

Einige Anwendungen der Impulssätze (*).

(Von V. VÂLCOVICI, in Iassy [Rumänien].)

Die mathematische Schwierigkeit der von der Praxis aufgestellten hydrodynamischen Problemen haben die Hydraulikern veranlasst, Hypothesen und Sätze anzuwenden, welche den Theoretikern mit Unrecht meist unbekannt geblieben sind. Es gibt fast kein theoretisches Buch der Hydrodynamik, welches sich mit den Impulssätzen beschäftigt, obgleich dieselben manchmal sehr gute Dienste leisten könnten. Im Folgenden will ich eine allgemeine und einfache Form dieser Impulssätze angeben und einige ihrer wichtigsten Anwendungen zeigen.

1. Impuls nennt man den Vektor $m \mathbf{v}$, wenn m die Masse und \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor eines materiellen Punktes bedeutet. Hat man statt eines Punktes mit einem ganzen Punkthaufen zu tun, so heisst Impuls des Systems der Vektor $\Sigma m \mathbf{v}$, wobei die Summe auf sämtliche Punkte des Systems ausgedehnt ist. Aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen erhält man den sogenannten Schwerpunktsatz, den wir folgendermassen ausdrücken wollen:

Die zeitliche Änderung des Impulses eines den äusseren Kräften

$$\mathfrak{F}_k (k = 1, 2, \dots, n)$$

unterworfenen Punktsystems ist gleich der Resultierenden dieser äusseren Kräfte:

$$\frac{d \mathfrak{F}}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathfrak{F}_k; \quad (I)$$

\mathfrak{F} bedeutet dabei den Gesamtimpuls des Systems. Wohlgemerkt, diese Gleichung ist eine vektorielle, die man in drei Skalargleichungen zerlegen kann.

(*) Ein Teil der vorliegenden Arbeit ist in gedrängter Form in den Pariser *Comptes Rendus* (t. 157, p. 1131 und t. 158, p. 169) erschienen,

Andere drei Gleichungen bekommt man mit dem Flächensatz:

Die zeitliche Änderung des Momentes des Gesamtimpulses eines solchen Punktsystems in bezug auf einen festen Punkt ist gleich dem Gesamtmomente aller äusseren Kräfte \mathfrak{F}_k in bezug auf denselben festen Punkt, oder analytisch ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt} (\sum m \mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n (\mathfrak{F}_k \times \mathbf{r}_k); \quad (\text{II})$$

die Summe auf der linken Seite bezieht sich auf sämtliche Punkte des Systems, \mathbf{r} bzw. \mathbf{r}_k bedeutet den Vektor, der von dem betrachteten festen

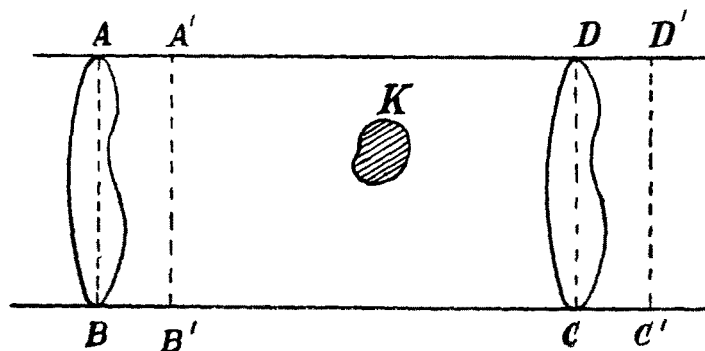


Fig. 1.

Punkte zu einem Punkte bzw. zu dem Punkte k des Systems führt, und das Zeichen \times deutet auf eine vektorielle Multiplikation hin.

Wir wollen unser Augenmerk auf die Gleichung (I) richten, wovon wir einige Anwendungen zeigen werden.

2. Eine der bekanntesten Anwendungen des Satzes (I) ist wohl das D'Alembertsche Paradoxon; dasselbe will ich im Falle der sich in einem zylindrischen Kanal bewegendes Flüssigkeit beweisen. Der Satz ist auf diese Weise einerseits allgemeiner, und andererseits wird er einfacher bewiesen, indem man über das Verhalten des Potentials im Unendlichen nichts zu wissen braucht.

In einem zylindrischen Kanal $A B C D$ (Fig. 1), dessen konstanter, zu den Erzeugenden senkrecht stehender Querschnitt gleich F ist, bewegt sich stationär eine reibungslose inkompressible Flüssigkeit mit der Dichte 1 um einen festen Körper K ; die Bewegung ist durch die konstante Geschwindigkeit V im Unendlichen charakterisiert. Wir wollen nur die Komponente in

der Bewegungsrichtung von dem Tripel (I) betrachten und zunächst die zeitliche Änderung der in dieser Richtung vorhandenen Impulskomponente im Gebiete $ABCD$ ermitteln, wobei wir uns die Entfernungen der Querschnitte AB und CD von dem Körper K sehr gross im Vergleich zu den Querdimensionen des Kanals denken wollen. Nach Ablauf einer Sekunde ist der Querschnitt AB in die neue Lage $A'B'$ und CD in $C'D'$ gekommen. Die Flüssigkeitsmasse $AB B' A'$, welche bis auf sehr kleine Grössen gleich $F \cdot V$ ist, zählt nicht mehr zu dem betrachteten Gebiete, und also der Gesamtimpuls ist um

$$F \cdot V \cdot V = F \cdot V^2$$

kleiner geworden; dagegen ist die Flüssigkeitsmasse $CDD'C'$ hinzugekommen und hat den Gesamtimpuls um $F \cdot V^2$ vergrössert. Die Impulsmenge der Flüssigkeitsmasse $A'B'CD$ ist unverändert geblieben, da die Bewegung stationär angenommen worden ist. Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses dieses Punktsystems ist also gleich Null.

Die äusseren Kräfte bestehen aus den Druckkräften, welche auf die Mantelfläche und Deckel des Flüssigkeitszylinders $ABCD$ und auf die Berührungsfläche des Körpers K mit der Flüssigkeit ausgeübt werden. Die auf die beiden Deckel AB und CD wirkenden Druckkräfte heben sich gegenseitig auf, da der Druck p infolge der Bernoullischen Gleichung in AB und CD bis auf vernachlässigbare Grössen denselben Wert hat; die auf die Mantelfläche wirkenden Druckkräfte liefern keinen Beitrag zu den Komponenten in der Bewegungsrichtung, da der Druck senkrecht auf dieser Richtung steht; endlich ist die Kraft, die die Flüssigkeit von Seiten des Körpers K erleidet, gleich $-W$, wenn W den Widerstand des Körpers K bedeutet.

Die Komponente der Gleichung (I) in der Bewegungsrichtung wird infolgedessen folgendermassen lauten:

$$0 = -W,$$

und somit ist der Beweis des D'Alembertschen Paradoxons für den betrachteten Zylinder und also als Sonderfall für die nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit geleistet (*). Ich will noch die Bemerkung hin-

(*) Diese Verallgemeinerung des D'Alembertschen Paradoxons wurde auch von Herrn Prof. U. CISOTTI (*Sul moto di un solido in un canale*, Rend. Palermo, 1909, 2.º sem.) mittels des Greenschen Satzes gegeben.

zufügen, dass die Annahme einer kompressiblen oder einer schweren Flüssigkeit keine Änderung dieses Resultates hervorrufen würde, wenn die Schwerkraft senkrecht zu der Bewegungsrichtung stehen würde.

3. Es ist ohne weiteres klar, dass die Impulsänderung der betrachteten flüssigen Masse in einer senkrecht zur Bewegung stehenden Richtung gleich Null ist; hat etwa der Kanal die Form eines rechteckigen Prismas, so muss also die Differenz der beiden Reaktionen zweier gegenüberliegenden Wände gegen die Flüssigkeit gleich der von der Flüssigkeit her auf den Körper K ausgeübten Kraft sein. Daraus kann man die bekannte Tatsache schliessen, dass eine gleichförmig fallende Kugel längs einer Wand von dieser angezogen

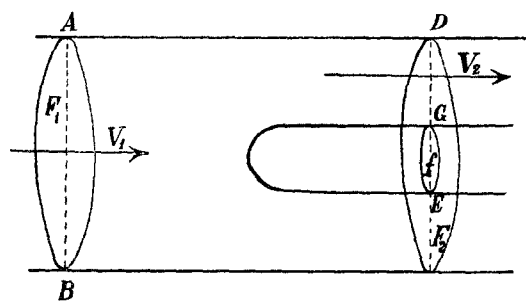


Fig. 2.

wird; in der Tat nehmen wir an, dass drei von den vier Wänden des betrachteten Prismas sehr weit entfernt von dem Körper K (einer Kugel in diesem Falle) seien; dann wird der hydrodynamische Druck auf diesen Wänden ungefähr derselbe sein wie im Unendlichen. Auf der sich im Endlichen befindlichen Wand fließt aber die verdrängte Flüssigkeits

masse schneller als im Unendlichen, so dass der darauf wirkende Druck der Bernoullischen Gleichung gemäss kleiner als im Unendlichen ist; die ganze Reaktion dieser Wand gegen die Flüssigkeit (ein Druckintegral über die Wand) ist also kleiner als die der gegenüberliegenden Wand; die Differenz beider ist gegen die sich in der Nähe der Kugel befindlichen Wand gerichtet. W. z. b. w.

4. Etwas anders liegen die Verhältnisse beim Halbkörper, einer Fläche, welche sich in einer Richtung asymptotisch zu einem Zylinder ins Unendliche erstreckt (*); hier erhält man einen von Null verschiedenen Widerstand, wenn sich der Halbkörper in einem Zylinder wie oben befindet (Fig. 2), wo eine wirbellose stationäre Bewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit mit den konstanten Geschwindigkeiten V_1 und V_2 im Unendlichen ($V_2 > V_1$) stattfindet.

Es sei nämlich F_1 der konstante Querschnitt des Zylinders, f der asymptotische Querschnitt des Halbkörpers. Wir betrachten die in dem Gebiete

(*) Vgl. G. FUHRMANN, *Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen*, Dissertation Göttingen, 1912.

$A B C E F G D$ enthaltene Flüssigkeit und wenden darauf die Bewegungskomponente der Gleichung (I) an; dabei sollen die Abstände der Querschnitte $A B$ und $C D$ von dem Vorderende des Halbkörpers im Vergleich zu den Querdimensionen des Kanals sehr gross sein. Durch eine ähnliche Überlegung wie im vorigen Paragraphen findet man, dass die zeitliche Änderung des Impulses dieser Flüssigkeitsmasse gleich:

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2$$

ist, wenn $F_1 - f$ gleich F_2 gesetzt worden ist.

Die äusseren Kräfte, welche hier in Betracht kommen, sind: der auf den vorderen Deckel $A B$ ausgeübte Druck $F_1 p_1$, der auf den hinteren wirkende $- F_2 p_2$ und der von Seiten des Halbkörpers ausgeübte Druck $-(W + p_2 f)$ (*), wobei p_1 , p_2 den Druck in $A B$ bzw. $C D$ bedeuten.

Man hat also für die gesuchte Gleichung:

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 = F_1 p_1 - F_2 p_2 - (W + p_2 f). \quad (1)$$

Benutzt man die Kontinuitätsgleichung:

$$F_1 V_1 = F_2 V_2$$

und die Bernoullische Gleichung:

$$p_1 + \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \frac{V_2^2}{2},$$

so erhält man aus (1):

$$W = \frac{F_1 f^2}{2 F_2^2} V_1^2 = \frac{f^2}{2 F_1} V_2^2$$

oder, wenn die Dichte der Flüssigkeit anstatt 1 gleich ρ gewesen wäre:

$$W = \rho \frac{F_1 f^2}{2 F_2^2} V_1^2 = \rho \frac{f^2}{2 F_1} V_2^2.$$

Man erhält also in diesem Falle einen positiven Widerstand, welcher auf den Hauptspannt f und die Geschwindigkeit V_1 bezogen den dimensionslosen

(*) Die Summe der Komponenten in der Bewegungsrichtung aller von der Flüssigkeit her auf den Halbkörper ausgeübten Drucke übersteigt nämlich den Widerstand W um den Betrag des auf f im Unendlichen herrschenden Druckes $f \cdot p_2$.

Faktor

$$\psi_1 = \frac{F_1 f}{2 F_2^2}$$

und auf V_2 den Faktor:

$$\psi_2 = \frac{f}{2 F_1}$$

liefert (*).

Hierzu passt wiederum die Bemerkung, dass die senkrecht zu der Bewegungsrichtung wirkende Schwerkraft keinen Beitrag zu diesem Widerstande hinzubringen würde.

Für den Fall, dass F_1 unendlich gross wird, f aber endlich bleibt, wird sowohl ψ_1 als auch ψ_2 also W auch gleich Null; dabei braucht der Kanal gar

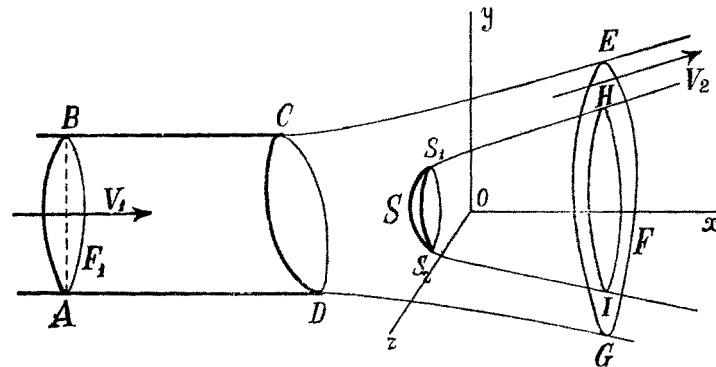


Fig. 3.

nicht nach allen Richtungen hin ins Unendliche zu rücken. Für den speziellen Fall, dass der Halbkörper von einer gewissen Rotationsfläche begrenzt wird, und dass der Kanal vollkommen verschwindet, hat Herr G. Fuhrmann (**) sowohl auf graphischem Wege als auch rechnerisch diese Tatsache bestätigt.

Mann kann ohne jegliche Schwierigkeit diese Formeln und Resultate auf die zweidimensionale Bewegung übertragen; sodann werden F_1 , F_2 , f die entsprechenden Querschnitte bedeuten, welche in der Richtung der dritten Dimension durch zwei parallele Ebenen begrenzt sind.

5. Eine andere brauchbare Anwendung finden die Impulssätze in der diskontinuierlichen stationären Bewegung. Aus einem in einer Richtung — in der negativen x -Richtung z. B. (Fig. 3) — unendlich ausgedehnten Kanäle

(*) Betreffs der Bezeichnung s. L. PRANDTL, *Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformeln* (Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1910).

(**) a. a. O., S. 9-11.

$A B C D$ kommt ein Helmholtzscher Strahl heraus und trifft eine Schale S mit scharfen Rändern, so dass sich hinter der Schale ein Totwasser bildet.

Ich begrenze eine Flüssigkeitsmenge durch den zu Ox in grosser Entfernung von der Schale senkrecht stehenden Querschnitt AB im Kanal, durch eine weit hinter der Schale zu sämtlichen Stromlinien normal stehende Fläche $E G H I$, durch die Mantelfläche $A B C D$ des Kanals, durch die doppelte Mantelfläche des gebohrten Strahles $C E H S_1 S_2 I G D$ und durch die Schale S selbst; dieses einfach zusammenhängende Gebiet heisse \mathfrak{G} . Es sei V_1, p_1 die Geschwindigkeit bzw. der Druck der Flüssigkeit im Kanal sehr weit entfernt in der negativen x -Richtung und V_2, p_0 die Geschwindigkeit bzw. der Druck auf den freien Grenzen also auch in allen Punkten mit unendlich grossen und positiven Abscissen; es sei ferner F_1 der Flächeninhalt des normalen Querschnitts des Kanals und F_2 derjenige der Ringfläche $E G I H$. Besitzt die Flüssigkeit die konstante Dichte 1, so ist die sekundliche Zunahme des Gesamtimpulses in der x -Richtung der sich in diesem Gebiete befindlichen Flüssigkeit gleich

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 \cos \bar{\theta}.$$

$\cos \bar{\theta}$ ist an Stelle des Mittelwertes

$$\cos \bar{\theta} = \frac{1}{F_2} \int \cos \theta \cdot dF_2$$

gesetzt worden, wobei θ den Winkel, den die x -Achse mit einer asymptotischen Richtung des Strahles einschliesst, und dF_2 das Flächenelement in der betrachteten Ringfläche bedeutet; das Integral erstreckt sich über die ganze Fläche F_2 .

Um die äusseren, auf die Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte bequem zu ermitteln, wollen wir uns denken, dass eine gleichmässig verteilte Spannung an der Grenze des betrachteten Gebietes \mathfrak{G} , also eine auf der Grenzoberfläche dieses Gebietes senkrecht stehende, von innen nach aussen gerichtete Oberflächenkraft vom Betrage p_0 pro Flächeneinheit hinzukommt; die Einführung derselben bringt nämlich keine Veränderung der Gleichung (I) mit. Nun sieht man unmittelbar ein, dass die einzigen von Null verschiedenen x -Komponenten der äusseren Kräfte eine Resultierende gleich

$$(p_1 - p_0) F_1 - W$$

geben, wenn W den gegen die Schale S bewirkten hydrodynamischen Wider-

stand bedeutet; denn die Mantelfläche $A B C D$ des Kanals erfährt einen zu der x -Achse senkrecht stehenden Druck und auf der freien Grenze herrscht ja der Druck p_0 , welcher sich gegen die fingierte Spannung p_0 aufhebt.

Man hat also für die x -Komponente der Gleichung (I):

$$-F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 \cos \bar{\theta} = (p_1 - p_0) F_1 - W; \quad (2)$$

kraft der Kontinuitätsgleichung

$$F_1 V_1 = F_2 V_2$$

und der Bernoullischen Gleichung

$$p_1 + \frac{V_1^2}{2} = p_0 + \frac{V_2^2}{2}$$

kann man die Beziehung (2) folgendermassen umgestalten:

$$\begin{aligned} W &= \frac{F_1 V_1^2}{2} \left\{ \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 2 \frac{F_1}{F_2} \cos \bar{\theta} + 1 \right\} \\ &= \frac{F_1 V_2^2}{2} \left\{ \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 2 \frac{F_2}{F_1} \cos \bar{\theta} + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

woraus man bezüglich der Widerstandsfläche f der Schale die dimensionslosen Widerstandsfaktoren

$$\psi_1 = \frac{F_1}{2f} \left\{ \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 2 \frac{F_1}{F_2} \cos \bar{\theta} + 1 \right\} \quad (3)'$$

und

$$\psi_2 = \frac{F_1}{2f} \left\{ \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 2 \frac{F_2}{F_1} \cos \bar{\theta} + 1 \right\} \quad (3)''$$

erhält, jenachdem man den Widerstand auf die Geschwindigkeit V_1 oder V_2 bezieht.

Ist der Kanal in beiden x -Richtungen unendlich ausgedehnt (Fig. 4), so hat man in diesem speziellen Falle

$$\bar{\theta} = 0$$

und also:

$$W = \frac{f_1^2 F_1}{2 F_2^2} V_1^2 = \frac{f_1^2}{2 F_1} V_2^2, \quad (4)$$

wenn f_1 die asymptotische Breite des Totwassers ist. Die entsprechenden dimensionslosen Widerstandsfaktoren sind:

$$\psi_1 = \frac{f_1^2 F_1}{2f F_2} \quad (4)'$$

auf die Geschwindigkeit vor der Schale und

$$\psi_2 = \frac{f_1^2}{2f F_1} \quad (4)''$$

auf die Geschwindigkeit hinter der Schale bezogen. ψ_1 ist nach (3)' und (4)' sowohl im Falle des ausströmenden Strahles als auch im Kanal grösser als ψ_2 , welches durch (3)'' bzw. (4)'' gegeben wird.

Diese Bemerkung hat eine besondere Bedeutung, was die praktischen Widerstandsmessungen betrifft; dieselben werden entweder in einem solchen ausströmenden

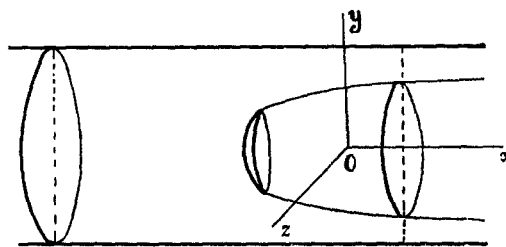


Fig. 4.

Strahle (wie z. B. in der Eiffelschen Versuchsanstalt in Paris) oder aber in einem Kanal (wie in der Prandtl'schen Versuchsanstalt in Göttingen) ausgeführt, und die auf diese Weise ermittelten Zahlen werden annähernd für den Fall der nach allen Richtungen hin unendlich ausgedehnten Flüssigkeit als gültig angesehen. Die kleinsten Abweichungen bekommt man dabei, wenn man den Widerstand auf die Geschwindigkeit hinter der Schale bezieht; diese Tatsache ist für die zweidimensionale Bewegungen theoretisch bewiesen worden (*).

Dass der dimensionslose Faktor grösser bei den Kanalversuchen als in der nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ausfällt, wenn der Widerstand auf die Geschwindigkeit vor der Schale bezogen wird, kann man sich allgemein folgendermassen plausible machen. (Fig. 5 stellt einen durch den Staupunkt A und durch eine Erzeugende der Mantelfläche des Kanals gezogenen Querschnitt in der allgemeinen dreidimensionalen Bewegung dar; die Schale ist durch eine zu den Zylindererzeugenden senkrecht

(*) V. VÁLCOVICI, *Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen*, Diss. Göttingen, 1913.

stehende Platte ersetzt worden, was für das Folgende vollkommen belanglos bleibt). Wird die Breite des Kanals vergrößert, der Druck und die Geschwindigkeit in D — dem gemeinsamen Punkte der Erzeugenden des Zylinders im Unendlichen — festgehalten, so nimmt die Geschwindigkeit auf der freien Grenze ab, und also der Staudruck p_0 wird grösser. Der Druck p auf der vorderen Seite der Platte nimmt seinen grössten Wert $p_{max.}$ im Staupunkte A an und nimmt allmählich ab, bis er am Rande gleich p_0 wird. $p_{max.}$ bleibt aber wegen der Bernoullischen Gleichung bei der Erweiterung des Kanals unverändert, so dass das Integral:

$$\int (p - p_0) df,$$

welches den Widerstand darstellt, offenbar abnimmt, wenn p_0 grösser wird.

Ähnlich kann man es für den ausströmenden Strahl zeigen; *die Widerstandsfaktoren werden also sowohl in der Eiffelschen als auch in der Prandtl'schen Versuchsanstalt grösser als in Wirklichkeit, wenn die Widerstandsmessungen auf die Geschwindigkeit von der Platte bezogen werden.*

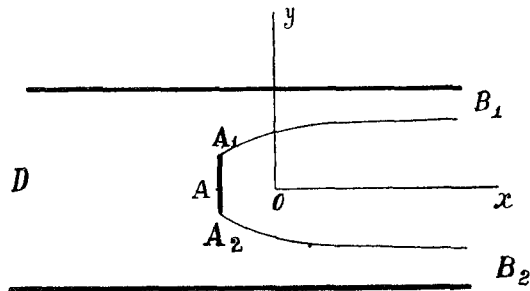


Fig. 5.

Man bezieht sie aber in den beiden Versuchsanstalten auf die Geschwindigkeit, welche in einiger

Entfernung hinter der Platte d. h. theoretisch auf der freien Grenze herrscht. Wie sich dieser auf diese Weise ermittelte Widerstandsfaktor verhält im Vergleich zu demjenigen, den man im Falle der Abwesenheit des Kanals erhält, kann man nicht mehr so einfach wie oben einsehen.

Für die zweidimensionale Bewegung ist der Fehler, den man begeht, wenn man die Widerstandsmessungen auf die Geschwindigkeit von der Platte

bezieht, positiv und von der ersten Ordnung in $\sqrt{\frac{d}{D}}$, wenn D die Breite des Kanals und d die der Platte bedeutet, d. h. der gemessene Widerstandsfaktor im Kanal oder in einem aus einer Düse ausströmenden Strahle übertrifft denjenigen, den man in einem nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit messen würde, um eine Grösse, welche proportional zu $\sqrt{\frac{d}{D}}$ zu Null geht. Bezieht man dagegen den Widerstand auf die Ge-

schwindigkeit hinter der Platte, so erhält man im Kanal einen positiven Fehler von der Grössenordnung $\frac{d}{D}$ und im vollkommen freien Strahle (wo der Kanal also verschwunden ist), einen negativen Fehler von derselben Grössenordnung; der Fehler, den man begeht, wenn man die Widerstandsmessungen in einem nur nach einer Richtung unendlich ausgedehnten Kanale vollführt, liegt zwischen diesen beiden extremen Fällen (*).

Die Formeln (3) und (4) bzw. (3)', (3)", (4)', (4)" gelten auch für die zweidimensionale Strömung. Formel (4) ist von Herrn U. Cisotti (**) und von Herrn H. Villat (***) mittelst des Greenschen Satzes bei der zweidimensionalen Bewegung gefunden worden.

6. Als letzte Anwendung der Impulssätze will ich die Antwort auf eine aktuelle hydrodynamische Frage geben. Es handelt sich um die stationäre zweidimensionale Bewegung einer idealen, inkompressiblen, im Unendlichen eine linear veränderliche Geschwindigkeit besitzenden Flüssigkeit um einen festen Körper. Diese Strömung lenkte neuerdings auf sich eine besondere Aufmerksamkeit durch die Vermutung, dass eine solche Strömung gewisse mit dem Energieprinzip anscheinend in Widerspruch stehende Erscheinungen — wie der Vortrieb d. h. die Bewegung gegen den Wind ohne Arbeitsaufwand — zu erklären vermag. Herr v. Sanden hat diese Strömung um einem flügel förmigen Körper mittelst der Rungeschen graphischen Methode studiert und die dabei auftretenden Widerstandskräfte zu ermitteln versucht (****). Seine Resultate, was den Widerstand — die auf den Körper in der Richtung der Strömung ausgeübte Kraft — anbelangt, sind nicht richtig; wir werden ganz allgemein zeigen, dass der Widerstand gleich Null ist.

Es handelt sich um die zweidimensionale Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit in einem unendlich ausgedehnten mit ebenen parallelen Wänden versehenen Kanal $ABCD$ um einen festen Körper K (Fig. 6); es seien:

$$y = b, \quad y = -b$$

(*) S. die auf Seite 35 zitierte Dissertation.

(**) *Sul moto di un solido in un canale*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909.

(***) *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle*. Annales de l'École normale supérieure, 1912.

(****) *Über den Auftrieb im natürlichen Winde*. Ztschr. f. Math. u. Phys., 61. Bd., H. 3.

die Gleichungen der beiden Wände des Kanals,

$$x = a, \quad x = -a$$

die der zwei Querschnitte AB und CD . Die Strömung wird durch die Geschwindigkeit im Unendlichen:

$$u_{\infty} = 2\omega y, \quad v_{\infty} = 0 \quad (5)$$

und durch den konstanten Wirbel

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega \quad (6)$$

charakterisiert. Ich will noch vorausschicken, dass die Energiegleichung dieser Strömung, wie ich anderswo gezeigt habe (*) folgende Gestalt hat:

$$p + \frac{u^2 + v^2}{2} = 2\omega\psi + C; \quad (7)$$

die Dichte ist wie bisher gleich 1 gesetzt worden. Dabei bedeutet C eine konstante Grösse und ψ die der betrachteten Bewegung entsprechende Stromfunktion, die übrigens

kraft des Beziehung (6) folgender Gleichung genügt:

$$\Delta\psi = 2\omega.$$

Ausserdem soll ψ den Wert ωb^2 auf den beiden Wänden des Kanals und den konstanten Wert k auf der Kontur des Körpers K annehmen; diese Konstante lässt sich, wie wir zeigen werden, eindeutig bestimmen. Im übrigen soll die Differenz

$$\psi - \omega y^2$$

im Unendlichen regulär sein.

Setzt man

$$\psi = \psi_0 + \omega y^2, \quad (8)$$

(*) Über die Bewegung inkompressibler reibungsloser Flüssigkeiten. Bulletin de l'Académie roumaine, novembre 1913.

so hat man für ψ_0 die Gleichung:

$$\Delta \psi_0 = 0 \quad (9)$$

und die Bedingungen der Regularität im ganzen Flüssigkeitsgebiet einschliesslich im Unendlichen, die Beziehung:

$$\bar{\psi}_0 = 0 \quad (10)$$

längs der Wände des Kanals und

$$\bar{\psi}_0 = k - \omega y^2 \quad (11)$$

auf der Grenze des Körpers K .

Die Beziehungen (9), (10) und (11) lassen bekanntlich eine eindeutig bestimmte, überall in dem betrachteten Gebiete reguläre Lösung zu; die Konstante k bestimmt man hinterher durch die Bedingung, dass die Zirkulation um den Zylinder K einen vorgegebenen Wert hat.

Jetzt wollen wir den ersten Impulssatz auf die Bewegung der Flüssigkeitsmasse, welche durch die Wände des Kanals, durch die beiden Querschnitte AB und CD , durch die Oberfläche des Körpers K und durch zwei zu xOy parallele im Abstände 1 voneinander stehende Ebenen begrenzt wird, anwenden. Die beiden Querschnitte AB und CD nehmen wir genügend entfernt vom Körper, also a genügend gross, sodass die Geschwindigkeit sowohl in AB als auch in CD bis auf unendlich kleine Grössen durch (5) gegeben wird.

Es ist ohne weiteres klar, dass die Impulsänderung in der x -Richtung gleich Null ist, so dass sich die x -Komponente der Gleichung (I) zu:

$$W = \int_B^A p \, dy - \int_C^D p \, dy \quad (12)$$

reduziert, wenn W die Resultierende der x -Komponenten der hydrodynamischen, auf die Oberfläche des Körpers K ausgeübten Kräfte bedeutet.

Aus (7), (8) und (5) erhält man unmittelbar folgende, bis auf unendlich kleine Grössen gültige Gleichung:

$$p_{AB} \cong C + 2\omega \psi_0$$

und also

$$W = 2\omega \int_B^A \psi_0 \, dy - 2\omega \int_C^D \psi_0 \, dy. \quad (12)'$$

ψ_0 ist aber regulär im Unendlichen und besitzt da den Wert Null, so dass die beiden Integrale auf der rechten Seite identisch Null sind, wenn man unendlich kleine Grössen vernachlässigt. Die Gleichung (12)' liefert infolgedessen :

$$W = 0.$$

Lassen wir für ψ_0 eine logarithmische Singularität nur im Unendlichen zu, so bedeutet das hydrodynamisch, dass die Strömung eine Zirkulation um den Körper K besitzt. Dieselbe Formel (12) oder (12)' zeigt in diesem Falle fast ebenso einfach wie oben, dass *der Widerstand gleich Null ist*.

Somit ist die Frage nach dem horizontalen Schube, den ein Körper in einem solchen linear veränderlichen Winde erfährt, vollkommen und allgemein beantwortet, wenigstens für die zweidimensionale Strömung. Das Energieprinzip kann in diesem Falle über das Vorhandensein eines Widerstandes oder eines Vortriebes *a priori* gar nichts entscheiden, da, wie Herr Prof. Prandtl bemerkt hat, die Gesamtenergie des Systems in bezug auf jedes Koordinatensystem unendlich gross ist; die überraschenden Ergebnisse der von Sandenschen Arbeit insbesondere dasjenige der Existenz eines Vortriebes, d. h. einer Kraft welche den Flügel gegen den Wind bewegen würde, konnten deshalb unmittelbar nicht widerlegt werden. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass weder Vortrieb noch Widerstand vorhanden ist, und dass also eine Erklärung des Segelfluges auf diese Weise ausgeschlossen ist.
