische Ausdrücke finden können, nämlich:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} M &= 8,9130422 + \log \cos \varphi \\ \log \lambda_0 &= 9,9985499 + \log \cos M \\ \log \mu_0 &= 0,0014501 + \log \cos M \end{aligned}$$

und da endlich $\nu = 1 - \epsilon^2$, so wird auch:

$$\log \nu_0 = 9,9970999 - 10.$$

Nach diesen Ausdrücken wurden nun die Werthe berechnet, welche man in der Tafel I. zusammengestellt findet. Das

Argument derselben ist die geographische Breite $= \phi$, und es braucht nur bemerkt zu werden, dass λ , μ , und ν , als in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt, angegeben worden sind. Einige Beispiele werden den Gebrauch dieser Tafeln hinlänglich erläutern.

1. *Beispiel.* Man verlangt die Werthe λ , μ und ν für die geographische Breite 47° und bei einer Erdabplattung $= \frac{1}{282}$; hier wird also $\eta = +2$ und man findet aus der Tafel I.:

$$\begin{array}{rcl} \log \lambda_0 = 9,9978742 & \log \mu_0 = 0,0007743 & \log \nu_0 = 9,9970999 \\ \lambda, \eta = +71,02 \times 2 = +142 & \mu, \eta = -25,82 \times 2 = -52 & \nu, \eta = +96,83 \times 2 = +194 \\ \hline \log \lambda = 9,9978884 & \log \mu = 0,0007691 & \log \nu = 9,9971193 \end{array}$$

2. *Beispiel.* Es sei die geographische Breite $= 59^\circ$ und die Erdabplattung $= \frac{1}{245}$, so wird alsdann $\eta = -1$, und man erhält:

$$\begin{array}{rcl} \log \lambda_0 = 9,9981644 & \log \mu_0 = 0,0010645 & \log \nu_0 = 9,9970999 \\ \lambda, \eta = -61 & \mu, \eta = +36 & \nu, \eta = -97 \\ \hline \log \lambda = 9,9981583 & \log \mu = 0,0010681 & \log \nu = 9,9970902 \end{array}$$

(Beschluss folgt).

Elemente der Egeria, von Herrn Professor J. S. Hubbard.

I have just computed a new orbit for Egeria, from the following normals:

M. T. Greenw.	α .	δ .	Obs.
1850 Nov. 12,0	27°56' 27"4	+ 8°16' 19"1	6
1851 Febr. 3,0	30 7 42,3	+16 40 1,5	7
April 27,0	63 14 46,1	+28 36 12,8	4

The elements are:

M	299° 2' 4"05	1851 Jan. 1,0 M. T. Greenw.
Ω	43 17 9,90	m. equin. 1851,0
π	119 4 56,37	
i	16 33 2,00	
ϕ	4 51 45,508	
μ	14 18,3060	

For the middle observation, this orbit gives:

C. — O.

$$d\lambda = +0"15 \quad d\beta = +0"05$$

The comparisons with the whole series of observations in 1850 and 1851 will shortly appear in the *Astronomical Journal*; but I may remark here that the Neapolitan observations (*Astr. Nachr.* Nr. 742 and 749) appear to require a constant correction of about $-36''$ in α . and $-16''$ in δ . The cause of which I am unable to discover in my own computations. An error in the time would give opposite signs to the two corrections; but as the same stars of comparison, (*P. II.* 6 and 16), appear to have been employed through the whole series, an error in their assumed places is very probable.

I hope to find leisure to continue from year to year the computation of this planet's motion.

Observatory Washington, Oct. 18, 1851.

J. S. Hubbard.

Inhalt.

- (Zu Nr. 783). Lauf des Cometen von Pons im Jahre 1852, p. 245. —
 Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss 1851 Juli 28. auf der Festung Carlsten p. 249. —
 Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss 1851 Juli 28. in Hestra, im mittleren Schweden p. 251. —
 Ueber die nahe Zusammenkunft der drei Planeten Merkur, Venus und Mars am 7. und 8. Febr. 1855, p. 253. —
 Elemente und Ephemeride des von Herrn Brorsen 1851 October 22. entdeckten Cometen p. 257. —
 Entdeckung von 2 neuen Uranus-Trabanten, von Herrn W. Lassell p. 259. —
 Anzeige p. 259. —
 (Zu Nr. 784). Bahnbestimmung der Parthenope p. 261.
 Beobachtungen am Fraunhofer'schen Equatoreal der Durhamster Sternwarte p. 267. —
 Beobachtungen auf der Liverpooller Sternwarte p. 271. —
 Beobachtung des von Herrn Brorsen 1851 October 22. entdeckten Cometen p. 275. —
 (Zu Nr. 785). Ueber die strenge Berechnung des geocentrischen Ortes eines Gestirnes, wenn der scheinbare mit Parallaxe afficirte Ort desselben gegeben ist, von W. C. Goetze p. 277. —
 Elemente der Egeria, von Herrn Prof. J. S. Hubbard p. 291. —