

TEORIA DEL COLPO DI ARIETE.

ING. CARLO FOSSA-MANCINI.

(Trasmesso dal Prof. A. BATTELLI).

INTRODUZIONE.

§ 1. — Il numero ognor crescente delle condutture a pressione, sia per acqua potabile sia per forza motrice, ha reso sempre più importante lo studio di quei fenomeni che si producono quando il moto uniforme corrispondente allo stato di regime venga in qualsiasi modo perturbato.

Mediante lo studio del moto perturbato si giunge difatti alla spiegazione ed alla calcolazione degli effetti prodotti dal colpo d'ariete, la cui importanza pratica non ha bisogno di commenti.

È merito dell'Ing. Lorenzo Allievi di essersi occupato di questo argomento o di aver pubblicato negli *Annali della Società degli Ingegneri ed Architetti italiani* una 1.^a Memoria intitolata « Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione ».

A questa Memoria fecero seguito altre cinque comunicazioni fatte all'Associazione Elettrotecnica Italiana (Sezione di Roma) e pubblicate negli atti dell'Associazione stessa.

L'Autore, per risolvere il problema, applica le equazioni classiche del moto oscillatorio dei corpi elastici.

L'onda, prodotta dalla chiusura dell'otturatore, parte dall'otturatore, giunge fino al serbatoio e da questo riflessa ritorna all'otturatore.

Indicando con a la velocità di propagazione dell'onda con L la lunghezza della conduttura, compresa tra il serbatoio alimentatore e l'otturatore, il tempo che l'onda impiega

per andare e tornare è $\frac{2L}{a}$.

Se si indica con T la durata della chiusura, potranno darsi due casi o sarà

$$T < \frac{2L}{a}$$

ovvero

$$T > \frac{2L}{a} .$$

Nel 1.° caso la chiusura si compie prima che l'onda sia ritornata all'otturatore.

Nel 2.° caso la chiusura si compie dopo che l'onda è ritornata all'otturatore.

Partendo da queste considerazioni l'autore divide il fenomeno del colpo d'ariete in due fasi, la fase di colpo semplice corrisponde al primo caso, la fase di contraccolpo corrispondente al secondo caso.

Per ciascuna delle due fasi egli determina le leggi di variazione della pressione sull'otturatore, leggi che risultano nettamente differenti.

Di fatti nella fase di colpo semplice, la pressione massima all'otturatore è data da

$$Y_1 = H + \frac{a v_0}{g}$$

nella quale H denota il carico, v_0 la velocità di regime uniforme, g il noto valore della gravità. Questa pressione è indipendente dal modo più o meno rapido con cui si opera la chiusura, ossia dalla durata T .

Mentre invece nella fase di contraccolpo, la pressione massima è una funzione decrescente della durata T ed assume il suo valore minimo $Y_1 = H$ per $T = \infty$.

Questa differenza così spiccata fra le leggi, che nelle predette due fasi regolano il fenomeno del colpo d'ariete, fenomeno per sua natura di carattere continuativo, fa dubitare che la teoria dell'Ing. Allievi, benchè in massima si accordi sufficientemente coi risultati dell'esperienza, non si basi su ragionamenti completamente rigorosi e che perciò nel campo

da lui trattato si abbia ancora la possibilità di apportare qualche utile contributo.

CAPITOLO I.

Equazioni fondamentali del moto perturbato.

§ I. — Una prima equazione per la soluzione del problema si desume dal principio della continuità di massa.

Ora siccome la deduzione di questa formola è stata fatta prima dall'Allievi ¹⁾ e quindi con procedimento del tutto differente dal Flamant ²⁾ giungendo ambedue allo stesso risultato, io mi limiterò a riportare detta formola dando solamente spiegazione dei simboli.

Si ritiene l'asse della condotta orizzontale e coincidente con l'asse delle x . L'origine delle x è sull'otturatore. La direzione positiva delle x è dall'otturatore al serbatoio, vale a dire in senso contrario alla direzione di velocità nello stato di regime.

Si tiene conto soltanto della componente della velocità diretta secondo l'asse del tubo e si suppone che la medesima sia distribuita uniformemente su tutta la sezione trasversale.

La formola a cui si giunge è la seguente

$$(I) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Nella quale $\frac{\partial v}{\partial x}$ è la derivata parziale della velocità relativamente all'ascissa x .

$\frac{\partial y}{\partial t}$ la derivata parziale della pressione, espressa in colonna

d'acqua relativamente al tempo.

g il noto valore della gravità.

¹⁾ *Annali della Società degli Ingegneri ed Architetti italiani*. Anno 1902 Fascicolo V. pag. 289.

²⁾ Flamant « Sur la propagation des ondes liquides dans un tuyau elastique » *Revue de mécanique*, année n.° 2 pag. 103.

a la velocità di propagazione dell'onda, la quale è legata alle altre grandezze caratteristiche della tubatura dalla relazione seguente:

$$(1) \quad \frac{1}{a^2} = \frac{\bar{\omega}}{g} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee} \right].$$

Dove $\bar{\omega}$ è il peso specifico del fluido che si ritiene costante ed eguale a quello dell'acqua.

ε il coefficiente di compressibilità dell'acqua.

D il diametro della condotta.

E il modulo di elasticità della materia di cui è composto il tubo.

e lo spessore del tubo.

§ 2. — Una seconda equazione si ottiene dalla teoria generale del moto dei fluidi.

Si ritiene che sulle particelle elementari del fluido non agisca alcuna forza. Questa ipotesi è legittima perchè, essendo il tubo orizzontale, l'azione della gravità è nulla e perchè si fa astrazione dalle resistenze di attrito.

Indicando con μ la densità del fluido, con p la pressione con u, v, w , le componenti della velocità secondo gli assi delle x, y, z si ha in generale

$$\begin{aligned} \mu \frac{du}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu \frac{dw}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

dove per essere $v = f(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

E siccome le componenti delle velocità secondo gli assi trasversali y e z si ritengono nulle, si ha semplicemente

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Tenendo conto che nel nostro caso la direzione della velocità è contraria alla direzione positiva delle x ed adottando i simboli dell'Allievi abbiamo

$$u = -v; \mu = \frac{\bar{\omega}}{g}; p = \bar{\omega} y$$

donde

$$\frac{\bar{\omega}}{g} \left(-\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \bar{\omega} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$(2) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Questa equazione però non corrisponde alla rappresentazione del fenomeno di cui ci stiamo occupando per la precipua ragione che nelle formole teoriche sopra riportate si fa astrazione degli attriti lungo la condotta. Ora, nei casi pratici ordinari, il termine corrispondente agli attriti ha valori tali che non può esser trascurato senza specialissimi riguardi.

Rappresentiamo schematicamente la condotta come si è fatto colla fig. (1).

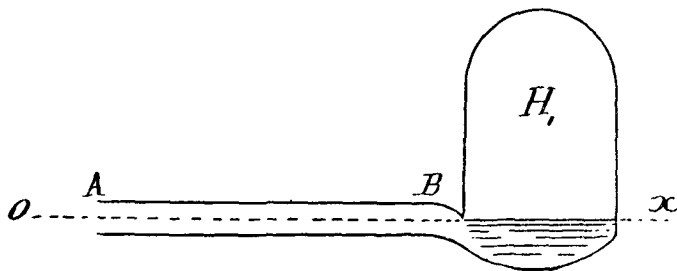


Fig. 1.

All'origine O trovasi l'otturatore, all'estremità opposta il serbatoio, soggetto ad un carico costante H_1 . Lo specchio

d'acqua nel serbatoio è talmente grande da rendere trascurabile la corrispondente velocità del liquido.

Supponiamo ora di passare allo stato di regime. Basterà per questo fare $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, e dalla predetta equazione otteniamo integrando

$$\int_0^L \frac{\partial y}{\partial x} dx = - \frac{1}{g} \int_0^L v \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Allo sbocco, ossia all'otturatore, in questo caso completamente aperto, si ha

$$\begin{aligned} x = 0 : y &= H_a \text{ pressione atmosferica,} \\ v &= v_0 \text{ velocità di regime.} \end{aligned}$$

Al serbatoio

$$x = L : y = H_1 : v = 0.$$

Ciò posto effettuando l'integrazione

$$H_1 - H_a = - \frac{1}{g} \left(0 - \frac{v_0^2}{2} \right) = \frac{v_0^2}{2g}$$

che è il teorema di Torricelli.

Acciocchè la formola (2) rappresenti adeguatamente il moto del fluido è necessario aggiungere un termine relativo alle perdite di carico per le resistenze d'attrito il quale termine riferito all'unità di lunghezza è notoriamente $k v^2$ dove $k = \frac{2b}{D}$, essendo D il diametro del tubo e b il coefficiente d'attrito che nei casi ordinari varia tra $b = 0,0006$ e $b = 0,0012$ (vedi « Manuale dell'Ingegnere » di G. Colombo).

La formola (1) in tal modo completata diventa

$$(II) \quad g \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} - k v^2.$$

Confrontando questa formola con quella dell'Allievi

$$g \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

troviamo che affinché le due formole coincidano è necessario che i due ultimi termini del secondo membro siano trascurabili di fronte al primo; e ciò deve verificarsi per qualsiasi valore delle due variabili indipendenti x e t .

Questa condizione in generale non si verifica. Difatti il gradiente della velocità relativamente al tempo ossia la $\frac{\partial v}{\partial t}$ dipende come si vedrà in seguito, dalla legge di manovra dell'otturatore; per una manovra molto lenta, esso può essere assai piccolo ed in qualche istante anche nullo, mentre gli altri termini in v conservano un valore finito.

Solo nel caso delle vibrazioni dei corpi sonori e particolarmente nelle oscillazioni che si trasmettono nell'aria le ampiezze delle quali, secondo l'esperienze di Lord Rayleigh non raggiungono il milionesimo di millimetro, detti termini possono essere trascurati.

Oltre a ciò, nel fenomeno del colpo d'ariete, non si ha soltanto un semplice moto oscillatorio prodotto dal contrasto fra la forza elastica e la forza d'inerzia, ma ad esso si aggiunge un moto traslatorio o fluente, che dir si voglia, del quale non può farsi astrazione. Anzi questi due modi di movimento sono in certo modo fra loro indipendenti, potendosi a volontà far prevalere l'uno sull'altro sino a giungere ai casi limiti, i quali del resto non possono essere attuati fisicamente, ma rimangono semplicemente ipotetici.

Difatti noi possiamo immaginare un fluido perfettamente incompressibile fluente in un tubo perfettamente rigido. In questo caso non si hanno oscillazioni elastiche; ciò non di meno il colpo d'ariete si produce e noi possiamo studiarne le leggi, le quali evidentemente sono assai più semplici di quelle che si riscontrano nei casi reali.

Così pure possiamo immaginare una chiusura istantanea. In tal caso la velocità del liquido al contatto con l'ottura-

tore viene annullata ad un tratto ed il fenomeno del colpo di ariete prende un carattere eminentemente oscillatorio, tanto che ad esso con sufficiente approssimazione può essere applicata la teoria delle oscillazioni elastiche.

Tratteremo dapprima i due casi ipotetici e passeremo quindi al caso concreto.

CAPITOLO II.

Chiusura istantanea in una conduttura a pareti elastiche nella quale scorre un fluido compressibile.

§ 1. — La formola (1) del Cap. I

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\bar{\omega}}{g} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee} \right]$$

ci dice che l'effetto dovuto alla compressibilità del fluido e quello dovuto all'elasticità delle pareti si sommano fra loro di modo che alla loro azione complessiva può sostituirsi quella di un fluido ipotetico fluente in un tubo perfettamente rigido ed avente un coefficiente di compressibilità ε_1 , legato ai simboli della predetta formola dalla relazione

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee} = \frac{g}{\bar{\omega}} \frac{1}{a^2}.$$

Parimenti con ragionamento analogo si può ritenere che il liquido sia completamente incompressibile e che il lavoro elastico sia per intero effettuato dalle pareti del tubo avente un modulo di elasticità E_1 dato dalla relazione.

$$\frac{D}{E_1 e} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee} = \frac{g}{\bar{\omega}} \frac{1}{a^2}.$$

In considerazione della piccola compressibilità dell'acqua e della assai limitata dilatabilità delle pareti del tubo in ghisa od in ferro, i movimenti del liquido nell'interno del tubo

dopo avvenuta la chiusura istantanea, sono sempre molto piccoli anche in corrispondenza dei loro valori massimi, mentre al contrario il termine $\frac{\partial v}{\partial t}$ ha prevalentemente valori assai grandi. Donde segue che nella formola fondamentale (II) si può, senza molto dilungarsi dalla realtà, trascurare gli ultimi due termini del secondo membro, di guisa che, le ultime due formole, che nel caso attuale regolano il fenomeno si riducono alle

$$(1) \quad g \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

È noto che queste equazioni vengono soddisfatte quando si ponga v od y eguali alla somma di una funzione qualsiasi di $t - \frac{x}{a}$ con una funzione qualsiasi di $t + \frac{x}{a}$, incluso il caso nel quale una di queste funzioni sia costantemente nulla.

Ciò dicasi dal punto di vista puramente matematico. Dal punto di vista fisico però le dette funzioni non possono considerarsi completamente arbitrarie, ma devono soddisfare ad alcune condizioni speciali che noi ora passiamo ad esaminare.

Siccome la velocità cade più chiaramente sotto i sensi di quello che sia la pressione, è opportuno partire da questa, considerandola quale funzione arbitraria delle variabili indipendenti x e t per poi risalire alla pressione per mezzo delle equazioni differenziali che legano fra loro queste due grandezze.

Nel primo istante che succede alla chiusura brusca, per tutti i valori delle x compresi tra O ed L , Dove L rappresenta la lunghezza della condotta, la velocità è la stessa ed eguale a v_0 . Poi subito nella sezione a contatto con l'otturatore la velocità scende a zero ed il ritardo si estende progressivamente da valle a monte nel senso delle x positive.

Siccome all'origine dei tempi, ossia per $t = 0$ la velocità è costante ed eguale a quella di regime v_0 , essa sarà rappre-

sentata dalla retta At_0 parallela all'asse delle x . Col crescere del tempo la velocità diminuisce bruscamente all'origine, e via via meno rapidamente mano mano che ci si avvicina al serbatoio, di modo che al tempo t , l'onda di velocità avrà presso a poco la forma della curva Ot vedi fig. (2).

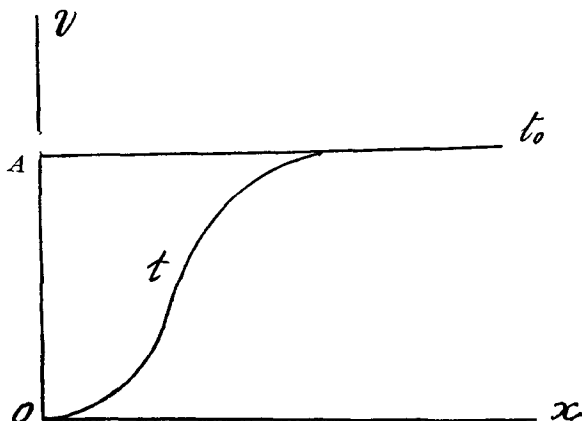


Fig. 2.

Il problema che dobbiamo risolvere sta precisamente nel trovare la forma di questa curva, nel trovare cioè un'espressione tale $v = f(x, t)$ che soddisfi alle predette equazioni differenziali ed alle condizioni ai limiti imposte dal problema stesso.

§ 2. — Poniamo

$$(3) \quad v = v_0 \sin \theta$$

dove

$$(4) \quad \theta = \frac{\pi}{2} e^{m \frac{x}{L} - m \frac{t}{T_0}}.$$

Questa espressione soddisfa alle equazioni differenziali sovra esposte. In essa e è la base dei logaritmi Neperiani, m e T due grandezze, il significato fisico delle quali verrà determinato in appresso.

Differenziando le equazioni fondamentali (1) e (2) la prima relativamente a t , la seconda relativamente ad x otteniamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$$

dalle quali risulta

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Essendo la v funzione di θ e questa a sua volta funzione delle due variabili indipendenti x e t si ha in generale:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Ora per le relazioni (3) e (4) si ha

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = v_0 \cos \theta; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -v_0 \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{m}{L} \frac{\pi}{2} e^{\frac{m}{L} x - \frac{m}{T_0} t} = \frac{m}{L} \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{m}{T_0} \frac{\pi}{2} e^{\frac{m}{L} x - \frac{m}{T_0} t} = -\frac{m}{T_0} \theta$$

Sostituendo questi valori nelle (6) e (7) e riducendo si ottiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v_0 \frac{m^2}{L^2} \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_0 \frac{m^2}{T_0^2} \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

Ponendo questi valori nella (5) risulta

$$v_0 \frac{m^2}{T^2} \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta) = a^2 v_0 \frac{m^2}{L^2} \theta (\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

$$a^2 = \frac{L^2}{T_0^2} ; \quad a = \frac{L}{T_0}$$

Tale risultato ci fa vedere che la funzione arbitraria, da noi scelta per rappresentare la volontà, soddisfa all'equazione delle oscillazioni elastiche, come già sapevamo e ci permette di trovare il significato fisico dei vari simboli. A questo fine passiamo a considerare la forma dell'onda di velocità.

Per un dato valore del tempo $t = t'$ la v cresce col crescere

della x ed è minimo per $x = 0$, cui corrisponde $\theta = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{m t'}{T_0}}$

Oltre a ciò per il punto x' , per il quale si verifica la condizione

$$(8) \quad \frac{x'}{L} - \frac{t'}{T_0} = 0$$

si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$ e conseguentemente $v = v_0$ qualunque sia il valore di m .

Per $\frac{t'}{T_0} = 0,2$ $m = 10$ l'onda prende la forma rappresentata dalla fig. (3) dove

$$O M = x' ; P M = v_0$$

$$O A = v_0 \sin \theta_0 ; \theta_0 = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{m t'}{T_0}}$$

Perchè la $0 A$, ossia la velocità all'otturatore sia nulla, qualunque sia il valore del tempo, occorre che la m abbia un valore grandissimo. Per m infinitamente grande la testa dell'onda diviene una superficie piana normale all'asse rappresentata dalla retta $P M$.

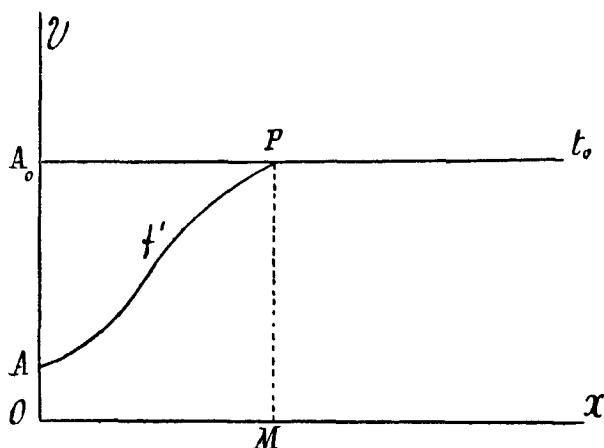


Fig. 3.

Quest'onda solitaria parte dall'otturatore e si sposta verso il serbatoio con una velocità che si desume dalla relazione (8), la quale ci dà

$$\frac{x'}{t'} = \frac{L}{T_0} = a$$

In altri termini il punto M si muove sull'asse delle x con una velocità di propagazione a . Facendo in quest'ultima espressione $x' = L$, si ha $t' = T_0$, dunque T_0 è il tempo impiegato dall'onda per arrivare dall'otturatore al serbatoio.

Abbiamo poco anzi trovato

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_0 \frac{m}{T_0} \theta \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = v_0 \frac{m}{L} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Dividendo l'una per l'altra

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = -\frac{L}{T_0} = -a .$$

Sostituendo nell'equazione fondamentale

$$(1) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

otteniamo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$$

donde

$$y = -\frac{a v}{g} + \text{cost.}$$

Supposto che per $v = v_0$ sia $y = M$; $\text{cost.} = H + \frac{a v_0}{g}$ e quindi

$$y = H + \frac{a}{g}(v_0 - v) = H + \frac{a v_0}{g}(1 - \text{sen } \theta).$$

Donde risulta che l'onda di pressione è del tutto analoga all'onda di velocità.

L'esempio da noi riportato ci fa vedere come sia possibile trovare una funzione arbitraria della $\left(t - \frac{x}{a}\right)$, la quale ci rappresenti un'onda solitaria soddisfacente alle equazioni fondamentali e ad alle condizioni speciali del problema; ma essa non corrisponde ad una soluzione completa, in quanto che l'onda solitaria, che si sposta sempre nello stesso senso, porta la sua perturbazione sino al serbatoio ove invece la pressione deve rimanere costante, oltre a ciò il fenomeno oscillatorio ritmico quale si verifica nel nostro caso, non è rappresentato da un'onda solitaria, ma invece da un'onda stazionaria, i cui nodi occupano punti fissi sull'asse della condotta.

§ 3. — Riprendiamo l'equazione generale delle oscillazioni elastiche.

$$v = \varphi (at - x) + \psi (at + x)$$

nella quale entrano le due funzioni arbitrarie, che devono determinarsi.

Facendo uso della serie di Fourier possiamo trasformare la predetta equazione nell'equivalente

$$(9) \quad v = A_1 \sin \alpha \cos \theta + A_2 \sin 2\alpha \cos 2\theta + A_3 \sin 3\alpha \cos 3\theta + \dots$$

nella quale A_1, A_2, A_3, \dots sono costanti da determinarsi e dove

$$\alpha = \frac{\pi x}{2L}; \quad \theta = \frac{\pi t}{2T_0}$$

Essa soddisfa alla condizione richiesta dalle equazioni generali delle oscillazioni elastiche, vale a dire di essere la somma di una funzione di $(\xi - \eta)$ con una funzione di $(\xi + \eta)$.

Difatti considerando il primo termine della serie si ha

$$\sin \alpha \cos \theta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \theta) + \sin (\alpha - \theta)]$$

che prova l'enunciato. Egualmente dicasi per tutti gli altri termini della serie.

All'origine dei tempi, vale a dire per $t = 0$

$$\cos \theta = \cos 2\theta = \cos 3\theta = \dots = 1$$

$$(10) \quad v = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin 2\alpha + A_3 \sin 3\alpha + \dots$$

E siccome all'origine dei tempi la velocità, come poco fa abbiamo detto, deve essere costante su tutta la lunghezza della condotta, dovremo avere per tutti i valori di x e conseguentemente di α , $v = v_0$. In altri termini la v , per $t = 0$, deve essere una tale funzione di α da rappresentarci una retta parallela all'asse delle ascisse.

Ora noi sappiamo che una retta parallela all'asse delle α è rappresentata dalla serie infinita.

$$(11) \quad z = A \left[\sin \alpha \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \dots \right]$$

nella quale A è una costante arbitraria ¹⁾.

Per comprendere il significato di questa espressione, poniamo $A=1$ e costruiamo la curva delle z in funzione di α , limitando la serie al quinto termine. La curva rappresentata dalla fig. (4) non è una retta, ma la sua forma caratteristica

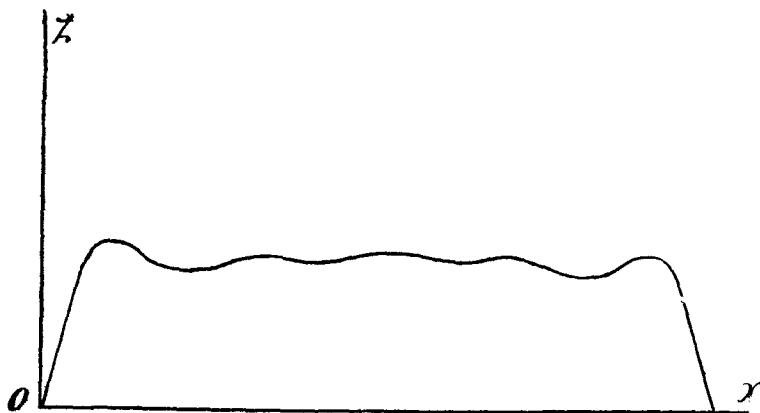


Fig. 4.

ci fa vedere che cosa essa diviene quanto si passa al limite, ossia quando si tien conto di tutti i termini della serie. Si vede difatti che per $\alpha=0$ si ha $z=0$, ma non appena α assume un valore finito per quanto piccolissimo α_0 , immediatamente la z raggiunge il suo valore limite, che conserva costante per il tratto compreso tra $\alpha=\alpha_0$ ed $\alpha=\pi-\alpha_0$, per quindi discendere immediatamente a zero per $\alpha=\pi$.

Facciamo nella (11)

$$z = v_0 ; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

¹⁾ Guido Grassi « Principii scientifici della Elettrotecnica » 1907. Pagina 248.

per essere

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 ; \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 ; \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} = 1 ; \text{ ecc.}$$

$$v_0 = A \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] = A \frac{\pi}{4}$$

donde

$$A = \frac{4}{\pi} v_0$$

e per conseguenza la relazione (11) diventa

$$v_0 = \frac{4}{\pi} v_0 \left[\operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\alpha + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\alpha + \dots \right]$$

Confrontando questa formola con la (10) si trovano immediatamente i valori delle costanti A_1, A_2, A_3, \dots e si ha precisamente

$$A_1 = \frac{4}{\pi} v_0 ; A_2 = 0 ; A_3 = \frac{4}{\pi} v_0 \frac{1}{3} ; A_4 = 0, \dots$$

per cui sostituendo nella (10)

$$(11) \quad v = \frac{4v_0}{\pi} \left[\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\alpha \cos 3\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\alpha \cos 5\theta + \dots \right]$$

Da questa equazione essendo

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

otteniamo

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = - \frac{4v_0}{\pi} \left[\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\alpha \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\alpha \operatorname{sen} 5\theta + \dots \right]$$

$$\text{e per essere } \theta = \frac{\pi t}{2T} ; \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\pi}{2T}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{2v_0}{T} \left[\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\alpha \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\alpha \operatorname{sen} 5\theta + \dots \right]$$

Ritorniamo all'equazione fondamentale

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

dalla quale integrando

$$y = \frac{1}{g} \int \frac{\partial v}{\partial t} dx + \text{cost}$$

Esprimiamo le variabili indipendenti t ed x in funzione di θ ed α

$$t = \frac{2T_0}{\pi} \theta ; \quad x = \frac{2L}{\pi} \alpha$$

$$\partial t = \frac{2T_0}{\pi} \partial \theta ; \quad dx = \frac{2L}{\pi} d\alpha$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial v}{\partial t} dx &= \frac{L}{T_0} \int \frac{\partial v}{\partial \theta} d\alpha \\ &= - \frac{4v_0 L}{\pi T_0} \int [\sin \alpha \sin \theta + \sin 3\alpha \sin 3\theta + \dots] d\alpha \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha d\alpha &= -\cos \alpha \\ \int \sin 3\alpha d\alpha &= -\frac{1}{3} \cos 3\alpha \end{aligned}$$

ecc. ecc.

quindi

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{4v_0 L}{\pi T_0} \left[\sin \theta \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\theta \cos 3\alpha + \dots \right]$$

e conseguentemente

$$y = \frac{4v_0 L}{g\pi T_0} \left[\sin \theta \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\theta \cos 3\alpha \dots \right] + \text{cost}$$

Si determina la costante con la condizione che al serbatoio, ossia per $x=L$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, la pressione è costante ed eguale ad H , per cui

$$(13) \quad y = H + \frac{4v_0L}{\pi g T_0} \left[\sin \theta \cos \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\theta \cos 3\alpha + \dots \right]$$

Per $t = T_0$, essendo $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sin \theta = 1 ; \sin 3\theta = -1 \text{ ecc.}$$

$$y_1 = H + \frac{4v_0L}{\pi g T_0} \left[\cos \alpha - \frac{1}{3} \cos 3\alpha + \frac{1}{5} \cos 5\alpha - \dots \right]$$

Se si pone $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ si ha $\cos \alpha = \sin \beta$; $\cos 3\alpha = -\sin 3\beta$; $\cos 5\alpha = \sin 5\beta$ ecc. donde

$$y_1 = H + \frac{4v_0L}{\pi g T_0} \left[\sin \beta + \frac{1}{3} \sin 3\beta + \frac{1}{5} \sin 5\beta + \dots \right]$$

la quale, come abbiamo veduto ci rappresenta l'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse.

Dunque la pressione y_1 è costante su tutta la lunghezza L compresa tra $\alpha=0$ ed $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha_0$, dove α_0 è una grandezza piccolissima. Per $\alpha=\frac{\pi}{2}$ la y_1 cade bruscamente da y_1 ad H .

Per determinarla basta considerare il valore che essa assume all'otturatore. Detto Y_e questo valore e facendo $\alpha=0$ e conseguentemente

$$\cos \alpha = \cos 3\alpha = \cos 5\alpha = 1$$

$$Y_e = H + \frac{4v_0L}{\pi g T_0} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

$$= H + \frac{v_0L}{g T_0} = H + \frac{v_0 a}{g}$$

Se si confronta l'espressione della velocità data dalla (12) con l'espressione della pressione data dalla (13) si vede immediatamente che esse sono completamente analoghe e differiscono soltanto nella fase.

Abbiamo visto che all'origine dei tempi la curva delle velocità era una retta $v=v_0$, parallela all'asse delle ascisse.

Se nella formola (12) che ci dà la velocità in funzione delle due variabili indipendenti θ ed α , e che supponiamo limitata al quinto termine, diamo a θ un valore qualsiasi compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ e determiniamo la v in funzione di α partendo

da $\alpha=0$ sino ad $\alpha=\frac{\pi}{2}$, troviamo che per un tratto, a partire dall'origine, le ordinate hanno valori molto piccoli, quindi per un breve tratto crescono rapidamente, per poi mantenersi quasi costanti sino alla fine.

Passando al limite, ossia considerando la serie completa, la curva delle velocità si trasforma in una spezzata, il cui primo tratto orizzontale coincide con l'asse delle α , a questo fa seguito un tratto verticale eguale a v_0 e da ultimo un tratto orizzontale sino al termine della tubatura.

Il tratto verticale forma la fronte o testa dell'onda, la quale è piana come quella dell'onda solitaria antecedentemente discussa e come quella, nella prima fase del moto perturbato, si sposta con velocità costante a dall'otturatore al serbatoio.

Le figure (5) e (6) danno una rappresentazione completa del modo come le onde di velocità e di pressione percorrono la tubatura.

All'origine dei tempi. vedi fig. (5), tutto il fluido contenuto nel tubo ha la stessa velocità v_0 . Avvenuta la chiusura istantanea, gli strati a contatto con l'otturatore sono i primi a passare allo stato di quiete. L'estinzione della velocità, vale a dire la testa dell'onda, procede dall'otturatore verso il serbatoio percorrendo uno spazio proporzionale al tempo. o in altri termini all'angolo θ . Per $\theta=0$ essa si trova all'origine, per $\theta=60^\circ$ nella posizione rappresentata dalla figura, dove, la parte tratteggiata al di sopra dell'asse delle ascisse, indica il fluido in moto e quella non tratteggiata il fluido in quiete,

Per $\theta = 90^\circ$ termina la 1.^a fase, durante la quale tutto il fluido passa allo stato di quiete.

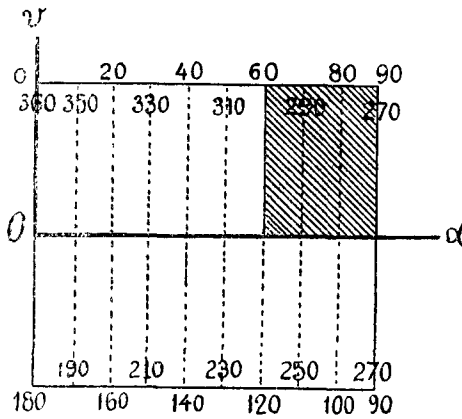


Fig. 5.

A questa fa seguito la 2.^a fase.

Gli strati vicini al serbatoio sono i primi a prendere una velocità $-v_0$, e questa velocità si comunica successivamente

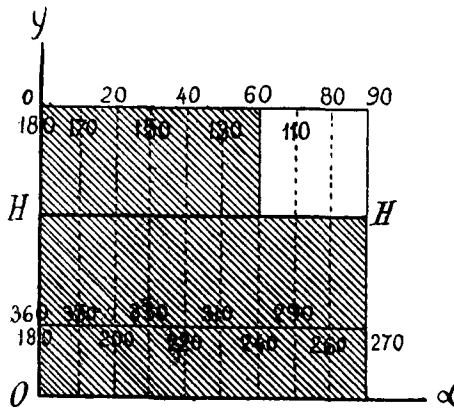


Fig. 6.

agli strati contigui, per $\theta = 180^\circ$ tutto il fluido contenuto nel tubo è animato dalla stessa velocità $-v_0$.

Nella 3.^a fase compresa tra $\theta = 180^\circ$ e $\theta = 270^\circ$ l'onda di velocità negativa ritorna dall'otturatore al serbatoio; alla fine della fase, tutto il fluido è allo stato di quiete.

La 4.^a fase compresa fra $\theta = 270^\circ$ e $\theta = 360^\circ$ chiude il periodo. L'onda di velocità positiva va dal serbatoio all'otturatore; alla fine della fase tutto il fluido è animato della velocità v_0 .

L'andamento della pressione fig. (6) è del tutto analogo a quello della velocità.

All'origine dei tempi, tutto il fluido contenuto nel tubo trovasi alla stessa pressione statica H . Avvenuta la chiusura istantanea, gli strati a contatto con l'otturatore sono i primi a subire l'aumento di pressione. La sovrappressione, vale a dire la testa dell'onda procede dall'otturatore verso il serbatoio percorrendo uno spazio proporzionale al tempo, o in altri termini all'angolo θ . Per $\theta = 0$ esso si trova all'origine, per $\theta = 60^\circ$ nella pozione rappresentata dalla figura, dove il tratteggio indica il modo di distribuzione della pressione lungo la condotta.

Pes $\theta = 90^\circ$ termina la prima fase, durante la quale tutto il fluido passa dalla pressione H alla pressione Y_1 .

A questa fa seguito la 2.^a fase.

Gli strati in prossimità del serbatoio sono i primi a perdere la sovrappressione, a passare cioè dalla pressione Y_1 alla pressione H , e questo effetto si comunica successivamente agli strati contigui, per $\theta = 180^\circ$ tutto il fluido contenuto nel tubo è tornato alla pressione statica H e, per quanto si disse parlando della velocità, possiede una velocità $-v_0$.

Per effetto di detta velocità si produce sull'otturatore una depressione $Y_2 < H$ la quale durante la 3.^a fase, ossia per θ compreso tra 180° e 270° va dall'otturatore al serbatoio. Alla fine della fase tutto il fluido è sceso alla pressione Y_2 .

La 4.^a fase compresa fra $\theta = 270^\circ$ e $\theta = 360^\circ$ chiude il periodo. L'onda di depressione torna dal serbatoio all'otturatore, ed alla fine della fase tutto il fluido si trova alla pressione statica H .

La fig. (7) ci rappresenta la variazione della pressione in funzione del tempo nelle diverse sezioni, distribuite ad egual distanza lungo la condotta.

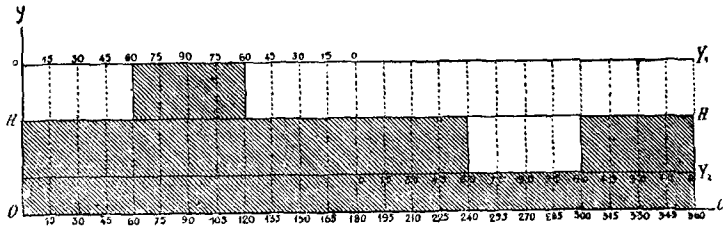


Fig. 7.

Da essa si vede che nella sezione all'origine, la pressione, partendo dal valore statico H si innalza bruscamente al massimo Y_1 , conserva tale valore da $\theta = 0$ a $\theta = 180^\circ$ vale a dire per la durata delle prime due fasi, passa quindi al minimo Y_2 , che mantiene costante da $\theta = 180^\circ$ sino a $\theta = 360^\circ$, vale a dire per le altre due fasi, per poi, attraversando il valore statico, ricominciare il suo turno.

Per le sezioni, che si trovano ad una certa distanza dall'origine, per esempio per quella corrispondente ad $\alpha = 60^\circ$, la pressione per un certo tempo, da $\theta = 0$ a $\theta = 60^\circ$, si mantiene costantemente eguale ad H , raggiunge quindi bruscamente il massimo Y_1 , che mantiene per la durata dell'onda positiva da $\theta = 60^\circ$ a $\theta = 120^\circ$. torna poi di nuovo ad H , che conserva da $\theta = 120^\circ$ a $\theta = 240^\circ$, scende in seguito ad Y_2 , conservando tale valore per la durata dell'onda negativa da $\theta = 240^\circ$ a $\theta = 300^\circ$; ed in fine ritorna bruscamente ad H che mantiene sino alla fine del periodo.

La durata dell'onda positiva, eguale a quella dell'onda negativa, è tanto minore quanto più la sezione che si considera si trova distante dall'origine. Alla sezione terminale, ossia al serbatoio, la durata dell'onda di pressione e dell'onda di depressione, che si succedono ad un intervallo di tempo eguale a $2T$, diviene infinitamente piccola.

La variazione della velocità in funzione del tempo, nelle diverse sezioni distribuite ad egual distanza lungo la condotta ci è rappresentata dalla fig. 8.

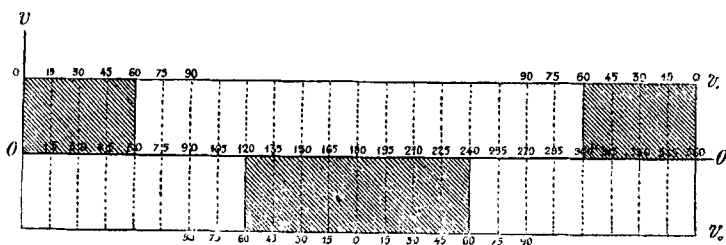


Fig. 8.

Nella sezione corrispondente all'otturatore chiuso, la velocità è nulla. ma nella sezione infinitamente vicina si ha un'onda brevissima di velocità positiva, cui fa seguito, ad un intervallo di tempo eguale a $2T$, un'onda pure brevissima di velocità negativa.

Quanto più ci si allontana dall'origine, tanto più cresce la durata delle onde.

Per una sezione che si trova ad una certa distanza dall'origine, ad esempio per quella corrispondente ad $\alpha = 60^\circ$, la velocità mantiene il suo valore di regime per un tempo $\theta = 60^\circ$, discende quindi bruscamente a zero e si mantiene nulla sino a $\theta = 120^\circ$ in cui prende bruscamente il valore negativo $-v_0$ e lo mantiene sino a $\theta = 240^\circ$, salisce di nuovo a zero, che conserva sino a $\theta = 300^\circ$ per riprendere istantaneamente il suo valore primitivo v_0 , che tiene sino alla fine del periodo. Per la sezione corrispondente al serbatoio il diagramma è dato dalla spezzata $0^\circ.90^\circ - 90^\circ.90^\circ - 90^\circ.90^\circ - 90^\circ.90^\circ - 90^\circ.0^\circ$.

L'onda positiva e l'onda negativa non sono più separate da un intervallo di quiete, ma si succedono immediatamente.

La quantità d'acqua che, durante il tempo T_0 , va dal serbatoio nella condotta è espressa da

$$v_0 S T_0$$

E siccome abbiamo trovato essere $a = \frac{L}{T_0}$ la predetta quantità d'acqua risulta

$$(14) \quad v_0 S \frac{L}{a}$$

Questa ipotesi sulla legge di variazione della velocità in funzione delle variabili indipendenti x e t , soddisfa a tutte le condizioni imposte dal problema, ma non possiamo con tutto ciò dire che essa rappresenti il fenomeno fisico in modo rigoroso. Non è difatti ammissibile che la sovrappressione o depressione si propaghi integralmente sino all'estremo della condotta. È assai più naturale il ritenere che nell'ultimo tratto della tubatura, le variazioni di pressione vadano diminuendo d'intensità e diventino del tutto insignificanti quando esse raggiungono il serbatoio.

Tale divergenza dalla realtà, che del resto non è di molta importanza, devesi attribuire alle semplificazioni introdotte nelle formole, ossia alla soppressione dei termini che riguardano la velocità, i quali a tutto rigore non potrebbero essere trascurati.

CAPITOLO III.

Chiusura graduale in una condotta rigida nella quale scorre un liquido incompressibile.

§ 1. — La condotta è rappresentata schematicamente nella fig. (9).

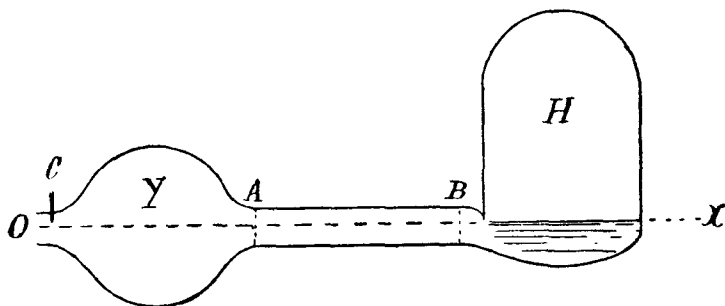


Fig. 9.

I recipienti H ed Y infinitamente grandi in relazione alla sezione trasversale S del tubo, vengono introdotti per semplicità di calcolo, potendosi con tale artificio ritenere infinitamente piccola e perciò trascurabile la velocità del liquido nelle sezioni corrispondenti.

Diciamo Y la pressione in colonna d'acqua esistente nella camera Y, e sia H il carico costante esistente nella camera H.

$L = AB$ la lunghezza del tubo.

$S = \frac{\pi D^2}{4}$ la sezione del tubo di diametro D.

v la velocità media. diretta da monte a valle, che, per essere il tubo di diametro costante è la stessa per tutte le sezioni del medesimo.

ω la sezione libera dell'orificio dell'otturatore, ad un tempo qualsiasi t .

w la velocità media dell'acqua nella predetta sezione.

$\phi = \frac{\omega}{S}$ il grado di apertura dell'otturatore variabile tra i limiti 1 e 0.

$Z = 2b \frac{L}{D} v^3 = K v^3$ la perdita di carico lungo la condotta, di cui si è parlato al Cap. I.

$\bar{\omega}$ il peso specifico dell'acqua.

Applichiamo il teorema delle forze vive alla colonna di liquido compreso tra le sezioni A e B.

La pressione in A è $Y - \frac{v^2}{2g}$, quella in B, $H - \frac{v^2}{2g}$, detta M la massa del liquido si ha

$$\bar{\omega} \left(H - \frac{v^2}{2g} \right) S - \bar{\omega} \left(Y - \frac{v^2}{2g} \right) S - \bar{\omega} Z S = M \frac{dv}{dt}$$

essendo $M = \frac{\bar{\omega}}{g} S L$ riducendo si ottiene

$$(1) \quad Y = H - K v^3 - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}$$

Considerando ora l'efflusso del liquido dall'orificio dell'otturatore prodotto dal carico Y , facendo astrazione dalle perdite di carico e contrazioni di vena ed applicando il teorema di Torricelli otteniamo

$$(2) \quad Y = \frac{w^2}{2g}$$

D'altra parte per l'equazione di continuità del liquido abbiamo

$$vS = \omega w ; (3) \quad w = \frac{S}{\omega} v = \frac{v}{\phi}$$

Sostituendo nella (1) i valori dati dalle (2) e (3) essa diventa

$$(4) \quad -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = \left(K + \frac{1}{2g\phi^3} \right) v^2 - H$$

La legge con cui si manovra l'otturatore, legge che noi possiamo variare a nostro arbitrio, ci dà il valore di ϕ in funzione del tempo. Supposto quindi che si abbia $\phi = \phi(t)$, l'integrazione dell'equazione differenziale (4), qualora fosse di facile attuazione, ci darebbe senza altro la soluzione completa del problema.

In attesa che i Matematici, scendendo dalle alte sfere alle quali si compiacciono di sollevarsi, vengano a darci aiuto, possiamo girare la difficoltà ponendo la v eguale ad una funzione arbitraria del tempo e desumendo dalla (4) il valore della ϕ , la quale per tal modo diviene una funzione determinata del tempo.

Naturalmente siccome la funzione ϕ , benchè arbitraria deve pure soddisfare ad alcune condizioni, non potremo noi per la v scegliere una funzione qualsiasi; ciò non di meno è facile vedere che esiste un numero infinito di funzioni che soddisfanno alle predette condizioni, e fra queste non è difficile trovare quelle che meglio ci addicono al nostro intento.

$$\S 2. - 1^\circ \text{ Sia } \quad v = v_0 \cos \theta \quad \text{dove } \theta = \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$$

essendo t il tempo e T la durata della chiusura.

Abbiamo

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\pi}{2T} v_0 \sin \theta$$

Dalla (1)

$$Y = H - K v_0^2 \cos^2 \theta + \frac{\pi L v_0}{2gT} \sin \theta$$

dalla (2)

$$w = \sqrt{2gY}$$

e finalmente dalla (3)

$$\psi = \frac{v}{w}$$

I valori estremi di dette grandezze, ossia i valori corrispondenti al principio ed alla fine della chiusura risultano

$$t=0 \quad ; \quad v=v_0 \quad ; \quad Y=H-Kv_0^2=V_0=\frac{v_0^2}{2g}$$

$$w=v_0 \quad ; \quad \psi=1$$

$$t=T \quad , \quad v=0 \quad ; \quad Y=H+\frac{\pi L v_0}{2gT}=Y_1$$

$$w=\sqrt{2gY_1} \quad ; \quad \psi=0$$

$$2^\circ \text{ — Sia } v = \frac{v_0}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad ; \quad \theta = \frac{\pi t}{2T}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\pi}{2T} v_0 \sin 2\theta$$

$$(5) \quad Y = H - K v_0^2 \frac{(1 + \cos 2\theta)^2}{4} + \frac{\pi L v_0}{2gT} \sin 2\theta$$

per

$$t=0 \quad ; \quad v=v_0 \quad ; \quad \frac{dv}{dt}=0 \quad ; \quad Y=H-Kv_0^2=\frac{v_0^2}{2g} \quad ; \quad w=v_0 \quad ; \quad \psi=1$$

per

$$t = T \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad ; \quad Y = H \quad w = \sqrt{2gH} \quad ; \quad \psi = 0$$

In questo caso il massimo della Y non ha luogo come nel caso antecedente alla fine della chiusura, ma per un valore della t , compreso tra 0 e T , ossia per un valore di θ compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Per trovare questo valore di θ , ed il corrispondente massimo di Y , basta differenziare la (5) relativamente a θ , porre la derivata $= 0$, da questa nuova equazione desumere il valore dell'angolo e sostituirlo nella (5).

Se si trascura il termine relativo agli attriti si ha

$$Y = H + \frac{\pi}{2} \frac{L}{gT} v_0 \sin 2\theta$$

il cui massimo corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{4}$ vale a dire a $\frac{T}{2}$, ossia a metà corsa dell'otturatore.

Il valore del massimo risulta eguale a quello del caso antecedente. Siccome però l'azione degli attriti non può essere del tutto trascurata, in realtà il massimo corrispondente a questo caso è alquanto minore di quello del caso antecedente.

3.° — Sia infine

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{T^2} \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}}$$

$$Y = H - K v_0^2 \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) + \frac{L v_0}{g T^2} \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{T^2}}}$$

Per

$$t=0 ; v=v_0 ; \frac{dv}{dt}=0 ; Y=H-Kv_0^2=\frac{v_0^2}{2g} ; w=v_0 ; \psi=1$$

per

$$t=T ; v=0 \quad \frac{dv}{dt}=\infty ; Y=\infty ; w=\infty ; \psi=0 ; \frac{d\psi}{dt}=\infty$$

Questo esempio ci fa vedere che una chiusura brusca alla fine della manovra porta con se un aumento di pressione infinitamente grande.

Trattandosi qui principalmente di dimostrare l'influenza della legge di chiusura dell'otturatore nella pressione massima prodotta dal colpo d'ariete, si fa astrazione dalle resistenze di attrito. Il che porta di conseguenza che tra il carico e la velocità di efflusso v_0 si abbia la relazione $H=\frac{v_0^2}{2g}$, che, come già fu detto non si verifica nella realtà.

Quando si voglia passare ad applicazioni pratiche è necessario tener conto dei termini ommessi, il che per il modo speciale con il quale è stato risoluto il problema, non presenta alcuna difficoltà.

Riepilogando le fermole così semplificate, abbiano per i tre casi enunciati.

$$\text{I.} \quad r_1 = \frac{v}{v_0} = \cos \theta ; \theta = \frac{\pi}{2} \frac{t}{T}$$

$$\eta_1 = \frac{2gY}{v_0^2} = 1 + \frac{\pi L}{T v_0} \sin \theta$$

$$\text{II.} \quad r_2 = \frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\eta_2 = \frac{2gY}{v_0^2} = 1 + \frac{\pi L}{T v_0} \sin 2\theta$$

$$\text{III.} \quad r_3 = \frac{v}{v_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

$$\eta_3 = \frac{2gY}{v_0^2} = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{t}{T}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{T}\right)^2}}$$

Nella rappresentazione grafica di queste grandezze vedi figure (10), (11), (12) sono state portate come ascisse i

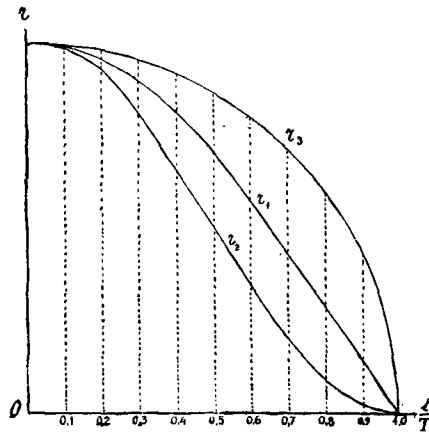


Fig. 10.

valori del rapporto $\frac{t}{T}$, facendolo variare di decimo in de-

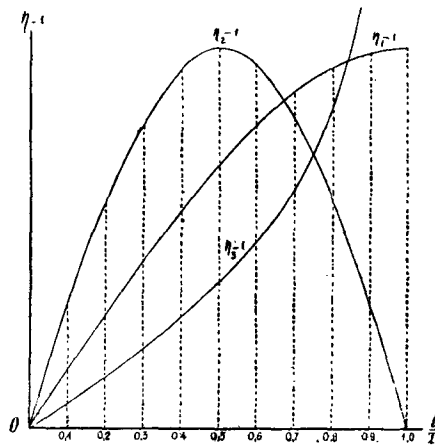


Fig. 11.

cimo da zero all'unità, e come ordinate rispettivamente i valori dei rapporti

$$r = \frac{v}{v_0} \quad , \quad \eta - 1 \quad ; \quad \psi$$

Si è supposto inoltre per semplificare i calcoli che le grandezze $\pi L T v_0$ soddisfacessero alla relazione

$$\frac{\pi L}{T v_0} = 1.$$

È bene ricordare che per risolvere il problema noi abbiamo supposto che la velocità posseduta dal liquido fluente nel tubo,

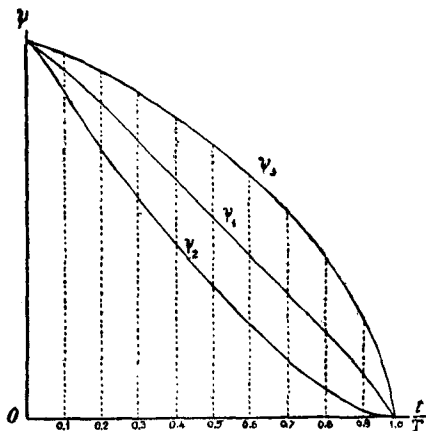


Fig. 12.

variasse secondo determinata legge; e per ciascuna di tali ipotesi abbiamo trovato la curva delle pressioni Y e quella del grado di chiusura ψ , mentre invece per procedere direttamente si sarebbe dovuto stabilire la legge di manovra e da questa dedurre quella della velocità.

Ma il procedimento adottato, non solo evita lo scoglio insormontabile dell'integrazione, ma ci fa vedere quale influenza eserciti la legge di chiusura sulla pressione, e quale sia la curva delle velocità per la quale la predetta legge si avvicina maggiormente alla legge lineare.

Come si vede chiaramente dalla ispezione dei diagrammi; nel primo caso la legge di chiusura si distacca pochissimo dalla legge lineare, il massimo della pressione ha luogn alla fine della chiusura.

Nel secondo caso, la manovra si rallenta all'inizio ed alla fine, mentre si accelera a metà della corsa, la pressione massima corrispondente a questo istante é la stessa del caso antecedente.

Nel terzo caso la manovra è lentissima all'origine, si accelera quindi gradatamente per divenire infinitamente veloce alla fine. La pressione massima corrispondente alla fine della corsa è infinitamente grande.

Nella tabella che segue sono stati riportati i valori numerici, che hanno servito alla descrizione dei diagrammi.

$\frac{t}{T}$	r_1	$\eta_1 - 1$	ψ_1	r_2	$\eta_2 - 1$	ψ_2	r_3	$\eta_3 - 1$	ψ_3
0,0	0,000	0,000	1,0000	1,000	0,000	1,0000	1,000	0,000	1,0000
0,1	0,988	0,156	0,9186	0,975	0,309	0,8725	0,995	0,064	0,9646
0,2	0,951	0,309	0,8313	0,904	0,588	0,7178	0,980	0,130	0,9219
0,3	0,891	0,454	0,7389	0,794	0,809	0,5903	0,955	0,200	0,8718
0,4	0,809	0,588	0,6420	0,654	0,951	0,4686	0,915	0,278	0,8094
0,5	0,701	0,707	0,5412	0,500	1,000	0,3536	0,860	0,368	0,7353
0,6	0,588	0,809	0,4372	0,345	0,951	0,2474	0,796	0,478	0,6548
0,7	0,454	0,891	0,3302	0,206	0,809	0,1532	0,713	0,624	0,5595
0,8	0,309	0,951	0,2212	0,095	0,588	0,0758	0,596	0,849	0,4383
0,9	0,156	0,988	0,1111	0,024	0,309	0,0214	0,434	1,314	0,2853
1,0	0,000	1,000	0,0000	0,000	0,000	0,0000	0,000	∞	0,0000

§ 3. — Le tre espressioni della velocità in funzione del tempo da noi trattate sono le più semplici e le più adatte a dimostrare l'influenza della legge di manovra dell'otturatore sulla sovrappressione, ma se ne possono trovare delle altre. L'unica condizione alla quale esse devono soddisfare è che il grado di chiusura

$$\psi = \frac{v}{w}$$

all'origine dei tempi, sia eguale all'unità; il che porta che a tale istante si abbia $w = v_0$, e siccome la w è data dalla relazione

$$w = \sqrt{2g \left[H - K v^2 - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} \right]}$$

poichè tale condizione sia soddisfatta, è necessario che la legge di variazione della velocità in funzione del tempo sia tale che per $t=0$, sia $\frac{dv}{dt} = 0$. In altre parole la curva rappresentativa della velocità in funzione del tempo, deve avere all'origine la tangente orizzontale.

Ora è possibile trovare una curva la quale in tutto il suo percorso si avvicini quanto si vuole ad una retta inclinata, e che pur tuttavia abbia agli estremi tangenti orizzontali.

Abbiamo veduto che una retta parallela all'asse delle α è rappresentata dalla serie infinita.

$$z = A \left[\sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \dots \right].$$

Per comprendere il significato di questa formola, basta farne la rappresentazione grafica limitandosi, per esempio a cinque termini, come si è fatto nella figura (13) nella quale si vede che solamente la parte centrale si avvicina ad una retta parallela all'asse, mentre invece per valori dell'argomento $\alpha = 0$; $\alpha = \pi$; $\alpha = 2\pi$ ecc., l'ordinata si annulla.

Coll' aumentare il numero dei termini della serie, la curva si avvicina sempre più alla forma rettilinea, ed al limite si

trasforma in una spezzata rettangolare, i cui lati orizzontali si trovano alternativamente al di sopra ed al di sotto dell'asse delle ascisse.

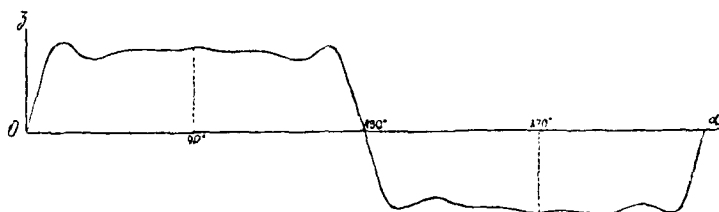


Fig. 13.

Poniamo $\frac{dy}{d\alpha} = z$ ed integriamo, siccome la z è costante per tutto il tratto rettilineo eccettuati i punti critici $\alpha = 0$ $\alpha = \pi$ ecc. avremo

$$y = z\alpha + \text{cost}$$

D'altra parte considerando la z come funzione di α abbiamo

$$y = A \int \left(\sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \dots \right) d\alpha + \text{cost}$$

ed effettuando l'integrazione

$$y = -A \left[\cos \alpha + \frac{1}{9} \cos 3\alpha + \frac{1}{25} \cos 5\alpha + \dots \right] + \text{cost}$$

Determinando la costante con la condizione che per $\alpha = 0$, sia $y = 0$.

$$\text{cost} = A \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right]$$

Ora per la serie di Bernoulli, il fattore entro parentesi è $\frac{\pi^2}{8}$, quindi

$$y = A \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(\cos \alpha + \frac{1}{9} \cos 3\alpha + \frac{1}{25} \cos 5\alpha + \dots \right) \right]$$

Se dunque la z è rappresentata dalla fig. (12) la y è rappresentata dalla fig. (14).

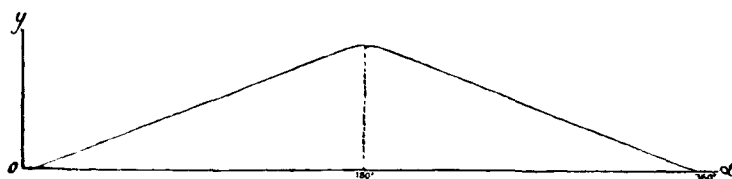


Fig. 14.

La prima ha nei punti critici $z=0$, la seconda $\frac{dy}{d\alpha}=0$. La y nulla per $\alpha=0$, per $\alpha=\pi$ raggiunge il suo valore massimo $A \frac{\pi^2}{4}$ e fra questi limiti varia a seconda della relazione lineare

$$y = c \alpha$$

Per $\alpha > \pi$, siccome $\frac{dy}{d\alpha}$ diventa negativo, il punto figurativo da cui possiamo immaginare generata la linea, percorre il tratto successivo in senso discendente, toccando l'asse delle ascisse per $\alpha=2\pi$, e così di seguito.

Questa spezzata, che ha ai suoi estremi la tangente orizzontale, è per tale ragione adatta a rappresentarci la legge di variazione della velocità nel problema di cui ci stiamo occupando.

Esprimeremo perciò la v nel modo seguente

$$v = v_0 - b \theta \text{ essendo } \theta = \frac{\pi}{T} t$$

dove T , secondo il solito, indica la durata della chiusura.

Differenziando relativamente al tempo

$$\frac{dv}{dt} = -b \frac{d\theta}{dt} = -\frac{b\pi}{T}$$

Nella quale devesi tener presente che il simbolo $\frac{d\theta}{d\theta}$ è eguale all'unità per tutti i valori compresi tra 0 e π , ma è eguale a zero per i punti critici $\theta=0$; $\theta=\pi$ ecc.

Ciò posto, siccome alla fine della chiusura, ossia per $t=T$ deve essere $v=0$; sarà $b=\frac{v_0}{\pi}$ e conseguentemente

$$v=v_0\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right); \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{v_0}{T}\frac{d\theta}{d\theta}$$

Sostituendo tale valore nella espressione della pressione all'otturatore

$$Y=H-Kv^2-\frac{L}{g}\frac{dv}{dt}$$

otteniamo

$$Y=H-Kv^2+\frac{Lv_0}{gT}\frac{d\theta}{d\theta}$$

$$w=\sqrt{2gY}=\sqrt{2g(H-Kv^2)+\frac{2Lv_0}{T}\frac{d\theta}{d\theta}}$$

$$\psi=\frac{v}{w}=\frac{v_0\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)}{\sqrt{2g(H-Kv^2)+\frac{2Lv_0}{T}\frac{d\theta}{d\theta}}}$$

Per

$$t=0; \quad \theta=0; \quad v=v_0$$

$$H-Kv_0^2=Y_0=\frac{v_0^2}{2g}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta}=0; \quad \psi=1$$

Per t pochissimo maggiore di zero, $\frac{d\theta}{dt} = 1$; $v = v_0$

$$\psi_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2g(H - Kv_0^2) + \frac{2Lv_0}{T}}}$$

$$Y = H - Kv_0^2 + \frac{Lv_0}{gT}$$

In questo caso dunque l'otturatore dovrà essere manovrato in modo da passare bruscamente dalla posizione iniziale $\psi = 1$, alla posizione ψ_0 . Per il resto della corsa, la legge di manovra dell'otturatore è dato da

$$\psi = \frac{v_0 \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)}{\sqrt{2g(H - Kv^2) + \frac{2Lv_0}{T}}}$$

Si vede immediatamente che, nel caso in cui si trascuri il termine dovuto alle resistenze di attrito, la ψ varia linearmente da ψ_0 a zero, mentre la pressione Y conserva il suo valore massimo $H + \frac{Lv_0}{gT}$ sino alla fine della chiusura, per poi discendere bruscamente ad H .

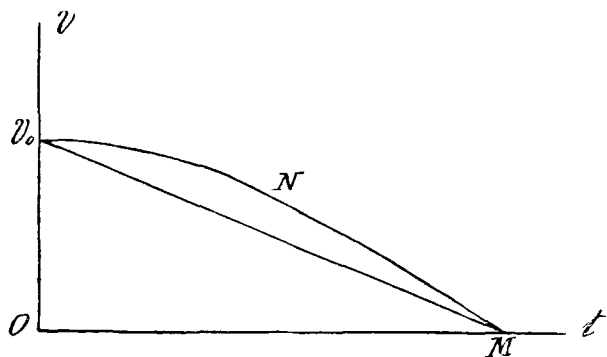
Le figure (15), (16), (17) ci danno i diagrammi delle v , Y e ψ , quando si faccia astrazione dalle resistenze di attrito.

Giunti a questo punto possiamo, generalizzando, trovare l'andamento della pressione Y e del grado di chiusura ψ , corrispondenti ad una legge di variazione della velocità v data dalla spezzata $a b c d e$ (vedi fig. (18).

Ai punti a e b dove il gradiente $\frac{dv}{dt}$ mantenendosi finito subisce una variazione brusca, corrispondono nelle curve delle Y e delle ψ variazioni brusche.

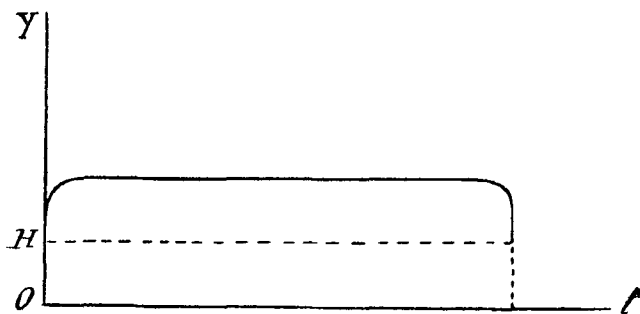
Al punto c dove il predetto gradiente diventa infinito si ha $Y = \infty$: $w = \sqrt{2gY} = \infty$; $\psi = \frac{v}{w} = 0$.

Donde deriva una conclusione assai interessante per la pratica, che cioè il movimento brusco dell'otturatore innalza



Art. 15.

la pressione oltre ogni limite solo nel caso che esso venga eseguito al termine della chiusura.



Art. 16.

Ritornando ora al caso di variazione lineare e costante della velocità lungo l'intera corsa, e della corrispondente legge di manovra dell'otturatore, facciamo notare che questa legge è quella che dà al gradiente della velocità il valore minimo, ed è perciò quella cui corrisponde il valore minimo del massimo della pressione.

Per altra legge di manovra, ad esempio per la manovra lineare $1 M$, la v non è più espressa dalla retta $v_0 M$, ma lo

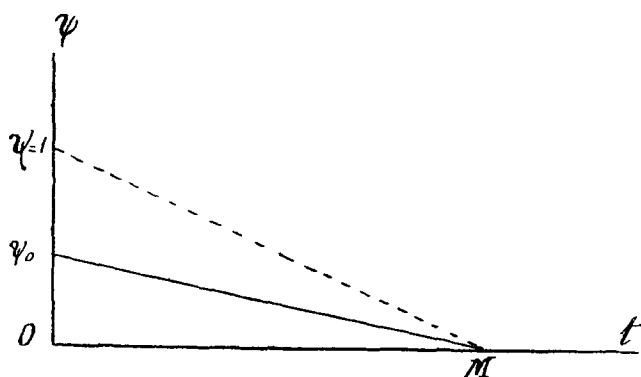


Fig. 17.

sarà da una curva, quale la $v_0 N M$, il cui gradiente massimo essendo maggiore di quello costante della retta, dà luogo ad una pressione maggiore.

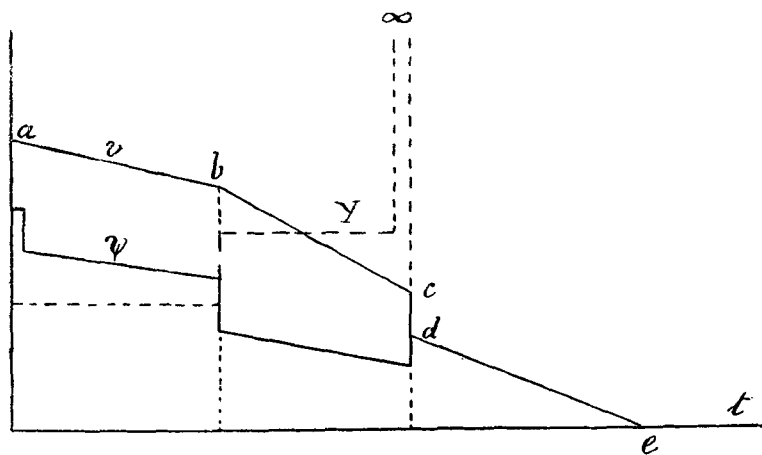


Fig. 18.

Supposto, come si fa d'ordinario, che la chiusura si faccia con velocità presso a poco costante, la curva della velocità prenderà un andamento molto consimile alla senoide $v = v_0 \cos \theta$

che abbiamo considerato al principio di questo capitolo, potremo perciò con sufficiente approssimazione ritenere che la sovrappressione massima all'otturatore, quando come già si è detto si faccia astrazione dagli effetti elastici, sia espressa dalla formola.

$$\frac{\pi}{2} \frac{L v_0}{gT}$$

Non v'ha dubbio che il modo di manovrare l'otturatore, sia per quanto riguarda la durata totale della chiusura, sia per la velocità di manovra più o meno uniforme, debba avere grande influenza sulla pressione massima prodotta dal colpo d'ariete. Ma lo studio dettagliato della questione mette in evidenza alcuni fatti, che a prima vista sembrano paradossali.

Ed in vero abbiamo trovato che una manovra brusca all'inizio della chiusura, invece di accrescere la pressione massima, la diminuisce; è che precisamente un tal modo di manovrare l'otturatore è il più conveniente perchè ad esso, per una data durata della chiusura, corrisponda il minimo della pressione massima.

Per persuaderci di ciò basta osservare che, la manovra brusca all'inizio della chiusura, produce un aumento brusco di pressione a monte dell'otturatore, il quale aumento di pressione permette che dalla bocca di efflusso, repentinamente ristretta, seguiti ad uscire la stessa quantità d'acqua che ne usciva allo stato di regime. Questa manovra non modifica, ipso facto, la velocità dell'acqua fluente nel tubo, la quale conserva il suo valore iniziale v_0 . La variazione della velocità comincia immediatamente dopo con un gradiente costante, mentre l'otturatore, smesso il movimento brusco, con velocità parimenti costante seguita a chiedersi sino alla fine della manovra.

CAPITOLO IV.

Chiusura graduale in una conduttura a pareti elastiche nella quale scorre un liquido compressibile.

§ 1. — Prima di entrare in argomento, occorre ritornare su quanto si disse alla fine del Capitolo II.

In esso si dimostrò che, alla fine del tempo T_0 , tutta l'energia cinetica si era trasformata in energia potenziale elastica e che a quell'istante la pressione, identica su tutta la lunghezza del tubo, era espressa da

$$y = H + \frac{a v_0}{g}$$

Nella quale formola H rappresenta il carico statico, $\frac{a v_0}{g}$ la sovrappressione prodotta dalla forza viva della massa liquida.

A tale risultato si perviene partendo dall'equazione delle oscillazioni elastiche. È però interessante il far vedere come allo stesso risultato si possa giungere eguagliando il lavoro di dilatazione delle pareti elastiche del tubo, alla forza viva posseduta dalla massa liquida che lo riempie.

Consideriamo un anello di tubo di lunghezza eguale all'unità, di diametro D e di spessore e . Sia T la tensione tangenziale che si sviluppa a causa della pressione interna p . Dicendo E il modulo di elasticità a trazione, l'allungamento elastico periferico è dato dalla

$$\delta = \frac{T l}{e E}$$

Nella quale essendo

$$l = \pi D \quad ; \quad T = \frac{p D}{2}$$

$$\delta = \frac{\pi D^2}{2 e E} p$$

Il corrispondente allungamento radiale risulta quindi

$$\rho = \frac{\delta}{2} = \frac{D^2}{4 e E} p$$

Ora nel nostro caso, come fu veduto al § 1 del Capitolo II, quando il lavoro elastico è effettuato esclusivamente dalle pareti del tubo

$$\frac{D}{Ee} = \frac{g}{\tilde{\omega} a^2}$$

ad essendo $p = \tilde{\omega} y$ si ha

$$\rho = \frac{D g y}{4 a^2}$$

Il lavoro elastico per unità di superficie della parete cilindrica del tubo, è

$$\int_0^{\rho} p d\rho = \tilde{\omega} \int_0^{y_0} y d\rho = \frac{\tilde{\omega} D g}{4 a^2} \int_0^{y_0} y dy = \frac{\tilde{\omega} D g}{8 a^2} y_0^2$$

per l'intera superficie $\pi D L$ sarà

$$L_1 = \frac{\tilde{\omega} \pi D^2 g L y_0^2}{8 a^2}$$

Tale lavoro è eguale alla forza viva posseduta dalla massa liquida, ossia a

$$M \frac{v_0^2}{2} = L_2$$

Essendo

$$M = \frac{\tilde{\omega}}{g} S L = \frac{\tilde{\omega} \pi D^2}{4 g} L$$

$$L_2 = \frac{\tilde{\omega} \pi D^2 L v_0^2}{8 g}$$

Eguagliando le due espressioni del lavoro L_1 , L_2 , sarà

$$\frac{\tilde{\omega} \pi D^2 L v_0^2}{8 g} = \frac{\tilde{\omega} \pi D^2 g L y_0^2}{8 a^2}$$

da cui

$$y_0 = \frac{a v_0}{g}$$

Donde si vede che la sovrappressione $\frac{av_0}{g}$, desunta dalla teoria delle oscillazioni elastiche può egualmente ottenersi con la semplice ipotesi che ad un dato istante tutta l'energia cinetica sia convertita in energia potenziale, e che la pressione sia la medesima su tutta la lunghezza del tubo.

Per semplificare ora la trattazione del problema, da una capacità di immagazzinamento elastico, distribuita su tutta la lunghezza del tubo, passiamo a considerare una capacità di immagazzinamento concentrato in un punto; in altri termini all'effetto elastico reale prodotto dalla compressibilità del liquido e dalla elasticità delle pareti sostituiamo una campana o camera elastica, collocata immediatamente a monte dell'otturatore, che dapprima supporremo completamente chiuso.

§ 2. — La fig. (19) illustra schematicamente il caso. Scegliamo per asse delle x , l'asse orizzontale del tubo e per asse

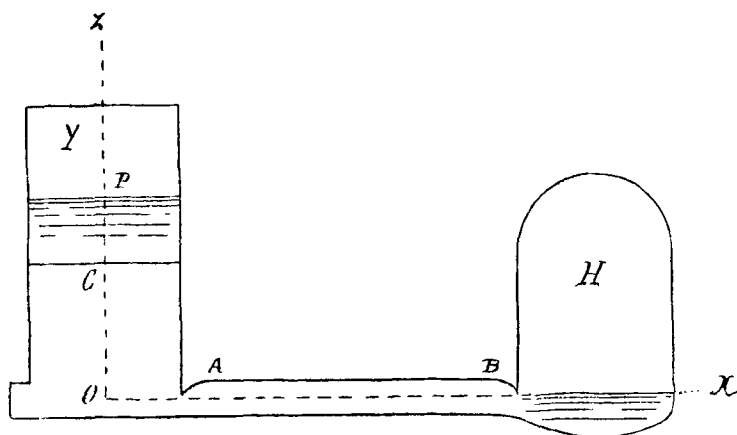


Fig. 19.

delle z la normale a questo passante per l'asse della campana. L'origine delle x è nel punto O , quella delle z nel punto C . Indichiamo come al solito con

v velocità nel tubo

S sezione

u velocità nella campana

A sezione

Y pressione in colonna d'acqua nella campana

H idem nel serbatoio

$CP = z$, ordinata del livello d'acqua nell'interno della campana corrispondente al tempo t .

$OC = z_1$.

All'origine dei tempi il livello d'acqua trovasi in C .

Si suppone che il fluido ipotetico contenuto nella campana si diporti in modo che la pressione cresca sempre proporzionalmente alla deformazione, o in altri termini alla variazione di volume.

E siccome la sezione A è costante ciò equivale a dire che la Y varia linearmente con z . Detto quindi k un coefficiente di proporzionalità avremo

$$(1) \quad Y = H + kz.$$

Ora la pressione alla sezione A è pel teorema di Bernoulli

$$Y + z_1 + z + \frac{u^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$$

quella alla sezione B

$$H - \frac{v^2}{2g}$$

Applicando alla massa liquida M compresa fra le predette due sezioni il teorema delle forze vive si ottiene

$$\bar{\omega} S \left(Y + z_1 + z + \frac{u^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right) - \bar{\omega} S \left(H - \frac{v^2}{2g} \right) = -M \frac{dv}{dt}$$

In questa espressione i termini z_1 , z ed $\frac{u^2}{2g}$ sono piccolissimi di fronte ad Y ed H , per cui possono essere trascurati. Essendo $M = \frac{\bar{\omega}}{g} SL$, sostituendo e riducendo si ottiene

$$Y - H = - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}$$

Pel principio poi di continuità di massa abbiamo.

$$Sv = Au ; \quad v = \frac{A}{S} u$$

ed indicando con $n = \frac{A}{S}$ il rapporto tra la sezione della campana e quella del tubo

$$v = nu ;$$

per cui sostituendo

$$(2) \quad Y - H = - \frac{nL}{g} \frac{du}{dt}$$

D'altra parte essendo z la deformazione, u la velocità con cui la medesima si effettua, abbiamo

$$(3) \quad u = \frac{dz}{dt}$$

Differenziando relativamente al tempo

$$(4) \quad \frac{du}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

e sostituendo nella (1) i valori dati dalle (2) e (4)

$$(5) \quad \begin{aligned} kz &= - \frac{nL}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} \\ z &= - \frac{nL}{kg} \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned}$$

Ridotta a questa forma l'equazione differenziale, si vede subito che essa è soddisfatta da una funzione sinusoidale. Poniamo perciò

$$z = z_1 \text{ sen } \lambda t = z_1 \text{ sen } \varphi$$

nella quale z_1 e λ sono due costanti da determinarsi.

Differenziando questa equazione relativamente al tempo due volte di seguito.

$$\frac{dz}{dt} = z_1 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = z_1 \lambda \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -z_1 \lambda^2 \text{ sen } \varphi$$

Sostituendo nella (5)

$$z_1 \text{ sen } \varphi = \frac{nL}{kg} z_1 \lambda^2 \text{ sen } \varphi$$

dalla quale si desume

$$(6) \quad \lambda^2 = \frac{kg}{nL}$$

Risalendo ora alla determinazione delle grandezze u ed Y in funzione del tempo, o più concisamente di φ , abbiamo

$$u = \frac{dz}{dt} = z_1 \lambda \cos \varphi \quad ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -z_1 \lambda^2 \text{ sen } \varphi$$

$$Y = H - \frac{nL}{g} \frac{du}{dt} = H - \frac{nL}{g} z_1 \lambda^2 \text{ sen } \varphi = H + z_1 k \text{ sen } \varphi$$

Passiamo ora a stabilire l'equivalenza tra l'effetto prodotto dalla camera ipotetica, di cui ci stiamo occupando, e l'effetto reale prodotto dalla compressibilità del liquido e dalla dilatabilità della tubatura.

A questo fine imporranno due condizioni, necessarie e sufficienti per la determinazione delle due arbitrarie z_1 e λ ; prima

che la durata dell'oscillazione reale e la durata dell'oscillazione nella camera elastica siano eguali; seconda che i lavori elastici, che si producono durante la compressione, siano parimenti eguali.

Essendo T_0 la durata del quarto di periodo, si ha per l'oscillazione reale $T_0 = \frac{L}{a}$; per l'oscillazione nella camera elastica $\lambda = \frac{\pi}{2T_0}$; dalle quali, in virtù della prima condizione eliminando T_0 otteniamo

$$(7) \quad \lambda = \frac{\pi a}{2L}$$

Nella camera elastica il lavoro immagazzinato durante la compressione è

$$L' = \bar{\omega} A \int_0^{z_1} Y dz$$

e per essere in virtù della (1)

$$dY = k dz$$

$$L' = \frac{\bar{\omega} A}{k} \int_H^{Y_1} Y dY = \frac{\bar{\omega} A}{2k} (Y_1^2 - H^2)$$

Il lavoro elastico immagazzinato nella tubatura durante il predetto periodo di compressione, si compone del lavoro corrispondente alla perdita di forza viva subita dalla massa fluida, che inizialmente si trovava sul tubo, e dal lavoro fatto dalla pressione H per lo spostamento subito dall'intera massa fluida.

La prima parte è

$$M \frac{v_0^2}{2} = \frac{\bar{\omega} S L}{g} \frac{v_0^2}{2}$$

la seconda è

$$\tilde{\omega} S H \int_0^{T_0} v dt$$

Il lavoro totale risulta quindi

$$L'' = \frac{\tilde{\omega} S L v_0^2}{2g} + \tilde{\omega} S H \int_0^{T_0} v dt$$

Per essere $v = nu$; $u = \frac{dz}{dt}$ l'integrale del secondo membro si trasforma come segue

$$\int v dt = n \int \frac{dz}{dt} dt = n \int_0^{z_1} dz = n z_1$$

Passando quindi all'eguaglianza dei lavori L' ed L''

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega} A}{2k} (Y_1^2 - H^2) &= \frac{\tilde{\omega} S L v_0^2}{2g} + \tilde{\omega} S H n z_1 \\ (8) \quad \frac{n}{2k} (Y_1^2 - H^2) &= \frac{L v_0^2}{2g} + H n z_1 \end{aligned}$$

Dall'equazione

$$(1) \quad Y = H + k z$$

che ci dà la pressione nella camera elastica, otteniamo la seguente relazione tra la pressione massima e lo spostamento massimo

$$Y_1 = H + k z_1$$

Se da questa deduciamo il valore della z_1 , lo sostituiamo nella (8) e risolviamo rispetto ad Y_1 otteniamo

$$(9) \quad Y_1 = H + v_0 \sqrt{\frac{k L}{n g}}$$

Questa formola ci dà la pressione massima in una camera elastica qualsiasi, caratterizzata dal rapporto $\frac{k}{n}$.

Nel caso in cui la camera elastica debba rappresentare l'effetto della compressibilità del liquido e della dilatabilità del tubo, il predetto rapporto è legato ai dati che caratterizzano la condotta da una relazione che si desume dalle formole

$$(6) \quad \lambda^2 = \frac{k g}{n L} ; \quad (7) \quad \lambda = \frac{\pi a}{2 L}$$

poco sopra riportate. Sostituendo difatti nella (6) il valore di λ dato dalla (7) si ottiene

$$(10) \quad \frac{n}{k} = \frac{4 g L}{\pi^2 a^2}$$

Si giunge così a trovare una relazione semplicissima tra le grandezze che caratterizzano la camera elastica e quelle che caratterizzano la condotta. Detta relazione determina soltanto il rapporto $\frac{n}{k}$, lasciando indeterminate le grandezze che lo compongono.

Sostituendo nella (9) il valore del rapporto $\frac{n}{k}$ dato dalla (10) si ha

$$Y_1 = H + \frac{\pi a v_0}{2 g}$$

Ora nel Capitolo II, § 3 abbiamo trovato che la pressione massima nella chiusura estantanea è data da

$$Y_0 = H + \frac{a v_0}{g}$$

Deduciamo quindi che la sovrappressione nella camera elastica è eguale alla sovrappressione effettiva moltiplicata per il rapporto $\frac{\pi}{2}$.

Se tra queste due ultime equazioni si elimina $\frac{av_0}{g}$ si ottiene.

$$(11) \quad Y_i - H = \frac{\pi}{2}(Y_e - H)$$

Da quanto fin qui è stato esposto, giungiamo alla conclusione che, nella chiusura brusca di una conduttura forzata, per quanto riguarda la pressione sull'otturatore prodotta dal colpo d'ariete, all'azione reale della compressibilità del liquido e della dilatabilità delle pareti del tubo, si può sostituire una campana elastica ipotetica, le cui caratteristiche n e k , o se vogliamo il rapporto $\frac{n}{k}$, è legato ai dati caratteristici della conduttura dalla relazione (10).

Il lavoro immagazzinato nella campana è eguale al corrispondente lavoro immagazzinato nel tubo. Così pure il periodo dell'oscillazione è lo stesso. Solo le pressioni massime Y_0 ed Y_i sono differenti; esse però sono legate fra di loro dalla relazione (11), che ne permette la determinazione reciproca.

§ 3. — Prima di procedere avanti vogliamo risolvere un problema, di cui dovremo far uso in seguito.

Date le caratteristiche di due camere elastiche, disposte in parallelo all'estremo della conduttura, determinare la pressione massima.

Le caratteristiche delle camere sono

$$1.^a \quad A_1, \quad n_1, \quad k_1, \quad z_1$$

$$2.^a \quad A_2, \quad n_2, \quad k_2, \quad z_2$$

La pressione Y è la stessa per ambedue, per cui

$$(12) \quad Y_i = H + k_1 z_1$$

$$(13) \quad Y_i = H + k_2 z_2$$

I lavori immagazzinati nelle camere

$$L_1 = \bar{\omega} A_1 \int_0^{z_1} Y dz = \frac{\bar{\omega} A_1}{2 k_1} (Y_1^2 - H^2)$$

$$L_2 = \bar{\omega} A_2 \int_0^{z_2} Y dz = \frac{\bar{\omega} A_2}{2 k_2} (Y_2^2 - H^2)$$

Il lavoro fornito dalla massa idrica

$$(14) \quad L = \frac{\bar{\omega} S L v_0^2}{2} + \bar{\omega} S H \int_0^{T_1} v dt$$

Il principio della continuità di massa ci dà

$$Sv = A_1 u_1 + A_2 u_2$$

dove u_1 ed u_2 indicano le velocità dell'acqua nelle rispettive camere

Aggiungendo a queste equazioni le relazioni

$$u_1 = \frac{dz_1}{dt} : u_2 = \frac{dz_2}{dt}$$

l'integrale del secondo membro della (13) si trasforma nel modo seguente

$$\int_0^T S v dt = A_1 \int \frac{dz_1}{dt} dt + A_2 \int \frac{dz_2}{dt} dt = A_1 z_1 + A_2 z_2$$

per cui

$$L = \frac{\bar{\omega} S L v_0^2}{2g} + \bar{\omega} H (A_1 z_1 + A_2 z_2)$$

Sostituendo nell'equazione dei lavori

$$L = L_1 + L_2$$

i trovati valori

$$\frac{\bar{\omega} A_1}{2k} (Y_1^2 - H^2) + \frac{\bar{\omega} A_2}{2k_2} (Y_1^2 - H^2) = \frac{\bar{\omega} S L v_0^2}{2g} + \bar{\omega} H (A_1 z_1 + A_2 z_2)$$

$$(15) \quad \left(\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) (Y_1^2 - H^2) = \frac{L v_0^2}{g} + 2H (n_1 z_1 + n_2 z_2)$$

Ora dalle (12) e (13) si desume

$$z_1 = \frac{1}{k_1} (Y_1 - H) ; \quad z_2 = \frac{1}{k_2} (Y_1 - H)$$

Sostituendo questi valori nella (15) e risolvendo relativamente ad Y_1 si ottiene la cercata relazione

$$(16) \quad Y_1 = H + v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{1}{\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}}}$$

§ 4. — Chiusura graduale in una condotta munita di campana elastica.

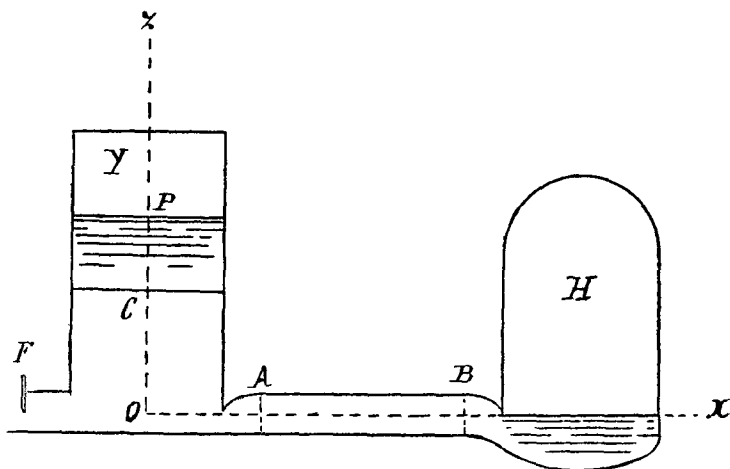


Fig. 20.

La figura schematica (20) illustra questo caso. Essa riproduce la fig. (19) alla quale è stato aggiunto l'otturatore F la cui posizione è data dalla $\psi(t)$.

Le espressioni analitiche che rappresentano il fenomeno sono le seguenti.

1.° l'equazione desunta del principio delle forze vive applicata al tratto di condotta A B, identica a quella dei casi già trattati.

$$(17) \quad -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = Y - H + K v^2$$

$K v^2$ è il termine dovuto alle resistenze di attrito lungo la condotta.

Il valore del coefficiente K, che si ritiene costante, viene determinato considerando lo stato di regime per il quale

$$\frac{dv}{dt} = 0 ; v = v_0 ; Y = Y_0 = \frac{v_0^3}{2g}$$

donde per la (17)

$$0 = Y_0 - H + K v_0^2$$

da cui

$$K = \frac{H - Y_0}{v_0^2} = \frac{2gH - v_0^3}{2g v_0^3}$$

2.° l'equazione relativa alla penetrazione dell'acqua nella camera elastica, equazione che si ottiene differenziando la (1) relativamente al tempo e tenendo conto della (3).

$$(18) \quad \frac{dY}{dt} = k u$$

3.° l'equazione desunta dalla legge del Torricelli, applicata all'efflusso dall'otturatore

$$(19) \quad Y = \frac{w^2}{2g}$$

4.° l'equazione che si ottiene considerando la continuità di massa.

Essendo S , A , ω le sezioni del tubo, della campana e dell'otturatore, v , u , w le rispettive velocità si ha

$$Sv = Au + \omega w$$

Dalla quale per le notazioni già adottate

$$n = \frac{A}{S} ; \quad \phi = \frac{\omega}{S}$$

$$(20) \quad v = nu + \phi w$$

Differenziando questa equazione relativamente al tempo

$$(21) \quad \frac{dv}{dt} = n \frac{du}{dt} + \frac{d(\phi w)}{dt}$$

Dalla (17)

$$Y = H - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} - Kv^2$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{L}{g} \frac{d^2v}{dt^2} - 2Kv \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{L}{g} \frac{d^3v}{dt^3} + 2K \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - 2Kv \frac{d^2v}{dt^2}$$

e dalla (18)

$$u = \frac{1}{k} \frac{dY}{dt} = -\frac{1}{k} \left[\frac{L}{g} \frac{d^2v}{dt^2} + 2Kv \frac{dv}{dt} \right]$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{1}{k} \left[\frac{L}{g} \frac{d^3v}{dt^3} + 2K \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 2Kv \frac{d^2v}{dt^2} \right]$$

Sostituendo nella (21)

$$(22) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{n}{k} \left[\frac{L}{g} \frac{d^3v}{dt^3} + 2K \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 2Kv \frac{d^2v}{dt^2} \right] + \frac{d(\phi w)}{dt}$$

Esprimiamo ora per mezzo della (19) e della (17) la w in funzione di v e t . Supponiamo nota la legge di manovra dell'otturatore, ossia data ψ in funzione di t .

Sostituendo nella (22) otteniamo un'equazione differenziale tra le due variabili v e t , la quale qualora fosse integrabile, ci darebbe la soluzione del problema.

Lasciando ai matematici l'ardua impresa, vediamo se sia possibile di raggiungere l'intento, evitando lo scoglio dell'integrazione.

§ 5. — Come nel Cap. III giungemmo alla soluzione del problema ponendo v eguale ad una funzione arbitraria del tempo, anche in questo caso terremo lo stesso procedimento. Qui però le difficoltà sono alquanto maggiori, perchè la predetta funzione deve avere caratteri speciali per soddisfare a parecchie condizioni, caratteri difficilmente prevedibili a priori.

Sia

$$(23) \quad v = v_0 \cos \theta + c (1 - \cos \varphi) \cos \theta$$

dove θ e φ sono funzioni lineari del tempo e precisamente

$$\theta = \mu t = \frac{\pi}{2T} t ; \quad \varphi = \lambda t = \frac{\alpha}{L} t$$

La c è una costante arbitraria, che verrà determinata in seguito.

Differenziando successivamente la (23)

$$\frac{dv}{dt} = -\mu (v_0 + c - c \cos \varphi) \sin \theta + c \lambda \cos \varphi \sin \theta$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -(\mu_0 + c) \mu^2 \cos \theta + c (\mu^2 + \lambda^2) \cos \theta \cos \varphi - 2 c \mu \lambda \sin \theta \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 v}{dt^3} = & - (v_0 + c) \mu^3 \sin \theta - c (\mu^2 + \lambda^2) [\mu \sin \theta \cos \varphi + \lambda \sin \varphi \cos \theta] \\ & - 2 c \mu \lambda [\mu \cos \theta \sin \varphi + \lambda \cos \varphi \sin \theta] \end{aligned}$$

All'origine dei tempi, ossia allo stato di regime si ha

$$v = v_0; \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -(v_0 + c) \mu^2 + c (\mu^2 + \lambda^2)$$

e conseguentemente

$$Y = H - K v_0^2 = Y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$u = -\frac{L}{kg} \frac{d^2 v}{dt^2} = u_0$$

mentre la (22) diventa

$$0 = -\frac{2Kn}{k} v \frac{d^2 v}{dt^2} + d \frac{(\psi w)}{dt}$$

Considerando che

$$d \frac{(\psi w)}{dt} = \psi \frac{dw}{dt} + w \frac{d\psi}{dt}$$

che

$$Y = \frac{w^2}{2g}$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{w}{g} \frac{dw}{dt} = -\frac{L}{g} \frac{d^2 v}{dt^2}$$

donde

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{L}{w} \frac{d^2 v}{dt^2}$$

che allo stato di regime si ha

$$w = v_0; \quad \psi = 1$$

sarà

$$d \frac{(\psi w)}{dt} = -\frac{L}{v_0} \frac{d^2 v}{dt^2} + v_0 \frac{d\psi}{dt}$$

per cui la (22) prende la forma

$$(24) \quad 0 = - \left(\frac{2Kn v_0}{k} + \frac{L}{v_0} \right) \frac{d^2 v}{dt^2} + v_0 \frac{d\psi}{dt}$$

Ora all'origine dei tempi non vi è penetrazione di acqua nella campana, per cui $u_0 = 0$, e per conseguenza dovrà essere

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = 0$$

Si soddisfa a questa condizione ponendo

$$-(v_0 + c)\mu^2 + c(\mu^2 + \lambda^2) = 0$$

Il che ci permette di determinare l'arbitraria c

$$c = v_0 \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

Sostituendo il trovato valore di c si ottiene

$$v = v_0 \left[1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} (1 - \cos \varphi) \right] \cos \theta$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_0 \mu \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} (1 - \cos \varphi) \right) \sin \theta - \frac{\mu}{\lambda} \cos \theta \sin \varphi \right]$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -v_0 \mu^2 \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) (\cos \theta - \cos \theta \cos \varphi) + \frac{2\mu}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi \right]$$

Ora avendo posto all'origine dei tempi $\frac{d^2 v}{dt^2} = 0$

la (24) diventa

$$0 = v_0 \frac{d\psi}{dt}$$

La quale ci dice che la $v = f(t)$ scelta per rappresentare la velocità è tale che la ψ data dalla relazione

$$\psi = \frac{v - nu}{w} = \psi(t)$$

ha, per $t = 0$, la sua derivata $\frac{d\psi}{dt} = 0$.

Le grandezze v , u , w , Y , ψ che figurano in queste formole sono tutte espresse in funzione del tempo e delle grandezze caratteristiche della conduttura r_0 , H , n , a , L . L'unica grandezza arbitraria è la $\mu = \frac{\pi}{2T'}$ o se vogliamo la durata T'

Ma la T' è legata alla durata T della manovra di chiusura. Si trova immediatamente la relazione che lega queste due grandezze, considerando che alla fine della chiusura deve essere $\psi = 0$ donde

$$(25) \quad v - nu = 0$$

§ 6. — Queste formole valgono dal principio alla fine della chiusura, ossia da $t = 0$, a $t = T$, per il qual valore del tempo la ψ si annulla.

Esse regolano la prima fase. Dal predetto istante comincia la seconda fase nella quale la w è costantemente nulla e la pressione Y , sotto l'unica influenza della camera elastica assume, facendo astrazione dagli attriti, una forma sinusoidale, la cui espressione analitica generale è

$$Y = q + b \sin(\lambda t + \alpha)$$

Dovendo la curva rappresentatrice delle pressioni svolgersi simmetricamente al di sopra ed al di sotto della pressione statica H , si vede immediatamente essere H il valore di q , donde

$$(26) \quad Y = H + b \sin(\lambda t + \alpha).$$

Le costanti b ed α restano indeterminate; ma se si pone la condizione che la pressione e la velocità abbiano lo stesso

valore alla fine della prima fase ed al principio della seconda si ottengono due relazioni per mezzo delle quali, come si vedrà in seguito nei casi particolari, esse vengono determinate.

E con questo il problema è completamente risoluto. Ed in vero, data la durata T della chiusura, tutte le altre grandezze restano perfettamente determinate in funzione del tempo.

E qui dobbiamo ricordare che, a causa del sistema da noi adottato per la soluzione del problema, non solo le grandezze v ed Y per loro natura conseguenziali, ossia destinate a far la parte d'incognite, ma anche la $\psi(t)$ ossia la legge di manovra dell'otturatore, funzione per sua natura arbitraria resta determinata.

Ciò porta l'impossibilità di fissare a priori detta funzione e ritenerla eguale per tutti i casi, di supporre ad esempio che la manovra si compia con legge lineare.

Occorre perciò che nello studio dei casi particolari, necessario per acquistare una conoscenza adeguata del fenomeno, si tenga conto non solo della velocità e della pressione, ma anche della legge di manovra, che per quanto si è detto varia di caso in caso.

I diversi casi vengono determinati dalla durata di chiusura T . Ma per ragioni di calcolo non è opportuno scegliere questa grandezza quale modulo caratteristico. Val meglio invece scegliere il rapporto

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\theta}{\varphi} = \frac{T_0}{T'}$$

che si adatta molto bene allo scopo.

Come si vedrà in seguito, la grandezza ausiliaria T' è legata alla durata T in modo chè esse crescono e diminuiscono simultaneamente, per $T=0$; $T'=0$, per $T=\infty$, $T'=\infty$.

$T=0$ corrisponde alla chiusura brusca. In questo caso la prima fase del fenomeno si annulla, ed esso si svolge completamente nella seconda fase, seguendo una legge sinusoidale esposta nel § 2 di questo Capitolo.

Crescendo la durata T della chiusura, cresce con essa l'ausiliaria T' e diminuisce il rapporto $\frac{\mu}{\lambda}$.

§ 7. — Prima di venire ai casi speciali troviamo opportuno di riassumere le relative formole e metterle sotto la forma più conveniente per la rappresentazione grafica.

A questo fine in luogo delle grandezze assolute v , u . Y metteremo i rapporti:

$$r = \frac{v}{v_0} ; \quad \xi = \frac{nu}{v_0} : \mu = \frac{Y}{H}$$

che verranno portati quali ordinata, mentre per ascissa prenderemo il rapporto

$$s = \frac{t}{T_0}$$

legato all'angolo φ dalla relazione

$$\varphi = \lambda t = \frac{\pi t}{2T_0} = \frac{\pi}{2} s$$

Ciò posto, le predette formole vengono trasformate nel modo seguente

$$(27) \quad \frac{v}{v_0} = \left[1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} (1 - \cos \varphi) \right] \cos \theta = r$$

dove

$$\theta = \mu t = \frac{\pi}{2T_1} t$$

$$(28) \quad -\frac{1}{v_0 \lambda} \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} (1 - \cos \varphi) \right) \sin \theta - \frac{\mu}{\lambda} \cos \theta \sin \varphi \right] = P$$

$$(29) \quad -\frac{1}{v_0 \lambda^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) (1 - \cos \varphi) \cos \theta + \frac{2\mu}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi \right] = Q$$

Sostituendo nell'espressione della pressione

$$Y = H - K v^2 - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}$$

a K il valore trovato al Cap. IV, § 4.

$$K = \frac{H - Y_0}{v_0^3} \text{ dove } Y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

essa diventa

$$Y = H - (H - Y_0) \frac{v^3}{v_0^3} - \frac{v_0 \lambda L}{g} \frac{1}{v_0 \lambda} \frac{dv}{dt}$$

dalla quale, essendo

$$\lambda L = \frac{\pi}{2} a \quad ; \quad \frac{Y_0}{H} = \eta_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$

si ottiene

$$(30) \quad \eta = \frac{Y}{H} = 1 - (1 - \eta_0) r^3 + \frac{\pi}{2} \frac{a v_0}{g H} P$$

Parimenti dalla relazione del Cap. IV, § 4

$$\frac{nu}{v_0} = - \frac{n}{k v_0} \left[\frac{L}{g} \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 K v \frac{dv}{dt} \right]$$

operando le opportune sostituzioni e riduzioni si ottiene

$$(31) \quad \xi = \frac{nu}{v_0} = Q + \frac{4 P (1 - \eta_0) r}{\pi \frac{a v_0}{g H}}$$

La grandezza $\frac{a v_0}{g H}$ merita una considerazione speciale; essa riassume in se tutti i dati, che regolano il moto dell'acqua nella condotta.

Porremo dunque $\frac{a v_0}{g H} = \rho$ e, seguendo l'esempio dell'Ingegner Allievi, diremo ρ la caratteristica della condotta.

Introducendo questo nuovo simbolo, le (30) e (31) divengono

$$(32) \quad \eta = 1 - (1 - \eta_0) r^2 + \frac{\pi}{2} \rho P$$

$$(33) \quad \xi = Q + \frac{4(1 - \eta_0)}{\pi \rho} P r.$$

Quanto al grado di chiusura ψ , esso si trasforma nel modo seguente

$$\psi = \frac{v - nu}{w} = \frac{\frac{v}{v_0} - \frac{nu}{v_0}}{\frac{w}{v_0}} = \frac{r - \xi}{\frac{w}{v_0}}$$

ora

$$\frac{w}{v_0} = \frac{\sqrt{2gY}}{v_0} = \sqrt{\frac{Y}{Y_0}} = \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}$$

donde

$$(34) \quad \psi = \sqrt{\frac{r - \xi}{\eta_0}} \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta}}$$

L'esame della pressione η ci fa vedere che allo stato iniziale, o stato di regime, per il quale $r=1$ e $P=0$, essa assume il valore minimo η_0 , mentre allo stato finale pel quale $r=0$; $P=P_1$ raggiunge il valore massimo

$$\eta_1 = 1 + \frac{\pi}{2} \rho P_1$$

L'aumento della pressione dipende da due cause distinte, dalla scomparsa del termine $(1 - \eta_0) r^2$ dovuto agli attriti e dalla trasformazione dell'energia cinetica in pressione, rappresentata dal termine $\frac{\pi}{2} \rho P$, il primo varia da $1 - \eta_0$ a zero, il secondo da zero a $\frac{\pi}{2} \rho P_1$.

Ricordando che $\eta_0 = \frac{v_0^2}{2gH}$, si vede subito che nei casi ordinari, nei quali la v_0 varia da $1 \div 3$ e la H da $10 \div 1000$, il valore di η_0 è talmente piccolo da potersi trascurare di fronte all'unità di modo che l'aumento nel valore della η dovuto agli attriti raggiunge presso a poco l'unità.

Il termine $\frac{\pi}{2} \rho P_1$ dipende dalla velocità di manovra dell'otturatore, per velocità medie, come si vedrà negli esempi che seguono, non si allontana di molto dall'unità. Donde si conclude che, nello studio dell'argomento di cui ci stiamo occupando, non è permesso in via generale di fare astrazione dalle resistenze di attrito.

D'altra parte però la presenza dei termini dovuti agli attriti porta tale complicazione da ostacolare la determinazione delle leggi che regolano il fenomeno.

Per giungere allo scopo ricorreremo ad un espediente, il quale mentre ci permette di tener conto dell'azione degli attriti, non guasta la semplicità delle formole.

Abbiamo veduto nel Capitolo III che un movimento brusco al principio della chiusura produce un aumento di pressione, senza modificare la velocità.

Immaginiamo ora di fare questo movimento in modo che la pressione salga da $Y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ ad H . Durante questo movimento le r , P , e Q che sono funzioni continue del tempo mantengono il loro valore, solamente la $\eta_0 = \frac{Y_0}{H}$ diventa eguale all'unità, per cui le formole (32), (33), (34) divengono

$$(35) \quad \eta = 1 + \rho P$$

$$(36) \quad \xi = Q$$

$$(38) \quad \psi = \frac{r - \xi}{\frac{w}{v_0}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2gH}} \frac{r - \xi}{\sqrt{\eta}}$$

Con questo procedimento in sostanza; in luogo di partire dallo stato reale, nel quale all'otturatore regna la pressione Y_0 , si parte dallo stato ipotetico nel quale regna la pressione H . In altri termini si immagina che prima dell'origine dei tempi, l'otturatore abbia compiuto un movimento brusco per il quale la perdita di carico dovuta agli attriti si sia trasformata in pressione.

Venendo ora alle formole che riguardano la seconda fase, abbiamo

$$(26) \quad Y = H + b \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)$$

$$(38) \quad \eta = 1 + \frac{b}{H} \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) = 1 + p \operatorname{sen} \beta$$

dove

$$p = \frac{b}{H} ; \beta = \varphi + \alpha = \lambda t + \alpha .$$

Differenziando relativamente al tempo

$$\frac{d\eta}{dt} = p \cos \beta \frac{d\beta}{dt} = \lambda p \cos \beta$$

donde

$$(39) \quad \xi = \frac{1}{\lambda} \frac{d\eta}{dt} = p \cos \beta$$

Al principio della seconda fase si ha

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 + p \operatorname{sen} \beta_1 \\ \xi_1 &= p \cos \beta_1 . \end{aligned}$$

Da queste due equazioni si ottengono le incognite p e β_1

$$(40) \quad p = \sqrt{(\eta_1 - 1)^2 + \xi_1^2}$$

$$(41) \quad \tan \beta_1 = \frac{\eta_1 - 1}{\xi_1} .$$

D'altra parte per le formole relative alla prima fase abbiamo

$$\eta = 1 + \frac{\pi}{2} \rho P$$

donde differenziando relativamente al tempo

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\pi}{2} \rho \frac{dP}{dt} = \frac{\pi}{2} \rho \lambda Q.$$

Alla fine della prima fase si ha

$$\eta_1 = 1 + \rho P_1; \quad \xi_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\pi}{2} \rho Q_1.$$

Sostituendo questi valori nelle (40) e (41)

$$(42) \quad p = \frac{\pi}{2} \rho \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

$$(43) \quad \tan \beta_1 = \frac{P_1}{Q_1}$$

§ 8. — *Casi speciali.*

Come primo caso speciale tratteremo quello cui corrisponde $\frac{\mu}{\lambda} = 1$. Essendo

$$\theta = \mu t; \quad \mu = \frac{\pi}{2T'}; \quad \varphi = \lambda t; \quad \lambda = \frac{\pi}{2T_0}$$

si deduce $\varphi = \theta$; $T' = T_0$.

Ponendo queste condizioni nelle formole generali (27) (28) (29) si ottiene per la prima fase

$$(44) \quad r = \cos \theta (2 - \cos \theta)$$

$$(45) \quad P = 2 \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

$$(46) \quad \xi = Q = 2 + 2 \cos \theta (1 - 2 \cos \theta)$$

le quali permettono di determinare la pressione ed il grado di chiusura per mezzo delle relazioni

$$(35) \quad \eta = 1 + \frac{\pi}{2} \rho P$$

$$(37) \quad \psi = \sqrt{\frac{v_0^3}{2gH}} \frac{r - \xi}{\sqrt{\eta}}$$

Alla fine della chiusura, ossia per $\psi = 0$, la condizione

$$r - Q = 0$$

ci dà

$$\cos \theta (2 - \cos \theta) = 2 + 2 \cos \theta (1 - 2 \cos \theta)$$

dalla quale si ottiene

$$\cos \theta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\theta_1 = 35^\circ, 16$ in radianti $\theta_1 = 0,6156$.

Essendo T la durata della chiusura

$$\theta_1 = \mu T = \lambda T$$

$$T = \frac{\theta_1}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \theta_1 T_0 = 0,392 T_0.$$

Sostituendo il trovato valore di θ_1 nelle (45) e (46) si ha

$$P_1 = 2 \sin \theta_1 (1 - \cos \theta_1) = 0,212$$

$$Q_1 = 2 + 2 \cos \theta_1 (1 - 2 \cos \theta_1) = 0,966.$$

Per questi valori le (42) e (43) danno:

$$p = \frac{\pi}{2} \rho \sqrt{0,212^2 + 0,966^2} = 0,989 \frac{\pi}{2} \rho$$

$$\tan \beta_1 = \frac{0,212}{0,966}; \text{ donde } \beta_1 = 12^\circ, 23'$$

ed essendo $\beta_1 = \theta_1 + \alpha$ e $\theta_1 = 35^\circ, 16$

$$\alpha = -22^\circ, 53' \text{ in radianti } = -0,3986.$$

Il tempo decorso da $t = 0$, sino all'istante in cui tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia elastica, al quale istante corrisponde il massimo della pressione

$$\eta_2 = 1 + p = 1 + 0,989 \frac{\pi}{2} \rho$$

si ottiene ponendo $\beta = \frac{\pi}{2}$ per cui

$$\lambda t + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

dalla quale si desume la durata

$$T_2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1.254 T_0$$

Conseguentemente la durata della seconda fase risulta

$$T_2 - T_1 = 1.254 T_0 - 0.392 T_0 = 0.862 T_0$$

Per mezzo delle formole (44) (46) (35) (37) relative alla prima fase, e per mezzo delle formole (38) (39) relative alla seconda, sono stati calcolati i valori delle grandezze r, ξ, η, ψ , ponendo per amore di semplicità

$$\rho = 1 ; \sqrt{\frac{v_0^2}{2gH}} = 0.04$$

Tale scelta è conforme a quanto si riscontra nella pratica equivalendo essa all'ipotesi che si abbia

$$a = 1000 ; H = 326.20 ; v_0 = 3.20$$

I risultati dei calcoli sono riassunti nella seguente Tabella:

TABELLA I. $\frac{\mu}{\lambda} = 1$

Fase	$\frac{t}{T_0}$	r	ξ	η	ϕ
I	0,0	0,0000	0,0000	1,0000	0,0400
	0,1	0,9995	0,0073	1,0060	0,0370
	0,2	0,9977	0,2840	1,0475	0,0281
	0,3	0,9881	0,6060	1,1555	0,0146
	0,392	0,9660	0,9660	1,3330	0,0000
II	0,392		0,9660	1,3330	
	0,4		0,9600	1,3650	
	0,5		0,9162	1,5854	
	0,6		0,8467	1,8028	
	0,7		0,7563	2,0010	
	0,8		0,6472	2,1740	
	0,9		0,5224	2,3190	
	1,0		0,3840	2,4310	
	1,10		0,2373	2,5080	
	1,20		0,0842	2,5480	
	1,254		0,0000	2,5540	

Per mezzo di questa tabella sono stati descritti i diagrammi delle r , ξ , η , ϕ rappresentati nella Fig. (21) nella quale a titolo di confronto sono stati riportati, in punteggiato, i diagrammi delle r , ϕ nel caso in cui, mantenendo invariate, la durata T della chiusura, il carico H e la velocità di regime v_0 , si suppone il liquido incompressibile e la conduttura perfettamente rigida.

Veniamo ora a considerare il caso speciale nel quale

$$\mu = \frac{\lambda}{2}$$

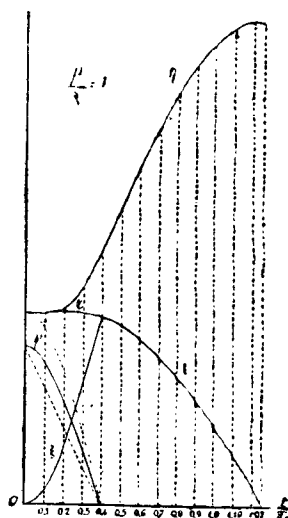


Fig. 21.

Essendo

$$\mu = \frac{\pi}{2T_0} \quad ; \quad \lambda = \frac{\pi}{2T_0}$$

$$\theta = \mu t \quad ; \quad \varphi = \lambda t$$

si deduce

$$T = 2T_0 \quad ; \quad \varphi = 2\theta$$

Ponendo queste condizioni nelle formole generali (27), (28), (29) otteniamo

$$r = \cos \theta \left[1 + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta) \right]$$

$$P = \frac{1}{2} \left[\left[1 + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta) \right] \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\theta \right]$$

$$\xi = Q = \frac{1}{4} \left[\frac{5}{2} (1 - \cos 2\theta) \cos \theta + \sin \theta \sin 2\theta \right]$$

le quali ci danno la pressione ed il grado di chiusura per mezzo delle formole

$$(35) \quad \eta = 1 + \pi \rho P$$

$$(37) \quad \psi = \sqrt{\frac{v_0^2}{2gH}} \quad \frac{r - \xi}{\sqrt{\eta}}$$

In questo caso la r e la ξ si annullano ambedue per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e siccome la ξ si conserva sempre inferiore alla r , la fine della chiusura corrispondente a $\psi = 0$, avviene dopo un tempo $T = T' = 2 T_0$. A questo istante, cui corrisponde la pressione massima, tutta l'energia cinetica trovasi trasformata in energia elastica.

La parte del fenomeno di colpo d'ariete, di cui ci interessa lo studio, si compie per intero nella prima fase.

Dando alla variabile θ valori gradatamente crescenti, per mezzo delle formole sovra riportate fu calcolata la seguente Tabella, nella quale, come in antecedenza, per unità di misura del tempo fu scelta la durata T_0 .

TABELLA II. $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

$\frac{T_0}{t}$	r	ξ	η	ψ
0,0	1,0000	0,00000	1,0000	0,0400
0,2	0,9995	0,01585	1,0049	0,0392
0,4	0,9967	0,05959	1,0349	0,0360
0,6	0,9828	0,12053	1,1103	0,0314
0,8	0,9490	0,18338	1,2482	0,0270
1,0	0,8839	0,23204	1,4164	0,0219
1,2	0,7800	0,25252	1,6236	0,0158
1,4	0,6342	0,23651	1,8335	0,0118
1,6	0,4487	0,18027	2,0135	0,0078
1,8	0,2328	0,09489	2,1362	0,0038
2,0	0,0000	0,00000	2,1781	0,0000

A completamento dello studio sui casi particolari, vengono qui riportate le Tabelle corrispondenti a $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2}{3}$ e $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{3}$.

TABELLA III. $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2}{3}$.

Fase	$\frac{t}{T_0}$	r	ξ	η	ψ
I	0,00	1,0000	0,0000	1,0000	0,0400
	0,15	0,9995	0,0391	1,0063	0,0383
	0,30	0,9967	0,1497	1,0375	0,0335
	0,45	0,9863	0,3204	1,1224	0,0251
	0,60	0,9571	0,4960	1,2678	0,0165
	0,75	0,9008	0,6675	1,4871	0,0076
	0,90	0,8082	0,7920	1,7592	0,0005
	0,91	0,7950	0,7950	1,7600	0,0000
II	0,91		0,7950	1,7600	— 0,0052
	1,05		0,6626	2,028	
	1,20		0,4915	2,243	
	1,35		0,2932	2,389	
	1,50		0,0787	2,458	
	1,545		0,0000	2,463	

TABELLA IV. $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{3}$.

$\frac{t}{T_0}$	r	ξ	η	ϕ
0,00	1,0000	0,00000	1,0000	0,04000
0,15	0,9999	0,00178	1,0006	0,03991
0,30	0,9995	0,00645	1,0038	0,03965
0,45	0,9986	0,01394	1,0137	0,03912
0,60	0,9939	0,02331	1,0348	0,03816
0,75	0,9867	0,03401	1,0649	0,03609
0,90	0,9748	0,04257	1,1063	0,03545
1,05	0,9549	0,05316	1,1578	0,03352
1,20	0,9248	0,06000	1,2172	0,03136
1,35	0,8889	0,06421	1,2838	0,02912
1,50	0,8415	0,06480	1,3526	0,02671
1,65	0,7819	0,06181	1,4194	0,02418
1,80	0,7153	0,05578	1,4825	0,02167
1,95	0,6385	0,04655	1,5371	0,01910
2,10	0,5672	0,03522	1,5795	0,01693
2,25	0,4646	0,02275	1,6118	0,01392
2,40	0,3712	0,00510	1,6426	0,01128
2,55	0,2762	—0,01600	1,6319	0,00892
2,70	0,1816	—0,03200	1,6233	0,00630
2,85	0,0892	—0,05500	1,6057	0,00410
3,00	0,0000	—0,07410	1,5806	0,00238
3,15	—0,0851	—0,06440	1,5534	—0,00067

Le figure (22), (23), (24) rappresentano i diagrammi relativi alle ultime tre Tabele.

Dall'esame di questi diagrammi si deduce che le leggi che regolano la sovrappressione prodotta dal colpo di ariete

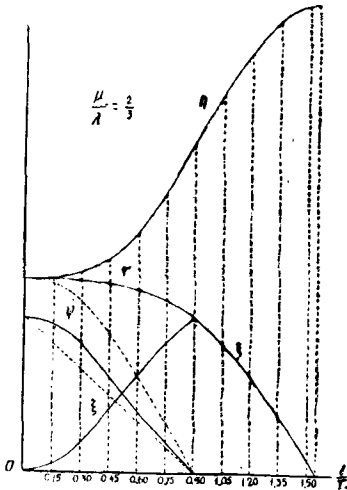


Fig. 22.

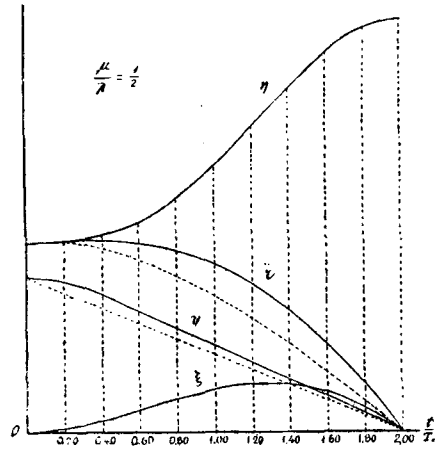


Fig. 23.

sono assai più complesse di quanto può sembrare a prima vista e che perciò non è possibile in via rigorosa trovare una

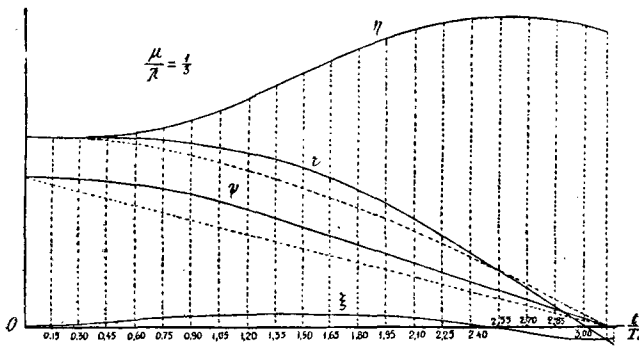


Fig. 24.

formola generale che in funzione delle grandezze caratteristiche della conduttura e della durata della chiusura ci permetta determinarne il valore.

È necessario perciò trattare separatamente ogni caso speciale, seguendo il metodo da noi proposto. Ciò non di meno per soddisfare le esigenze della pratica per le quali è sufficiente un valore discretamente approssimato, possiamo procedere nel modo seguente.

§ 9. — I predetti diagrammi ci danno in ciascun caso speciale la durata della chiusura ed il valore massimo della pressione nella camera elastica ipotetica, dal quale, per quanto già si è detto in proposito, riesce facile desumere il valore della rispettiva pressione effettiva.

A questo fine riprendiamo la formola (11) del § 2.

$$(11) \quad Y_i - H = \frac{\pi}{2}(Y_e - H)$$

che divisa per H ci dà

$$\eta_i - 1 = \frac{\pi}{2} (\eta_e - 1)$$

dove $\eta_i - 1$ rappresenta la sovrappressione nella camera elastica, ed $\eta_e - 1$ la sovrappressione effettiva.

Per ottenere dunque la sovrappressione effettiva dalla sovrappressione ipotetica, basta moltiplicare quest'ultima per il rapporto $\frac{2}{\pi}$.

Nella seguente Tabella sono state riportate le pressioni massime nella camera elastica e le sovrappressioni effettive, corrispondenti ai diversi valori del rapporto $\frac{T}{T_0}$, che si è fatto variare da zero ad 8.

TABELLA V.

$\frac{\mu}{\lambda}$	$x = \frac{T}{T_0}$	η_1	η_2	$\eta_e - 1$	$\frac{1}{x}$
0	0,000		2,571	1,0000	∞
1	0,392		2,554	0,9890	2,5510
$\frac{2}{3}$	0,910		2,463	0,9314	1,0990
$\frac{1}{2}$	2,000	2,178		0,7500	0,5000
$\frac{1}{3}$	3,120	1,643		0,4993	0,3205
$\frac{1}{4}$	4,000	1,393		0,2500	0,2500
$\frac{1}{6}$	6,000	1,276		0,1758	0,1667
$\frac{1}{8}$	8,000	1,196		0,1250	0,1250

A $T=0$ corrisponde la chiusura brusca, nella quale come già si disse la pressione nella camera elastica è data dall'espressione sinusoidale

$$\eta = 1 + \frac{\pi}{2} \rho \sin \theta$$

cui corrisponde il valore massimo

$$\eta_2 = 1 + \frac{\pi}{2} \rho$$

ed il valore della sovrappressione

$$\eta_e' - 1 = \frac{2}{\pi} (\eta_2 - 1) = \rho$$

che per l'ipotesi fatta sul valore di ρ risulta eguale all'unità.

Fanno seguito i valori delle pressioni e delle sovrappressioni relativi ai casi speciali antecedentemente esposti. A questi sono stati aggiunti altri tre casi corrispondenti ai valori di x ; 4, 6, 8, per i quali la pressione massima ha luogo alla fine della prima fase.

Finalmente l'ultima colonna ci dà il valore della sovrappressione nel caso limite di un liquido incompressibile fluente in un tubo rigido.

In tal caso la pressione massima, per quanto si disse al capitolo III § 2 è

$$Y_1 = H + \frac{\pi}{2} \frac{L v_0}{g T}$$

dalla quale, dividendo per H e ricordando essere

$$\eta_1 = \frac{Y_1}{H} \quad ; \quad L = a T_0 \quad ; \quad \rho = \frac{a v_0}{g H}$$

si ottiene

$$\eta_1 = 1 + \frac{\pi}{2} \rho \frac{T_0}{T}$$

E passando dalla pressione massima nella camera elastica alla sovrappressione effettiva si ha

$$\eta_e - 1 = \rho \frac{T_0}{T} = \rho \frac{1}{\frac{T}{T_0}} = \frac{\rho}{x}$$

Questa equazione nella quale la x viene considerata come variabile indipendente, ci rappresenta un'iperbole equilatera.

Nella Fig. (25) portando come ascisse i valori del rapporto x e come ordinate i corrispondenti valori della sovrappressione, sono stati rappresentati i punti A B C... relativi ai diversi casi speciali, la retta A T parallela all'asse delle ascisse, e l'iperbole equilatera summentovata MG.

Da quanto fin qui è stato detto risulta evidente che, volendo rappresentare l'andamento della sovrappressione in funzione della durata di chiusura, o diciam meglio del rapporto

$x = \frac{T}{T_0}$ per mezzo di una curva, questa, per piccoli valori del-

l'ascissa, dovrà confondersi con la retta AT e per grandi valori con il ramo discendente dell'iperbole, mentre per valori intermedi dovrà passare in prossimità dei punti B, C, D ecc. Diciamo passare in prossimità e non nei punti stessi, perchè ciascuno di questi punti rappresenta un caso speciale caratterizzato da una speciale legge di manovra, mentre la curva che ci deve rappresentare il caso generale deve passare per punti corrispondenti tutti alla stessa legge di manovra.

Nelle fig. (21), (22), (23), (24) che ci danno i diagrammi dei diversi casi speciali, è stata riportata in punteggiato la legge di variazione delle ψ nel caso limite in cui si trascurino gli effetti elastici.

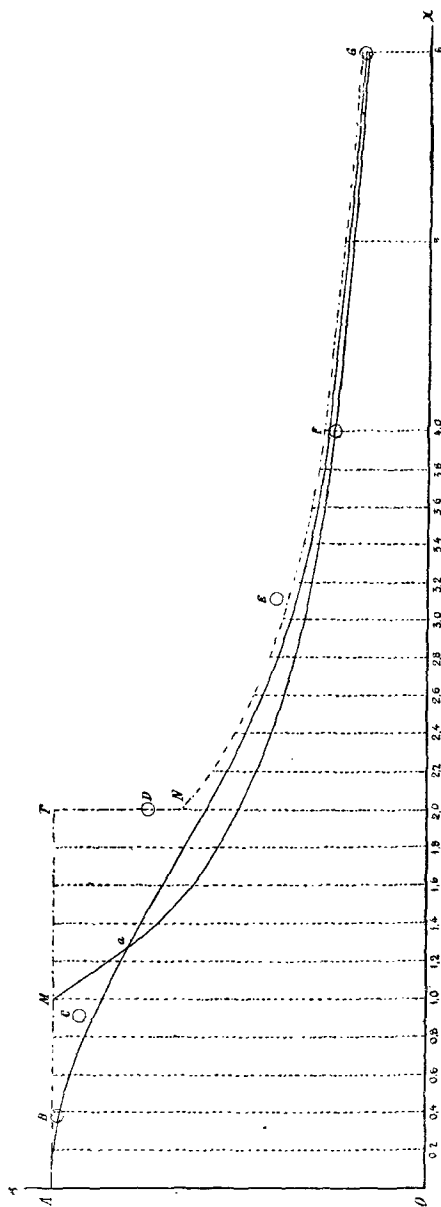


Fig. 25.

Questa curva che si discosta pochissimo da una retta, tro-

vasi sempre alquanto al di sotto della curva corrispondente al caso, in cui tali effetti vengono presi in considerazione. Adottando in generale una legge di manovra presso a poco lineare, le rispettive curve delle velocità vengono ribassate, e diminuendo per questo fatto il gradiente massimo delle medesime, anche le pressioni massime riescono minori.

In conseguenza di ciò la nostra curva deve passare alquanto al di sotto dei predetti punti, esser tangente in A alla retta A T e confondersi con l'iperbole per valori notevoli della ascissa.

Il problema quindi si riduce a trovare una funzione della x'

$$(47) \quad \eta - 1 = z = F \varphi(x') + G \psi(x')$$

tale che per $x' = 0$ sia

$$z = F \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

e per x' molto grande si abbia approssimativamente

$$z = \frac{G}{x'}$$

La relazione (47), senza che per questo venga assoggettata ad alcuna restrizione, può essere trasformata nel modo seguente

$$z = F \left[\varphi(x') + \frac{\psi(x')}{\frac{F}{G}} \right] = F [\varphi(x) + \psi(x)]$$

essendo

$$x = \frac{F}{G} x'$$

Si soddisfa convenientemente alle condizioni del problema ponendo

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + m x^3} \quad ; \quad \psi(x) = \frac{x^3}{n + x^4}$$

per cui la formola diventa

$$(48) \quad z = F \left[\frac{1}{1 + m x^3} + \frac{x^3}{n + x^4} \right]$$

nella quale m ed n sono due costanti arbitrarie che si ottengono stabilendo che la curva passi per due punti determinati. Nel nostro caso, tenuto conto che la curva deve avere un percorso poco inferiore a quello corrispondente ai punti A, B, C, D, si soddisfa assai bene all'intento ponendo

$$m = \frac{1}{2} \quad ; \quad n = 4 .$$

Quanto alle costanti F e G, esse sono determinate dai valori che assume la z nei casi estremi, ossia nella chiusura istantanea e nella chiusura estremamente lenta.

Nel primo caso si ha $z = \rho$

$$\text{Nel secondo caso si ha } z = \frac{\rho}{\frac{T}{T_0}} = \frac{\rho}{x'}$$

donde

$$F = G = \rho \quad ; \quad x = x' = \frac{T}{T_0}$$

Conseguentemente la (48) diventa

$$z = \rho \left[\frac{1}{1 + \frac{x^3}{2}} + \frac{x^3}{4 + x^4} \right]$$

Supposto $\rho = 1$ e facendo variare gradatamente la x si ottengono per z i valori qui sotto riportati:

TABELLA VI.

x	0	0,392	0,910	1,000	2,000	3,120	4,000	6,000	8,000
z	1	0,986	0,887	0,860	0,600	0,369	0,276	0,175	0,129

Nella fig. (25) è stata disegnata la curva corrispondente a questa Tabella.

Dall'esame della figura si desume che nelle manovre rapide, ossia per il tratto di curva Aa , compreso tra l'origine e l'intersezione con l'iperbole, la compressibilità del liquido e la dilatabilità del tubo, in altri termini l'elasticità della materia, producono una diminuzione di pressione di fronte a quella che si avrebbe in un sistema perfettamente rigido. Per manovre molto lente, ossia a partire dal punto G in poi, la curva rappresentativa delle pressioni si confonde con l'iperbole e per conseguenza l'effetto dell'elasticità cessa di essere apprezzabile. In fine per manovre eseguite con media velocità, vale a dire per il tratto di curva aG trovandosi questo al di sopra dell'iperbole, si deve concludere che in questi casi l'elasticità della materia produce un aumento di pressione di fronte a quella che si avrebbe se il sistema fosse perfettamente rigido.

La ragione di questo fatto, che a prima vista sembra paradossale, si trova facilmente quando si ricordi quanto fu detto relativamente alla legge di manovra, cui corrisponde il minimo di pressione.

Al Capitolo III, § 3.º si è fatto vedere che la manovra più conveniente, perchè la pressione sia minima, è quella per la quale il gradiente della velocità si mantiene costante. Qualunque azione tendente a modificare la costanza del gradiente, supposto sempre che la durata della chiusura rimanga invariata, produce con aumento di pressione.

Ora la presenza della camera elastica, che ci rappresenta la compressibilità del liquido e la dilatabilità del tubo, può in alcuni casi modificare la curva delle velocità diminuendone il gradiente all'origine della corsa ed aumentandolo alla fine come si vede chiaramente nelle fig. (21), (22), (23), (24); non v'è dunque a meravigliare che la stessa elasticità della materia, la quale in alcuni casi dà luogo ad una diminuzione di pressione, possa in altri casi produrre l'effetto contrario.

§ 10. — A titolo di confronto abbiamo riportato sulla fig. (25), e rappresentato con tratti e punti, la legge di varia-

zione della pressione in funzione della durata di manovra corrispondente alla Teoria dell'ing. Allievi.

Come accennammo nell'introduzione, l'Allievi nel fenomeno del colpo d'ariete, distingue due fasi, la fase di colpo diretto e la fase di contraccolpo.

La fase di colpo diretto si estende da $T=0$ a $T=\frac{2L}{a}$ ossia secondo le nostre notazioni da $T=0$ a $T=2T_0$.

La fase di contraccolpo da

$$T=\frac{2L}{a} \text{ a } T=\infty$$

Nella fase di colpo diretto, facendo uso dei nostri simboli, la sovrappressione è espressa da

$$z = \eta - 1 = \rho$$

ed è rappresentata dalla retta A T parallela all'asse delle ascisse, che si estende da $x=0$ ad $x=2$.

Per la fase di contraccolpo, partendo dall'equazione [36] che l'Autore dà a pagina 310 della sua Memoria, risolvendola rispetto all'incognita ed introducendo le nostre notazioni, si ha

$$z = \frac{\rho}{x} \left[\frac{\rho}{2x} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{x} \right)^2} \right]$$

Questa equazione nel caso speciale nel quale sia $\rho=1$ diventa

$$z = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2x} + \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \right]$$

Dando ad x valori progressivamente crescenti si ottengono per la z i valori seguenti

TABELLA VII.

x	2	3	4	5	6	7	8
z	0,655	0,394	0,283	0,221	0,181	0,153	0,133

per mezzo dei quali è stata descritta la relativa curva N G.

Quando la x assume valori molto grandi i termini al quadrato svaniscono e si ha approssimativamente

$$z = \frac{1}{x}$$

Donde si conclude che, per manovre dell'otturatore eseguite molto rapidamente o molto lentamente, le due teorie danno gli stessi risultati.

CAPITOLO V.

Azione sul colpo d'ariete della camera d'aria e del piezometro.

§ 1. — Nei capitoli antecedenti abbiamo veduto che la compressibilità del liquido e la dilatabilità delle pareti della conduttura diminuiscono l'intensità del colpo d'ariete; abbiamo anche veduto che la loro azione, distribuita su tutta la lunghezza della tubatura, può essere sostituita da una camera elastica posta immediatamente a monte dell'otturatore, la quale per quanto riguarda la diminuzione di pressione produce il medesimo effetto.

Giunti a questo punto riesce ben facile di calcolare l'effetto utile che sul colpo d'ariete esercitano le camere d'aria, che a tale scopo vengono impiegate dai tecnici; basterà solo stabilire i rapporti di equivalenza, tra la camera d'aria e la camera elastica.

Sia B fig. (26) la sezione orizzontale della camera d'aria. All'origine dei tempi, il pelo d'acqua si trova in C. $CB = h$

è l'altezza della parte di campana occupata dall'aria di guisa che, detto V_0 il volume dell'aria $V_0 = B h$. La pressione corrispondente espressa in colonna d'acqua è H .

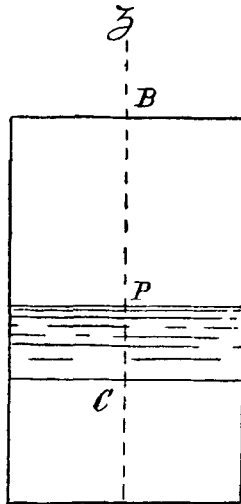


Fig. 26.

Ad un tempo qualsiasi t il pelo d'acqua trovasi in P . $CP = z$ è l'altezza dell'acqua entrata nella campana durante il predetto tempo. Il volume occupato dall'aria è $V = B(h - z)$. Quest'aria trovasi ad una pressione che, espressa in colonna d'acqua indichiamo con Y .

Sia in generale p la pressione, q il volume specifico dell'aria alla temperatura assoluta. Essendo l'aria continuamente a contatto dell'acqua, possiamo ritenere che il suo lavoro di compressione e di espansione si compia isotermicamente, per cui applicando la legge de Mariotte Gay-Luisac abbiamo

$$pq = p_0 q_0 = C;$$

dove

$$C = 29,656 (273 + t^{\circ})$$

è una costante, il cui valore numerico non occorre conoscere.

All' origine dei tempi la pressione effettiva dell' aria è $\tilde{\omega} H$, la pressione assoluta $p_0 = \tilde{\omega} (H + H_a)$: essendo q_0 il relativo volume specifico si avrà

$$q_0 = \frac{C}{p_0} = \frac{C}{\tilde{\omega} (H + H_a)}$$

e conseguentemente il peso specifico

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{q_0} = \frac{\tilde{\omega} (H + H_a)}{C}$$

mentre il peso dell'aria alla pressione p ed alla stessa temperatura sarà

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{q} = \frac{p}{C} = \frac{\tilde{\omega} (Y + H_a)}{C}$$

Per essere

V_0 il volume dell'aria alla pressione p_0

$\tilde{\omega}_0$ il corrispondente peso specifico

V il volume dell'aria alla pressione p

$\tilde{\omega}_a$ il corrispondente peso specifico,

siccome il peso della massa fluida si mantiene costante sarà

$$V_0 \tilde{\omega}_0 = V \tilde{\omega}_a.$$

Nella quale sostituendo

$$B h \frac{\tilde{\omega} (H + H_a)}{C} = B (h - z) \frac{\tilde{\omega} (Y + H_a)}{C}$$

Da questa equazione si desume la pressione effettiva

$$Y = H_a \frac{z}{h - z} + H \frac{h}{h - z}$$

e la pressione assoluta

$$Y + H_a = (H + H_a) \frac{h}{h - z}$$

La pressione massima si ha al termine della compressione, per il quale $z = z_1$ ed è espressa da

$$(1) \quad Y_1 = H_a \frac{z_1}{h - z_1} + H \frac{h}{h - z_1}$$

Il lavoro totale immagazzinato durante la compressione risulta

$$(2) \quad L_b = \tilde{\omega} B \int_0^{z_1} (H + H_a) \frac{h}{h - z} dz = \tilde{\omega} B (H + H_a) h \log \frac{h}{h - z_1}$$

dove B è la sezione della campana e z_1 la corsa del livello d'acqua durante la compressione.

Venendo ora alla comparazione con la camera elastica, la cui sezione è A e la cui corsa z_1 riteniamo eguale a quella della camera d'aria, abbiamo

$$(3) \quad \begin{aligned} Y &= H + kz & Y + H_a &= H + H_a + kz \\ Y_1 &\approx H + kz_1 \end{aligned}$$

Il lavoro totale immagazzinato durante la compressione

$$(4) \quad L_a = \tilde{\omega} A \int_0^{z_1} (H + H_a + kz) dz = \tilde{\omega} A z_1 \left[H + H_a + \frac{kz_1}{2} \right]$$

Dalle (1) e (3) si ottiene

$$H + kz_1 = \frac{h(H + H_a)}{h - z_1}$$

donde si deduce

$$(5) \quad z_1 = h - \frac{H + H_a}{k}$$

dalle (2) e (4)

$$A z_1 \left[H + H_a + \frac{kz_1}{2} \right] = B (H + H_a) h \log \frac{h}{h - z_1}$$

Sostituendo in questa equazione a z_1 il valore dato dalla (5) ed operando le debite riduzioni, si giunge all'espressione semplicissima

$$(6) \quad i - \frac{1}{i} = 2v \log i$$

Nella quale

$$v = \frac{B}{A} \quad ; \quad i = \frac{k h}{H + H_a}$$

L'equazione (6) è soddisfatta per $i = 1$, qualunque sia il valore di v .

Ma essa ci dà anche il valore di v . Difatti risolvendo l'equazione relativamente a questa grandezza otteniamo

$$2v = \frac{i - \frac{1}{i}}{\log i}$$

Il secondo membro di questa equazione, per $i = 1$, assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma se noi ne determiniamo il limite, derivando relativamente ad i il numeratore ed il denominatore, abbiamo

$$\lim 2v = \frac{1 + \frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i}} = 2$$

da cui $v = 1$.

È interessante osservare la proprietà singolarissima di questa equazione, che, da sola, ci dà i valori delle due incognite, che essa contiene.

Riassumendo quanto fin qui è stato esposto, dal paragone fra la camera elastica e la camera d'aria, concludiamo: « che la condizione di equivalenza, tra la camera elastica e la camera d'aria aventi la stessa sezione e la stessa ampiezza di corsa, è dato dalla relazione ».

$$(7) \quad k = \frac{H + H_a}{h}$$

§ 2. — *Effetto della camera d'aria sul colpo d'ariete.*

Quando in una condotta forzata, immediatamente a monte dell'otturatore si pone una camera d'aria di note dimensioni, si devono considerare due azioni, quella dovuta alla compressibilità del liquido ed alla dilatabilità della tubatura, e quella dovuta alla camera d'aria che si aggiunge. Ciascuna di queste azioni è rappresentata da una camera elastica, le cui caratteristiche $n_1 k_1$, $n_2 k_2$ sono legate ai dati fisici dei congegni equivalenti dalle relazioni

$$n_1 = \frac{A}{S} \quad ; \quad k_1 = \frac{H + H_a}{h} \quad ; \quad \frac{n_2}{k_2} = \frac{g L}{a^2}$$

I simboli che qui figurano sono già noti, ma per comodità del lettore ne riportiamo il significato:

- A sezione orizzontale della camera d'aria.
- S » normale della tubatura.
- h altezza d'aria corrispondente alla pressione H.
- H » carico statico.
- H_a pressione atmosferica in colonna d'acqua.
- L lunghezza della tubatura.
- a velocità di propagazione dell'onda.
- g valore della gravità.

Determinati i rapporti $\frac{n_1}{k_1}$ e $\frac{n_2}{k_2}$, riportiamoci alla formula (16) del Capitolo IV, § 3.

$$Y_1 = H + v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{1}{\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}}}$$

che può anche scriversi

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 + \frac{v_0}{H} \sqrt{\frac{L}{g} \frac{1}{\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}}} \\ &= 1 + \frac{\pi}{2} F \end{aligned}$$

dove

$$F = \frac{2 v_0}{\pi H} \sqrt{\frac{L}{g} \frac{1}{\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}}}$$

e se al rapporto $\frac{n_1}{k_1}$ si sostituisce il valore dato dalla (10) del Capitolo IV, § 2, si ha

$$(8) \quad F = \frac{v_0}{H} \frac{1}{\sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{\pi^2 g}{4L} \cdot \frac{n_2}{k_2}}}$$

Questa formola ci permette di trovare la pressione massima che, nel caso di chiusura brusca si verifica in una tubatura munita di due camere elastiche delle quali siano noti i rapporti caratteristici.

Nel caso di chiusura graduale, si ottiene la richiesta pressione combinando l'effetto elastico con quello dovuto alla chiusura dell'otturatore, come si fece alla fine del Capitolo IV.

La pressione massima è fornita dalla formola generale riportata nel predetto Capitolo

$$(48) \quad \eta - 1 = z = F \left[\frac{1}{1 + m x^3} + \frac{x^3}{n + x^4} \right]$$

nella quale ad m ed n conviene dare gli stessi valori del caso antecedente, ossia porre

$$m = \frac{1}{2} \quad ; \quad n = 4$$

e dove

$$x = \frac{F}{G} \frac{T}{T_0} \quad \text{e} \quad G = \frac{a v_0}{g H} = \rho$$

e conseguentemente

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 a^2}{4Lg} \cdot \frac{n_2}{k_2}}} \cdot \frac{T}{T_0}$$

La formola

$$z = F \left[\frac{1}{1 + \frac{x^3}{2}} + \frac{x^3}{4 + x^4} \right]$$

diventa

$$z = F$$

per la chiusura istantanea, ed approssimatamente

$$z = \frac{F}{x} = \frac{G T_0}{T} = \frac{\rho T_0}{T}$$

nel caso di chiusura lenta.

L'azione della camera d'aria è rappresentata dal rapporto $\frac{n_2}{k_2}$ che entra nell'espressione della F , data dalla (8), un aumento del predetto rapporto, fa diminuire la F e conseguentemente la z . Concludendo dunque, l'effetto utile della camera d'aria è tanto maggiore quanto più è rapida la chiusura e diventa sempre più tenue quanto più è piccola la velocità di manovra.

§ 3. — Un altro expediente per diminuire gli effetti dannosi del colpo d'ariete è il piezometro.

Al posto della camera d'aria, immediatamente a monte dell'otturatore, si può innestare nella conduttura un tubo saliente sino al livello statico H e sboccante liberamente nell'atmosfera. Questo tubo viene comunemente denominato tubo piezometrico, o piezometro.

Quando, a causa del colpo d'ariete, la pressione Y cresce al di sopra di H , nel tubo piezometrico si stabilisce una corrente ascendente, ed una certa quantità di acqua esce dalla sua estremità superiore. Questo fatto influisce nel fenomeno di colpo d'ariete e fa sì che la pressione massima verificantesi a contatto dell'otturatore sia minore di quella che si sarebbe avuta senza la presenza del piezometro.

Veniamo ora a determinare quantitativamente il predetto effetto.

La disposizione dell'apparecchio è rappresentata schematicamente nella fig. (27). In essa

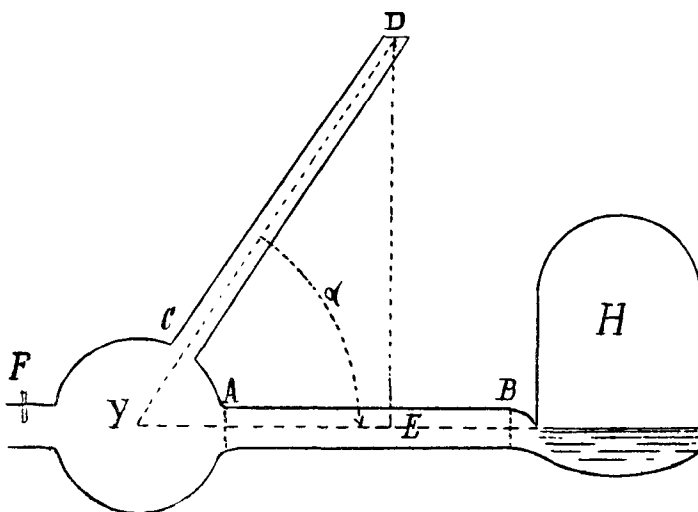


Fig. 27.

$AB=L$ lunghezza della conduttura.

$CD=L_1$ lunghezza del tubo piezometrico.

$DE=H$ altezza dello sbocco del piezometro al di sopra dell'otturatore, e carico nel recipiente d'alimentazione.

Y pressione in colonna d'acqua a monte dell'otturatore.

v velocità nella conduttura.

S sezione della »

u velocità nel piezometro.

A sezione del »

K coefficiente d'attrito nella conduttura.

K_1 » » nel piezometro.

w velocità all'otturatore

Il teorema delle forze vive applicato alla conduttura ci dà, come nei casi antecedenti

$$(9) \quad -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = Y - H + K v^2$$

Diciamo $M_1 = \frac{\tilde{\omega}}{g} A L_1$ la massa d'acqua contenuta nel tubo piezometrico. Il suo peso sarà $Mg = \tilde{\omega} A L_1$ e la componente di questo secondo l'asse del piezometro

$$M_1 g \sin \alpha = M_1 g \frac{H}{L_1} = \tilde{\omega} A H$$

Applicando il teorema delle forze vive alla massa d'acqua compresa tra le sezioni C e D sulla prima delle quali agisce la pressione

$$Y - \frac{u^2}{2g} - K_1 u^2$$

e sulla seconda la pressione atmosferica abbiamo

$$\tilde{\omega} A \left(Y - \frac{u^2}{2g} - K_1 u^2 \right) = \tilde{\omega} A H + M_1 \frac{du}{dt} = \tilde{\omega} A H + \frac{\tilde{\omega}}{g} A L_1 \frac{du}{dt}$$

da cui

$$(10) \quad Y - H = \frac{L_1}{g} \frac{du}{dt} + \frac{u^2}{2g} + K_1 u^2$$

Alle predette due equazioni si aggiungono le altre due già note, l'una relativa alla velocità di efflusso all'otturatore, l'altra alla continuità di massa

$$(11) \quad Y = \frac{w^2}{2g}$$

$$(12) \quad v = nu + \psi w$$

Nelle quali $n = \frac{A}{S}$ e dove gli altri simboli conservano il significato dei Capitoli antecedenti.

Nei casi che più interessano, quali sono quelli di una chiusura abbastanza rapida, i termini che contengono le derivate delle velocità relativamente al tempo, hanno un valore assai maggiore dei termini contenenti i quadrati delle velocità, tanto che in prima approssimazione questi ultimi possono essere ommessi.

In considerazione di ciò, eliminando dalle (9) e (10) la quantità comune $Y-H$, abbiamo immediatamente

$$-\frac{L}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{L_1}{g} \frac{du}{dt}$$

Dalla quale integrando

$$v = -\frac{L_1}{L} u + \text{cost}$$

Ponendo la condizione che, all'origine dei tempi per $v = v_0$ si abbia $u = 0$.

$$(13) \quad v = v_0 - \frac{L_1}{L} u = v_0 - m u$$

dove

$$m = \frac{L_1}{L}$$

Riteniamo, come al solito che la v sia espressa da una funzione sinusoidale

$$(14) \quad v = v_0 \cos \theta$$

essendo

$$\theta = \mu t \quad ; \quad \mu = \frac{\pi}{2T}$$

Alla fine della chiusura si ha

$$\psi = \frac{v - n u}{w} = 0$$

donde

$$(15) \quad v - n u = 0$$

Detti v_1 ed u_1 i corrispondenti valori delle velocità nel predetto istante, le (13) e (15) ci danno

$$v_1 = v_0 - m u_1 \quad ; \quad v_1 - n u_1 = 0$$

Dalle quali si ottengono le incognite v_1 ed u_1 in funzione di grandezze note, e precisamente

$$v_1 = \frac{v_0}{m + n} \quad ; \quad u_1 = \frac{v_0 n}{m + n}$$

Ponendo nella (14) v_1 in luogo di v si ha

$$\cos \theta = \frac{v_1}{v_0} = \frac{n}{m + n}$$

che determina il valore di θ_1 e siccome si ha

$$\theta_1 = \mu T = \frac{\pi}{2} \frac{T}{T^i}$$

si vede immediatamente che quando si dà la durata T della chiusura, anche l'incognita

$$T^i = \frac{\pi}{2\theta_1} T$$

resta determinata.

Passiamo ora a trovare i valori di Y e ψ .

Dalla

$$v = v_0 \cos \theta$$

abbiamo

$$\frac{dv}{dt} = -v_0 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\mu v_0 \sin \theta$$

Sostituendo nella (9) ed omettendo il termine dovuto agli attriti

$$(16) \quad Y = H + \frac{L}{g} \mu v_0 \sin \theta$$

donde segue

$$w = \sqrt{2gY} = \sqrt{2gH + 2L\mu v_0 \sin \theta}$$

D'altra parte dalla (13) si ha

$$mu = v_0 - v = v_0 (1 - \cos \theta) \quad ; \quad u = \frac{v_0}{m} (1 - \cos \theta)$$

Sostituendo nella

$$\phi = \frac{v - nu}{w}$$

e riducendo

$$\phi = \frac{v_o[(m+n)\cos\theta - n]}{m/2gH + 2L\mu v_o \sin\theta}$$

Siccome, per l'omissione dei termini relativi agli attriti, si ha $2gH = v_o^2$, questo rapporto diventa eguale all'unità per $t = 0$, e diventa zero per $t = T$ cui corrisponde

$$\cos\theta_1 = \frac{n}{m+n}$$

Il valore massimo della pressione, che si ha alla fine della chiusura, è per la (16)

$$Y_1 = H + \frac{L}{g} \mu v_o \sin\theta_1$$

che per essere

$$\mu = \frac{\theta_1}{T_1} \quad ; \quad T_1 = \frac{\pi T}{2\theta_1}$$

può anche scriversi

$$Y_1 = H + \frac{2Lv_o}{\pi g T_1} \theta_1^2 \sin\theta_1$$

Da questa espressione, dividendo pel carico H otteniamo

$$\eta_1 = 1 + \frac{2Lv_o}{\pi g T_1 H} \theta_1^2 \sin\theta_1 = 1 + \frac{2}{\pi} \rho \frac{T_o}{T_1} \theta_1^2 \sin\theta_1$$

e passando alla pressione effettiva

$$\eta_o - 1 = \frac{2}{\pi} (\eta_1 - 1) = \frac{4}{\pi^2} \rho \frac{T_o}{T_1} \theta_1^2 \sin\theta_1$$

Ora siccome quando non si abbia piezometro, vale a dire quando sia $n=0$, si ha

$$\cos \theta_1 = \frac{n}{m+n} = 0 \quad ; \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \sin \theta_1 = 1$$

per cui la sovrappressione diventa

$$\eta_e - 1 = \rho \frac{T}{T^0}$$

si conclude che la riduzione di pressione prodotta dal piezometro è espressa dal fattore

$$\frac{4 \theta_1^2 \sin \theta_1}{\pi^2}$$

Questo fattore è massimo ed eguale all'unità per $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e si annulla per $\theta_1 = 0$.

Perchè dunque il piezometro produca il suo effetto massimo, dovrà $\cos \theta_1$ essere massimo, ossia avvicinarsi più che sia possibile alla unità ed essendo $\cos \theta_1 = \frac{n}{m+n}$ tale condizione equivale a fare n piccolo in confronto ad m .

In altri termini perchè il piezometro possa ridurre notevolmente il colpo d'ariete, deve avere in confronto della condotta, una lunghezza relativamente piccola ed una sezione relativamente grande.

Ciò che si è detto vale per una condotta perfettamente rigida nella quale scorre un liquido incompressibile.

Nel caso reale la compressibilità del liquido e la dilatabilità delle pareti, che nel loro complesso agiscono come una camera elastica, diminuiscono l'effetto utile del piezometro.

In questo caso la pressione massima è fornita dalla formula (48), riportata alla fine del Capitolo IV.

$$(48) \quad \eta_e - 1 = z = F \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{4 + x^4} \right]$$

nella quale si è posto

$$m = \frac{1}{2} \quad ; \quad n = 4$$

e dove

$$x = \frac{F}{G} \frac{T}{T_0}$$

La grandezza F si riferisce all'azione dell'elasticità, la G all'azione dell'otturatore. La F è sempre

$$\frac{av_0}{gH} = \rho ,$$

mentre la G viene ridotta proporzionatamente al predetto fattore ed è espressa da

$$\frac{4\theta_1^2 \sin \theta_1}{\pi^2} \rho$$

Si giunge quindi alla conclusione, per se stessa intuitiva, che l'utilità del piezometro è tanto maggiore quanto maggiore è la durata della chiusura. Per chiusure molto rapide il piezometro non produce effetto apprezzabile.

Castelplanio. 27 novembre 1914.
