

Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen.

Dritter Theil.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

Der vorliegende dritte (und letzte) Theil*) dieser Untersuchungen hat zum Ziele die Entwicklung der Beziehungen zwischen dem Problem der *Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen* und dem der *27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung*. Dass beide Probleme isomorphe Gruppen besitzen, ist aus den Untersuchungen des Herrn C. Jordan**) bekannt; die effective Reduction des einen Problems auf das andere ist von Herrn F. Klein***) skizzirt worden. Es blieb noch übrig, die dort gegebenen Andeutungen wenigstens soweit mit expliciten Formeln durchzuführen, dass der Zusammenhang beider Probleme sich unmittelbar erkennen liess. In der That führte die Weiterführung der von Herrn Witting†) begonnenen geometrischen Untersuchung der „Configuration im Raume der Z “ mit *liniengeometrischen* Mitteln zu einer einfachen Eigenschaft dieser Configuration, welche die gesuchte Beziehung sofort ergiebt.

Demzufolge gliedert sich dieser Theil wie folgt: Der XIII. Abschnitt enthält einige Nachträge zum VIII. Abschnitt von (II); der

*) Die im 36., bezw. 38. Bd. dieser Annalen erschienenen Theile werden im folgenden kurz mit I. bezw. II citirt; der erste wird übrigens nur selten zu benutzen sein.

**) Comptes rendus de l'acad. des sciences, 1869; vgl. auch traité des substitutions p. 316 ff., p. 365 ff.

***) Journal de Liouville sér. 4, t. 4, p. 169 ff. (1887). Von den dort angekündigten Untersuchungen des Hrn. Maschke ist der zur Ausführung gelangte Theil im 33. Bd. dieser Annalen erschienen; im übrigen tritt an deren Stelle die vorliegende Arbeit. Die dort ebenfalls angekündigte Veröffentlichung des Hrn. Cole ist bis jetzt unterblieben.

†) Ueber eine Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen führt, Diss. Gött. 1887; vgl. auch dieser Annalen Bd. 29.

XIV. vervollständigt die genannte Untersuchung von Witting durch Einführung der Liniencoordinaten; der XV. bringt die von Klein a. a. O. postulirten Ausdrücke der Invarianten der „Gruppe der Z “; der XVI. handelt von den Invarianten der „Gruppe der a_{ik} “; der XVII. berührt algebraische Fragen, der XVIII. endlich schliesst die Untersuchung ab mit der Ausführung der in Aussicht gestellten Reduction des Problems der 27 Geraden auf das Problem der Z .

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 1 der Göttinger Nachrichten v. J. 1892 erschienen.

XIII. Abschnitt.

Die hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ von ungerader Charakteristik.

§ 59.

Von der Vermehrung der Argumente der $X_{\alpha\beta}$ um $(2n)^{\text{tel}}$ Perioden.

In II, § 33, Gleichg. (19) ist bereits der Hauptsache nach angegeben, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn man ihre Argumente um $(2n)^{\text{te}}$ Theile der Perioden ω vermehrt; für die folgenden Entwicklungen bedürfen wir noch einer näheren Ausführung jener Angaben. Zu einer solchen gelangen wir am bequemsten, wenn wir den Ausdruck der $X_{\alpha\beta}$ durch Thetafunctionen benützen. Die Charakteristik der vorgelegten $X_{\alpha\beta}$ sei:

$$(1) \quad c = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix};$$

die zuzufügenden Periodenbruchtheile seien bezeichnet mit:

$$(2) \quad {}_{2n}^1 \Omega_i = {}_{2n}^1 (h_1 \omega_{i1} + h_2 \omega_{i2} + n h_3 \omega_{i3} + n h_4 \omega_{i4}), \quad (i = 1, 2)$$

indem unter den h beliebige ganze Zahlen verstanden werden. (Dass dabei die Factoren von ω_{i3} und ω_{i4} als durch n theilbar vorausgesetzt sind, thut der Allgemeinheit keinen Eintrag, da die Vermehrung der Argumente um Perioden- n^{tel} bereits in II, § 33, Gleichg. (16) erledigt ist). Die bekannte Formel für die Vermehrung der Argumente der Thetafunctionen um halbe Perioden*) giebt dann zunächst:

$$(3) \quad \vartheta_c(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 n\tau_{11} + \frac{1}{2}h_1 n\tau_{12}; nv_2 + \dots; n\tau_{ik}) = \\ = e^{-\pi i \varphi} \vartheta_c(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}; nv_2 + \dots; n\tau_{ik}),$$

dabei ist die neue Charakteristik:

*) Vgl. z. B. Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung (Leipzig 1886), § 3, Gleichg. 20.

$$(4) \quad c' = \begin{vmatrix} g_1 + h_3 & g_2 + h_4 \\ g_3 + h_1 & g_4 + h_2 \end{vmatrix}$$

und die im Exponenten stehende lineare Function φ der Argumente lautet:

$$(5) \quad \varphi = h_3(nv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}) + h_4(nv_2 + \alpha\tau_{21} + \beta\tau_{22}) \\ + \frac{n}{4}(h_3^2\tau_{11} + 2h_3h_4\tau_{12} + h_4^2\tau_{22}) + \frac{1}{2}[h_3(g_3 + h_1) + h_4(g_4 + h_2)].$$

Die Umformung der für die vermehrten Argumente gebildeten Function G_2 bedarf einiger Rechnung. Wir haben zunächst (vgl. II, § 32, Gleichg. (19)–(21)):

$$(6) \quad -nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) \\ + \sum_{i=1}^2 \left(u_i + \frac{1}{4n}\Omega_i\right) \left[\frac{1}{2}\eta_{i1}(h_1 + nh_3\tau_{11} + nh_4\tau_{12}) + \frac{1}{2}\eta_{i2}(h_2 + nh_3\tau_{21} + nh_4\tau_{22})\right].$$

Zur Vereinfachung der rechten Seite bedienen wir uns der Gleichungen (a. a. O. Gleichg. (22)):

$$(7) \quad \begin{cases} \eta_{11}\tau_{11} + \eta_{12}\tau_{21} = \eta_{13} + \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{22}, & \eta_{21}\tau_{11} + \eta_{22}\tau_{21} = \eta_{23} - \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{12}, \\ \eta_{11}\tau_{12} + \eta_{12}\tau_{22} = \eta_{14} - \frac{2\pi i}{p_{12}}\omega_{21}, & \eta_{21}\tau_{12} + \eta_{22}\tau_{22} = \eta_{24} + \frac{2\pi i}{p_{11}}\omega_{11}; \end{cases}$$

damit erhalten wir zunächst:

$$(8) \quad -nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) + \frac{1}{2}H_1\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + \frac{1}{2}H_2\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right) \\ + \frac{n\pi i}{p_{12}}\left[(h_3\omega_{22} - h_4\omega_{21})\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + (-h_3\omega_{12} + h_4\omega_{11})\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right)\right].$$

Die H sind dabei ebenso aus den η gebildet, wie die Ω aus den ω . Um das noch übersichtlicher schreiben zu können, setzen wir zur Abkürzung:

$$(9) \quad \Phi(u_i) = \frac{1}{2}H_1\left(u_1 + \frac{1}{4n}\Omega_1\right) + \frac{1}{2}H_2\left(u_2 + \frac{1}{4n}\Omega_2\right)$$

und führen in die zweite Zeile die v und die τ ein auf Grund der Formeln:

$$(10) \quad \omega_{22}u_1 - \omega_{12}u_2 = p_{12}v_1, \quad -\omega_{21}u_1 + \omega_{11}u_2 = p_{12}v_2;$$

$$(11) \quad (h_3\omega_{22} - h_4\omega_{21})\Omega_1 + (-h_3\omega_{12} + h_4\omega_{11})\Omega_2 = \\ (h_1h_3 + h_2h_4)p_{12} + n(h_3^2p_{32} + h_3h_4(p_{13} + p_{12}) + h_4^2p_{11});$$

wir erhalten so:

$$(12) \quad -nG_2\left(u_i + \frac{1}{2n}\Omega_i\right) = -nG_2(u_i) + \Phi(u_i) \\ + n\pi i(h_3v_1 + h_4v_2) + \frac{\pi i}{4}(h_1h_3 + h_2h_4 + nh_3^2\tau_{11} + 2nh_3h_4\tau_{12} + h_4^2\tau_{22}).$$

Ausserdem ist noch zu bilden:

$$(13) \quad 2\pi i \left[\alpha \left(v_1 + \frac{1}{2n} h_1 + \frac{1}{2} (h_3 \tau_{11} + h_4 \tau_{12}) \right) + \beta \left(v_2 + \frac{1}{2n} h_2 + \frac{1}{2} (h_3 \tau_{21} + h_4 \tau_{22}) \right) \right] \\ = 2\pi i (\alpha v_1 + \beta v_2) + \frac{\pi i}{n} (h_1 \alpha + h_2 \beta) + \pi i [h_3 \alpha \tau_{11} + (h_3 \beta + h_4 \alpha) \tau_{12} + h_4 \beta \tau_{22}],$$

sowie endlich (II, § 33, Gl. (3); § 34, Gl. (13)):

$$(14) \quad \frac{C_{\alpha\beta}^{(c)}}{\sqrt[n]{D^{(c)}}} = e^{-\frac{\pi i}{n} (h_1 \alpha + h_2 \beta)} \cdot \left(\frac{D^{(c')}}{D^{(c)}} \right)^{\frac{n}{8}} \cdot \frac{C_{\alpha\beta}^{(c')}}{\sqrt[n]{D^{(c')}}}.$$

Vereinigung von (3), (12), (13), (14) giebt dann mit Rücksicht auf die in II, § 32 Gleichg. (24), § 33 Gleichg. (3) und § 34 Gleichg. (14) enthaltene Definition der $X_{\alpha\beta}$ die gesuchte Formel in folgender Gestalt:

$$(15) \quad \sqrt[n]{D^{(c)}} X_{\alpha\beta}^{(c)} \left(u_i + \frac{\Omega_i}{2n} \right) = \\ = \sqrt[n]{D^{(c')}} e^{-\frac{\pi i}{4} (h_1 h_3 + h_2 h_4) - \frac{\pi i}{2} (g_3 h_1 + g_4 h_2)} e^{\Phi(u_i)} X_{\alpha\beta}^{(c')} (u_i).$$

An derselben ist besonders zu beachten, dass die Function Φ nach ihrer Definition (9) unabhängig ist von der Auswahl des zu Grunde gelegten Periodensystems, sowie von den Indices α, β , die 8. Einheitswurzel wenigstens von den letzteren.

§ 60.

Von der Unabhängigkeit der „Gruppe der $X_{\alpha\beta}$ “ von der Charakteristik.

In II § 35 ist bereits der Satz erwähnt:

Die zu verschiedenen Charakteristiken gehörenden Gruppen linearer Transformationen der $X_{\alpha\beta}$ sind identisch.

Der dort angedeutete allgemeine Beweis desselben gestaltet sich nunmehr auf Grund der Formel (15) des § 59 folgendermassen: Es sei S eine Periodentransformation, welche sowohl die Charakteristik c , als die Charakteristik c' in sich überführt. Dann gilt zunächst nach II, § 34 Gleichg. (2):

$$(1) \quad X_{\alpha\beta}^{(c)}(u; \omega) = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \sum_{\delta=1}^{n-1} c_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma\delta}^{(c)}(u; \omega).$$

In dieser Formel ersetzen wir nunmehr u_i durch $u_i + \frac{\Omega_i}{2n}$, indem wir unter Ω_i eine Periode verstehen, welche ausgedrückt durch die alten primitiven Perioden ω gleich ist:

$$n(h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 + h_3 \omega_3 + h_4 \omega_4),$$

dagegen ausgedrückt durch die neuen ω' gleich:

$$n(h_1'\omega_1' + h_2'\omega_2' + h_3'\omega_3' + h_4'\omega_4').$$

Wenden wir dann beiderseits die genannte Formel (15) des § 59 an, so folgt:

$$(2) \quad X_{\alpha\beta}^{(c)}(u; \omega') = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \sum_{\delta=1}^{n-1} c'_{\alpha\beta\gamma\delta} X_{\gamma\delta}^{(c)}(u; \omega);$$

dabei ist:

$$(3) \quad c'_{\alpha\beta\gamma\delta} = j c_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

und j ist eine von den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ unabhängige 8. Einheitswurzel, nämlich:

$$(4) \quad j = e^{\frac{n\pi i}{4}(h_1'h_3' + h_2'h_4' - h_1h_3 - h_2h_4) + \frac{\pi i}{2}(g_1(h_1' - h_3) + g_4(h_4' - h_2))} \cdot \left[\sqrt[8]{\frac{D^{(c)}}{D^{(c)}}} \right],$$

wo die letzte Klammer diejenige 8. Einheitswurzel bedeutet, welche bei S zu der in der Klammer stehenden Grösse zutritt.

Von dieser Einheitswurzel j können wir nun folgendermassen indirect schliessen, dass sie gleich 1 sein muss: In II, p. 183 Fussn. ist bereits darauf aufmerksam gemacht, dass man a priori erkennen kann, die Determinante der $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ müsse gleich 1 sein; von den $c'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gilt genau das Gleiche. Die Determinante der letzteren unterscheidet sich aber wegen (3) von der der ersteren nur um den Factor j^n . Da wir nun (vgl. II, p. 168 oben) uns auf den Fall eines ungeraden n beschränkt haben, so folgt $j = 1$; die Coefficienten in (2) und die in (1) sind also dieselben, w. z. b. w.*)

XIV. Abschnitt.

Die endliche Gruppe von 51840 linearen Substitutionen im quaternären Gebiet, welche durch die Theorie der hyperelliptischen Functionen $Z_{\alpha\beta}$ geliefert wird.

§ 61.

Zusammenstellung der erzeugenden Substitutionen.

Für $n = 3$ erhalten wir (vgl. II, § 38) $\frac{n^2-1}{2} = 4$ Functionen $Z_{\alpha\beta}$, die wir zur Ersparung der Doppelindices folgendermassen schreiben wollen: **)

*) Das Resultat des Textes muss sich natürlich auch aus II, § 31, Gleichg. (6) durch Rechnung ableiten lassen; doch scheint das umständlich zu sein. — Uebrigens involviret die Ableitung des Textes eine Formel für die bei linearer Transformation der Thetaquotienten auftretende 8. Einheitswurzel, deren Uebereinstimmung mit der sonst, z. B. bei Krause a. a. O. p. 91, 92 gegebenen noch nachzuweisen sein würde.

**) Witting (Diss. p. 26) hat bezw. $Z_2, Z_1, -Z_4$ statt unserem Z_1, Z_2, Z_4 .

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & Z_1 = Z_{10} = -Z_{20} = X_{10} - X_{20}, \\
 & Z_2 = Z_{01} = -Z_{02} = X_{01} - X_{02}, \\
 & Z_3 = Z_{11} = -Z_{22} = X_{11} - X_{22}, \\
 & Z_4 = Z_{21} = -Z_{12} = X_{21} - X_{12}.
 \end{aligned}$$

Aus der Tabelle in II, § 39, (3) ergibt sich für diese Z die folgende: *)

	B	C	D	S_2
$Z'_1 =$	Z_1	Z_1	$-Z_2$	$\varepsilon^2 Z_1$
$Z'_2 =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + Z_3 + Z_4)$	Z_4	$-Z_1$	Z_2
$Z'_3 =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon Z_3 + \varepsilon^2 Z_4)$	Z_2	$-Z_3$	$\varepsilon^2 Z_3$
$Z'_4 =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon^2 Z_3 + \varepsilon Z_4)$	Z_3	$+Z_4$	$\varepsilon^2 Z_4$

Diese 4 Operationen erzeugen*) eine Gruppe von 51840 linearen Substitutionen; dieselbe besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe, bestehend aus der Identität und der Operation $(B^2 D)^2$, welche die Vorzeichen aller vier Z umkehrt. Die zugehörige Collineationsgruppe dagegen ist einfach.**)

§ 62.

Die Resultate von Witting.

Die Untersuchung der Untergruppen unserer „Gruppe der Z “ ist von Hrn. Witting in seiner in der Einleitung citirten Dissertation begonnen worden; seine Resultate sollen hier kurz zusammengestellt werden unter jedesmaligem Hinweis auf die entsprechenden Entwicklungen von (II). Wir fügen auch gleich die aus der Abhandlung von Hrn. Maschke im 33. Bd. dieser Ann. zu entnehmenden Angaben über die Invarianten der einzelnen Untergruppen bei.

I. Aus C, D, S_2 entsteht (II, § 40) eine Untergruppe G_0 von 1296 linearen Substitutionen der Z , welche sich zusammensetzt aus den 24 Vertauschungen der Z , von denen jede mit zwei verschiedenen bestimmten Vorzeichenänderungen der Z zu verbinden ist***), und aus den 27 Operationen der Form:

*) Von den 6 erzeugenden Substitutionen des Hrn. Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 321) ist sein B , wie er p. 331 selbst angiebt, ausdrückbar durch sein A und F , die zusammen unserem C und D entsprechen; sein E ist unser B ; sein C und sein D ergeben sich, indem man unser S_2 mit denjenigen Operationen verbindet, die durch Vertauschung der Z (also durch Transformation vermöge unseres C und D) aus ihm hervorgehen.

**) Vgl. II, § 38 und 39, sowie die dort citirten Stellen bei Hrn. C. Jordan.

***) Um zu bestimmen, welche Z in jedem Falle im Vorzeichen zu ändern sind, benutzt man am bequemsten eine der Invarianten (23a) bei Maschke.

$$(1) \quad Z_1' = \varepsilon^x Z_1, \quad Z_2' = \varepsilon^\lambda Z_2, \quad Z_3' = \varepsilon^\mu Z_3, \quad Z_4' = \varepsilon^\nu Z_4,$$

welche der Bedingung:

$$(2) \quad x + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod{3}$$

genügen. Die 4 Ebenen:

$$(3) \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_3 = 0, \quad Z_4 = 0$$

bilden ein *Polartetraeder* der durch unsere Gruppe G bestimmten Configuration, welches bei allen Operationen von G in sich übergeführt wird. Solcher Polartetraeder enthält die Configuration 40 (Witting p. 43). Die *Invarianten* dieser Untergruppe sind unter den von Maschke a. a. O. § 6 aufgezählten enthalten; sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Z in ihnen nur im Product $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ oder in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten vorkommen.

II. Aus B, C, S_2 entsteht (II, § 41) eine *Untergruppe H* von ebenfalls 1296 *Substitutionen*, welche Z_1 bis auf zutretende 6^{te} Einheitswurzeln invariant lässt, Z_2, Z_3, Z_4 nach einer „ternären Hesse'schen Gruppe“ umsetzt. Den Punkt $Z_2 = 0, Z_3 = 0, Z_4 = 0$ bezeichnet Witting (p. 41. 42) als einen *Pol* der Configuration, die Ebene $Z_1 = 0$ als die zugehörige *Polarebene*. Die Invarianten dieser Untergruppe hat Maschke (§ 3—5) angegeben.

III. Aus B, D, S_2 entsteht (II, § 42) eine *Untergruppe K* von 1152 *Substitutionen*. Dieselbe stellt sich übersichtlich dar, wenn wir neue Coordinaten ξ durch die Gleichungen:

$$(4) \quad \xi_1 = Z_1, \quad \xi_2 = Z_2, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}(Z_3 + Z_4), \quad \xi_4 = \frac{1}{2}(Z_3 - Z_4)$$

eingeführen; wir erhalten nämlich dann folgende Tabelle:

	B	D	S_2
$\xi_1' =$	ξ_1	$-\xi_2$	$\varepsilon^2 \xi_1$
$\xi_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\xi_2 + 2\xi_3)$	$-\xi_1$	ξ_2
$\xi_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\xi_2 - \xi_3)$	$-\xi_4$	$\varepsilon^2 \xi_3$
$\xi_4' =$	ξ_4	$-\xi_3$	$\varepsilon^2 \xi_4$

Bei B und S_2 bleiben alle *Punkte* der Geraden $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ und alle *Ebenen* der Geraden $\xi_1 = 0, \xi_4 = 0$ invariant (Witting p. 37), während die Ebenen der ersteren und damit die Punkte der letzteren sich je nach einer Tetraedergruppe binär substituieren; bei D werden diese beiden Geraden unter einander vertauscht. Man erhält so als das einfachste geometrische Gebilde, welches bei dieser Untergruppe invariant bleibt, ein *Geradenpaar*; solcher Geradenpaare enthält die

Configuration 45. (Witting p. 39). Was *Invarianten* dieser Untergruppe K betrifft, so haben dieselben die Gestalt:

$$\Phi\Psi' + \Phi'\Psi,$$

wenn mit Φ, Ψ Invarianten der Tetraedergruppe in ξ_1, ξ_4 , mit Φ', Ψ' bzw. dieselben Formen in ξ_2, ξ_3 bezeichnet werden.

§ 63.

Einführung der Liniencoordinaten; die 45 Strahlencongruenzen.

Für die weitere Untersuchung unserer Configuration werden wir mit Vorthail uns des Hilfsmittels der *Liniencoordinaten* bedienen; darauf weist schon das Auftreten der zuletzt erwähnten Geradenpaare hin. Wir verstehen demgemäss unter \bar{Z} zu den Z cogrediente Veränderliche und bilden die 6 zweigliedrigen Determinanten:

$$(1) \quad a_{ix} = Z_i \bar{Z}_x - \bar{Z}_i Z_x,$$

die Coordinaten der geraden Verbindungslinie der Punkte Z und \bar{Z} . Dieselben erleiden, wenn auf die Z und auf die \bar{Z} gleichzeitig die erzeugenden Substitutionen des § 61 angewendet werden, die aus folgender Tabelle hervorgehenden linearen Umsetzungen:

	B	C	D	S_2
$a'_{12} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{12} + a_{13} + a_{14})$	a_{14}	$-a_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12}$
$a'_{13} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14})$	a_{12}	a_{23}	εa_{13}
(2) $a'_{14} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14})$	a_{13}	a_{42}	εa_{14}
$a'_{34} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{34} + a_{42} + a_{23})$	a_{23}	$-a_{34}$	εa_{34}
$a'_{42} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} + \varepsilon a_{23})$	a_{34}	a_{14}	$\varepsilon^2 a_{42}$
$a'_{23} =$	$\frac{i}{\sqrt{3}} (a_{34} + \varepsilon a_{42} + \varepsilon^2 a_{23})$	a_{42}	a_{13}	$\varepsilon^2 a_{23}$

Dieselben erzeugen eine Gruppe von nur 25920 linearen Substitutionen der a_{ix} , indem $(B^2 D)^2 = (D C^2)^4$ sich auf die Identität reducirt. Bei allen diesen Operationen bleibt selbstverständlich die quadratische Form:

$$(3) \quad A = a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}$$

absolut invariant.

Die Geraden $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ und $\xi_1 = 0$, $\xi_4 = 0$ des vorigen Paragraphen haben bzw. die Liniencoordinaten $(0, 0, 0, 0, -1, 1)$

und $(0, 1, -1, 0, 0, 0)$; die Gleichungen der durch sie bestimmten *Strahlencongruenz* sind also:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{13} - a_{14} = 0, \\ a_{42} - a_{23} = 0. \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungenpaare werden durch die Substitutionen der Untergruppe G_0 (§ 62, I) zunächst die folgenden 18 erhalten:

$$(5) \quad \begin{cases} \begin{cases} a_{13} - \varepsilon^\lambda a_{14} = 0, \\ a_{42} - \varepsilon^{-\lambda} a_{23} = 0; \end{cases} & \begin{cases} a_{12} + \varepsilon^\lambda a_{23} = 0, \\ a_{34} + \varepsilon^{-\lambda} a_{14} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{14} - \varepsilon^\lambda a_{12} = 0, \\ a_{23} - \varepsilon^{-\lambda} a_{34} = 0; \end{cases} & \begin{cases} a_{13} + \varepsilon^\lambda a_{34} = 0, \\ a_{42} + \varepsilon^{-\lambda} a_{12} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{12} - \varepsilon^\lambda a_{13} = 0, \\ a_{34} - \varepsilon^{-\lambda} a_{42} = 0; \end{cases} & \begin{cases} a_{14} + \varepsilon^\lambda a_{42} = 0, \\ a_{23} + \varepsilon^{-\lambda} a_{13} = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (\lambda = 0, 1, 2)$$

sodann aber durch B und seine Transformirten die folgenden 27:

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon^{\kappa+\lambda} a_{12} + \varepsilon^{\kappa+\mu} a_{13} + \varepsilon^{\kappa+\nu} a_{14} - \varepsilon^{\mu+\nu} a_{34} - \varepsilon^{\nu+\lambda+1} a_{12} - \varepsilon^{\lambda+\mu+2} a_{23} = 0, \\ \varepsilon^{\kappa+\lambda} a_{12} + \varepsilon^{\kappa+\mu+2} a_{13} + \varepsilon^{\kappa+\nu+1} a_{14} + \varepsilon^{\mu+\nu} a_{34} - \varepsilon^{\nu+\lambda} a_{42} - \varepsilon^{\lambda+\mu} a_{23} = 0. \end{cases}$$

$(\kappa, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2; \quad \kappa + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod{3}).$

Damit haben wir die den 45 Geradenpaaren (§ 62 a. E.) entsprechenden Strahlencongruenzen.

§ 64.

Die Untergruppe L ; die 27 linearen Complexe I. Art.

Jede von den Geraden des vorigen Paragraphen schneidet 32 von den übrigen Geraden; so z. B. schneidet):*

$$(1) \quad a_{13} - a_{14} = 0$$

von den 35 übrigen Geraden (§ 63, (5)) die 14 folgenden:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} a_{13} - \varepsilon a_{14} &= 0, \\ a_{13} - \varepsilon^2 a_{14} &= 0, \\ a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} &= 0, \\ a_{12} - \varepsilon^\lambda a_{13} &= 0, \\ a_{34} + \varepsilon^{-\lambda} a_{14} &= 0, \\ a_{13} + \varepsilon^{-\lambda} a_{34} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\lambda = 0, 1, 2)$$

ferner von den 27 Geraden der ersten Zeile in § 63, (6) alle diejenigen 9, für welche:

$$(3) \quad \nu \equiv \mu + 1 \pmod{3},$$

*) Der Kürze halber bezeichnen wir in diesem Paragraphen eine Gerade durch die Gleichung desjenigen linearen Complexes, den die sie schneidenden Geraden bilden.

und von den 27 der zweiten Zeile diejenigen 9, für welche

$$(4) \quad \nu \equiv \mu \pmod{3}$$

ist. Die andere Gerade desselben Paares:

$$(5) \quad a_{42} - a_{23} = 0$$

schneidet die conjugirten zu diesen 32 Geraden. So finden wir: *Jeder unserer 45 Congruenzen gegenüber zerfallen die 44 anderen in 32, von deren Axen jede eine Axe der ersten trifft, und in 12, deren Axen die der ersten nicht treffen.* (Witting p. 46).

Betrachten wir nunmehr zwei unserer Congruenzen, deren Axen sich nicht schneiden, z. B. die beiden folgenden:

$$(6) \quad \begin{cases} a_{13} - a_{14} = 0, \\ a_{42} - a_{23} = 0 \end{cases}$$

und:

$$(7) \quad \begin{cases} a_{14} + a_{42} = 0, \\ a_{23} + a_{13} = 0. \end{cases}$$

Man sieht, dass dieselben *beide dem Complex:*

$$(8) \quad a_{13} - a_{14} - a_{42} + a_{23} = 0$$

angehören. Dieser Complex enthält keine der übrigen in § 63, (5) enthaltenen Congruenzen; dagegen enthält er von den in § 63, (6) enthaltenen diejenigen, welche zu solchen Werthen von $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ gehören, dass die Gleichung:

$$(9) \quad \varepsilon^{\kappa+\mu}(1-\varepsilon^2)a_{13} + \varepsilon^{\kappa+\nu}(1-\varepsilon)a_{14} - \varepsilon^{\nu+\lambda}(\varepsilon-1)a_{42} - \varepsilon^{\lambda+\mu}(\varepsilon^2-1)a_{23} = 0$$

denselben Complex wie die Gleichg. (8) darstellt. Das verlangt aber nur:

$$(10) \quad \kappa \equiv \lambda, \quad \mu \equiv \nu + 1, \pmod{3};$$

diese beiden Congruenzen zusammen mit § 62, (2) lassen 3 Lösungen zu, und man findet so, dass der Complex (8) von unseren 45 Congruenzen ausser (6) und (7) noch die 3 folgenden enthält:

$$(11) \quad \begin{cases} a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - a_{34} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - \varepsilon a_{34} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ \varepsilon^2 a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0; \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{34} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon a_{23} = 0, \\ \varepsilon a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon^2 a_{34} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} = 0. \end{cases}$$

Von den 10 Axen der Congruenzen (6), (7), (11), (12), (13) schneidet keine irgend eine der andern; dagegen wird jede der 80 übrigen Axen von je 4 aus jenen 10 geschnitten. Es bilden also jene 10 Axen eine solche „*Fünf von Geradenpaaren*“ wie sie Herr Witting (Diss. p. 47)

definiert; und wir haben als erstes Resultat der Einführung von Linien-coordinaten den Satz:

Je fünf Congruenzen, deren Axen eine solche Fünf bilden, gehören einem und demselben linearen Complex an.

Solcher Complexe enthält unsere Configuration siebenundzwanzig; die Gleichungen derselben sind:

$$(14) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon^\lambda a_{12} - \varepsilon^\mu a_{13} - \varepsilon^{-\lambda} a_{34} + \varepsilon^{-\mu} a_{42} &= 0, \\ \varepsilon^\lambda a_{13} - \varepsilon^\mu a_{14} - \varepsilon^{-\lambda} a_{42} + \varepsilon^{-\mu} a_{23} &= 0, \\ \varepsilon^\lambda a_{14} - \varepsilon^\mu a_{12} - \varepsilon^{-\lambda} a_{23} + \varepsilon^{-\mu} a_{34} &= 0. \end{aligned} \right\} (\lambda, \mu = 0, 1, 2).$$

Dabei ist zu beachten, dass die linken Seiten dieser Gleichungen in dem Sinne *absolut normirt* sind, dass sie bei den Substitutionen der Gruppe G ohne zutretende Factoren unter sich vertauscht werden.

Die 27 Complexe (14) mögen als „*Complexe I. Art*“ von den in § 65 auftretenden Complexen „*II. Art*“ unterschieden werden.

Jeder dieser Complexe wird in sich übergeführt von einer Untergruppe unserer Gruppe G , welche in den Z geschrieben 1920, in den a_{ik} 960 Operationen enthält. Diejenige Untergruppe L , welche zu dem zuerst betrachteten Complex (8) gehört, wird erzeugt (vgl. II, § 43) von B , D und den beiden Operationen:

$$(15) \quad E = (DS_2^2)^2 : Z_1' = \varepsilon Z_1, \quad Z_2' = \varepsilon Z_2, \quad Z_3' = \varepsilon^2 Z_3, \quad Z_4' = \varepsilon^2 Z_4;$$

$$(16) \quad F = (DC^2)^2 : Z_1' = Z_4, \quad Z_2' = Z_3, \quad Z_3' = -Z_2, \quad Z_4' = -Z_1;$$

oder in Liniencoordinaten:

$$(17) \quad E : a_{12}' = \varepsilon^2 a_{12}, \quad a_{13}' = a_{13}, \quad a_{14}' = a_{14}, \quad a_{34}' = \varepsilon a_{34}, \quad a_{42}' = a_{42}, \quad a_{23}' = a_{23};$$

$$(18) \quad F : a_{12}' = -a_{34}, \quad a_{13}' = -a_{42}, \quad a_{14}' = a_{11}, \quad a_{34}' = -a_{12}, \quad a_{42}' = -a_{13}, \quad a_{23}' = a_{23}.$$

In der That bleibt die linke Seite von (8) bei allen diesen Operationen absolut ungeändert. Dieselben vertauschen die 40 Polartetraeder noch transitiv, aber diejenigen unter ihnen, welche ein solches Tetraeder noch fest lassen, vertauschen auch zwei von seinen Gegenkanten nur unter sich. Ebenso vertauschen sie die 40 Polarebenen noch transitiv; aber diejenigen unter ihnen, welche eine solche Ebene in sich überführen, lassen in ihr nicht nur ein syzygetisches Büschel von Curven 3. Ordnung fest, sondern auch einen von ihren gemeinsamen Wendepunkten und damit zugleich dessen harmonische Polare.

Durch jede der 45 Hauptcongruenzen gehen 3 von den 27 Complexen I. Art; so z. B. durch die Congruenz (6) die 3 Complexe:

$$\begin{aligned} a_{13} - a_{11} - a_{42} - a_{23} &= 0, \\ \varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{42} - \varepsilon^2 a_{23} &= 0, \\ \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{42} - \varepsilon a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben bilden mit den Axen der Congruenz ein cyklisch-projectivisches System; die Summe der linken Seiten ihrer Gleichungen ist Null.

§ 65.

Die Untergruppe M ; die 36 linearen Complexe II. Art.

Wie in II, § 44 können wir nunmehr die gegenseitige Gruppierung unserer 27 Complexe folgendermassen weiter untersuchen. Gehen wir von einem derselben aus — er heisse ξ_1 — so sehen wir, dass sich ihm gegenüber die 36 anderen spalten in 5 mal 2, welche mit ihm je eine Hauptcongruenz gemein haben, und 16, für welche das nicht der Fall ist. Greifen wir einen der letzteren — ξ_2 — heraus, so sind unter den 15 übrigen noch 10 enthalten, welche auch mit ξ_2 keine Hauptcongruenz gemein haben. Sei ξ_3 einer von diesen, so bleiben 6, welche mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 ; sei ξ_4 einer von diesen, so bleiben zwei — ξ_5, ξ_6 — welche mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ und, wie sich herausstellt, auch unter sich keine Hauptcongruenz gemein haben. So gelangen wir zu einem System von 6 Complexen I. Art, welche zusammen 30 verschiedene Hauptcongruenzen enthalten. Solcher Systeme giebt es, wie aus der Art ihrer Herleitung hervorgeht, 72; eines derselben ist z. B. das folgende:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \equiv \varepsilon a_{12} - a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + a_{42} = 0, \\ \xi_2 \equiv \varepsilon a_{12} - \varepsilon a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} = 0, \\ \xi_3 \equiv \varepsilon a_{12} - \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon a_{42} = 0, \\ \xi_4 \equiv a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0, \\ \xi_5 \equiv \varepsilon a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon^2 a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0, \\ \xi_6 \equiv \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{23} + \varepsilon a_{34} = 0. \end{array} \right.$$

Durch die damit eingeführten „Complexcoordinaten ξ “ drücken sich die Liniencoordinaten a_{ik} aus wie folgt:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{12} = \frac{i}{3\sqrt{3}} (\varepsilon \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \varepsilon \xi_3 + \varepsilon^2 \xi_4 + \varepsilon^2 \xi_5 + \varepsilon_2 \xi_6), \\ a_{13} = -\frac{1}{3} (\xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon \xi_3), \\ a_{14} = \frac{1}{3} (\xi_4 + \varepsilon^2 \xi_5 + \varepsilon \xi_6), \\ a_{34} = \frac{i}{3\sqrt{3}} (\varepsilon^2 \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^2 \xi_3 + \varepsilon \xi_4 + \varepsilon \xi_5 + \varepsilon \xi_6), \\ a_{42} = \frac{1}{3} (\xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \varepsilon^2 \xi_3), \\ a_{23} = -\frac{1}{3} (\xi_4 + \varepsilon \xi_5 + \varepsilon^2 \xi_6). \end{array} \right.$$

Dieselben 30 Hauptcongruenzen lassen sich aber auch noch auf eine andere Art in 6 Fünfen anordnen, entsprechend den 6 Complexen:

$$(3) \quad \begin{cases} \eta_1 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - a_{13} - \varepsilon a_{34} + a_{42} = 0, \\ \eta_2 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon a_{13} - \varepsilon a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} = 0, \\ \eta_3 \equiv \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon a_{34} + \varepsilon a_{42} = 0, \\ \eta_4 \equiv a_{14} - \varepsilon a_{12} - a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0, \\ \eta_5 \equiv \varepsilon a_{14} - \varepsilon a_{12} - \varepsilon^2 a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0, \\ \eta_6 \equiv \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon a_{12} - \varepsilon a_{23} + \varepsilon^2 a_{34} = 0. \end{cases}$$

Dabei haben η_i und ξ_κ eine Hauptcongruenz gemein, wenn $i \geq \kappa$, dagegen nicht, wenn $i = \kappa$.

Auf diese Art ordnen sich die 72 Sechsen von linearen Complexen zu 36 „Doppelsechsen“ zusammen. Für jede derselben ist:

$$(4) \quad \sum_{\kappa=1}^6 \xi_\kappa \equiv - \sum_{\kappa=1}^6 \eta_\kappa;$$

für die angegebene Doppelsechs z. B. ist der Werth beider Seiten gleich:

$$3i\sqrt{3}(a_{12} + a_{34}).$$

Gleich Null gesetzt giebt das die Gleichung eines neuen linearen Complexes; wir erhalten so den 36 Doppelsechsen von linearen Complexen I. Art entsprechend, 36 „lineare Complexe II. Art.“*) Ein solcher bleibt ungeändert bei 720 Substitutionen unserer Gruppe; die zu (4) gehörige Untergruppe M z. B. kann am einfachsten folgendermassen beschrieben werden: sie enthält einmal die 360 geraden Vertauschungen der ξ ; dann aber noch die 360 Operationen, welche entstehen, wenn man die 360 ungeraden Vertauschungen der Indices 1, 2 . . . 6 mit der Vertauschung der Buchstaben ξ und η verbindet. Bei den ersteren bleibt (4) absolut invariant, bei den letzteren ändert es sein Zeichen.

Uebrigens drücken sich die η durch die ξ folgendermassen aus:

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_1 \equiv \frac{1}{3} (2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_2 \equiv \frac{1}{3} (-\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_3 \equiv \frac{1}{3} (-\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_4 \equiv \frac{1}{3} (-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 - \xi_5 - \xi_6), \\ \eta_5 \equiv \frac{1}{3} (-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 + 2\xi_5 - \xi_6), \\ \eta_6 \equiv \frac{1}{3} (-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 + 2\xi_6). \end{cases}$$

*) Man beachte bei diesem Schluss, dass die ξ absolut normirt sind.

Es ist also:

$$(6) \quad \eta_{\kappa} - \xi_{\kappa} \equiv -i\sqrt{3}(a_{12} + a_{34}) \equiv -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \xi_i$$

unabhängig vom Index κ . Ferner ist:

$$(7) \quad \begin{aligned} & 27(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}) \\ & \equiv 4 \sum \xi_i^2 - \sum \xi_i \xi_{\kappa} \equiv \frac{9}{2} \sum \xi_i^2 - \frac{1}{2} \left(\sum \xi_i \right)^2 \\ & \equiv 4 \sum \eta_i^2 - \sum \eta_i \eta_{\kappa} \equiv \frac{9}{2} \sum \eta_i^2 - \frac{1}{2} \left(\sum \eta_i \right)^2. \end{aligned}$$

Die übrigen 15 Complexe I. Art drücken sich durch die ξ und η sehr einfach aus. Ist nämlich $\xi_{12} = 0$ derjenige Complex I. Art, welcher mit $\xi_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$ durch dieselbe Hauptcongruenz geht, so ist zufolge des letzten Satzes von § 64:

$$(8) \quad \xi_1 + \eta_2 + \xi_{12} \equiv 0;$$

also folgt:

$$(9) \quad \xi_{12} \equiv \frac{1}{3} (-2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6) \equiv \xi_{21}.$$

Die übrigen werden durch Vertauschung der Indices erhalten. Diese ξ bilden dann mit den ξ, η die 35 übrigen Doppelsechsen. Zwei derselben sind:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi_{23} & \xi_{24} & \xi_{25} & \xi_{26} \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi_{13} & \xi_{14} & \xi_{15} & \xi_{16} \end{pmatrix}$$

mit dem Complex II. Art:

$$(11) \quad \xi_1 - \xi_2 = 0$$

und:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_{56} & \xi_{64} & \xi_{45} \\ \xi_{23} & \xi_{31} & \xi_{12} & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \end{pmatrix}$$

mit:

$$(13) \quad 2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 - \xi_5 - \xi_6 = 0;$$

aus der ersten gehen (15), aus der zweiten 20 durch Vertauschung der Indices hervor.

Unsere senäre Gruppe G kann demnach erhalten werden, indem man zu M noch die beiden Substitutionen:

$$(14) \quad \xi_1' = \xi_1, \quad \xi_2' = \eta_1, \quad \xi_3' = \xi_{23}, \quad \xi_4' = \xi_{24}, \quad \xi_5' = \xi_{25}, \quad \xi_6' = \xi_{26}$$

und:

$$(15) \quad \xi_1' = \xi_{56}, \quad \xi_2' = \xi_{64}, \quad \xi_3' = \xi_{45}, \quad \xi_4' = \xi_1, \quad \xi_5' = \xi_2, \quad \xi_6' = \xi_3$$

hinzunimmt, wo rechts die η und ξ durch ihre Werthe aus (5) und (9) zu ersetzen sind. Alle diese Substitutionen haben reelle Coefficienten; soviel mir bekannt, ist dies, von trivialen Fällen abgesehen, überhaupt das erste Beispiel einer *endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen mit reellen rationalen Zahlencoefficienten*.

XV. Abschnitt.

Ausdruck der Invarianten der Gruppe der z durch die Coefficienten des algebraischen Gebildes.

§ 66.

Reihenentwicklungen.

Die $Z_{\alpha\beta}$ mit *ungerader* Charakteristik sind (II, § 58) *gerade* Functionen ihrer Argumente. Setzt man die letzteren gleich Null, so gehen die $Z_{\alpha\beta}$ in Modulformen $z_{\alpha\beta}$ über, welche nicht identisch Null sind. Die Invarianten F der Gruppe der Z — dieselben sind von Herrn Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 333, 337) angegeben — gehen dabei über in *Modulformen II. Stufe**) f , und zwar speciell in solche, deren Rationalitätsbereich durch die der Charakteristik entsprechende Zerlegung**):

$$(1) \quad f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5$$

gegeben ist. Wir mögen etwa die Charakteristik:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wählen; derselben entspricht bei dem von uns festgehaltenen canonischen Querschnittssystem***) die Zerlegung von f in:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_x &\equiv (\alpha^{IV} x), \\ \psi_{x^5} &\equiv (\alpha^0 x) (\alpha' x) (\alpha'' x) (\alpha''' x) (\alpha^V x) \end{aligned}$$

Multipliziert man die $z_{\alpha\beta}$ noch mit:

$$(4) \quad \frac{1}{2} i c^{-2} \sqrt[8]{D_{\psi}^3},$$

so erhält man Functionen, die mit

$$(z_{\alpha\beta})$$

bezeichnet werden sollen. Von diesen brauchen wir im folgenden die Anfangsglieder ihrer Reihenentwicklungen nach Potenzen von p, q, r ; diese bekommen wir aus ihrer Darstellung durch die Theta (II, § 32, Glchg. 24):

*) Dieser Ann. Bd. 35, p. 225.

**) Ebenda p. 244.

***)) I p. 375; vgl. die dieser Ann. Bd. 32, p. 358 von Hrn. Klein gegebene Regel zur Bestimmung der zu einer bestimmten Zerlegung von f gehörenden Charakteristik.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sqrt{p_{12}} \cdot (z_{\alpha\beta}) &= \left(e^{\frac{\alpha\pi i}{3}} + e^{-\frac{\alpha\pi i}{3}} \right) p^{\frac{\alpha^2}{3}} q^{\frac{2\alpha\beta}{3}} r^{\frac{\beta^2}{3}} \vartheta(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}, \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22}; 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}) \\
 &= \left(e^{\frac{\alpha\pi i}{3}} + e^{-\frac{\alpha\pi i}{3}} \right) \\
 &\quad \cdot \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m_1} p^{\frac{1}{3} \left(3 \left(m_1 + \frac{1}{2} \right) + \alpha \right)^2} \cdot q^{\frac{2}{3} \left(3 \left(m_1 + \frac{1}{2} \right) + \alpha \right) (3m_2 + \beta)} r^{\frac{1}{3} (3m_2 + \beta)^2},
 \end{aligned}$$

Wir finden nämlich:

$$(6) \quad \begin{cases} \sqrt{p_{12}}(z_1) = p^{\frac{1}{12}} \{ -1 + p^2 + \dots \}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_2) = 2 p^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{3}} (q - q^{-1}) \{ 1 - rs + \dots \}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_3) = p^{\frac{1}{12}} q^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \{ -1 - qr + p^2 q^2 + p^2 r q^{-3} + \dots \}, \\ \sqrt{p_{12}}(z_4) = -p^{\frac{1}{12}} q^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \{ -1 - q^{-1}r + p^2 q^{-2} + p^2 r q^{-3} + \dots \}. \end{cases}$$

Dabei sind in den Klammern die weggelassenen Glieder von höherer als der dritten Ordnung in p, r, s . Für die Invarianten der „Hesse'schen Gruppe“*) ergibt sich daraus mit derselben Annäherung:

$$(7) \quad \begin{cases} p_{12}^3(c_6) = p^{\frac{1}{2}} \{ 1 - 6p^2 - 10rs - 72r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^6(c_{12}) = p \{ 1 - 12p^2 + 4rs + 240r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^6(c_{12}) = pr^{\frac{2}{3}} \{ -1 + 8p^2 - 4rs + 8r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^9(c_{18}) = p^{\frac{3}{2}} \{ 1 - 18p^2 + 6rs - 504r^2 + \dots \}. \end{cases}$$

(In der That befriedigen diese Entwicklungen die zweite Relation (10) bei Maschke (a. a. O. p. 326)).

Endlich erhalten wir für die Invarianten der Hauptgruppe G die Entwicklungen:

$$(8) \quad \begin{cases} p_{12}^6(f_{12}) = 6p \{ 1 - 12p^2 + 176r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^9(f_{18}) = 54p^{\frac{3}{2}} \{ -1 + 18p^2 + 136r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^{12}(f_{24}) = 1728p^2 \{ 8r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^{15}(f_{30}) = 2592p^{\frac{5}{2}} \{ -8r^2 + \dots \}, \\ p_{12}^{20}(f_{40}) = 8p^4 r^4 \{ -2 - 4rs - 38p^2 - 2r^2 - s^2 + \dots \}, \end{cases}$$

*) Dieselben sind hier aus $z_1, z_3, -z_4$ gebildet, die bezw. Maschke's z_1, z_2, z_3 entsprechen.

ebenfalls abgesehen von Gliedern höherer als der 3. Ordnung in p, r, s , innerhalb der Klammern*).

§ 67.

Die $(z_{\alpha\beta})$ sind ganze algebraische Functionen der Coefficienten der Grundform.

Die $(z_{\alpha\beta})$ sind, wie unmittelbar aus ihrer Definition (§ 66, 5) hervorgeht, Modulformen vom Grade $\frac{1}{2}$ in den Coefficienten der Grundform f_6 ; es ist zu zeigen, dass sie *ganze* algebraische Functionen dieser Coefficienten sind.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst: Sind die Wurzeln von $f_6 = 0$ alle von einander verschieden, so bleiben die $(z_{\alpha\beta})$ endlich. Das folgt unmittelbar aus den Reihenentwicklungen von § 66 auf Grund des in I, § 24 an die Spitze gestellten Satzes.

Ferner müssen wir untersuchen, was aus den $(z_{\alpha\beta})$ wird, wenn zwei Wurzeln von $f = 0$ zusammenfallen. Da bei Vertauschung der Wurzeln von $\psi = 0$ (linearer Periodentransformation, welche die Charakteristik festlöst) die (z) sich linear mit constanten Coefficienten substituieren, so genügt es, wenn wir die folgenden beiden Fälle untersuchen:

1. Es falle α' mit α'' zusammen (zwei Nullstellen von ψ). Dabei bleibt (I, § 5) p_{12} endlich und p wird von der 1. Ordnung unendlich klein. Es werden also die (z) nicht nur nicht unendlich gross, sondern es wird sogar (z_2) von der Ordnung $\frac{3}{4}$, die drei andern (z) jedes von der Ordnung $\frac{1}{12}$ unendlich klein.

2. Es falle α''' mit α^{IV} zusammen (eine Nullstelle von ψ mit der von φ). Dieser Fall kann aus dem vorigen dadurch abgeleitet werden, dass man α^0 mit α^V , α' mit α^{IV} , α'' mit α''' vertauscht; dem entspricht [vgl. Grundz.**) § 8 und dazu die I, § 1 vorgenommene Abänderung] die Periodentransformation D , durch welche (Grundz. § 7) p mit r vertauscht wird, während p_{12} in $-p_{12}$ übergeht und q ungeändert bleibt. Beim Zusammenfallen von α''' und α^{IV} bleibt demnach p_{12} endlich und r wird von der 1. Ordnung unendlich klein. In Folge dessen bleibt (z_1) endlich und von Null verschieden, die andern drei (z) werden jedes von der Ordnung $\frac{1}{3}$ unendlich klein.

Es werden also die (z) sicher nicht unendlich gross, solange nicht

*) Auf die angegebenen Glieder der ersten 4 Entwicklungen (8) haben nur die von Hrn. Maschke sogenannten „Leitterme“ Einfluss.

**) Dieser Ann. Bd. 35, p. 198 ff.

mehr als zwei Nullstellen von f zusammenfallen. Da wir aber bereits wissen, dass sie *algebraische* Functionen der Coefficienten von f sind, so genügt das,*) um schliessen zu können, dass sie *ganze* algebraische Functionen derselben sind.

§ 68.

Ausdrücke der Gruppeninvarianten durch die Coefficienten von φ und ψ .

Aus den Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen folgt für die Invarianten (f), dass sie *ganze* Invarianten von φ_1 und ψ_5 sind, von einem Grade in den Coefficienten jeder einzelnen dieser beiden Formen, welcher halb so gross ist als ihr Grad in den (z); und dass sie Producte *rationaler* solcher Invarianten in bestimmte Potenzen der 8. Wurzel aus der Discriminante von ψ sind.

Die Exponenten dieser Potenzen sind zunächst mod. 8 dadurch bestimmt, dass $(z_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} i c^{-2} \sqrt[8]{D_\psi^3} \cdot z_{\alpha\beta}$ war (§ 66, 4); näher präcisiren sie sich aus den Entwicklungen § 66, 8, nämlich aus den Exponenten der dort als Factoren vortretenden Potenzen von p . Man findet so:

$$(1) \quad \begin{cases} (f_{12}) = D^{\frac{1}{2}} \cdot J_{6,2}, \\ (f_{18}) = D^{\frac{3}{4}} \cdot J_{9,3}, \\ (f_{24}) = D \cdot J_{12,4}, \\ (f_{30}) = D^{\frac{5}{4}} \cdot J_{15,5}, \\ (f_{40}) = D^2 \cdot J_{20,4}. \end{cases}$$

Darin bedeutet $J_{\kappa,\lambda}$ eine rationale ganze Simultaninvariante von φ und ψ vom Grade κ in den Coefficienten von φ , vom Grade λ in denjenigen von ψ ; oder anders ausgedrückt eine Covariante von ψ , vom Grade λ in den Coefficienten, von der Ordnung κ in den Variabeln, in welcher die Variabeln durch die Coordinaten der Nullstelle von φ ersetzt sind.

Nun existirt**) nur je eine $J_{6,2}$ und $J_{9,3}$, nämlich die Hesse'sche Form H von ψ und die Functionaldeterminante T von H und ψ ; dagegen existiren je zwei linear unabhängige $J_{12,4}$ und $J_{15,5}$, nämlich einerseits H^2 und $\psi^2 \cdot i$, andererseits $H \cdot T$ und $\psi^2 \cdot (i, \psi)_1$, wenn mit i die vierte Ueberschiebung von ψ über sich selbst bezeichnet wird. In den beiden letzteren Fällen geben die Anfangsglieder der Reihenentwicklungen von (f_{24}) und (f_{30}) die Entscheidung; dieselben verschwinden

*) Vgl. I, § 24, sowie Klein, diese Ann. Bd. 36, p. 69.

**) Vgl. etwa Clebsch, binäre Formen (Leipzig 1872) p. 277).

für $r = 0$, und diese Eigenschaft haben H^2 und HT nicht, wohl aber ψ^2 , und zwar in der richtigen Ordnung. Es ist ja ψ , in den Coordinaten der Nullstelle von φ geschrieben, nichts anderes als die Resultante von φ und ψ .*) Ebenso ergibt sich aus der Reihenentwicklung, dass (f_{40}) den Factor ψ^4 enthalten muss. Sonach erhält man statt der Ausdrücke (1) die folgenden bestimmteren:

$$(2) \quad \begin{cases} (f_{12}) = D^{\frac{1}{2}} \cdot [H], \\ (f_{18}) = D^{\frac{3}{4}} \cdot [T], \\ (f_{24}) = D \cdot [\psi^2 i], \\ (f_{30}) = D^{\frac{5}{4}} \cdot [\psi^2 (i\psi)_1], \\ (f_{40}) = D^2 \cdot [\psi^4]. \end{cases}$$

Besondere Beachtung verdient hier der Ausdruck von (f_{40}) ; er ist nämlich gleich dem Quadrat der Discriminante von $f = \varphi\psi$. (f_{40}) ist also eine Modulform *erster* Stufe. — Durch die eckigen Klammern ist angedeutet, dass die Variablen durch die Coordinaten der Nullstelle von φ zu ersetzen sind.

Für die Normalform des Hrn. Weierstrass:

$$\varphi = x_2, \quad \psi = 4x_1^5 - g_2 x_1^3 x_2^2 - g_3 x_1^2 x_2^3 - g_4 x_1 x_2^4 - g_5 x_2^5$$

wird insbesondere**):

$$\begin{cases} [H] &= -\frac{2}{5} g_2, \\ [T] &= -\frac{8}{5} g_3, \\ [i] &= -\frac{4}{5} g_4 + \frac{3}{100} g_2^2, \\ [(i\psi)_1] &= -16g_5 + \frac{2}{25} g_2 g_3, \\ [\psi] &= 4; \end{cases}$$

damit sind die von Hrn. Klein als Ergebniss der Untersuchungen des Hrn. Maschke in Aussicht gestellten***) Ausdrücke gefunden.

Eine Bemerkung sei noch beigelegt. Der von Hrn. Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 339, Glchg. (37)) gegebene Ausdruck von $I'_{40}{}^3$ durch die übrigen Invarianten muss, wenn die Ausdrücke (2) und (3)

*) Rückwärts folgt hieraus, dass in den Entwicklungen von (f_{24}) und (f_{30}) nicht nur die Anfangsglieder, sondern auch alle folgenden durch r^2 theilbar sein müssen.

**) Man vgl. die expliciten Ausdrücke der Covarianten etwa bei Faà di Bruno-Walter, Einleitung in die Theorie der binären Formen (Leipzig 1881) p. 328 ff.

***) a. a. O. p. 169.

in denselben eingeführt werden, nach Division mit $D^5[\psi^{12}]$ einfach übergehen in den Ausdruck der Discriminante D durch die Coefficienten. Da nun die Discriminante der Form 5^{ten} Grades sich nicht als Summe von Producten von Formen niedrigerer Grade darstellen lässt, so darf man nicht erwarten, dass jener Ausdruck sich durch einen übersichtlicheren ersetzen liesse, wie man sonst etwa nach Analogie von II, § 49, Gleichg. (11) vermuthen könnte.

XVI. Abschnitt.

Invarianten der senären Gruppe der a_{ik} .

§ 69.

Invarianten der Untergruppe G_0 .

In diesem Abschnitt sollen einige Angaben über Invarianten der senären Gruppe der a_{ik} , bzw. ihrer Untergruppe gemacht werden; unter Verzicht auf Vollständigkeit beschränken wir uns dabei auf die im folgenden zu benutzenden einfachen Resultate.

Wir beginnen mit den Invarianten der von C, D, S_2 erzeugten Untergruppe G_0 . Bei derselben werden zunächst aus C und D die 24 Vertauschungen der Indices 1, 2, 3, 4 erhalten; jede dieser Vertauschungen ist aber noch mit Zeichenwechseln bestimmter a_{ik} zu verbinden, die man am bequemsten daraus abliest, dass

$$(1) \quad A_1 = (a_{12} + a_{13} + a_{14}) - (a_{31} + a_{42} + a_{23})$$

bei jeder *geraden* Vertauschung der Indices ungeändert bleibt, bei jeder *ungeraden* sein Zeichen ändert. Ferner werden von S_2 und seinen Transformirten die a_{ik} in der Weise mit dritten Einheitswurzeln multiplicirt, dass die Invarianten von G_0 die a_{ik} nur in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten oder in den Verbindungen $a_{12} a_{34}$, $a_{13} a_{42}$, $a_{14} a_{23}$ enthalten können. Berücksichtigt man beides, so findet man als einfachste Invarianten von G_0 die folgenden:

Zunächst haben wir die selbstverständliche Invariante *zweiten* Grades:

$$(2) \quad A_2 = a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23};$$

ferner eine von A_2^2 linear unabhängige Invariante *vierten* Grades:*)

$$(3) \quad A_4 = a_{12}^2 a_{34}^2 + a_{13}^2 a_{42}^2 + a_{14}^2 a_{23}^2;$$

dann eine Invariante *fünften* Grades:

*) Sind die a_{ik} als Liniencoordinaten an die Bedingung $A_2 = 0$ geknüpft, so zerfällt $A_4 = 0$ in die beiden Complexe derjenigen Geraden, welche von den Ebenen des Fundamentaltetraeders in äquianharmonischen Punktgruppen getroffen werden.

$$A_5 = a_{12} a_{34} (a_{13}^3 - a_{11}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3) + a_{13} a_{12} (a_{11}^3 - a_{12}^3 - a_{23}^3 + a_{34}^3) \\ + a_{14} a_{23} (a_{12}^3 - a_{13}^3 - a_{34}^3 + a_{42}^3);$$

dann drei von A_2^3 und $A_2 A_4$ linear unabhängige Invarianten *sechsten* Grades:

$$(4) \quad A_6 = a_{12} a_{34} a_{13} a_{42} a_{11} a_{23},$$

$$(5) \quad A_6' = a_{12}^6 + a_{13}^6 + a_{11}^6 + a_{34}^6 + a_{42}^6 + a_{23}^6,$$

$$(6) \quad A_6'' = \sum \pm a_{12}^3 a_{13}^3.$$

Dabei ist in A_6'' die Summe über alle durch Vertauschung der Indices sich ergebenden Glieder zu erstrecken, und die Vorzeichen sind nach der oben gegebenen Regel zu bestimmen.

Neben diesen Invarianten geraden Grades bemerken wir als einfachste Invariante *ungeraden* Grades die folgende:

$$(7) \quad A_9 = (a_{12}^3 - a_{13}^3 - a_{34}^3 + a_{42}^3)(a_{13}^3 - a_{11}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3)(a_{11}^3 - a_{12}^3 - a_{23}^3 + a_{34}^3).$$

Alle bisher genannten Formen (2)–(7) sind *absolute* Invarianten von G_0 ; dagegen bleibt:

$$(8) \quad A_3 = (a_{12}^3 + a_{13}^3 + a_{11}^3) - (a_{34}^3 + a_{42}^3 + a_{23}^3)$$

zwar bei U und S_2 absolut ungeändert, wechselt aber bei D sein Zeichen.

§ 70.

Invarianten der Untergruppe H .

Die Operationen B, C, S_2 erzeugen im senären Gebiet der a_{ik} eine Gruppe H von 648 linearen Substitutionen, welche folgendermassen zu charakterisiren ist:

$$(1) \quad a_{12} = x_1, \quad a_{13} = x_2, \quad a_{14} = x_3$$

(die Coordinaten des Schnittpunkts der Raumgeraden (a_{ik}) mit der Coordinatenebene $Z_1 = 0$) substituiren sich für sich nach einer „Hesseschen Gruppe“, wie sie uns bereits wiederholt begegnet ist;

$$(2) \quad a_{34} = u_1, \quad a_{42} = u_2, \quad a_{43} = u_3$$

(die Coordinaten der Projection derselben Geraden vom Punkte $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ auf die Ebene $Z_4 = 0$) erfahren dabei jedesmal die contragrediente Substitution, sodass:

$$(3) \quad u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

absolut invariant bleibt. Demnach sind die Invarianten dieser senären Gruppe nichts anderes als die Combinanten des syzygetischen Büschels von Curven dritter Ordnung:

$$(4) \quad x(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

mit den beiden contragredienten Variablenreihen der x und der u .

Solche Combinanten haben Clebsch und Gordan*) in symbolischer Form mitgetheilt; wir entnehmen ihrer Arbeit die nachstehenden Resultate.**)

Zunächst hat man die von Hrn. Maschke bereits benutzten 5 Formen $C_6, C_9, C_{12}, C_{12}, C_{18}$, welche nur die x enthalten; ihnen treten 5 entsprechend gebildete C'_6, \dots, C'_{18} zur Seite, welche nur die u enthalten. Ferner haben wir die beiden fundamentalen Combinanten:

$$(5) \quad N_{4,1} = u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + u_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + u_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3)$$

(Cl. u. G. (59)) und:

$$(6) \quad N_{1,4} = u_1 x_1 (u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2 (u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3 (u_1^3 - u_2^3)$$

(Cl. u. G. (79)), sowie die aus ihnen durch einfache Operationen abzuleitenden:***)

$$(7) \quad C_{7,1} = \sum_i \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial u_i} = u_1 x_1 (x_2^6 + x_3^6 + 4x_2^3 x_3^3 - 3x_1^3 x_2^3 - 3x_1^3 x_3^3) + \dots,$$

$$(8) \quad C_{1,7} = \sum_i \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial u_i} = u_1 x_1 (u_2^6 + u_3^6 + 4u_2^3 u_3^3 - 3u_1^3 u_2^3 - 3u_1^3 u_3^3) + \dots,$$

$$(9) \quad \Gamma_{4,4} = \sum \frac{\partial N}{\partial u_1} \frac{\partial N}{\partial x_1} = u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) (u_2^3 - u_3^3) + \dots$$

(Cl. u. G. (71), (82)).

Weitere Combinanten erhält man, indem man auch solche Formen als Durchgangspunkte benutzt, die keine Combinanten sind: nämlich die zu φ und ψ †) dualen Formen (Cl. u. G. (13), (20), (51)):

$$(10) \quad \Pi = 18 u_1 u_2 u_3,$$

$$(11) \quad P = - (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3);$$

dann die einander paarweise dualen:

$$(12) \quad H = x_1^2 u_2 u_3 + \dots \quad (\text{Cl. u. G. (20)}),$$

$$(13) \quad \Theta = u_1^2 x_2 x_3 + \dots \quad (\text{Cl. u. G. (3)});$$

endlich die zu sich selbst duale:

$$(14) \quad K = u_1^2 x_1^2 - 2 u_1 u_2 x_1 x_2 + \dots \quad (\text{Cl. u. G. (22a)}).$$

Sie geben die Combinanten:

*) Ueber cubische ternäre Formen, dieser Ann. Bd. 6, p. 436 ff. (1873).

**) Die Zahlenfactoren sind z. T. abweichend normirt.

***) Die durch Punkte angedeuteten Glieder ergeben sich aus den angesetzten durch cyklische Vertauschung der Indices.

†) Bei Clebsch und Gordan f und Δ .

$$(15) \quad C_{3,3} = \varphi \Pi - \psi P = 18x_1x_2x_3u_1u_2u_3 + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) \\ (\text{Cl. u. G. p. 473});$$

$$(16) \quad C_{4,4} = \Theta K + H^2 = x_1^4u_2^2u_3^2 + x_1^3x_2u_1^2u_3^2 + x_1^2x_2x_3u_1^4 \\ - 2x_1^2x_2x_3u_1u_2^3 + \dots,$$

$$(17) \quad C'_{4,4} = HK + \Theta^2 = x_1^4u_1^2u_2u_3 - 2x_1^3x_2u_1u_2^2u_3 + x_1^2x_2^2u_3^4 \\ + x_1^2x_2^2u_1^3u_3 + \dots$$

(Cl. u. G. (73)).

Ausser diesen von Clebsch und Gordan aufgeführten Formen haben wir aber noch als Combinanten die beiden Functionaldeterminanten von N, N und u_x nach den x und nach den u , nämlich:

$$(18) \quad C_{3,6} = 3x_1^3u_1u_2u_3(u_2^3 - u_3^3) + x_1^2x_2u_2^2u_3(2u_1^3 - u_2^3 - u_3^3) + \dots,$$

$$(19) \quad C_{6,3} = 3u_1^3x_1x_2x_3(x_1^3 - x_2^3) + x_1^2x_2u_1u_3^2(2x_1^3 - x_2^3 - x_3^3) + \dots,$$

sowie die beiden durch Anwendung des invarianten Processes

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3}$$

aus diesen hervorgehenden:

$$(20) \quad C_{2,5} = x_1^2u_2u_3(u_2^3 - u_3^3) + \dots,$$

$$(21) \quad C_{5,2} = u_1^2x_2x_3(x_2^3 - x_3^3) + \dots$$

§ 71.

Invarianten der Hauptgruppe G .

Die Invarianten der Hauptgruppe G können nunmehr einfach dahin charakterisirt werden, dass sie zugleich dem Formenkreis von G_0 (§ 69) und dem von H (§ 70) angehören müssen. Auf Grund dieser Bemerkung findet man als Invarianten der niedrigsten Grade die drei folgenden:

$$(1) \quad J_2 = A_2 = u_x = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23};$$

$$(2) \quad J_5 = A_5 = N - N = a_{12}a_{34}(a_{13}^3 - a_{14}^3 - a_{42}^3 + a_{23}^3) + \dots;$$

$$(3) \quad J_6 = C_6 + C_6' + 10C_{3,3} = A_6' - 5A_2^3 + 15A_2A_4 + 10A_6'' + 150A_6 \\ = a_{12}^6 + 10a_{12}^3a_{13}^3 + 10a_{12}^3a_{34}^3 + \dots + 180a_{12}a_{13}a_{14}a_{34}a_{42}a_{23}.$$

XVII. Abschnitt.

Algebraisches über das Problem der Z .

§ 72.

Allgemeine Bemerkungen.

Die algebraische Theorie des „Problems der Z “ ist im wesentlichen von Hrn. Maschke in § 10 seiner mehrerwähnten Arbeit entwickelt worden; wir brauchen dem für unsere Zwecke nur wenig hinzuzufügen.

Zunächst sei der Vollständigkeit wegen erwähnt, dass die Gruppe G von 51840 Substitutionen die *Monodromiegruppe* unseres Problems in Bezug auf a, b, c, d, e als Parameter repräsentirt. Die in unseren Formeln auftretende dritte Einheitswurzel ε ist dabei (wie in II, § 51) als adjungirt vorausgesetzt; die *arithmetische* Gruppe des Problems enthält die doppelte Anzahl von Substitutionen.

Wollen wir (vgl. II, § 52) das „Formenproblem der Z “ durch ein „Gleichungssystem“ ersetzen, so können wir etwa wählen:

$$(1) \quad \frac{F'_{24}}{F'^2_{12}} = \alpha, \quad \frac{F'_{30}}{F'_{12} F'_{18}} = \beta, \quad \frac{F'^2_{18}}{F'^3_{12}} = \gamma.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt

$$24 \cdot 30 \cdot 36 = 25920$$

Lösungen. Da die Collineationsgruppe der Z zu der zugehörigen homogenen Substitutionsgruppe nur *hemiedrisch* isomorph ist (vgl. Maschke a. a. O. p. 321), so bedarf es nach der Lösung dieses Gleichungssystems noch der Ausziehung einer Quadratwurzel, um zu den Lösungen des Formenproblems zu gelangen. Wir brauchen dazu*) nur irgend eine rationale Function der Invarianten, welche in den z vom zweiten Grad ist; eine solche ist z. B.:

$$(2) \quad X = \frac{F'_{18} F'_{24}}{F'_{40}}.$$

Was die Bildung von *Resolventen* unseres Problems betrifft, so gestalten sich dieselben noch weniger einfach als in II (§ 53 ff). Denn auch die einfachsten absoluten Invarianten der Untergruppen, welche in Betracht kommen würden: $(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)^2$ bei G_0 , Z_1^6 bei H etc. geben schon Gleichungen von Gradzahlen wie 320, 240 etc. Auf eine Ausrechnung derselben dürfen wir daher wohl verzichten.

§ 73.

Reduction des Problems der Z auf das der Y .

Das Problem der Z steht mit dem der Y in einem ähnlichen Zusammenhange, wie das Ikosaederproblem mit dem ternären Problem der A^{**}).

Einerseits muss es daher Functionen der Z geben, welche genau wie die Y sich substituiren. Nach der von Hrn. Klein in Bd. 15 dieser Annalen gegebenen Methode***) findet man als die einfachsten solchen Functionen:

*) Vgl. Klein, Vorl. über das Ikosaeder (Leipzig 1884) p. 64; p. 235.

**) Ikosaeder p. 411f.

***) Man vgl. auch die vorstehende Note.

$$(1) \quad \begin{cases} Y_0 = 6z_1z_2z_3z_4, \\ Y_1 = -z_1(* + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3), \\ Y_2 = -z_2(z_1^3 + * + z_3^3 - z_4^3), \\ Y_3 = -z_3(z_1^3 - z_2^3 + * + z_4^3), \\ Y_4 = -z_4(z_1^3 + z_2^3 - z_3^3 + *). \end{cases}$$

Bilden wir aus diesen Y die Invarianten J (II, § 47), so müssen sie rationalen ganzen Functionen der Invarianten I' der Gruppe der (Z^*) gleich werden. Dabei findet man zunächst

$$(2) \quad J_4(Y) \equiv 0;$$

denn als Function der Z würde $J_4(Y)$ eine Invariante 16. Grades werden, und eine solche existirt nicht. *In der That ist selbstverständlich, dass zwischen den 5 Functionen Y der 4 Variablen Z eine identische Relation bestehen muss; diese wird eben durch (2) dargestellt.*

Ebenso schliesst man, dass sich $J_{10}(Y)$ von F_{40} nur durch einen rein numerischen Factor unterscheiden kann; um diesen zu bestimmen, berechnet man beiderseits die Glieder, welche Z_1^{28} , die höchste vorkommende Potenz von Z_1 , zum Factor haben, und findet:

$$(3) \quad J_{10}(Y) = -2F_{40}.$$

Bei Bestimmung der noch übrigen Invarianten dürfen wir zur Vereinfachung:

$$(4) \quad Z_1 = 0$$

setzen, was:

$$(5) \quad Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0,$$

$$(6) \quad Y_2 = z_2(z_4^3 - z_3^3), \quad Y_3 = z_3(z_2^3 - z_4^3), \quad Y_4 = z_4(z_3^3 - z_2^3)$$

ergiebt; denn es sind sowohl die noch in Betracht kommenden F durch ihre von Z_1 freien, als die J durch ihre von Y_0 und Y_1 freien Glieder („Leitterme“) völlig bestimmt. Diese Formeln (6) stellen Functionen der 3 Grössen Z_2, Z_3, Z_4 vor, welche sich zu den Z cogredient substituiren, wenn diese einer „Hesse'schen Gruppe“**) linearer Substitutionen unterworfen werden. Die aus ihnen gebildeten Invarianten dieser Gruppe müssen sich also durch die aus den Z gebildeten rational und ganz ausdrücken.**) Um diese Ausdrücke zu finden, beachten wir zunächst, dass, für $Z_2 = Z_3$, $Y_2 = -Y_3$ und $Y_4 = 0$, also $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ wird. Wegen der invarianten Natur unserer Functionen folgt hieraus, dass φ' und ψ' durch C_9 theilbar sein müssen; und in der That findet man:

*) Maschke, dieser Ann. Bd. 33, p. 337.

**) Maschke a. a. O. p. 324 ff.

**) Für die letzteren gebrauchen wir die von Maschke eingeführten Zeichen, für die ersteren dieselben Zeichen mit Accenten.

$$(7) \quad \varphi' = -\varphi C_9, \quad \psi' = -\psi C_9$$

und hieraus weiter:

$$(8) \quad C'_{12} = C_{12} C_9^4, \quad \mathfrak{C}'_{12} = \mathfrak{C}_{12} C_9^4, \quad C'_{18} = C_{18} C_9^4.$$

Etwas umständlicher ist die Ausrechnung von C'_6 . Wir setzen zunächst mit unbestimmten Coefficienten an:

$$(9) \quad C'_6 = \alpha C_6^4 + \beta C_6^2 C_{12} + \gamma C_6 C_{18} + \delta C_{12}^2.$$

Diese unbestimmten Coefficienten berechnen wir mit Hilfe einer Reihe specieller Annahmen. Zuerst setzen wir für Z_2 und Z_3 unendlich kleine Grössen 1. Ordnung; dabei werden alle drei Υ in (6) unendlich klein, also muss C'_6 mindestens von der 6. Ordnung unendlich klein werden. Das gibt die Bedingungen:

$$(10a) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

$$(10b) \quad -40\alpha - 16\beta - 4\gamma + 8\delta = 0.$$

Ferner setzen wir nach einander für (Z_2, Z_3, Z_4) die Werthe $(1, 1, 0)$; $(1, -1, 0)$; $(1, 1, -1)$ ein; das gibt die drei weiteren Bedingungen:

$$(10c) \quad 4096\alpha + 1024\beta - 512\gamma + 256\delta = 12,$$

$$(10d) \quad 1728\alpha = 1,$$

$$(10e) \quad 28561\alpha - 36335\beta - 68783\gamma + 46225\delta = 0.$$

Diese 5 Bedingungsgleichungen (10) sind mit einander verträglich; man findet mit ihrer Hilfe:

$$(11) \quad \begin{aligned} 1728 C'_6 &= C_6^4 + 6 C_6^2 C_{12} - 16 C_6 C_{18} + 9 C_{12}^2 \\ &= -\frac{1}{54} C_6 C_9^2 + 9(C_6^2 - C_{12}). \end{aligned}$$

Aus diesen Ausdrücken für die Invarianten der Hesse'schen Gruppe findet man nun die entsprechenden für die Invarianten der Hauptgruppe. Zunächst erhält man, indem man II, § 47, Glchg. (2) mit Maschke Glchg. 31 vergleicht:

$$(12) \quad J_6(\Upsilon) = -\frac{1}{216} F_{24};$$

(in der That werden für $Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0$ sowohl $J_6(\Upsilon)$, als F_{24} , aber nicht F_{12} zu Null). Ferner betrachten wir statt J_{12} die Combination $J_6^2 - 384 J_{12}$, deren Leitglied $64 C'_{12}$ (wegen (8)) $= 64 C_{12} C_9^4$ ist. Dies muss sich durch die Leitglieder L der F in der Form ausdrücken lassen:

$$(13) \quad C_{12} C_9^4 = \alpha L_{12}^4 + \beta L_{12}^2 L_{24} + \gamma L_{12} L_{18}^2 + \delta L_{18} L_{30} + \varepsilon L_{24}^2.$$

Um hier die Coefficienten zu bestimmen, beachte man, dass wegen Maschke's erster Gleichung (10) die rechte Seite verschwinden muss, wenn man darin $2 C_{18}$ durch $3 C_6 C_{12} - C_6^3$ ersetzt. Man erhält damit:

$$(14) J_{12}(Y) = -\frac{1}{2^{13} 3^7 5^3} (1296 F_{12}^4 - 4500 F_{12}^2 F_{24} - 96 F_{12} F_{18}^2 + 800 F_{18} F_{30} - 625 F_{24}^2).$$

In analoger Weise würde endlich auch noch $J_{15}(Y)$ zu berechnen sein.*)

XVIII. Abschnitt.

Reduction der Gleichungen 27. Grades, deren Gruppe mit der des Problems der a_{ik} isomorph ist, auf dieses Problem.

§ 74.

Einleitende Erörterungen.

Die Wurzeln einer Gleichung 27. Grades, deren Gruppe mit unserer Gruppe von 25920 Substitutionen holodrisch isomorph ist, müssen**) folgende Eigenschaften besitzen: Wenn man irgend eine derselben adjungirt, zerfallen die 26 übrigen in $10 + 16$; wir mögen etwa die ersteren als zu der ersten Wurzel conjugirt, die letzteren als zu ihr nicht conjugirt bezeichnen. Die damit definirte Beziehung des Conjugirtseins zweier Wurzeln ist eine gegenseitige. Man kann die 27 Wurzeln folgendermassen bezeichnen:

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & \\ & w_{23} & w_{24} & w_{25} & w_{26} & \\ & & w_{34} & w_{35} & w_{36} & \\ & & & w_{45} & w_{46} & \\ & & & & w_{56} & \end{array}$$

*) Wie man das Problem der a_{ik} auf das der Z reduciren kann, indem man zu einem Complex (a_{ik}) einen covarianten Punkt (Z_i) mit Hilfe zweier Quadratwurzeln bestimmt, ist von Hrn. Klein in der mehrerwähnten Skizze in Liouville's Journal gezeigt worden. Was die Reduction des Problems der a_{ik} auf das der Y und umgekehrt betrifft, so sei darüber nur folgendes bemerkt: die einfachste Function der a_{ik} , welche zu derselben Untergruppe wie Y_0 gehört, nämlich das A_8 des § 69, führt *nicht* zu Functionen, welche sich wie die Y substituiren; und ebensowenig gibt es einfache Functionen der Y , welche sich wie die ξ resp. die a_{ik} verhalten.

**) Die Ausdrucksweise des Textes setzt voraus, das alle Untergruppen des Index 27, welche unsere Gruppe G besitzen mag, unter einander und insbesondere mit der Untergruppe L des § 64 isomorph sind. Dass dem so ist, wird man wohl annehmen dürfen, da man trotz vielfacher Beschäftigung mit der Gruppe auf keine andern geführt worden ist; indess bedarf es noch des Beweises. Sollte sich das Gegentheil herausstellen, so würden die im Text genannten Gleichungen in mehrere Classen zerfallen, und die Entwicklungen dieses Abschnitts würden nur von einer dieser Classen gelten.

in der Weise dass bezüglich des Conjugirtseins der Wurzeln folgendes gilt: Zu einer Wurzel u_i sind diejenigen 5 Wurzeln v_k conjugirt, deren Index $k \geq i$ ist, ferner diejenigen 5 Wurzeln w_{ik} , deren einer Index $= i$ ist; ebenso zu einer Wurzel v_i diejenigen 5 Wurzeln u_k , deren Index $k \geq i$ ist, ferner diejenigen 5 Wurzeln w_{ik} , deren einer Index $= i$ ist; endlich zu einer Wurzel w_{ik} die 4 Wurzeln u_i , u_k , v_i , v_k , sowie diejenigen Wurzeln w_{im} , deren Indices beide von i und k verschieden sind.

§ 75.

Bildung von Functionen der u , v , w , welche sich wie die ξ , η , ζ des § 65 verhalten.

Unsere Aufgabe ist nun zunächst, aus den u , v , w 6 Functionen ξ zu bilden, welche sich ebenso linear substituiren, wie die ξ des § 65, wenn man die u , v , w auf jede zulässige Weise unter sich vertauscht. Das können wir dahin wenden, dass wir gleich 27 Functionen ξ_i , η_i , ζ_{ik} bilden, welche sich bei solchen Vertauschungen der u , v , w in ganz derselben Weise vertauschen und zwischen welchen dieselben linearen Relationen bestehen, wie zwischen den gleichbezeichneten Functionen des § 65. Die letzteren sind sämtlich Consequenzen der der einen Relation (4) dort und der 30 (übrigens nicht von einander unabhängigen), die sich aus (8) durch Vertauschung der Indices ergeben. Wir brauchen also nur solche Functionen zu suchen, welche jenen Relationen (4) und (8) genügen und welche bei Vertauschung der Indices der u , v , w sich entsprechend vertauschen. Wir machen den Versuch zunächst mit *linearen* Functionen und werden finden, dass er gelingt.

Zunächst stellen wir die allgemeinste Form einer linearen homogenen Function der u , v , w auf, welche ungeändert bleibt, wenn wir unter Festhaltung von u_1 die übrigen Wurzeln auf jede dann noch zulässige Weise permutiren, welche also durch u_1 und die bekannten Grössen sich rational ausdrückt. Dieselbe ist offenbar:

$$(1) \quad \xi_1 = \alpha u_1 + \beta(v_2 + \sum v_i + w_{12} + \sum w_{1i}) + \gamma(v_1 + u_2 + \sum u_i + \sum w_{2i} + \sum w_{im}); \quad (l, m = 3, 4, 5, 6)$$

analog haben wir dann zu bilden:

$$(2) \quad \eta_2 = \alpha v_2 + \beta(u_1 + \sum u_i + w_{12} + \sum w_{2i}) + \gamma(v_1 + u_2 + \sum v_i + \sum w_{1i} + \sum w_{im});$$

$$(3) \quad \zeta_{12} = \alpha w_{12} + \beta(u_1 + u_2 + v_1 + v_2 + \sum w_{im}) + \gamma(\sum u_i + \sum v_i + \sum w_{1i} + \sum w_{2i});$$

sowie diejenigen Ausdrücke, welche aus den angegebenen durch Vertauschung der Indices hervorgehen. Es ist dann:

$$(4) \quad \Sigma \xi_i + \Sigma \eta_i = (\alpha + 5\beta + 6\gamma)(\Sigma u_i + \Sigma v_i) + (4\beta + 8\gamma)\Sigma w_{i,k}$$

und:

$$(5) \quad \xi_1 + \eta_2 + \xi_{12} = (\alpha + 2\beta)(u_1 + v_2 + w_{12}) \\ + (\beta + 2\gamma)(u_2 + v_1 + \Sigma u_i + \Sigma v_i + \Sigma w_{1i} + \Sigma w_{2i} + \Sigma w_{im}).$$

Beide Ausdrücke werden identisch Null, wenn man:

$$(6) \quad \alpha = 4\gamma, \quad \beta = -2\gamma$$

setzt. Bezeichnet also allgemein x_i irgend eine Wurzel unserer Gleichung 27. Grades, C_i die Summe der zu ihr conjugirten Wurzeln, N_i die Summe der zu ihr nicht conjugirten, so sind die 27 linearen Functionen:

$$(7) \quad 4x_i - 2C_i + N_i$$

in der That durch dieselben linearen Relationen verbunden, wie die ξ, η, ζ des § 65; und 6 geeignet ausgewählte unter ihnen sind solche Functionen der Wurzeln u, v, w der vorgelegten Gleichung, welche sich wie die ξ substituiren, wenn die 3 Wurzeln den sämtlichen Permutationen ihrer Gruppe unterworfen werden. Aus diesen „Complexcoordinaten ξ “ ergeben sich dann die „Liniencoordinaten a_{ik} “ durch die Formeln (2) des § 65. Damit ist das von Hrn. Klein*) gestellte Problem „rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung 27. Grades zu finden, welche a_{ik} 's sind“ in der einfachsten Weise erledigt.

§ 76.

Anwendung auf das Problem der 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung.

Zu den Gleichungen der in den beiden letzten Paragraphen betrachteten Art gehört insbesondere auch diejenige, von welcher die Bestimmung der 27 Geraden einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängt (nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante der Fläche).**) Die Bestimmung dieser Geraden aus der vorgelegten Gleichung der Fläche würde also folgende Schritte erfordern:

1. Zuerst ist die Gleichung einer Fläche zu bilden, welche die gegebene in den 27 Geraden schneidet; das ist von Salmon und Clebsch geschehen.***)

2. Aus dieser Gleichung und der der Fläche ist durch Elimination

*) Liouville's Journal, sér. 4, t. 4, p. 172.

**) C. Jordan, vgl. die Citate p. 5.

***) Vgl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II. Bd. art. 324 und Note 168.

eine Gleichung mit nur einer Unbekannten herzustellen. Man mag etwa ein bestimmtes *Büschel linearer Complexe*:

$$\kappa A + \lambda B = 0$$

zu Hilfe nehmen und die Parameter $\kappa : \lambda$ derjenigen 27 Complexe dieses Büschels suchen, welchen die 27 Geraden angehören. Die Coefficienten der resultirenden Gleichung werden dann Simultaninvarianten des aus der Fläche und den beiden Complexen $A = 0$, $B = 0$ bestehenden Systems; anders ausgedrückt, sie werden solche Covarianten der Fläche, welche zwei Reihen von Linienkoordinaten enthalten. Die invariantentheoretische Untersuchung des Systems steht noch aus.*)

3. Aus den 27 Wurzeln $\kappa : \lambda$ setzen sich lineare Functionen a_{ik} in der durch § 74 gegebenen Weise zusammen. Dabei ist zu beachten, dass die Art wie dies geschieht, zunächst den projectiven Charakter der Aufgabe verläugnet, sodass man nicht erwarten darf, dass die auftretenden Formeln eine einfache geometrische Bedeutung besitzen werden. Um eine solche zu finden, müsste man die in den Formeln versteckt liegenden Hilfselemente aufzeigen. Es gilt dies übrigens auch von viel elementarerem Problemen, z. B. von der Lagrange'schen Resolvente der cubischen Gleichung, welche die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks zweier Kegelschnitte bestimmt.

4. Die Bestimmung der aus den a_{ik} zu bildenden Invarianten (§ 71) als Functionen der Covarianten des unter (2) besprochenen Systems wird keine Schwierigkeit mehr bieten, sobald man dieses System erst beherrscht.

5. Die Reduction des Problems der a_{ik} auf das der z geschieht auf dem von Hrn. Klein a. a. O. angegebenen Wege.

6. Aus den Invarianten der z berechnen sich die Coefficienten g des hyperelliptischen Gebildes nach § 68.

7. Wegen der Berechnung der Perioden vergleiche man diese Annalen p. 278; für unseren Fall käme gerade der dort erwähnte Ansatz des Hrn. Milewski in Betracht**).

8. Aus den z sind wieder die a_{ik} zu berechnen, aus diesen die ξ , η , ζ .

9. Aus den ξ , η , ζ erhält man die $\kappa : \lambda$ als zu ihnen ähnliche Functionen nach der Methode von Lagrange.

10. Zu jedem dieser Werthe $\kappa : \lambda$ findet man die Coordinaten der zugehörigen Geraden nach derselben Methode.

*) De Paolis' ricerche sulle superficie del 3° ordine (memorie dell' acc. dei Lincei ser. III, t. 10, 1880) enthalten p. 149 einen Anfang dazu.

**) [Neuerdings hat Hr. Lindemann in den Göttinger Nachrichten v. J. 1892 eine Untersuchungen weiter geführt] .

Damit mögen diese Untersuchungen abgeschlossen sein; nur zwei Bemerkungen allgemeineren Charakters seien noch beigelegt.

Einmal: unsere Gruppen besitzen 25920 bezw. 51840 Substitutionen; von den bisher vollständig untersuchten einfachen endlichen Gruppen linearer Substitutionen hat die höchste Ordnungszahl — 168 — diejenige ternäre Gruppe, welche aus der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen entspringt. Bei dieser können noch eine Reihe von Fragen durch ganz elementares Ausrechnen erledigt werden, auf deren Lösung wir bei unserer Gruppe verzichten mussten; dahin gehört namentlich die Aufstellung von Resolventen. Man wird dazu neue Kunstgriffe ausfindig machen müssen; die dazu erforderlichen Versuchsrechnungen wird man aber zweckmässigerweise an solchen Gruppen anstellen, deren Ordnungszahl zwischen den genannten Grenzen liegen.

Die andere Bemerkung ist folgende: die Resultate zu welchen wir gelangt sind, haben wir nur erreicht durch Heranziehung aller Hilfsmittel, welche die Riemann'sche Functionentheorie, Invariantentheorie im engeren Sinne, Liniengeometrie, Galois'sche Gleichungstheorie der Untersuchung darbieten. Als ein Beitrag zu den jetzt immer mächtiger durchdringenden Bestrebungen, diese verschiedenen Disciplinen aus ihrer gegenseitigen Isolirung zu befreien, wollen diese Untersuchungen verstanden sein.

Göttingen, Januar 1892.