

Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke. *)

Von

ROBERT KÖNIG in Leipzig.

Zum Nachweis der Existenz der eindeutigen algebraischen Funktionen und ihrer Integrale auf einer gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche hat man im wesentlichen zwei Methoden: die kombinatorische Methode von Neumann-Schwarz und die schon von Riemann verwendete, von Hilbert aber erst streng begründete Methode des *Dirichletschen Prinzips*. **) Während die erstere bereits für den Fall ausgebildet wurde, daß die Riemannsche Fläche nicht einfach mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet oder als durchaus reguläre Fläche im Raum liegend vorgestellt wird, sondern man es mit einer „*Riemannschen Mannigfaltigkeit*“ im allgemeinen Sinne von Klein ***) zu tun hat, ist das mit der letzteren Methode bisher noch nicht der Fall, sondern bildet vielmehr den Gegenstand eines Teils der vorliegenden Arbeit.

Wir nehmen dabei an, die Riemannsche Mannigfaltigkeit bestehe aus einer endlichen Anzahl verschiedener Flächenstücke, welche, längs Kanten

*) Zur Litteratur des Problems siehe: H. A. Schwarz, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, Monatsber. d. K. Akademie d. Wiss. zu Berlin 1870, S. 767—795 \equiv Ges. Math. Abhandlungen, Bd. II, S. 144—171, insbes. S. 167; P. Koebe, Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 19. Dez. 1908, S. 359—360; R. König, Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke, ebenda, 26. Febr. 1910; letztere Note ist eine Anzeige der vorliegenden Arbeit des Verfassers.

**) Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, Math. Ann. 59 (im folgenden kurz „Hilbert, I“ zitiert).

***) Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Math. Ann. 21, insbes. § 1 und § 6. Siehe auch F. Klein, „Riemannsche Flächen“, I, S. 32.

und in Ecken zusammenstoßend, eine geschlossene Fläche bilden. *) Es handelt sich alsdann um den Nachweis, daß ein eine Ecke im Innern enthaltendes Flächenstück konform — im Eckpunkt selbst nur stetig — auf einen schlichten ebenen Bereich abgebildet werden kann. **)

Dieses im Jahre 1870 von H. A. Schwarz l. c. gestellte Abbildungsproblem, welches Herr Schwarz selbst nur in dem speziellen Falle einer von lauter ebenen oder kugelförmigen Flächenstücken gebildeten Ecke gelöst hatte, wurde zum erstenmal allgemein von Herrn P. Koebe im Zusammenhang mit der von ihm entwickelten allgemeinen Abbildungstheorie (l. c.) gelöst. Die Anregung zur Behandlung dieses Problems durch zweckentsprechende Ausgestaltung des Dirichletschen Prinzips verdanke ich Herrn Hilbert.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Kanten; im zweiten wird die Zurückführung der Abbildungsaufgabe auf ein Minimalproblem nach Hilbert ***) kurz angegeben; das im dritten Teil entwickelte Verfahren hat große Analogie mit dem *Prinzip der analytischen Fortsetzung*. Die Potentialfunktion, auf deren Existenznachweis es im wesentlichen ankommt, wird zuerst in der Umgebung eines beliebig, aber fest gewählten Punktes definiert, dann in einem Bereich, welcher den ersten teilweise überdeckt usw. fort, bis schließlich der Definitionsbereich der Funktion über die ganze Fläche ausgebreitet ist. Der Eckpunkt stellt sich dabei natürlich als Grenzpunkt heraus, und der Untersuchung des Verhaltens der Funktion in diesem Punkt ist dann der vierte (letzte) Teil der Arbeit gewidmet.

I.

Vorbemerkungen. Über die Kanten.

1. Der abzubildende, einfach zusammenhängende Bereich Ω werde von endlich vielen, regulär analytischen Flächenstücken gebildet, welche in einem Punkt E zusammenstoßen. Jedes einzelne Flächenstück soll dabei mit einem von Null verschiedenen Winkel an E heranreichen. Die

*) In derselben Weise läßt sich auch der Fall erledigen, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit in Gestalt eines „*Fundamentaltereiches*“ sehr allgemeiner Natur vorliegt, worauf ich später zurückzukommen gedenke.

**) Welcher Art diese Flächenstücke und Ecken sein können, wird sogleich unten näher präzisiert.

***) Hilbert, Zur Theorie der konformen Abbildung, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 17. Juli 1909. (Im folgenden kurz „Hilbert, II“ zitiert.) Dasselbst findet man eine Zusammenstellung der Litteratur über das Dirichletsche Prinzip. S. auch Courant, Zur Begründung des Dirichletschen Prinzips, Gött. Nachr. 1910, S. 154—160.

Berandung von Ω bestehe aus einer gewöhnlichen Kurve \mathfrak{C} . Der zweifach zusammenhängende Bereich, welcher aus dem nicht abgeschlossenen Bereich Ω durch Fortnahme des Eckpunktes entsteht, werde mit $\bar{\Omega}$ bezeichnet.

2. Da wir im folgenden sehr häufig einige in der Flächentheorie gebräuchlichen Bezeichnungen und Sätze anzuwenden haben werden, mögen dieselben gleich hier, um später Unterbrechungen zu vermeiden, angeführt werden.*) Haben wir zunächst ein singularitätenfreies Flächenstück mit dem Bogenelement

$$(1) \quad ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

unter u, v geeignete krummlinige Koordinaten verstanden, so lauten die Beltramischen Differentialparameter 1. und 2. Ordnung:

$$(2a) \quad \Delta_1 \varphi = \frac{e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2f \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2}{eg - f^2},$$

$$(2b) \quad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{e \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + g \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{eg - f^2},$$

$$(2c) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{eg - f^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{g \frac{\partial \varphi}{\partial u} - f \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{eg - f^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e \frac{\partial \varphi}{\partial v} - f \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{eg - f^2}} \right] \right\},$$

und es besteht, wenn $\varphi(uv) = \text{konst.}$ die Gleichung einer Kurvenschar, $\frac{\partial \varphi}{\partial n_\varphi}$ die Ableitung von φ nach der Normalen zu einer Kurve der Schar bedeutet, die Identität:**)

$$(3) \quad \Delta_1 \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_\varphi} \right)^2.$$

Ist andererseits φ eine Lösung der Gleichung $\Delta_2 \varphi = 0$, so kann φ bekanntlich als der Realteil einer komplexen Funktion des Ortes auf der Fläche $\varphi + i\psi$ aufgefaßt werden, und es besteht (genau wie in der Ebene) zwischen Real- und Imaginärteil die Beziehung***)

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

*) Man vgl. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Deutsch von M. Lukat, 1. Aufl., Kap. III, S. 67—72. Darboux, Théorie générale des surfaces, Bd. III, S. 193—217. Beide Werke werden im folgenden kurz „Bianchi“ bzw. „Darboux“ zitiert.

**) Darboux, Bd. III, S. 195, Formel 7.

***) Dieselbe ist eine unmittelbare Folge der Definition der „konjugierten“ Funktion (Bianchi, S. 69, Formel 21) und kann z. B. aus den in Darboux, Bd. III, S. 193—199 gegebenen Formeln ohne weiteres entnommen werden, indem in der dortigen Bezeichnungsweise (S. 198, Formel 14 und S. 199, zweite Formel von unten)

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = -N du + M dv = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

wenn die Ableitungen nach zwei zueinander senkrechten, in der üblichen Weise orientierten Richtungen auf der Fläche genommen sind. Führt man die Kurven $\varphi = \text{konst.}$ und $\psi = \text{konst.}$ selbst als Parameterlinien ein, so bilden diese ein *isothermes* System, indem (1) die Gestalt erhält

$$(5) \quad ds^2 = \lambda(d\varphi^2 + d\psi^2), \quad \lambda = \frac{1}{\Delta_1 \varphi},$$

und die Ausdrücke (2) nehmen eine dementsprechend einfache Gestalt an. Wir nennen schließlich ein System (u, v) in einem Bereich T *regulär*, wenn einem Wertepaar (u, v) ein und nur ein Punkt von T entspricht und umgekehrt, und $e, g, eg - f^2$ in T zwischen zwei festen positiven Größen bleiben.

3. Ist P ein beliebiger Punkt von $\bar{\Omega}$, so kann allemal eine gewisse Umgebung desselben (P mit inbegriffen) „auf ein reguläres isothermes Parametersystem (u, v) bezogen“ oder m. a. W. umkehrbar eindeutig und konform auf ein Stück der (u, v) Ebene abgebildet werden. Wir brauchen das offenbar nur zu zeigen, falls P ein auf einer Kante gelegener Punkt ist. *)

Es läßt sich in diesem Falle zunächst (auf unendlich viele Arten) ein in einer gewissen Umgebung von P reguläres Parametersystem (p, q) angeben von der Art, daß die Kurven $p = \text{konst.}$, $q = \text{konst.}$ „*richtungstreu*“ und die Fundamentalgrößen in dem Ausdruck für das Bogenelement der Fläche *stetig* über die Kante gehen. Wir sagen dabei von einer Kurve, sie gehe „*richtungstreu*“ über eine Kante, wenn sie mit der Kantennormalen zu beiden Seiten der Kante denselben Winkel bildet. Ein System dieser Art erhalten wir z. B. folgendermaßen:**)

Wir denken uns längs eines gewissen den Punkt P im Innern enthaltenden Stücks AA' der Kante die zu derselben normalen geodätischen Linien nach beiden Seiten gelegt und charakterisieren die Lage eines Punktes M in der Umgebung der Kante durch Angabe des Bogens $q = AQ$, welcher von der durch M laufenden geodätischen Linie auf AA' abgeschnitten wird und die Länge $p = MQ$; letztere zählen wir positiv

*) Während die Bemerkung betreffend die Möglichkeit der konformen Abbildung eines nicht analytischen Flächenstücks, welche man in Darboux, Bd. IV, S. 367, Note I von Picard, findet, nicht richtig ist, ist es auf Grund der folgenden Arbeiten von E. E. Levi in der Tat ohne weiteres möglich, diese Abbildung für die Umgebung eines *gewöhnlichen* Punktes zu leisten: „Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali“, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo 24 (1907); „I problemi dei valori al contorno etc.“, Memorie d. Società Italiana delle Scienze, Serie 3^a, 16. Für die ganze übrige Methode macht es übrigens keinen Unterschied aus, ob die Flächenstücke analytisch sind oder nicht. Wegen der Abbildung nicht analytischer Flächenstücke sei noch auf eine demnächst in den Ber. d. Berliner Akademie erscheinende Abhandlung des Herrn L. Lichtenstein hingewiesen.

**) Darboux, Bd. II, S. 412—414.

bezw. negativ, je nachdem M auf der einen oder anderen Seite der Kante liegt und zwar so, daß die Richtungen wachsender p und wachsender q in der üblichen Orientierung zueinander stehen. In den Gebieten zu beiden Seiten der Kante, die wir durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden, erhält das Bogenelement die Gestalt

$$(6) \quad ds^2 = dp^2 + C_i^2(pq) dq^2 \quad (i=1,2)$$

und es ist längs AA' , d. i. für $p=0$

$$(7) \quad C_1 = C_2 = 1.$$

Bei Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung von P ist das System (p, q) überdies regulär.*)

Sei nun ω_1 ein innerhalb dieser Umgebung befindliches, von einer Seite her an die Kante anstoßendes Flächenstück; da jede einzelne Teilfläche von Ω als regulär analytisch vorausgesetzt wurde, können wir uns ω_1 über die Kante hinaus ein Stück fortgesetzt und die analytische Funktion C_1 in dem so erweiterten Stück erklärt denken. Da sich ferner die Gleichung

$$(8) \quad \Delta_2 u \equiv \frac{1}{C_1^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{C_1} \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right\} = 0$$

nach $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$ auflösen läßt, so existiert daher in ω_1 eine eindeutig bestimmte

Lösung u_1 derselben, wenn wir für $p=0$ die Werte von u_1 und $\frac{\partial u_1}{\partial p}$ als analytische Funktionen von q willkürlich vorschreiben. Das Analoge gilt für die andere Kantenseite. Es seien nun u_1, u_2 speziell zwei derartige Lösungen der Gleichung (8) in ω_1 bzw. ω_2 , daß längs der Kante die Bedingungen erfüllt sind

$$(9a) \quad u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial p} = \frac{\partial u_2}{\partial p},$$

$$(9b) \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial q} \right)^2 = 0,$$

v_1, v_2 die konjugierten Funktionen. Wird über die willkürlichen additiven Konstanten derart verfügt, daß in einem Punkte der Kante $v_1 = v_2$ ist, so stimmen die Werte von v_1, v_2 wegen (4), (9a) längs des ganzen in betracht gezogenen Kantenstückes überein. Die Funktion $u + iv$, welche in ω_1 mit $u_1 + iv_1$, in ω_2 mit $u_2 + iv_2$ übereinstimmt, vermittelt dann die gewünschte Abbildung.

Da nach (9a) die Ableitungen von u , genommen nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen (der Kanten- und Normalenrichtung) zu beiden Seiten der Kante übereinstimmen, gilt das gleiche von den Ableitungen nach einer beliebigen Richtung, woraus unmittelbar folgt, daß

*) Darboux, loc. cit.

einerseits die Kurven $u = \text{konst.}$ und ebenso die Kurven $v = \text{konst.}$ richtungstreu über die Kante gehen, und andererseits in Verbindung dieser Tatsache mit (3), daß auch $\Delta_1 u$ stetig über die Kante geht. Da das Bogenelement bei Einführung der u - und v -Kurven als Parameterlinien die Gestalt (5) erhält und längs der Kante $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = 0$ ist (7), so geht auch λ stetig über die Kante, und das System (u, v) ist bei Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung von P regulär.

4. Jetzt sind wir in der Lage, folgende Definitionen aufstellen zu können: Eine reelle Funktion des Ortes auf der Fläche heiße in einem Punkte von $\bar{\Omega}$ — sei es ein gewöhnlicher oder Kantenpunkt — stetig differenzierbar bzw. harmonisch, wenn sie als Funktion eines regulären Isothermensystems (u, v) daselbst stetig differenzierbar bzw. harmonisch ist; ebenso verstehen wir unter einer komplexen Funktion des Ortes auf der Fläche eine komplexe Funktion von $u + iv$ im gewöhnlichen Sinne. Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl des benutzten Isothermensystems.

Ist Φ irgend eine stetig differenzierbare Funktion, Φ_k ihr Wert in einem Kantenpunkt, und sind nicht beide Ableitungen daselbst gleich Null, so geht die Kurve $\Phi = \Phi_k$ richtungstreu und der Beltramische Differentialparameter $\Delta_1 \Phi$ stetig über die Kante.

II.

Zurückführung der Abbildungsaufgabe auf ein Minimalproblem.

5. Das Problem, den Bereich Ω (präziser: das Innere von Ω) auf die schlichte, mit einem geradlinigen Schlitz versehene Ebene konform — im Eckpunkt selbst nur stetig — abzubilden, ist offenbar äquivalent mit der Auffindung einer eindeutigen, einwertigen*) komplexen Funktion des Ortes auf der Fläche, $U + iV$, welche in einem Punkt von $\bar{\Omega}$ einen Pol erster Ordnung besitzt, sich sonst in $\bar{\Omega}$ regulär verhält, im Eckpunkt stetig ist und deren Imaginärteil auf dem Rande einen konstanten Wert hat.

Nach „Hilbert, II“ läßt sich diese Aufgabe auf das folgende Minimalproblem zurückführen. O sei ein beliebiger, aber fest gewählter Punkt von $\bar{\Omega}$, zugleich Anfangspunkt eines in einer gewissen Umgebung ω_0 desselben regulären Isothermensystems (u, v) . Die gesuchte Funktion $U + iV$ möge daselbst unstetig werden wie $\frac{1}{u + iv} + (o)$, wobei (o) eine in O reguläre Funktion bezeichnet. Wir legen um O als Mittelpunkt einen kleinen „Kreis“ und ein denselben einschließendes Quadrat, wodurch

*) D. h. einer Funktion, welche jeden Wert nur einmal annimmt.

ω_0 in drei Teile zerfällt*): in das Innere des Kreises (K), das Stück zwischen Kreis und Quadrat (Q) und schließlich den übrigen Teil von ω_0 außerhalb des Quadrates (A). Das ganze Gebiet Ω wird durch die Randlinie des Quadrates in die beiden Bereiche $\Omega_0 = K + Q$ und Ω_1 zerlegt. Wir definieren nun mit Hilbert**) die Funktionen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi = \frac{u}{u^2 + v^2} & \text{in } K \\ = 0 & \text{in } \Omega_1 \\ = \text{einer einschließlich des Randes zweimal stetig differenzierbaren} & \\ \quad \text{Funktion in } Q; & \end{array} \right.$$

$$(11) \quad C = \frac{u}{u^2 + v^2} - \Phi \quad \text{in } \Omega_0;$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \gamma = \Delta C \equiv \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} & \text{in } \Omega_0, \\ = 0 & \text{in } \Omega_1. \end{array} \right.$$

γ ist eine in Ω eindeutige, stetige Funktion und es lassen sich zwei stetig differenzierbare, nur in Ω_0 nicht identisch verschwindende Funktionen α und β angeben***) derart, daß in Ω_0 die Gleichung besteht:

$$(13) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} = \gamma.$$

Das Bogenelement in ω_0 von der Form $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ annehmend, setzen wir:

$$(14a) \quad \begin{aligned} \Delta_1^* \varphi &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \beta \right)^2 \right\} & \text{in } \Omega_0, \\ &= \Delta_1 \varphi & \text{in } \Omega_1, \end{aligned}$$

$$(14b) \quad \begin{aligned} \nabla^*(\varphi, \xi) &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \alpha \right) \frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \beta \right) \frac{\partial \xi}{\partial v} \right\} & \text{in } \Omega_0, \\ &= \nabla(\varphi, \xi) & \text{in } \Omega_1. \end{aligned}$$

Welche Parametersysteme wir dabei in Ω_1 zur Erklärung der Beltrami'schen Differentialparameter verwenden, ist wegen ihrer bekannten Invarianteneigenschaft gleichgültig. Bezeichnen wir schließlich die Ausdrücke

$$(15) \quad D(\varphi) = \iint_{\Omega} \Delta_1 \varphi \cdot d\omega, \quad D^*(\varphi) = \iint_{\Omega} \Delta_1^* \varphi \cdot d\omega$$

als *Dirichletsches*, bzw. *Dirichlet-Hilbertsches Integral*, so besteht unser

*) Wenn ich hier und im folgenden von der Konstruktion „eines Kreises, Rechtecks etc. auf der Fläche“ spreche, so ist das so zu verstehen, daß die betreffenden Figuren in der Bild- (u, v) -Ebene wirklich als Kreis, Rechteck etc. erscheinen.

**) „Hilbert, II“, S. 316–317,

***) „Hilbert, II“, S. 317.

Problem darin, erstens die Existenz einer wirklichen Minimalfunktion φ für das Dirichlet-Hilbertsche Integral nachzuweisen und zweitens zu zeigen, daß die durch ihren Realteil $U = \varphi + \Phi$ definierte komplexe Funktion $U + iV$ die an der Spitze des Abschnittes geforderten Eigenschaften besitzt.

III.

Erledigung des Minimalproblems.

6. Zur Konkurrenz lassen wir alle solchen Funktionen des Ortes auf der Fläche zu, welche in $\bar{\Omega}$ erstens wohl definiert, eindeutig und stetig, zweitens daselbst auch stückweise stetig differenzierbar sind, und drittens für das Dirichletsche Integral einen endlichen Wert liefern. Es besitzt alsdann auch das Dirichlet-Hilbertsche Integral einen endlichen Wert, und d sei die untere Grenze dieser Integralwerte für sämtliche zulässige Funktionen.

Aus letzteren wählen wir eine solche Folge $\{\varphi\} = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ aus, daß die zugehörigen Integralwerte gegen die untere Grenze d konvergieren und zwar so, daß die ε_n eine abnehmende Folge bilden

$$\varepsilon_{n+m} < \varepsilon_n \quad (n, m = 1, 2, \dots).$$

Dann gelten die Ungleichungen*)

*) S. B. Levi, Sul principio di Dirichlet, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo 32 (1906, 2) § 7. Die erstere Ungleichung folgt aus der einfachen Bemerkung, daß

$$D^*(\varphi_n + g\xi) = D^*(\varphi_n) + 2gD^*(\varphi_n, \xi) + g^2D(\xi) \geq d,$$

insbesondere auch für den Wert der Konstanten g , für welchen die (in g) quadratische Funktion ihr Minimum annimmt. Die zweite kann folgendermaßen hergeleitet werden: Setzen wir

$$\varphi_{n+m} = \varphi_n + (\varphi_{n+m} - \varphi_n)$$

und zur Abkürzung

$$\varphi_{n+m} - \varphi_n = \varphi_{n,m},$$

dann folgt

$$D^*(\varphi_{n,m}) = D^*(\varphi_n) + 2D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m}) + D(\varphi_{n,m}),$$

$$\varepsilon_{n+m} - \varepsilon_n - 2D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m}) = D(\varphi_{n,m})$$

und wegen $\varepsilon_{n+m} < \varepsilon_n$

$$-2D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m}) > D(\varphi_{n,m}),$$

$$4\{D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m})\}^2 > D^2(\varphi_{n,m}),$$

Andererseits ist nach (16)

$$D(\varphi_{n,m}) \varepsilon_n \geq \{D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m})\}^2,$$

also

$$4^2 D^2(\varphi_{n,m}) \varepsilon_n^2 \geq 4^2 \{D^*(\varphi_n, \varphi_{n,m})\}^4 > D^4(\varphi_{n,m}),$$

und da $D(\varphi_{n,m}) \neq 0$,

$$4^2 \varepsilon_n^2 > D^2(\varphi_{n,m}),$$

$$4\varepsilon_n > D(\varphi_{n,m}) \quad \text{q. e. d.}$$

$$(16) \quad \{D^*(\varphi_n, \xi)\}^2 \equiv \left\{ \int_{\Omega} \nabla^*(\varphi_n, \xi) d\omega \right\}^2 \leq D(\xi) \varepsilon_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

— ξ bedeutet hierbei eine beliebige zulässige Funktion — und

$$(17) \quad D(\varphi_{n+m} - \varphi_n) \equiv \int_{\Omega} \Delta_1(\varphi_{n+m} - \varphi_n) d\omega < 4\varepsilon_n \quad (n, m=1, 2, \dots).$$

Aus (16) folgt die Limesgleichung*)

$$(16a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D^*(\varphi_n, \xi) = 0.$$

Aus diesen beiden Tatsachen wird die Existenz einer wirklichen Minimalfunktion hergeleitet. Wie Herr H. Weyl zuerst allgemein erkannt hat, bedarf es dann nicht mehr des Hilbertschen Auswahlverfahrens**) — ein Umstand, dessen sich in spezieller Fassung schon W. Ritz***) bedient hatte, um die Konvergenz seiner „sukzessiven Approximationen“ der Minimalfunktion nachzuweisen.

Wir denken uns schließlich die in den Funktionen der Folge $\{\varphi\}$ willkürlichen additiven Konstanten so normiert, daß

$$(18) \quad \int_{S_0} \varphi_n dv = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

wobei S_0 ein innerhalb ω_0 gelegenes Stück einer Kurve $u = \text{konst.}$ bedeutet.

7. Sehen wir zunächst zu, welche Folgerungen sich aus der fundamentalen Ungleichung (17) ableiten lassen. Sei T ein beliebiges, auf ein reguläres Isothermensystem (x, y) bezogenes Teilgebiet von Ω , R ein in demselben befindliches Rechteck mit den Seiten

$$x = a, x = b \ (b > a); \quad y = a', y = b' \ (b' > a').$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(19) \quad \varphi_{n+m} - \varphi_n = \varphi_{n,m}; \quad \int_{x=a}^b \varphi_{n,m} dy = \Phi_{n,m}; \quad 4\varepsilon_n(b-a)(b'-a') = \delta_n^2.$$

Da $\Delta_1 \varphi_{n,m}$ wegen $e > 0$, $eg - f^2 > 0$ positiv definit ist, so gilt die Ungleichung (17) a fortiori, wenn das Integral nicht über ganz Ω , sondern bloß über ein Teilgebiet von Ω erstreckt wird; insbesondere ist für ein beliebiges Teilgebiet R' von R

$$\iint_{R'} \Delta_1 \varphi_{n,m} d\omega \equiv \iint_{R'} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy < 4\varepsilon_n$$

*) S. „Hilbert, I“ § 7.

**) „Hilbert, I“ § 5.

*** „Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik“, J. f. Math. 135, § 13 u. 14.

und a fortiori

$$\iint_R \left(\frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial x} \right)^2 dx dy < 4\varepsilon_n,$$

woraus nach der bekannten Schwarzschen Ungleichung folgt

$$(20a) \quad \left| \iint_R \frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial x} dx dy \right| < \delta_n,$$

und analog

$$(20b) \quad \left| \iint_R \frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial y} dx dy \right| < \delta_n.$$

Durch Anwendung von (20a) auf ein Teilrechteck von R mit den Seiten

$$x = a, \quad x(a \leq x \leq b); \quad y = a', \quad b'$$

und Ausführung der Integration nach x ergibt sich

$$(21) \quad \left| \int_{y=a'}^{b'} \varphi_{n,m}(xy) dy \right| < \delta_n + |\Phi_{n,m}| \quad a \leq x \leq b;$$

und daraus:

$$(22) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{a'}^{b'} \varphi_{n,m}(xy) dx dy \right| < \delta_n(b-a) + |\Phi_{n,m}|(b-a); \quad a \leq x_1, \quad x_2 \leq b.$$

Analog ergibt die Anwendung von (20b) auf ein Teilrechteck mit den Seiten $x = x_1, x_2(a \leq x_1, x_2 \leq b); y = a', y(a' \leq y \leq b)$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n,m}(xy) dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n,m}(xa') dx \right| = |A_{n,m}| \leq \delta_n,$$

$$\left| \int_{y=a'}^{b'} A_{n,m} dy \right| \leq \delta_n(b' - a'),$$

und daraus wegen (22)

$$(23) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n,m}(xa') dx \right| < \delta_n \left(1 + \frac{b-a}{b'-a'} \right) + |\Phi_{n,m}| \frac{b-a}{b'-a'}.$$

Nochmalige Anwendung von (20b) ergibt schließlich die wichtige Abschätzung

$$(I) \quad \left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n,m}(xy) dx \right| < \delta_n \left(2 + \frac{b-a}{b'-a'} \right) + |\Phi_{n,m}| \cdot \frac{b-a}{b'-a'} \quad \begin{array}{l} a \leq x_1, \quad x_2 \leq b, \\ a' \leq y \leq b'. \end{array}$$

Dieselben Schritte, welche zur Herleitung von (23) geführt haben, nur unter Bevorzugung von y wiederholend, findet man unter Benutzung von (I)

$$(II) \quad \left| \int_{y_1}^{y_2} \varphi_{n,m}(xy) dy \right| < \delta_n \left(3 + 2 \frac{b' - a'}{b - a} \right) + |\Phi_{n,m}| \quad \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ a' \leq y_1, y_2 \leq b. \end{array}$$

Die beiden letzten Ungleichungen bleiben auch bestehen, wenn die Integrale über ein beliebiges in R gelegenes, stetig differenzierbares Kurvenstück, das von einer x - bzw. y -Kurve nur in einem Punkte getroffen wird, — oder wie wir kürzer sagen wollen, glattes monotones Kurvenstück — erstreckt werden.

8a. Wir wenden jetzt die gefundenen Abschätzungen auf den Bereich ω_0 und ein in demselben befindliches Rechteck R_0 an, als dessen eine Seite wir das Kurvenstück S_0 wählen. Nach Voraussetzung (18) ist $\int_{S_0} \varphi_{n,m} dv = 0$ ($n, m = 1, 2, \dots$), woraus auf Grund von (I), (II) der Satz resultiert: Die über eine v - bzw. u -Kurve erstreckten Integrale

$$(24) \quad \int_{u_1}^{u_2} \varphi_n(uv) du \quad \text{bzw.} \quad \int_{v_1}^{v_2} \varphi_n(uv) dv$$

konvergieren gleichmäßig für alle Werte der Variablen u_1, u_2, v bzw. u, u_1, v_2 in R_0 , und es stellen demnach — unter u_0, v_0 einen festen Punkt in R_0 verstanden — die Ausdrücke

$$\mathbf{L}_{n=\infty} \int_{u_0}^u \varphi_n du \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_{n=\infty} \int_{v_0}^v \varphi_n dv$$

zwei stetige Funktionen von (u, v) in R_0 dar.

Ist ferner S ein in R_0 befindliches glattes monotones Kurvenstück, sodaß wir einen variablen Punkt auf S sowohl durch Angabe seiner u - wie seiner v -Koordinate charakterisieren können, so folgt nach der Bemerkung am Schlusse des vorigen Abschnittes, daß auch die längs S erstreckten Integrale

$$\int_{u'}^{u''} \varphi_n du \quad \text{und} \quad \int_{v'}^{v''} \varphi_n dv$$

mit unbegrenzt wachsendem n konvergieren und zwar gleichmäßig für alle Punkte u', u'' bzw. v', v'' auf S .

Wie man sich mittels partieller Integration leicht überzeugt*), konvergieren alsdann auch die Integrale

$$\int_S \varphi_n f du \quad \text{und} \quad \int_S \varphi_n f dv,$$

wenn f irgend eine stetig differenzierbare Funktion bedeutet.

*) S. „Hilbert, I“ § 9.

Man hat nur (I), (II) wiederholt zu benutzen, um zu erkennen, daß alle Resultate auch für ein beliebiges in ω_0 befindliches Rechteck bestehen bleiben.

8b. Nachdem wir so aus der fundamentalen Ungleichung (17) alle nötigen Folgerungen abgeleitet haben, ergibt die Anwendung der fundamentalen Gleichung (16a) nach Hilbert*) und Ritz**) die Existenz der Funktion

$$(25) \quad \varphi = \lim_{\Delta u=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_u^{u+\Delta u} \varphi_n du}{\int_u^{u+\Delta u} du} = \lim_{\Delta v=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_v^{v+\Delta v} \varphi_n dv}{\int_v^{v+\Delta v} dv},$$

und ferner, daß dieselbe innerhalb R stetig differenzierbar ist und der Gleichung genügt

$$(26) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v}.$$

Da aber R ein beliebiges Rechteck in ω_0 sein konnte und α, β nur in Ω_0 von Null verschieden sind, ist also durch Formel (25) φ im Innern des Bereiches ω_0 als eine eindeutige, stetig differenzierbare und — vom Bereich Ω_0 abgesehen, wo sie der Gleichung (20) genügt — harmonische Funktion von (u, v) erklärt.

9 Bevor wir daran gehen, den Definitionsbereich der Funktion φ zu erweitern, bemerken wir Folgendes. Sei wieder R ein beliebiges Rechteck innerhalb ω_0 , C ein in demselben verlaufendes, glattes monotones Kurvenstück.

Es folgt zunächst aus der Definition von φ (24), (25) unmittelbar, daß

$$(27a) \quad \lim_{n=\infty} \int_{u_1}^{u_2} (\varphi_n - \varphi) du = 0,$$

$$(27b) \quad \lim_{n=\infty} \int_{v_1}^{v_2} (\varphi_n - \varphi) dv = 0,$$

und zwar konvergieren die über eine v - bzw. u -Kurve erstreckten Integrale gleichmäßig für alle Werte von u_1, u_2, v bzw. u, v_1, v_2 gegen Null. Es ist aber auch

$$(28a) \quad \lim_{n=\infty} \int_{C'}^{C''} (\varphi_n - \varphi) du = 0,$$

$$(28b) \quad \lim_{n=\infty} \int_{C'}^{C''} (\varphi_n - \varphi) dv = 0,$$

*) Hilbert, I^a § 7.

**) W. Ritz, loc. cit. § 14.

wobei die längs C erstreckten Integrale gleichmäßig für alle Punkte u', u'' bzw. v', v'' auf C konvergieren.

Denn ist ε eine beliebig klein vorgegebene positive Größe, so approximieren wir unsere Kurve C durch einen aus abwechselnd zur u - und v -Achse parallelen Stücken bestehenden, in R verlaufenden und C nicht durchsetzenden Kurvenzug C' derart, daß das zwischen C und C' befindliche Gebiet Γ kleiner oder gleich δ^2 ausfällt. Unter der Größe δ verstehen wir hierbei die kleinere der beiden Zahlen $\frac{\varepsilon}{3\sqrt{d_1}}$ und $\frac{\varepsilon}{3\sqrt{D_R^*(\varphi)}}$, wobei $d_1 = D^*(\varphi_1)$, und $D_R^*(\varphi)$ den Wert des Dirichlet-Hilbertschen Integrals von φ für das Gebiet R bedeutet. Jedem zur u -Achse parallelen Stücke Δ_i von C' entspricht auf C ein Abschnitt $\bar{\Delta}_i$; H sei die Anzahl dieser Stücke. Enthält R ganz oder teilweise das Gebiet Ω_0 , setze ich noch

$$(29) \quad B(uv) = \int_{v=a'}^v \beta(uv) dv \quad (v = a' \text{ eine Seite von } R).$$

Es ist dann identisch für jeden Wert des Index n :

$$(30) \quad \begin{aligned} \int_{\bar{\Delta}_i}^{u''} (\varphi_n - \varphi) du &= \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du \right\} + \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du \right\} \\ &\quad + \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du \right\}. \end{aligned}$$

Wird mit $\Gamma_{(u', u'')}$ das zwischen den Kurven $u = u'$, $u = u''$ befindliche Stück von Γ bezeichnet, so folgt weiter mit Rücksicht auf (29)

$$\left| \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi_n - B) du \right\} \right| = \left| \int_{\Gamma(u', u'')} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} - \beta \right) du dv \right|$$

und nach der Schwarzischen Ungleichung

$$\leq \sqrt{D_{\Gamma(u', u'')}^*(\varphi_n)} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma(u', u'')} du dv} \leq \sqrt{D^*(\varphi_n)} \cdot \delta \leq \sqrt{d_1} \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

und analog

$$\left| \sum_i \left\{ \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du - \int_{\bar{\Delta}_i} (\varphi - B) du \right\} \right| \leq \sqrt{D_R^*(\varphi)} \cdot \sqrt{H} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen (27a) können wir jetzt einen Wert N des Index n angeben, derart, daß für alle $n \geq N$ und jedes beliebige zur u -Achse parallele Stück Δ_i in R

$$\left| \int_{\Delta_i} (\varphi_n - \varphi) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{3H}.$$

Es folgt dann für den zweiten Bestandteil der rechten Seite von (30)

$$\left| \sum_i \left\{ \int_{\Delta_i} (\varphi_n - B) du - \int_{\Delta_i} (\varphi - B) du \right\} \right| \leq \sum_i \left| \int_{\Delta_i} (\varphi_n - \varphi) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mithin ist für alle $n \geq N$ und zwei beliebige Punkte u', u'' auf C

$$\left| \int_{C^{u' u''}} (\varphi_n - \varphi) du \right| \leq \varepsilon \quad \text{q. e. d.}$$

Der Beweis für die Gleichung (28b) verläuft analog.

10. Sei jetzt ω_1 ein zweiter auf ein reguläres Isothermensystem (u_1, v_1) bezogener Bereich, welcher den ersten ω_0 teilweise überdecken möge. In dem beiden gemeinsamen Bereich ω_{01} sind u_1, v_1 reguläre harmonische Funktionen von u, v und umgekehrt. Um die Definition von φ auf den neuen Bereich auszudehnen, ist offenbar nur zu zeigen, daß, wenn S_1 ein innerhalb ω_{01} gelegenes, (geeignet gewähltes) Stück einer Kurve $u_1 = \text{const.}$ bzw. $v_1 = \text{const.}$ bedeutet, die Integrale $\int_{S_1} \varphi_n dv_1$ bzw. $\int_{S_1} \varphi_n du_1$ mit unbegrenzt wachsendem n konvergieren. Denn dann lassen sich auf Grund der Formeln (I), (II) offenbar für den neuen Bereich ω_1 aus der fundamentalen Gleichung und Ungleichung (16a), (17) dieselben Schlüsse ableiten wie vorhin für ω_0 . Nun ist aber

$$(31) \quad \int_{S_1} \varphi_n dv_1 = \int_{S_1} \varphi_n \left(\frac{\partial v_1}{\partial u} du + \frac{\partial v_1}{\partial v} dv \right)$$

und jeder der beiden Bestandteile rechts konvergiert nach Abschnitt 8a, da ja $\frac{\partial v_1}{\partial u}$ und $\frac{\partial v_1}{\partial v}$ stetig differenzierbare Funktionen sind und wir annehmen können, daß das Kurvenstück S_1 von einer u - und v -Kurve nur in einem Punkte getroffen wird, bzw. sich in eine endliche Anzahl solcher Stücke zerlegen läßt. Mithin existiert in ω_1 die Funktion

$$(32) \quad \bar{\varphi} = \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{u_1}^{u_1 + \Delta u_1} \varphi_n du_1}{\int_{v_1}^{v_1 + \Delta v_1} dv_1} = \lim_{\Delta v_1 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{v_1}^{v_1 + \Delta v_1} \varphi_n dv_1}{\int_{u_1}^{u_1 + \Delta u_1} du_1}$$

und ist daselbst — wenn wir Ω_0 außerhalb befindlich annehmen — eine eindeutige reguläre Potentialfunktion.

11. Stimmen nun die beiden durch Formel (25) und (32) definierten Funktionen in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich ω_{01} auch wirklich überein? Daß dem in der Tat so ist, erkennen wir auf Grund des mittels partieller Integration leicht zu beweisenden Hilfssatzes:

Sei A ein innerhalb ω_{01} befindlicher Punkt mit den Parameterwerten (u, v) bzw. (u_1, v_1) und f eine in einer gewissen Umgebung von A stetig differenzierbare Funktion, für welche überdies $f(A) \neq 0$ ist. Dann folgt aus der Existenz von

$$\lim_{\Delta u_1=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \varphi_n du_1}{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} du_1} \quad \text{die Existenz von} \quad \lim_{\Delta u_1=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \varphi_n f du_1}{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} f du_1},$$

und beide Ausdrücke sind einander gleich.

Da wegen der Regularität des Systems (u, v) $\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2 \neq 0$, mögen wir annehmen, daß im Punkt A etwa $\frac{\partial u}{\partial u_1} \neq 0$ sei. Setzen wir $f = \frac{\partial u}{\partial u_1}$, so ist längs einer v_1 -Kurve (wegen $dv_1 = 0$) $f du_1 = \frac{\partial u}{\partial u_1} du_1 = du$ und mithin nach dem Hilfssatz

$$(33) \quad \lim_{\Delta u_1=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \varphi_n du_1}{\int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} du_1} = \lim_{\Delta u=0} \lim_{n=\infty} \frac{\int_u^{u+\Delta u} \varphi_n du}{\int_u^{u+\Delta u} du},$$

wo die Integrale auf beiden Seiten über ein kleines Stück der durch A laufenden v_1 -Kurve erstreckt sind und wir nur das eine Mal (u_1, v_1) , das andere Mal (u, v) als die unabhängigen Variablen auffassen. Wegen (28) erkennt man aber ohne weiteres, daß die rechte Seite von (33) den Wert von φ im Punkt A hat, mithin in der Tat $\bar{\varphi} = \varphi$ ist.

12. Die ganze Herleitung, bei welcher ja nichts über die spezielle Natur der beiden Isothermensysteme vorausgesetzt wurde, läßt die Tatsache erkennen, daß die Definition von φ überhaupt von der Wahl des benutzten Isothermensystems unabhängig ist. φ ist also bis jetzt in $\omega_0 + \omega_1$ als eine eindeutige und — abgesehen vom Bereich Ω_0 , wo sie der Gleichung (26) genügt — reguläre harmonische Funktion des Ortes auf der Fläche erklärt.

Es ist klar, wie man den Definitionsbereich von φ jetzt sukzessive weiter ausbreiten kann. Wir nehmen einen dritten auf ein reguläres Isothermensystem bezogenen Bereich ω_2 , welcher mit einem der vorhergehenden ein Stück gemein hat, und erhalten durch denselben Schritt, der von ω_0 nach ω_1 führte, jetzt die Definition von φ für den Bereich ω_2 . Nun ist aber klar, daß einerseits — nach dem, was gerade betont wurde — der Wert von φ nur von der betreffenden Stelle, nicht von dem Wege, wie man zu derselben von ω_0 aus gelangt, und den dabei benutzten Iso-

thermensystemen abhängt, andererseits, daß sich jeder abgeschlossene, in $\bar{\Omega}$ gelegene Bereich mit einer endlichen Anzahl solcher Bereiche ω_i überdecken läßt. Es existiert daher φ im ganzen Bereich $\bar{\Omega}$ und ist — abgesehen von Ω_0 — eine eindeutige reguläre Potentialfunktion. Über ihr Verhalten auf dem Rande und vornehmlich im Eckpunkt können wir erst dann Aufschluß erhalten, nachdem ihre Minimaleigenschaft nachgewiesen ist, d. h. daß die untere Grenze d der Werte des Dirichlet-Hilbertschen Integrals für alle zulässigen Funktionen von der Funktion φ wirklich erreicht wird.

13. Der Nachweis*) hierfür ergibt sich direkt auf Grund eines Hilfsatzes, den ich einer gütigen Mitteilung von Herrn H. Weyl verdanke**); derselbe lautet: Ist in einem Bereich T der xy -Ebene eine eindeutige stetige Funktion ψ und eine Folge (stückweise) stetiger Funktionen $\{\psi\} = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ erklärt, derart, daß für alle n von einem festen Index N ab

$$(34) \quad \int_T \psi_n^2 dx dy \leq M,$$

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_r \psi_n dx dy = \int_r \psi dx dy,$$

wo r ein beliebiges Rechteck innerhalb T bedeutet, so existiert auch das Integral

$$\int_T \psi^2 dx dy$$

und genügt der Ungleichung

$$(36) \quad \int_T \psi^2 dx dy \leq M.$$

Zum Beweise fassen wir T als Limes einer Folge ineinander geschachtelter, von regulären Kurven begrenzter Bereiche T_h ($h=1, 2, \dots$) auf. Es ist nach der Schwarzschen Ungleichung, wenn wir einfach

$$\int_r dx dy = r$$

setzen,

$$(37) \quad \frac{1}{r} \left(\int_r \psi dx dy \right)^2 \leq \int_r \psi^2 dx dy,$$

*) Derselbe wäre natürlich auch indirekt, analog dem Hilbertschen Beweise (Hilbert, I^a § 9) zu führen.

**) Vgl. auch die beiden folgenden Arbeiten von E. Fischer und F. Riesz, wo sich Überlegungen ähnlicher Art finden: E. Fischer, Sur la convergence en moyenne; C. R., 13. Mai 1907, S. 1023 ff.; F. Riesz, Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910), § 6.

und die analoge Ungleichung gilt für alle Funktionen der Folge $\{\psi\}$. Ferner ist wegen der Stetigkeit von ψ , wenn wir mit m das Minimum von ψ in r bezeichnen,

$$(38) \quad \frac{1}{r} \left(\int_r \psi \, dx \, dy \right)^2 \geq m^2 \cdot r.$$

Haben wir jetzt in der Ebene von T in der üblichen Weise eine Rechteckseinteilung und summieren über alle innerhalb T_h befindlichen Rechtecke, so kommt

$$\sum_i \frac{1}{r_i} \left(\int_{r_i} \psi_n \, dx \, dy \right)^2 \leq M, \quad (34), (37)$$

$$\sum_i \frac{1}{r_i} \left(\int_{r_i} \psi \, dx \, dy \right)^2 \leq M, \quad (35)$$

$$\sum_i m_i^2 r_i \leq M \quad (38)$$

und für eine Folge von Teilungen, deren größtes Rechteck gegen Null abnimmt, im Limes

$$\int_{T_h} \psi^2 \, dx \, dy \leq M$$

für jeden Wert des Index h . Es existiert daher

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{T_h} \psi^2 \, dx \, dy = \int_T \psi^2 \, dx \, dy \quad \text{und ist} \quad \leq M.$$

Um die Anwendbarkeit des Hilfssatzes zu erkennen, bemerken wir Folgendes: Ist ε eine beliebig klein vorgegebene positive Größe, so läßt sich nach Abschnitt 6 immer ein Index N finden, sodaß für alle $n \geq N$ $D^*(\varphi_n) \leq d + \varepsilon$ ist. Ferner läßt sich jeder abgeschlossene, in $\bar{\Omega}$ liegende Bereich sicher in eine endliche Anzahl jeweils auf ein reguläres Isothermen-system bezogener Bereiche zerlegen. Ein einzelner solcher Bereich, z. B. ω_0 , liefert zu dem Dirichlet-Hilbertsche Integral den Beitrag

$$\iint_{\omega_0} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial u} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} - \beta \right)^2 \right\} du \, dv,$$

und es sind daselbst $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ stetige, $\frac{\partial \varphi_n}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}$ ($n=1, 2, \dots$) stückweise stetige Funktionen. Ferner ist nach (28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_r \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} \, du \, dv = \iint_r \frac{\partial \varphi}{\partial u} \, du \, dv,$$

und eine analoge Gleichung besteht für die Ableitung nach v , sodaß also

alle Voraussetzungen erfüllt sind. Es existiert daher nach dem Hilfssatz $D^*(\varphi)$ und ist $\leq d + \varepsilon$, woraus aber sofort folgt

$$(39) \quad D^*(\varphi) = d.$$

IV.

Erledigung der Abbildungsaufgabe.

14. Durch ihre Minimaleigenschaft ist die Funktion φ (bis auf eine willkürliche additive Konstante) vollständig charakterisiert — also ganz unabhängig davon, wie wir die Folge $\{\varphi\}$ (Abschnitt 6) ausgewählt haben. Denn ist $\bar{\varphi}$ eine zulässige Funktion, für welche gleichfalls die Gleichung (39) besteht, so folgt mit Rücksicht auf die auf $\xi = \bar{\varphi} - \varphi$ angewandte Variationsgleichung

$$(40) \quad D^*(\varphi, \xi) \equiv \iint_{\Omega} \nabla^*(\varphi, \xi) d\omega = 0$$

somit $D(\bar{\varphi} - \varphi) = 0$ und daraus $\bar{\varphi} - \varphi = \text{const. q. e. d.}$ Nunmehr bilden wir die Funktion

$$U = \varphi + \Phi,$$

welche wegen (10)—(13) eine in ganz $\bar{\Omega}$ — vom O -Punkt abgesehen — reguläre Potentialfunktion vorstellt und normieren die willkürliche additive Konstante so, daß im O -Punkt

$$(41) \quad U = \frac{u}{u^2 + v^2} + ((O)),$$

wobei $((O))$ eine im O -Punkt reguläre, *verschwindende* Funktion ist. Für U besteht die Variationsgleichung*) (40)

$$(42) \quad \iint_{\Omega^*} \nabla(U, \xi) d\omega = 0,$$

wobei Ω^* aus Ω dadurch entsteht, daß man die Umgebung des O -Punktes durch eine beliebige, hinreichend kleine analytische Kurve C ausschließt, und ξ eine zulässige Funktion ist, welche überdies längs C verschwindet.

Daraus folgt**), daß U — ganz unabhängig von der Wahl der Bereiche und Funktionen $K, Q, \Phi, \alpha, \beta$ (Abschnitt 5) — in eindeutiger Weise dadurch charakterisiert ist, daß für jeden den O -Punkt ausschließenden

*) Dieselbe ist mit (40) identisch, falls die Kurve C außerhalb Ω_0 verläuft — vgl. Abschnitt 5. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß dieselbe auch bestehen bleibt, wenn C ganz oder teilweise innerhalb Ω_0 verläuft; vgl. eine diesbezügliche Bemerkung bei P. Koebe, Über die Uniformierung beliebiger analytischer Kurven, 4. Mitteilung, Gött. Nachr. 1909, S. 333.

**) Vgl. P. Koebe, a. (in der letzten Anmerkung) a. O. S. 334.

Bereich Ω^* das Dirichletsche Integral $D_{\Omega^*}(U) = \iint_{\Omega^*} \Delta_1 U d\omega$ existiert, die Variationsgleichung (42) besteht, und U sich im O -Punkt gemäß (41) verhält.

Bezeichnen wir jetzt mit V die zu U konjugierte Potentialfunktion, so läßt sich mit Herrn P. Koebe*) in einfacher und eleganter Weise schließen, daß durch die komplexe Funktion $U + iV$ $\bar{\Omega}$ auf einen *schlichten*, den unendlich fernen Punkt im Innern enthaltenden Bereich konform abgebildet wird, dessen Berandung aus zwei zur U -Achse parallelen Schlitten besteht, wovon einer der Randkurve \mathfrak{C} von Ω , der andere dem Eckpunkt E entspricht.

Nach der im 4. Abschnitt gegebenen Definition gehen die Kurven $U = \text{const.}$ und $V = \text{const.}$ richtungstreu und der Ausdruck $\Delta_1 U$ stetig über die Kanten.

Unsere letzte Aufgabe ist, zu zeigen, daß sich der dem Eckpunkt entsprechende Schlitz auf einen Punkt reduziert oder m. a. W., daß sich der Realteil U — ebenso wie es mit dem Imaginärteil V der Fall ist — im Eckpunkt bestimmt verhält.

15. Den Nachweis hierfür erbringen wir auf die Art, daß wir auf der Fläche eine Folge von Kurven $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ konstruieren, welche den Eckpunkt umschließen und sich im Limes für $n = \infty$ auf diesen selbst zusammenziehen und für welche der Wert des Integrals $\int_{C_n} \sqrt{\Delta_1 U} ds$

gegen Null konvergiert. Dasselbe ist aber nichts anderes als der Ausdruck für die Länge der Bildkurven in der U, V -Ebene und diese müßte, wenn der Schlitz die von Null verschiedene Länge a besäße, notwendig oberhalb der positiven Größe $2a$ bleiben, was einen Widerspruch ergäbe.

Wir überdecken zunächst eine gewisse Umgebung des Eckpunktes E mit einer Anzahl teilweise übereinandergreifender Isothermensysteme in folgender Weise: Seien mit 1, I, 2, II, 3, III, 4, \dots kurz die Kanten bzw. Flächenstücke (letztere mit römischen Ziffern) bezeichnet, wie sie bei Umgehung von E in einem gewissen Sinne aufeinanderfolgen. Mit Rücksicht darauf, daß die einzelnen, die Ecke bildenden Teilflächen durchaus bis an die Kanten und den Eckpunkt heran als regulär vorausgesetzt wurden, sodaß man sich dieselben etwa noch ein Stück darüber hinaus in regulärer analytischer Weise fortgesetzt denken kann, läßt sich (nach Abschnitt I) ein Isothermensystem (p_1, q_1) angeben, welches die Flächen I und II

*) Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Göttinger Nachr. 1910, S. 59—74. Vgl. insbes. S. 68—73. Siehe auch die Dissertation von R. Courant, Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzips auf die Probleme der konformen Abbildung. Göttingen 1910 (abgedruckt in diesem Bande der Math. Ann.).

(natürlich nur in einer gewissen Umgebung von E) überdeckt und bis an die Kanten 1, 3 und E heran regulär ist; in der gleichen Weise läßt sich ein Isothermensystem (p_2, q_2) angeben, welches II, III überdeckt und bis an 2, 4 und E heran regulär ist. Mit dieser Überdeckung fahren wir fort, bis wir zum Flächenstück I zurückkommen.

Sei (p, q) ein beliebiges dieser Systeme, ω der abgeschlossene, den Eckpunkt auf dem Rande enthaltende Definitionsbereich desselben, und erhalte das Bogenelement der Fläche bei Einführung von (p, q) in ω die Gestalt $ds^2 = \lambda(dp^2 + dq^2)$, so existieren wegen der Regularität*) des Systems zwei feste positive Zahlen λ_0, Λ_0 , sodaß in ω

$$(43) \quad 0 < \lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda_0.$$

Wir betrachten jetzt den Bildbereich von ω in der p, q -Ebene und bezeichnen, wenn T, C, l bzw. einen Bereich, eine Kurve, deren Länge auf ω bedeutet, die entsprechenden Größen für den Bildbereich mit $\bar{T}, \bar{C}, \bar{l}$. Dann ist

$$(44) \quad \iint_T \Delta_1 U d\omega = \iint_{\bar{T}} (U_p^2 + U_q^2) dp dq,$$

$$(45) \quad \int_C \sqrt{\Delta_1 U} ds = \int_{\bar{C}} \sqrt{U_p^2 + U_q^2} d\sigma \quad (d\sigma^2 = dp^2 + dq^2)$$

und wegen (43)

$$(46) \quad \frac{l}{\sqrt{\lambda_0}} \leq \int_C d\sigma = \bar{l} = \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\bar{l}}{\sqrt{\lambda_0}}.$$

Für den Wert des Ausdruckes $\sqrt{U_p^2 + U_q^2}$ in einem bestimmten Punkt (p, q) erhalten wir aber sofort eine Abschätzung mittels des Dirichletschen Integrals, wenn wir um den betreffenden Punkt einen Kreis \bar{K} vom Radius r legen und den Gaußschen Mittelwertsatz anwenden**), es ergibt sich

$$U(p, q) = \frac{1}{r^2 \pi} \int_{\bar{K}} U dp dq,$$

analog

$$U_p = \frac{1}{r^2 \pi} \int_{\bar{K}} U_p dp dq$$

und mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$(r^2 \pi)^2 U_p^2 \leq \iint_{\bar{K}} U_p^2 dp dq \cdot r^2 \pi,$$

*) Vgl. die Definition im Abschnitt 2.

**) Vgl. P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven IV, a. a. O. S. 339—340.

und da für die Ableitung nach q die analoge Ungleichung gilt, die wichtige Abschätzung*)

$$(47) \quad \sqrt{U_p^2 + U_q^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \sqrt{\iint_{\bar{K}} (U_p^2 + U_q^2) dp dq} = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \sqrt{\iint_{\bar{K}} \Delta_1 U d\omega}.$$

Läßt sich diese Konstruktion für alle Punkte eines gewissen Kurvenstücks \bar{C} von der Länge \bar{l} ausführen und bezeichnen wir das von sämtlichen Kreisen bedeckte Gebiet mit $\bar{\Gamma}$, so ist nach (43), (46)

$$(48) \quad \begin{aligned} \int_{\bar{C}} \sqrt{U_p^2 + U_q^2} d\sigma &< \frac{\bar{l}}{\sqrt{\pi r}} \sqrt{\iint_{\bar{\Gamma}} (U_p^2 + U_q^2) dp dq} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \cdot \frac{\bar{l}}{\sqrt{l_0}} \cdot \sqrt{\iint_{\bar{\Gamma}} \Delta_1 U d\omega}. \end{aligned}$$

Jetzt denken wir uns auf der Fläche eine unendliche Folge von einfachen, den Eckpunkt umschließenden Kurven $\{C\} = C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ konstruiert von folgenden Eigenschaften: Wird mit L_n die Länge von C_n , mit Γ_n das von C_n begrenzte, E im Inneren enthaltende Gebiet sowie dessen Größe bezeichnet, so ist

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = 0$,
2. C_n liegt innerhalb Γ_{n-1} .
3. Zu jeder Kurve C_n läßt sich eine *positive* Größe ϱ_n angeben derart, daß a) um jeden Punkt P von C_n ein in Γ_{n-1} liegendes Gebiet abgegrenzt werden kann, welches nicht über zwei Kanten hinausgreift und für welches der Wert des Integrals $\int ds$, erstreckt von P nach einem beliebigen Randpunkt des Gebietes längs einer beliebigen mit stetiger Tangente versehenen bzw. richtungstreu über eine Kante laufenden Kurve, nicht kleiner als ϱ_n ausfällt; b) eine positive Größe G existiert, sodaß für alle n

$$\frac{L_n}{\varrho_n} \leq G.$$

Die Erfüllbarkeit der Forderungen 1—3a) ist evident; was die Forderung 3b) angeht, so kommt hierbei wesentlich in Betracht, daß die einzelnen Teilflächen mit einem von Null verschiedenen Winkel an E heranreichen.

Sei für den Augenblick n ein beliebig, aber fest gewählter Index; nach den gemachten Voraussetzungen und (46) läßt sich, wenn P ein be-

*) Vgl. P. Koebe, am letztgenannten Ort und R. Courant, Zur Begründung des Dirichletschen Prinzips, Göttinger Nachr. 1910, S. 156.

liebiger Punkt auf C_n , \bar{P} sein Bildpunkt in der Ebene eines der oben eingeführten Isothermensysteme ist, um \bar{P} ein Kreis legen, dessen Radius

$$(49) \quad r \geq \frac{1}{\sqrt{\Lambda_0}} \varrho_n$$

ist. Es folgt dann aus (44), (47), (49), indem wir C_n in geeignete, je einen Kantenpunkt enthaltende und innerhalb des Definitionsbereiches je einer der oben eingeführten Isothermensysteme verlaufende Stücke zerlegen, durch Summation über diese verschiedenen Stücke

$$(50) \quad \int_{C_n} \sqrt{\Delta_1 U} ds = \sum \int \sqrt{U_p^2 + U_q^2} d\sigma < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}} \frac{L_n}{\varrho_n} \sqrt{\iint_{\Gamma_{n-1}} \Delta_1 U d\omega}.$$

Setzen wir schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}} G = A,$$

so ist wegen Voraussetzung 3b)

$$\int_{C_n} \sqrt{\Delta_1 U} ds < A \sqrt{\iint_{\Gamma_{n-1}} \Delta_1 U d\omega}.$$

Da aber A eine von n unabhängige Größe ist, während Γ_{n-1} und damit auch der Wert des Dirichletschen Integrals rechts mit unbegrenzt wachsendem n gegen Null konvergiert, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \sqrt{\Delta_1 U} ds = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Hiermit sind wir in der Tat in der Lage, den Satz aussprechen zu können:

Die Oberfläche jeder räumlichen Ecke (der unter 1 präzisierten Art) kann konform — im Eckpunkt selbst nur stetig — auf die schlichte, mit einem geradlinigen Schlitz versehene Ebene abgebildet werden.

Zufolge dieses Satzes repräsentiert jede geschlossene, aus endlich vielen regulär analytischen Flächenstücken bestehende Fläche, welche keine anderen Singularitäten als Kanten und Ecken darbietet, ein algebraisches Gebilde im Sinne Riemanns.

Göttingen, Pfingsten 1910.