

dargestellt; sie enthält also die y -Achse und gibt die Lösung des Biegungsproblems für den Grashof'schen Querschnitt, nämlich nach (F_{II}):

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= -\frac{\partial F_{II}}{\partial x} + C(x^2 - (m+1)y^2) = -Ck^2 + C(x^2 - (m+1)y^2) \\ &= C(x^2 - (m+1)y^2 - k^2) \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial F_{II}}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Wir sind damit auf ganz anderem Wege zu dem bekannten Grashof'schen Ergebnis gelangt. —

Die in denselben Problemkreis fallenden weiteren Erörterungen werden nun zunächst zwei Ziele zu verfolgen haben:

1) Die tatsächliche Lösung des Biegungsproblems auf Grund der Ergebnisse von 2 und 3 mit Hilfe unserer Funktionen F_I und F_{II} für technisch wichtige und bisher der exakten Lösung unzugängliche Querschnitte. — in erster Linie für das T, das I, das kreuzförmige und das Zorés-Profil; ferner für theoretisch interessante Querschnitte, so in erster Linie das Rechteck und das diagonal gestellte Quadrat. Bei diesen letzteren wird sich ein Vergleich der derart zu gewinnenden Ergebnisse mit den Ergebnissen der willkürlichen »Näherungsmethode« (siehe Einleitung und Fußn. 5, S. 90) darbieten.

2) Die Erweiterung des Rungeschen graphisch-numerischen Lösungsverfahrens des Torsionsproblems¹⁾ auf zweifach und mehrfach zusammenhängende Querschnitte; Anwendung hiervon auf den Stab mit rahmenförmigem Querschnitt (rechteckiges Hohlprisma) und die analoge Untersuchung in bezug auf das Biegungsproblem, ebenfalls unter Anwendung auf das rechteckige Hohlprisma. 5

Über eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen.

Von K. POPOFF in Sofia.

Henri Poincaré hat in zwei seiner Arbeiten, nämlich in den »Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste« und in den »Leçons de Mécanique céleste«, wertvolle Methoden zur Integration der Differentialgleichungen der Himmelsmechanik angegeben. Im folgenden soll versucht werden, diese Methoden auch auf die Differentialgleichungen der Ballistik anzuwenden. Während aber alle in der Himmelsmechanik auftretenden Kräfte sich aus einem Potential ableiten lassen, gibt in der Ballistik die Reibung dem Problem eine gänzlich veränderte Gestalt. Sieht man ferner die Reibungskräfte als die »störenden Kräfte« im Sinne der Himmelsmechanik an, so sind diese hier unverhältnismäßig viel größer als in der Himmelsmechanik.

Für das Problem der Himmelsmechanik findet nun Poincaré folgendermaßen eine allgemeine Lösung. Er ermittelt zunächst Hilfslösungen (solutions intermédiaires), die Eigenschaften haben, die einem Spezialfall des Problems entsprechen, aber bis zu einem gewissen Grade auch im allgemeinen Falle auftreten müssen. Von diesen, übrigens bei ihm periodischen oder asymptotischen, Hilfslösungen geht er dann mit Hilfe der sogenannten Störungsgleichungen (équations aux variations) zur Lösung des allgemeinen Problems über.

Es kann der Fall eintreten, daß die Anfangsbedingungen der gesuchten Bewegung nur wenig von denen abweichen, welche einer (periodischen) Hilfslösung entsprechen. In diesem Falle kann man diese Lösung als erste Näherung der wahren Lösung be-

¹⁾ Runges numerisch-graphisches Verfahren ließe sich ganz unverändert auf mehrfach zusammenhängende Querschnitte übertragen, falls man im vorhinein für jede innere geschlossene Randkurve des mehrfach zusammenhängenden Querschnittes den ihr eigenen konstanten Wert der Funktion $u(x, y)$, — also bei einem n -fach zusammenhängenden Querschnitt $n - 1$ Konstante — kennen würde; dies ist aber zunächst nicht der Fall. Die Überwindung der hierin liegenden Schwierigkeit und damit die Verallgemeinerung der Rungeschen Lösung des Torsionsproblems auf beliebig-vielfach zusammenhängende Querschnitte bildet den Gegenstand einer in Vorbereitung befindlichen Abhandlung des Verfassers.

trachten. Es bezeichnen etwa x_1, x_2, x_3 die Koordinaten der bewegten Punkte, t die Zeit, h_1, h_2, \dots, h_p irgend welche Parameter und es sei

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1(t; h_1, h_2, h_3, \dots, h_p) \\ x_2 &= q_2(t; h_1, h_2, h_3, \dots, h_p) \\ x_3 &= q_3(t; h_1, h_2, h_3, \dots, h_p) \end{aligned}$$

für bestimmte Werte der h_1, h_2, \dots, h_p die Hilfslösung der Poincaréschen Theorie als erste Näherungslösung. Dann werden durch $x_1 = q_1 + \xi_1, x_2 = q_2 + \xi_2$ usw. die Koordinaten der betrachteten Punkte in der wahren Bewegung dargestellt, und es lassen sich die Differenzen ξ_k in der Form schreiben:

$$\xi_k = A_1 \frac{\partial q_k}{\partial h_1} + A_2 \frac{\partial q_k}{\partial h_2} + \dots + A_p \frac{\partial q_k}{\partial h_p},$$

wo man die Konstanten A_1, A_2, \dots als kleine Verbesserungen $\delta h_1, \delta h_2, \dots$ betrachten kann, die man an den ursprünglichen h_1, h_2, \dots anzubringen hat, um die wahre Bewegung zu erhalten.

Für das ballistische Problem haben periodische Lösungen keinerlei Interesse, da die Ballistik ja nur den Anfang der Bahn des Körpers untersucht. Gestützt auf Poincarés Methoden, habe ich nun für das Problem der Ballistik Hilfslösungen ermittelt, die unmittelbare Vorteile bieten, indem sie charakteristische Eigenschaften besitzen, die bei gewissen, in der Entwicklung der Ballistik häufig diskutierten Widerstandsgesetzen auftreten. Ich habe weiter zu verdeutlichen gesucht, welchen Einfluß die Änderung des Widerstandsgesetzes auf die in Rede stehende Eigenschaft, die »Affinität der Bahnkurven«, hat, eine Eigenschaft übrigens, die aufmerksamen Beobachtern nicht entgangen ist. Es ist mir schließlich auf Grund dieser Hilfslösung gelungen, die Bewegungsgleichungen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen durch Quadraturen zu integrieren, ohne die Gleichung des Hodographen einzuführen. Dabei erscheinen die Ausdrücke für die Koordinaten des Geschosses in drei verschiedenen Formen, nämlich als Reihen, welche nach Potenzen 1) von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, 2) von $\sin^2 \frac{\psi}{2}$, 3) von $\sin \alpha$ fortschreiten, wo α der Abgangswinkel gegen den Horizont und $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha, \psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist.

1. Erste Näherung für flache Bahn. Ich schicke zunächst eine allgemeine Bemerkung voraus. Es handle sich um die Bewegung eines Punktes mit den Koordinaten x, y . Wählt man die Achsen des Koordinatensystems derart, daß die Anfangsbedingungen einzelne der gegebenen Konstanten (Anfangslage, Anfangsgeschwindigkeit) nicht explizit enthalten und sind diese auch in den Differentialgleichungen der Bewegung nicht enthalten, so werden die Integrale von den betreffenden Konstanten nicht abhängen. In unserem Falle brauchen wir nur die y -Achse parallel zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit und die x -Achse durch die Anfangslage des bewegten Punktes zu legen. Die Anfangsbedingungen sind dann, wenn mit Accenten die Ableitungen nach der Zeit bezeichnet werden:

$$t = 0, x = x_0, y = 0, x' = 0, y' = v_0,$$

und die Integrale haben die Gestalt:

$$x = q_1(v_0, x_0, t), y = q_2(v_0, x_0, t),$$

unabhängig vom Abgangswinkel α . Es genügt also in diesem Falle, eine beliebige der Bahnkurven bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu kennen, da durch sie alle anderen Bahnkurven mit derselben Anfangslage und derselben Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind.

Nunmehr wenden wir uns dem Hauptproblem der äußeren Ballistik zu, nämlich der Untersuchung der Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß der Schwere in einem widerstehenden Mittel. $\Phi(v)$ gebe den Widerstand des Mittels (d. h. die Wider-

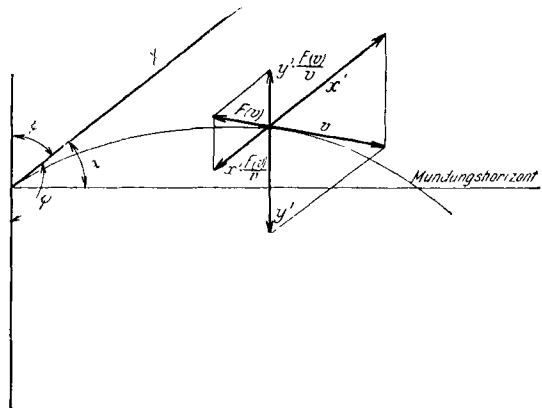


Abb. 1

standskraft pro Masseneinheit) in seiner Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Punktes an. Wählt man die Mündung des Geschützrohres zum Anfangspunkt des Koordinatensystems, und sind die Richtungen der x - und y -Achse durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bzw. die abwärts gerichtete Vertikale gegeben, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung (vergl. Abb. 1 auf S. 97), da die drei Seiten des Kräfte Dreieckes, in dem Φ zerlegt wird, sich wie $v : x' : y'$ verhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} \frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{dy}{dt} \frac{\Phi(v)}{v}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Die Geschwindigkeit ist nach Abb. 1 durch die Gleichung gegeben:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \sin \alpha = (x' + y')^2 - 4x'y' \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

wo α die Abgangswinkel und $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ist.

Unter der Voraussetzung, daß sich $f(v) = \frac{\Phi(v)}{v}$ in eine nach ganzen, positiven Potenzen von v fortschreitende Reihe entwickeln läßt, ist eine Entwicklung auch möglich nach Potenzen von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Denn da x' und y' reell sind, hat man

$$(x' - y')^2 = (x' + y')^2 - 4x'y' > 0$$

und da x' und y' bei unserer Wahl der Koordinaten immer positiv sind,

$$1 > \frac{4x'y'}{(x' + y')^2} \geq 0.$$

Es ist also möglich, den Ausdruck für die Geschwindigkeit:

$$v = (x' + y') \sqrt{1 - \frac{4x'y'}{(x' + y')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

und damit auch $f(v)$ in eine nach geraden Potenzen von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ fortschreitende Reihe zu

entwickeln. Diese Reihe konvergiert sehr schnell wegen des Faktors $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ bei $\frac{4x'y'}{(x' + y')^2}$, und zwar besonders gut für sehr kleine oder sehr große t , da y' für kleine t fast verschwindet und x' sehr groß ist, während für große t das Umgekehrte der Fall ist. Im ersten Falle wird $\frac{4x'y'}{(x' + y')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ klein von der Ordnung $\frac{y'}{x'} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ und im zweiten Falle

klein von der Ordnung $\frac{x'}{y'} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Diese gute Konvergenz erklärt die auf den ersten Blick sehr auffallende Tatsache, daß schon das erste Glied unserer Entwicklung die Bewegung mit überraschend guter Annäherung darstellt. Die beiden ersten Glieder der Reihe mögen hier angegeben werden. Setzt man $x' + y' = w$, so wird:

$$f(v) = f(w) - f'(w) w \frac{2x'y'}{(x' + y')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \dots \quad (I).$$

Mit Rücksicht auf diesen Ausdruck für $f(v)$ erhält man für die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -x' \left[f(w) - f'(w) \frac{2x'y'}{w} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \dots \right] \\ \frac{dy'}{dt} &= g - y' \left[f(w) - f'(w) \frac{2x'y'}{w} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (A).$$

Nunmehr liefert die Vernachlässigung der mit $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ multiplizierten Glieder eine Näherungslösung. Die Bewegungsgleichungen werden dann

$$\frac{dx'}{dt} = -x' f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y' f(w) \quad (B)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Offenbar enthalten weder die Bewegungsgleichungen noch die Anfangsbedingungen den Abgangswinkel α ; dementsprechend tritt dieser Winkel auch in den Ausdrücken für

x und y nicht auf, und diese sind Funktionen, die allein von t und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abhängen. Um sie zu finden, addieren wir die Gleichungen (B) und erhalten:

also:
$$\frac{dw}{dt} = g - w f(w),$$

$$t = \int_{v_0}^w \frac{dw}{g - w f(w)}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach w auf, so finden wir

$$w = x' + y' = F(v_0, t).$$

Eine abermalige Integration gibt

$$x + y = \int_0^{x+y} d(x+y) = \int_0^t F(v_0, t) dt.$$

Aus den Gleichungen (B) erhält man

$$x' = v_0 e^{-\int_0^t f(w) dt}, \quad y' = -v_0 e^{-\int_0^t f(w) dt} + F(v_0, t)$$

und schließlich hieraus durch eine letzte Integration:

$$x = x(v_0, t), \quad y = y(v_0, t).$$

Um von diesen Näherungskurven zu den anderen Bahnkurven übergehen zu können, hat man den Einfluß der vernachlässigten Glieder zu untersuchen. Ich führe die Rechnung hier nur für das Glied

$$-f'(w) w \frac{2 x' y'}{(x' + y')^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

durch, da sie für die weiteren Glieder in genau derselben Art geschieht.

2. Zweite Näherung; Zusätze. $x + \delta x'$ und $y' + \delta y'$ seien die Werte von x und y' , die man erhält, wenn man in den Bewegungsgleichungen auch die Glieder mit dem Faktor $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ berücksichtigt. Die Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Größen $\delta x'$, $\delta y'$ und $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ liefert, unter Berücksichtigung der Gleichungen (B), die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x'}{dt} &= -x' f'(w) \delta w - \delta x' f'(w) + x' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{d\delta y'}{dt} &= -y' f'(w) \delta w - \delta y' f'(w) + y' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear in $\delta x'$ und $\delta y'$, und ihre Koeffizienten sind bekannte Funktionen der Zeit. Ihre Integrale enthalten $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ als Faktor, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man

$$\delta x' = \xi' \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \delta y' = \eta' \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \delta w = (\xi' + \eta') \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

setzt. Durch diese Substitutionen gehen obige Gleichungen in folgende über:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -x' f'(w) (\xi' + \eta') - \xi' f'(w) + x' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -y' f'(w) (\xi' + \eta') - \eta' f'(w) + y' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \end{aligned} \quad (C).$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann auf einfache Quadraturen zurückgeführt werden, denn durch Addition der Gleichungen erhält man die in $(\xi' + \eta')$ lineare Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{d(\xi' + \eta')}{dt} = -[f(w) + w f'(w)] (\xi' + \eta') + f'(w) \frac{2 x' y'}{w}.$$

Hat man $\xi' + \eta'$ gefunden, so erhält man ξ , η , ξ' , η' und η durch einfache Integrationen. Setzt man nämlich $\xi' + \eta' = \zeta(t)$, so nimmt z. B. die erste der Gleichungen (C) die Form an:

$$\frac{d\xi'}{dt} + \xi' f'(w) + x' f'(w) \zeta(t) - x' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} = 0.$$

Diese in ξ' lineare Gleichung erster Ordnung kann durch einfache Quadraturen nach ξ' und weiter nach ξ aufgelöst werden.

Berücksichtigt man in gleicher Weise die Glieder zweiten und höheren Grades in der Entwicklung von $\varphi(v)$ nach Potenzen von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, so erhält man in den Ausdrücken für x , x' , y und y' Glieder mit den Faktoren $\sin^4 \frac{\varphi}{2}$, $\sin^6 \frac{\varphi}{2}$ usw.

Zusatz 1. Wechsel der unabhängig Veränderlichen. Für die praktische Verwertung empfiehlt es sich, w als unabhängige Veränderliche zu betrachten, denn man erspart dann die Auflösung der Gleichung

$$t = \int_{r_0}^w \frac{dw}{g - w f(w)} = \Theta(w)$$

nach w . Man berechnet ein für alle Mal Tafeln, die die Werte dieser Funktion $\Theta(w)$ für die verschiedenen Werte der Variablen w enthalten, und benutzt diese Tafeln für die Berechnung weiterer Bahnelemente.

Die Einführung dieser Variablen w führt unsere Resultate in folgende über:

$$\begin{aligned} x' &= r_0 e^{-\int_{r_0}^w f(w) \Theta'(w) dw}, \quad y' = -v_0 e^{-\int_{r_0}^w f(w) \Theta'(w) dw} + w, \\ x &= v_0 \int_{r_0}^w \Theta'(w) e^{-\int_{r_0}^w f(w) \Theta'(w) dw} dw, \quad y = \int_{r_0}^w w \Theta'(w) dw - v_0 \int_{r_0}^w \Theta'(w) e^{-\int_{r_0}^w f(w) \Theta'(w) dw} dw \\ \frac{d(\xi' + \eta')}{dw} &= -\Theta'(w) [f(w) + w f'(w)] (\xi' + \eta') + \Theta'(w) f'(w) 2 x' y' \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Dabei sind x' , y' , ξ' , η' die Ableitungen von x , y , ξ , η nach der Zeit, $\Theta'(w)$ dagegen die Ableitung von $\Theta(w)$ nach w : $\Theta'(w) = \frac{d\Theta(w)}{dw} = \frac{1}{g - w f(w)}$.

Zusatz 2. Andere Herleitung des Resultats. Wir bewiesen die Möglichkeit, x und y auszudrücken durch die Reihen

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + a_2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \\ y &= b_0 + b_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + b_2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$, die Funktionen allein der Zeit sind. Weiß man dies einmal, so kann man diese Koeffizienten auch auf einem andern Wege gewinnen. Setzt man nämlich die Werte (11) für x und y in die Gleichungen (A) ein und vergleicht man die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, so erhält man eine Reihe

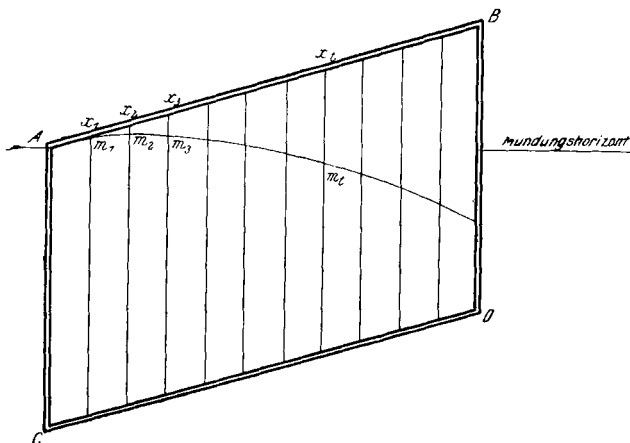


Abb. 2

von Gleichungspaaren, welche die Koeffizienten a und b der Reihe nach zu bestimmen gestatten. Diese Methode ist in der Praxis vorzuziehen.

Zusatz 3. Affinität der Bahnkurven. Wir erkennen, daß unsere Reihenentwicklungen für sehr kleine oder sehr große t sehr gut konvergieren, und daß deshalb schon die ersten Glieder

$$x = a_0(t), \quad y = b_0(t),$$

die den Winkel φ durchaus nicht enthalten, eine aus reichende Näherung liefern.

Man denke sich nun (Abb. 2) einen Rahmen in der

Form eines Parallelogramms $ABCD$, dessen Seiten in den Ecken gegeneinander drehbar sind. Auf AB und CD trage man, von A bzw. D ausgehend, die Strecken

$$x_1 = a_0 (1)$$

$$x_2 = a_0 (2)$$

$$\vdots$$

$$x_t = a_0 (t)$$

ab und verbinde ihre Endpunkte durch Fäden. Auf diesen Fäden markiere man die Punkte m_1, m_2, \dots, m_t , deren Entfernungen von den auf AB gelegenen Endpunkten der Fäden die folgenden sind:

$$y_1 = b_0 (1)$$

$$y_2 = b_0 (2)$$

$$\vdots$$

$$y_t = b_0 (t).$$

Nunmehr liegen die Punkte m_1, m_2, \dots, m_t auf einer Näherungskurve, die dem Abgangswinkel $\alpha = BAC - \frac{\pi}{2}$ entspricht. Eine einfache Verschiebung des Rahmens liefert dann sämtliche Bahnkurven, die derselben Anfangsgeschwindigkeit und Werten des Winkels α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ entsprechen.

Da die Zeit, in welcher das Geschöß einen beliebigen Punkt M erreicht, von der Verschiebung des Rahmens unabhängig ist, kann sie direkt von AB abgelesen werden.

Mit diesem einfachen Apparate habe ich mit praktisch hinreichender Genauigkeit die Bahnen auseinander ableiten können, welche in den »Schaubildern für die 10,5 cm-Gebirgshaubitze L/12« von Krupp für die 6. Ladung angegeben sind, Abb. 3. Die angezogenen Linien sind die von Krupp angegebenen Bahnkurven, die gestrichelten sind die durch Affinität aus der für $\alpha = 16\frac{2}{16}^\circ$ abgeleiteten. Es

beweist dies, daß schon unsere erste Annäherung Bahnkurven liefert, die nur wenig von denen abweichen, mit denen sich der Praktiker begnügt.

3. Steile Bahnen. Liegt α in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$, so gibt es eine andere Reihenentwicklung, die mit Ausnahme der Umgebung des Scheitels sehr gut konvergiert. Um für diesen Fall eine Näherungslösung zu erhalten, beginnen wir die Untersuchung noch einmal, setzen aber jetzt

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\sin\alpha = (x' - y')^2 + 4x'y'\sin^2\frac{\psi}{2},$$

wo $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist.

Auf dem aufsteigenden Zweige der Bahn ist

$$x' \sin\alpha > y',$$

also

$$x' - y' > 2x'\sin^2\frac{\psi}{2}$$

Beschränkt man sich nun auf denjenigen Teil des aufsteigenden Astes, für welchen außerdem noch

$$x' - y' > 2y'$$

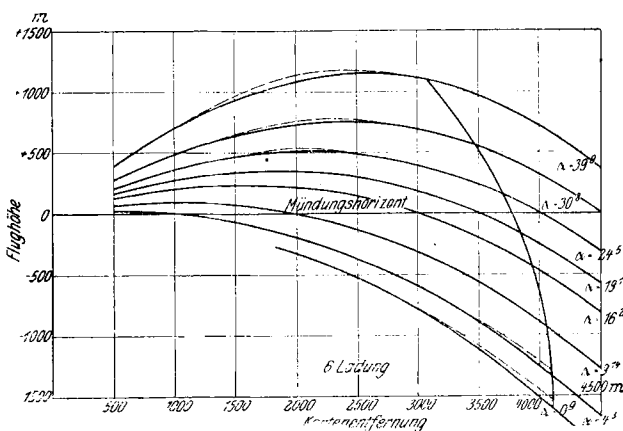


Abb. 3

ist, der also den Scheitel der Bahn nicht enthält, so gilt immer die Beziehung

$$1 \geq \frac{4 x' y'}{(x' - y')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

und man kann die Geschwindigkeit und damit auch $f'(v)$ nach geraden Potenzen von $\sin \frac{\psi}{2}$ in eine Reihe entwickeln:

$$f(v) = f(w) + f'(w) w \frac{2 x' y'}{(x' - y')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \dots,$$

wo diesmal

$$w = x' - y'$$

gesetzt ist.

In diesem Falle lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -x' \left[f'(w) + f'(w) w \frac{2 x' y'}{(x' - y')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \dots \right] \\ \frac{dy'}{dt} &= g - y' \left[f'(w) + f'(w) w \frac{2 x' y'}{(x' - y')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A').$$

Wir vernachlässigen die Glieder mit $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ und finden für eine Näherungsbahn die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx'}{dt} = -x' f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y' f(w) \quad \dots \dots \dots (B')$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (B'), so findet man

$$\frac{dw}{dt} = -g - w f(w),$$

$$t = - \int_{v_0}^w \frac{dw}{g + w f(w)}$$

Wenn man diese Gleichung nach w auflöst, erhält man

$$w = x' - y' = F(v_0, t).$$

Eine abermalige Integration gibt

$$x - y = \int_0^{x-y} d(x - y) = \int_0^t F(v_0, t) dt.$$

Die Gleichungen (B') liefern uns

$$x' = v_0 e^{-\int_0^t f(w) dt}, \quad y' = v_0 e^{-\int_0^t f(w) dt} - F(v_0, t),$$

woraus schließlich nach einer letzten Integration x und y als Funktionen von v_0 und t folgen.

Wie man sieht, enthalten die Gleichungen dieser Näherungsbahn den Winkel α nicht. Alle diese Bahnen können also wiederum mit Hilfe des oben beschriebenen Rahmens aus einer einzigen unter ihnen abgeleitet werden.

Will man die wahren Bahnen finden, so hat man die Störungsgleichungen zu bilden und zunächst die Quadrate und Produkte der Größen $\delta x'$, $\delta y'$ und $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ zu vernachlässigen.

Die Gleichungen sind hier folgende:

$$\begin{aligned} \frac{d \delta x'}{dt} &= -x' f'(w) \delta w - \delta x' f'(w) - x' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ \frac{d \delta y'}{dt} &= -y' f'(w) \delta w - \delta y' f'(w) - y' f'(w) \frac{2 x' y'}{w} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Es sind dies in bezug auf $\delta x'$ und $\delta y'$ lineare Gleichungen erster Ordnung. Ihre Integrale enthalten $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ als Faktor, was ohne weiteres ersichtlich wird, wenn man

$$\delta x' = \xi' \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \delta y' = \eta' \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \delta w = (\xi' - \eta') \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

setzt. Man erhält dann folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -x'f'(w)(\xi' - \eta') - \xi'f'(w) - x'f'(w) \frac{2x'y'}{w} \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -y'f'(w)(\xi' - \eta') - \eta'f'(w) - y'f'(w) \frac{2x'y'}{w} \end{aligned} \right\} \quad (C').$$

Man subtrahiere nun diese Gleichungen:

$$\frac{d(\xi' - \eta')}{dt} = -[f(w) + wf'(w)](\xi' - \eta') - f'(w) \frac{2x'y'}{w}$$

und berechne aus der entstandenen, in $(\xi' - \eta')$ linearen Gleichung erster Ordnung $(\xi' - \eta')$. Ist diese Differenz gefunden, so liefern einfache Integrationen die Größen $\xi - \eta$, ξ , η , ξ' , η' . Man setze nämlich in (C') $\xi' - \eta' = \zeta(t)$. Dann wird z. B. die erste der Gleichungen übergehen in

$$\frac{d\xi'}{dt} + f(w)\xi' + x'f'(w)\zeta(t) + x'f'(w) \frac{2x'y'}{w} = 0.$$

Diese Gleichung, die eine lineare Gleichung auf Bezug ξ' ist, läßt sich aber leicht durch Quadraturen auflösen.

Hier gelten in sinngemäßer Anwendung die oben gemachten Zusätze, mit dem einzigen Unterschied, daß die eben aufgestellten Formeln in der Nähe des Scheitels der Bahn ihre Bedeutung verlieren können. Doch ist dann der Winkel, den die Tangente an die Bahnkurve mit der Horizontalen einschließt, klein, und man kann unsere ersten Formeln mit gutem Erfolg anwenden. Ist dagegen α negativ, so gelten die aufgestellten Formeln ohne Einschränkung für die ganze Bahn.

4. Andere Lösung für kleine Abgangswinkel. Die bis jetzt unter Hervorhebung bemerkenswerter Eigenschaften der Bahnkurve eingeführten Methoden reichen aus, um die Integration der Bewegungsgleichungen im Falle des allgemeinen Widerstandsgesetzes auf einfache Quadraturen zurückzuführen, ohne die Gleichung des Hodo-graphen zu benutzen.

Die folgenden Betrachtungen sollen keine vollständige dritte Lösung der gestellten Aufgabe liefern, sondern nur die Eigenschaften der benutzten Näherungsbahnen von anderer Seite beleuchten.

Wir gehen wieder von den ursprünglichen Bewegungsgleichungen aus:

$$\frac{dx'}{dt} = -x'f(v), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y'f(v),$$

wo

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \sin \alpha$$

ist und die Anfangsbedingungen die folgenden sind:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Es sei wie bisher möglich, $f(v)$ nach ganzen positiven Potenzen von v in eine Reihe zu entwickeln. Damit sind auch Entwicklungen von $f(v)$ nach Potenzen von $\sin \alpha$ gesichert. Es ist nämlich, wie bekannt, auch der Quotient

$$\frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2},$$

der übrigens für $t = 0$ und für $t = \infty$ verschwindet¹⁾, stets absolut kleiner als 1 und um so mehr

$$\left| \frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2} \sin \alpha \right| < 1.$$

¹⁾ Für t klein wird dieser Quotient klein von der Ordnung $\frac{y'}{x'} \sin \alpha$ und für t sehr groß klein von der Ordnung $\frac{x'}{y'} \sin \alpha$.

Setzt man nun $w = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,
so geht die Reihe für $f(v)$ über in

$$f(v) = f(w) - \frac{r'(w)w}{2} \frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2} \sin \alpha + \dots$$

und mit Hilfe dieser Reihe nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -x' \left[f(w) - \frac{r'(w)w}{2} \frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2} \sin \alpha + \dots \right] \\ \frac{dy'}{dt} &= -y' \left[f(w) - \frac{r'(w)w}{2} \frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2} \sin \alpha + \dots \right] \end{aligned} \right\} \dots, \quad (A'').$$

Man vernachlässigt wieder die Glieder, welche $\sin \alpha$ als Faktor enthalten und erhält als erste Näherung

$$\frac{dx'}{dt} = -x' f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = -y' f(w) \dots \dots \dots (B'')$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Dieselben Gleichungen mit denselben Anfangsbedingungen erhält man, wenn man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Bahn für den Fall einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit aufsucht.

Es sei nun gelungen, die Gleichungen (B'') aufzulösen. Ihre Integrale

$$x = x(v_0, t), \quad y = y(v_0, t)$$

sind selbstverständlich von α unabhängig, denn der Abgangswinkel α tritt weder in den Gleichungen noch in den Anfangsbedingungen auf. Die zugehörigen Bahnkurven lassen sich also wieder durch eine Verschiebung des oben besprochenen Rahmens auseinander ableiten. Die vernachlässigten Glieder verschwinden für $t = 0$ und für $t = \infty$, denn für kleine t ist y' sehr klein und x' sehr groß, während für große t das Umgekehrte gilt. Sie enthalten sämtlich den Faktor $\sin \alpha$. Es erklärt dies auf andere Weise die Möglichkeit, mit Hilfe des Parallelogramms die in den »Schaubildern für die 10,5 cm-Gebirgshaubitze L/12« von Krupp für die 6. Ladung enthaltenen Bahnkurven auseinander abzuleiten.

Will man wieder von den Näherungsbahnen zu den wahren Bahnen übergehen, so hat man die »Störungsgleichungen« für die verschiedenen Glieder aufzustellen.

Die Betrachtung des Ausdrucks mit $\sin \alpha$ als Faktor führt unter Vernachlässigung der zweiten Potenzen und Produkte von $\delta x'$, $\delta y'$ und $\sin \alpha$ und mit Rücksicht auf (B'') zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x'}{dt} &= -x' \frac{r'(w)}{w} (x' \delta x' + y' \delta y') & \delta x' f(w) + x' f'(w) \frac{x'y'}{w} \sin \alpha \\ \frac{d\delta y'}{dt} &= -y' \frac{r'(w)}{w} (x' \delta x' + y' \delta y') & \delta y' f(w) + y' f'(w) \frac{x'y'}{w} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind wieder bekannte Funktionen der Zeit. Auch hier wieder enthalten die Integrale den Faktor $\sin \alpha$, was aus den folgenden Substitutionen evident wird:

$$\delta x' = \xi' \sin \alpha, \quad \delta y' = \eta' \sin \alpha.$$

Dadurch erhält man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -x' \frac{r'(w)}{w} (x' \xi' + y' \eta') - \xi' f(w) + x' \frac{f'(w)}{w} x' y' \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -y' \frac{r'(w)}{w} (x' \xi' + y' \eta') - \eta' f(w) + y' \frac{f'(w)}{w} x' y' \end{aligned} \right\} \dots \dots (C'').$$

Diese Gleichungen lassen sich ähnlich wie die früheren lösen. Die Betrachtung der Glieder höheren Grades in der Reihe für $f(v)$ liefert in gleicher Weise die entsprechenden Glieder der Integrale x, y .

5. Schlussbemerkung. Wir betrachteten den allgemeinen Fall der Bewegung eines in die Atmosphäre geschleuderten Körpers und gaben zwei Methoden für die Integration seiner Bewegungsgleichungen an, ohne die Gleichung des Hodographen einzuführen. Wir zeigten, daß sich für die Koordinaten bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems Reihen angeben lassen, die nach Potenzen von $\sin^2 \frac{\eta}{2}$, $\sin^2 \frac{v}{2}$ oder $\sin \alpha$ fort-

schreiten, und sagten, daß diese Reihen für sehr kleine t , wie sie in der Praxis benutzt werden, und für sehr große t gut konvergieren. Daraus folgte weiter, wenn man sich auf das Anfangsglied der Reihe beschränkte, daß die Bahnkurven sich mit Annäherung in der Form $x = x(v_0, t)$, $y = y(v_0, t)$ darstellen lassen und also auseinander durch einfache Verschiebung eines Gelenk Parallelogramms abgeleitet werden können (Affinität der Bahnkurven).

Danach drängt sich die Frage auf: Gibt es vielleicht Zentralkräfte und Widerstandsgesetze von der Art, daß die zugehörigen Bahnkurven mit vollkommener Strenge auseinander auf diese Art abgeleitet werden können?

Bekanntlich sind die Bahnkurven eines unter Einfluß der Schwere im leeren Raum fallenden Körpers von dieser Art. Wir fragen zunächst: Gibt es auch allgemeinere Zentralkräfte der Art, daß die zugehörigen Bahnkurven die obige Eigenschaft besitzen?

Um diese Frage zu beantworten, wählen wir das Attraktionszentrum zum Nullpunkt eines Koordinatensystems. Der Radius nach der Anfangslage des Körpers sei die x -Achse, die y -Achse werde parallel zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gewählt. $F(r, t)$ sei die Anziehungskraft, die als von der Zeit und von der Entfernung r vom Attraktionszentrum abhängig vorausgesetzt werde. Die Bewegungsgleichungen sind dann (Abb. 4), da hier die Seiten des Kräfte dreieckes sich wie $r : x : y$ verhalten:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x \frac{F(r, t)}{r}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -y \frac{F(r, t)}{r}$$

und die Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0, \quad x' = 0, \quad y' = v_0.$$

Sollen die Integrale vom Winkel der Koordinatenachsen unabhängig sein, so muß die Ableitung von $\frac{F(r, t)}{r}$ nach α verschwinden, also

$$\left[r \frac{\partial F(r, t)}{\partial r} - F(r, t) \right] \frac{dr}{d\alpha} = 0.$$

Daraus folgt

$$F(r, t) = r f(t),$$

wo $f(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit ist. Es ist dies eine wohlbekannte Tatsache. Ist z. B. $f(t)$ eine positive Konstante, so erhält man die Bahnen der Planeten im Innern der Nebelmasse, wie sie der Hypothese von Fay entsprechen. Die Bewegung an der Erdoberfläche erhält man, wenn man überdies r als sehr groß betrachtet.

Man kann diesen Gedankengang aber noch weiter verfolgen. Man nehme an, die Bewegung werde durch Kräfte gestört, die nur von der Geschwindigkeit abhängen, die also als Widerstandskräfte betrachtet werden können. Welcher Art müssen diese Kräfte sein, wenn die oben erwähnte Eigenschaft erhalten bleiben soll? Der Ausdruck $\Phi(v)$ gebe die Größe dieser Kraft pro Masseneinheit an. Bei derselben Wahl des Achsen-systems, die schon eben benutzt wurde, erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x f(t) - \frac{dx}{dt} \frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -y f(t) - \frac{dy}{dt} \frac{\Phi(v)}{v}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0, \quad x' = 0, \quad y' = v_0.$$

Sollen die Integrale von α unabhängig sein, so muß die Ableitung von $\frac{\Phi(v)}{v}$ nach α verschwinden, also muß

$$\Phi(v) = cv$$

sein. Auch diese Tatsache ist bekannt und wir können mithin zusammenfassen:

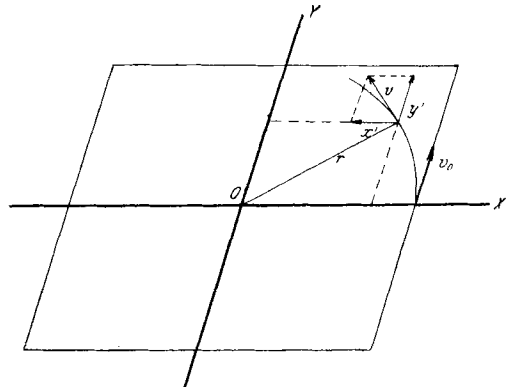


Abb. 4

Die Affinität der Bahnkurven gilt exakt bei konstanter Gravitation und bei Anziehung proportional der ersten Potenz der Entfernung, wofür der Widerstand linear mit der Geschwindigkeit wächst. Das oben angeführte Beispiel der 10,5 cm-Haubitze zeigte, daß diese Eigenschaft auch praktisch erhalten bleibt unter Verhältnissen, für die die Annahme eines linearen Widerstandsgesetzes keinerlei brauchbare Näherung für den Bewegungsverlauf liefern würde. Die vorstehende Untersuchung läßt den Grund hierfür erkennen: Die Affinität beruht auf der Möglichkeit der hier gegebenen Entwicklungen (A), (A') bzw. (A'') und auf deren guter Konvergenz.

6

Beiträge zur Prandtl'schen Tragflügeltheorie.

Von R. FUCHS in Berlin-Halensee.

Durch die neue Tragflügeltheorie, wie sie Prandtl und seine Mitarbeiter¹⁾ begründet haben, sind mit großem Erfolg die grundlegenden Fragen über die Luftkräfte in Angriff genommen und auch der numerischen Rechnung zugänglich gemacht worden. Im folgenden werden einige mathematische Vereinfachungen²⁾ beigetragen, die auch geeignet erscheinen, die numerischen Berechnungen einfacher zu gestalten. Insbesondere wird für den sogenannten induzierten Widerstand ein Ausdruck entwickelt, der es gestattet, den Unterschied dieses Widerstandes bei beliebiger Auftriebsverteilung gegenüber seinem kleinsten Wert bei elliptischer Verteilung zu beurteilen.

1. Das ebene Problem. Die Tragflügeltheorie von Kutta-Joukowski behandelt das sogenannte zweidimensionale Problem. Sie nimmt einen zylindrischen Flügel an, der sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, oder praktisch gesprochen, eine Stelle des Flügels, die sehr weit von den Enden entfernt ist. Legt man die z -Achse eines Koordinatensystems in die Richtung der Erzeugenden des Zylinders und denkt sich die Strömung der Luft zur z -Achse senkrecht, so hat man in der Richtung der z -Achse weder eine Geschwindigkeitskomponente, noch ein Druckgefälle und erhält ein Abbild des Strömungsvorganges für ein beliebiges z , wenn man die Strömung in der x - y Ebene betrachtet. Um diese Strömung mathematisch zu erfassen, bedient man sich mit Vorteil der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Bedeutet $z = x + yi$, wobei ja jetzt eine Verwechslung mit der dritten Raumkoordinate ausgeschlossen ist, und $f(z)$ eine Funktion von z , so stellt $f(z)$ eine mögliche Flüssigkeitsströmung dar; ist nämlich $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, so gibt $\psi(x, y) = \text{konst.}$ eine Stromlinienschar und $\varphi(x, y) = \text{konst.}$ die zugehörige Schar von Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials. Um die Strömung, die zu einem gegebenen Querschnitt unseres Zylinders, zu einem gegebenen »Flügelprofil« gehört, zu erhalten, hat man die Funktion $f(z)$ so einzurichten, daß das gegebene Profil in einer Stromlinie liegt. Zu dieser Frage, die heute ihrer Lösung schon recht nahe gebracht worden ist, liegt eine umfangreiche Literatur vor³⁾. Bei der so erhaltenen Potentialströmung sind die Komponenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y) :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad \text{Man nennt auch } w = f(z) \text{ das komplexe Potential und}$$

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y \text{ den komplexen Wert der Geschwindigkeit,}$$

Soll die das Profil umfließende Strömung einen Auftrieb ergeben, so kann $f(z)$ keine eindeutige Funktion sein, weil die sogenannte Zirkulation $\Gamma = \int_C v_t ds$, wo C eine

das Profil umschlingende geschlossene Kurve bedeutet, von Null verschieden sein muß. Nach Joukowski bestimmt sich der Wert der Zirkulation, der an sich noch

¹⁾ Prandtl, Tragflügeltheorie I. und II. Mitteilung, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1918 und 1919; Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, ebenda 1919; Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie, Dissertation, Göttingen 1919; Berichte und Abh. der wiss. Ges. für Luftfahrt 1920; Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dissertation, Göttingen 1916.

²⁾ Es sei dabei auf eine Arbeit von A. Trefftz hingewiesen (Mathem. Annalen, Bd. 82, 1921, S. 306–319), die ähnliche Zwecke in anderer Weise verfolgt.

³⁾ Die Lösung dieser Frage und die hierhergehörige Literatur findet man in den Aufsätzen von v. Mises, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, S. 157; 1920, S. 68, 87.