

Über die Abhängigkeit des Astigmatismus und der Bildfeldwölbungen von der Dingweite.

Von W. Merté.

Mit acht Abbildungen.

(Eingegangen am 16. Januar 1920.)

§ 1. Einleitung und Stellung der Aufgabe. Für optische Systeme, die ein verhältnismäßig ausgedehntes Bildfeld besitzen sollen, pflegt der rechnende Optiker festzustellen, ob die sagittale und tangential Bildfeldwölbung oder auch nur ihre Differenz, d. h. der Astigmatismus, in den für den beabsichtigten Zweck noch erträglichen Grenzen bleibt. Meist begnügt er sich damit, daß er diese Untersuchung für eine bestimmte Dingweite durchführt. So würde es sich beispielsweise bei einem photographischen Objektiv in der Regel darum handeln, die unendlich ferne Ebene des Raumes möglichst anastigmatisch und ohne Bildfeldwölbung (nämlich in die Brennebene) abzubilden, während man sich etwa bei einer Zeissischen Punktabrille mit nur anastigmatischer Abbildung der unendlich fernen Ebene begnügt. Optische Systeme, die erwähnten sowohl wie auch die meisten anderer Art, werden nun aber keineswegs immer nur für eine Dingweite benutzt, und aus diesem Grunde ist es durchaus nicht unwichtig, die Abhängigkeit der Bildfeldwölbung bzw. des Astigmatismus von der wechselnden Gegenstandsweite festzustellen, um etwa von zwei Systemen gleicher Abbildungsgüte für die der Rechnung zugrunde gelegte Dingweite dem mit geringerer Empfindlichkeit gegen Änderung der Gegenstandsweite den Vorzug zu geben. In die Richtung dieses Gedankenganges zielt z. B. auch folgende Bemerkung von Rohrs in „Die Brille als optisches Instrument“¹⁾: Der technische Optiker würde sagen, die Fernbrillen Wollastonscher Art sind für eine Variation des Objektabstandes sehr unempfindlich, während die der Ostwaldschen bei einer großen Objektverschiebung doch schon Abweichungen von der punktuellen Abbildung in schiefen Büscheln erkennen lassen.

Die sagittale und tangential Bildfeldwölbung und damit natürlich auch der Astigmatismus werden in der rechnenden Optik für eine Reihe von Hauptstrahlneigungen für jene passendste Dingweite bestimmt, für dazwischenliegende Hauptstrahlneigungen interpoliert und so Kurven der sagittalen bzw. tangentialen Bildfeldwölbung er-

¹⁾ Siehe S. 50. Leipzig, W. Engelmann, 1911.

mittelt, wie man solche etwa in von Rohrs „Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs“¹⁾ findet. Es ist aber natürlich nicht gesagt, daß beispielsweise ein photographisches Objektiv, das für ein unendlich entferntes Objekt eine gute anastigmatische Bildfeldebenung aufweist, dieselbe Eigenschaft für einen anderen Abbildungsmaßstab, etwa den der Gegenstands- und Bildgleichheit besitzt; vielmehr müßte man durch erneute Rechnung für diesen zweiten Abbildungsvorgang die sagittalen und tangentialen Bildorte aufsuchen, um über die bei ihm auftretenden Bildfeldwölbungen aussagen zu können. Soweit der Verfasser unterrichtet ist, hat man einer solchen zweiten Bestimmung der Bildfeldwölbungen stets eine neue Durchrechnung nach den üblichen Rechenschemata zugrunde gelegt, ganz entsprechend der, die bei der Durchrechnung der ersten Abbildung benutzt wurde, und für die Untersuchung jedes weiteren Abbildungsvorganges, der sich durch Veränderung der Dingweite ergab, wurde eine solche neue Rechnung für nötig erachtet, ohne daß man daran dachte, auf Grund der kollinearen Verwandtschaft, die ja zwischen sagittalen und tangentialen Objekt- und Bildpunkten besteht, sich entsprechend den für die Gaußsche Abbildung auf der Achse geltenden Beziehungen analytische Ausdrücke zu schaffen, die für beliebige Gegenstandsweiten jene Werte bestimmen. Diese Aufgabe wollen wir hier lösen, und zwar werden wir auf rein analytischem Wege zu den geometrischen (optischen) Ergebnissen gelangen. Unsere Untersuchungen werden dabei zweckmäßig in zwei Abschnitten erfolgen; zunächst ist die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen und dann wird die Brauchbarkeit unserer abgeleiteten Ausdrücke für die zahlenmäßige Durchrechnung zu überprüfen sein.

§ 2. Allgemeine Ableitungen. Wir gehen aus von den Beziehungen

$$S' = \frac{S r n'}{(n' \cos i' - n \cos i) S + n r}, \quad (1)$$

$$T' = \frac{T r n' \cdot \cos^2 i'}{(n' \cos i' - n \cos i) T + n \cos^2 i r}, \quad (1a)$$

in denen S bzw. T die sagittale bzw. tangentielle Schnittweite, n die Brechungszahl, i die Winkel, die die Hauptstrahlen mit den zugehörigen Flächennormalen bilden, und r den Krümmungsradius der brechenden Fläche bedeutet, und zwar bezeichnen die nicht gestrichelten Buchstaben die genannten Werte vor der Brechung an der Fläche, die gestrichelten die entsprechenden Werte nach erfolgter Brechung.

¹⁾ Siehe b -Kurven der Figurentafeln I bis IV. Berlin, J. Springer, 1899.

Kommen, wie bei einem Linsensystem, eine ganze Anzahl Flächen in Frage, so erhalten diese Bezeichnungen, wenn sie beispielsweise für die Größen an der ν ten Fläche benutzt werden, den Index ν . Die Benutzung der Formeln (1) bzw. (1a) schränkt den Gültigkeitsbereich unserer Untersuchungen auf optische Systeme ein, deren homogene und isotrope Medien von nur sphärischen Flächen begrenzt werden. Dagegen brauchen die Flächen zunächst nicht zentriert zu sein; denn jene Formeln behalten beispielsweise ihre Gültigkeit, wenn nur die sämtlichen Mittelpunkte der Flächen in einer Ebene liegen, in der auch der Hauptstrahl verläuft. Da wir aber im weiteren Verlauf der Untersuchungen für die in Frage kommenden optischen Systeme das Bestehen der Beziehungen des Gaußischen Paraxialraumes voraussetzen, so müssen alle unsere Entwicklungen auf zentrierte Systeme beschränkt werden. Die kollineare Zuordnung, die S und S' durch (1) bzw. T und T' durch (1a) erfahren, ist bekanntlich ein-eindeutig; nur in dem Falle der uneigentlichen Kollineation, in dem die Determinante der Substitution verschwindet, d. h. also

$$r^2 n n' = 0 \quad (2)$$

bzw.

$$r^2 n n' \cos^2 i \cos^2 i' = 0, \quad (2a)$$

ist diese Beziehung nicht mehr ein-eindeutig. Da n und n' ihrer physikalischen Bedeutung nach nicht Null werden können, und außerdem der Fall $r = 0$ physikalisch nicht zu verwirklichen ist, wird die Zuordnung der sagittalen Schnittweiten immer einer echten Kollineation entsprechen. Aus (2a) aber erhalten wir die Bedingungen

$$i = 90^\circ \quad (3a_1)$$

oder

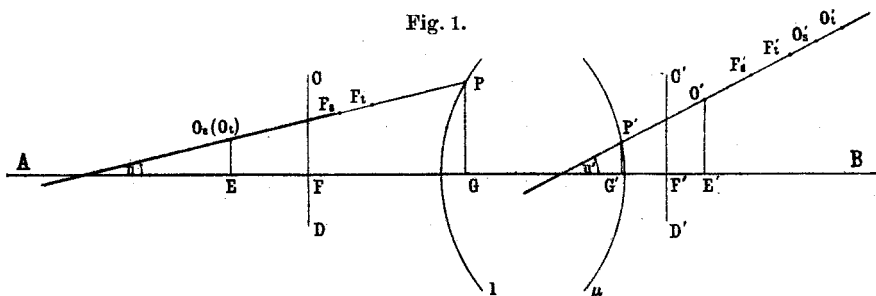
$$i' = 90^\circ. \quad (3a_2)$$

In den Fällen $(3a_1)$ und $(3a_2)$, in denen also der ein- bzw. austretende Hauptstrahl die brechende Fläche berührt (streifender Ein- oder Austritt), besteht keine ein-eindeutige Beziehung mehr, und da wir diese gerade für unsere weiteren Entwicklungen benutzen wollen, müssen wir auch den Fall $(3a_1)$ und $(3a_2)$ hier ausschließen. Damit haben wir die Grenzen abgesteckt, innerhalb denen unsere Untersuchungen Gültigkeit haben werden. Wir fassen noch einmal zusammen: Unsere Entwicklungen beschränken sich auf optische Systeme, deren homogene und isotrope Medien von zentrierten Kugelflächen begrenzt sind, von denen keine den Radius Null hat. Der Hauptstrahl (der Träger des unendlich engen Büschels) schneidet die Achse und bildet an keiner Fläche des Systems mit dem Einfalls- bzw. Austrittslot einen rechten Winkel.

Die durch die kollineare Verwandtschaft (1) bzw. (1a) gegebenen Punktreihen S und S' bzw. T und T' sind perspektiv; denn im Schnittpunkt der beiden Träger (des an der Fläche ein- und austretenden Hauptstrahles) liegen entsprechende Punkte vereinigt, da ja für $S = 0$ bzw. $T = 0$ auch $S' = 0$ bzw. $T' = 0$ ist. Schon Young¹⁾ hat die Perspektivitätszentren angegeben, nämlich für die sagittalen Gegenstands- und Bildpunkte den Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche und für die entsprechenden tangentialen Punkte einen Punkt, dessen geometrische Auffindung er zeigt.

Da wir nun sowohl für die sagittalen wie tangentialen Schnittweiten vor und nach der Brechung an einer Fläche nur die eigentliche Kollineation gelten lassen, stehen bei einem System von brechenden Flächen auf Grund der Gruppeneigenschaft der linearen Substitution sämtliche sagittalen bzw. tangentialen Schnittweiten vor oder nach der Brechung an irgend einer Fläche des Systems zu den

Fig. 1.



entsprechenden Schnittweiten an irgend einer anderen Fläche des gleichen Systems vor oder nach der Brechung in der Verwandtschaft eigentlicher Kollineation, und damit ist auch die Punktreihe S_1 bzw. T_1 auf dem in das System eintretenden Hauptstrahl projektiv zu der Punktreihe S'_μ bzw. T'_μ , auf dem aus ihm austretenden Hauptstrahl, wobei also angenommen ist, daß das betrachtete Linsensystem μ Flächen hat.

In der nebenstehenden Fig. 1 soll das Kreisstück 1 bzw. μ den Meridianschnitt der Front- bzw. Rückfläche eines zentrierten sphärischen Linsensystems mit der Achse AB darstellen; die Fortschrittrichtung des Lichtes ist in üblicher Weise von links nach rechts angenommen. O_1P ist der eintretende Hauptstrahl an der Fläche 1, der mit der Achse den Winkel u bildet, $P'O_1$ ist der entsprechende austretende Hauptstrahl, der die Fläche μ in P' durchdringt und mit

¹⁾ Siehe On the Mechanism of the Eye (27. Nov. 1800).

der Achse den Winkel u' einschließt. F ist der vordere Brennpunkt und CD der Meridianschnitt der zugehörigen Brennebene, F' der hintere Brennpunkt und $C'D'$ der Meridianschnitt der hinteren Brennebene. $O_s E$ bzw. PG sind Lote auf AB mit den Fußpunkten E bzw. G , $O' E'$ ist die Gaußsche Bildebene von $O_s E$ und G' der Fußpunkt des Lotes von P' auf AB . F_s bzw. F_t ist der vordere sagittale bzw. tangentielle und F'_s bzw. F'_t der hintere sagittale bzw. tangentielle Brennpunkt. Nehmen wir das Objekt als anastigmatisch geebnet an, so ist $O_s = O_t$ der sagittale bzw. tangentielle Gegenstandspunkt und O'_s bzw. O'_t sind die entsprechenden Bildpunkte; $O_s E$ wäre der Meridianschnitt eines Stückes der abzubildenden Dingebe. Ist f die Brennweite des ganzen Linsensystems und m der Abbildungsmaßstab, so ist

$$FE = -m \cdot f, \quad (4)$$

d. h. also beispielsweise, daß für Systeme mit positivem f bei positivem m die Abbildung reell, bei negativem m virtuell ist.

Ferner setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} GF &= \delta, & PF_t &= T_f \\ G'F' &= \delta', & P'F'_s &= S'_f \\ PO_s &= S_1, & P'F'_t &= T'_f \\ PO_t &= T_1, & P'O'_s &= S'_\mu \\ PF_s &= S_f, & P'O'_t &= T'_\mu \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dann ist die Punktreihe O_s bzw. O_t , deren Punkte durch ihre Abszissen S_1 bzw. T_1 bestimmt sind, nach unseren Erörterungen projektiv zu der Punktreihe O'_s bzw. O'_t , die durch ihre Abszissen S'_μ bzw. T'_μ gegeben sind. Dem Punkte F_s entspricht der unendlich ferne Punkt der Reihe O'_s und dem Punkt F_t der unendlich ferne Punkt der Reihe O'_t ; umgekehrt entspricht F'_s der unendlich ferne Punkt der Reihe O_s und F'_t der unendlich ferne Punkt der Reihe O_t . Die sagittalen und tangentialen Brennpunkte sind also Fluchtpunkte. Benutzen wir die für solche Punkte geltende sogenannte Fluchtpunktrelation, so kann man setzen:

$$(S_1 - S_f) \cdot (S'_\mu - S'_f) = \text{const} = k \quad (6)$$

und

$$(T_1 - T_f) (T'_\mu - T'_f) = \text{const} = K. \quad (6a)$$

Bezeichnet man nun mit f_s bzw. f_t die sagittale bzw. tangentielle Brennweite, so ist

$$f_s = \left(\frac{S'_1 \cdot S'_2 \dots S'_\mu}{S_2 \cdot S_3 \dots S_\mu} \right)_{S_1=\infty}, \quad (7)$$

$$f_t = \frac{\cos i_1 \cdot \cos i_2 \dots \cos i_\mu}{\cos i'_1 \cdot \cos i'_2 \dots \cos i'_\mu} \cdot \left(\frac{T'_1 \cdot T'_2 \dots T'_\mu}{T_2 \cdot T_3 \dots T_\mu} \right)_{T_1=\infty} \quad (7a)$$

und es folgt:

$$k = -f_s^2 \quad (8)$$

und

$$K = -f_t^2. \quad (8a)$$

Ferner ist aus Fig. 1 leicht zu ersehen:

$$S_1 = T_1 = \frac{\delta - m \cdot f}{\cos u}, \quad (9)$$

wobei also der Dingpunkt als anastigmatisch angenommen ist.

Mit Hilfe der Beziehungen (6), (6a), (7), (7a), (8), (8a) und (9) ergibt sich nach einfacher Zwischenrechnung:

$$S'_\mu = \frac{S'_f \cdot m + \frac{f_s^2 \cos u + S'_f S_f \cos u - S'_f \cdot \delta}{f}}{\frac{S_f \cos u - \delta}{f} + m}, \quad (10)$$

$$T'_\mu = \frac{T'_f \cdot m + \frac{f_t^2 \cos u + T'_f T_f \cos u - T'_f \cdot \delta}{f}}{\frac{T_f \cos u - \delta}{f} + m}. \quad (10a)$$

Damit ist die Abhängigkeit der S'_μ und T'_μ vom Abbildungsmaßstab, also auch von der Dingweite, gefunden, und zwar stellen (10) und (10a) gleichseitige Hyperbeln dar, deren Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen m und S'_μ bzw. T'_μ laufen. Nur für die Bedingung

$$\frac{f_s^2 \cos u}{f} = 0 \quad (11)$$

bzw.

$$\frac{f_t^2 \cos u}{f} = 0 \quad (11a)$$

entarten diese Hyperbeln. Die in den genannten Bedingungen enthaltenen Fälle sind physikalisch sämtlich bedeutungslos. Bezieht man die durch (10) und (10a) dargestellten Hyperbeln auf ein Koordinatenkreuz x, y , indem man $m = x$ und S'_μ bzw. T'_μ gleich y und ferner zur Abkürzung noch

$$\frac{f_s^2 \cos u + S'_f S_f \cos u - S'_f \delta}{f} = A_s, \quad (12)$$

$$\frac{S_f \cos u - \delta}{f} = B_s, \quad (13)$$

$$\frac{f_t^2 \cos u + T'_f T_f \cos u - T'_f \delta}{f} = A_t, \quad (12a)$$

$$\frac{T_f \cos u - \delta}{f} = B_t. \quad (13a)$$

einführt, so können (10) und (10a) in der Form geschrieben werden:

$$yx - S'_f x + B_s y - A_s = 0, \quad (14)$$

$$yx - T'_f x + B_t y - A_t = 0. \quad (14a)$$

Die Schnittpunkte dieser beiden Kurven geben die Werte des Abbildungsmaßstabes oder auch die sagittale und tangentielle Schnittweite nach dem Durchgang des Büschels durch das optische System an, für die Anastigmatie herrscht. Die Kombination von (14) und (14a) führt auf

$$x^2(S_f - T_f) - x(A_t - A_s - B_t S'_f + B_s T'_f) + (B_t A_s - A_t B_s) = 0. \quad (15)$$

Es ergeben sich also zwei Werte für x , zu denen je ein Wert von y gehört, da y linear in die Gleichung (14) und (14a) eingeht.

Die zwei weiteren Schnittpunkte, die die beiden Hyperbeln haben müssen, liegen im Unendlichen und lassen sich mit Hilfe ihrer Asymptoten ermitteln. Die Gleichungen der beiden Asymptoten für die durch (14) gegebene Hyperbel sind:

$$x = -B_s \quad (16)$$

und

$$y = S'_f \quad (17)$$

und für die durch (14a) bestimmte Hyperbel entsprechend:

$$x = -B_t \quad (16a)$$

und

$$y = T'_f \quad (17a)$$

Die unendlich fernen Schnittpunkte der beiden Hyperbeln liefern also im allgemeinen keine anastigmatische Abbildung; denn für den unendlich fernen Punkt

$$y = \infty \quad (18)$$

werden die beiden Abbildungsmaßstäbe, solange $B_s \neq B_t$ ist, verschieden, für die sagittale Abbildung wird nämlich

$$x = -B_s \quad (19)$$

und für die tangentielle

$$x = -B_t. \quad (19a)$$

Ähnlich ist für

$$x = \infty, \quad (20)$$

$$y = S'_f \quad (21)$$

für das sagittale Abbildungsgebiet und für das tangentielle

$$y = T'_f \quad (21a)$$

d. h. die Bildschnittweiten sind verschieden, wofern nur $S'_f \neq T'_f$ ist.

Berühren sich dagegen die Hyperbeln (14) und (14a) in einem ihrer unendlich fernen Punkte, das tritt ein entweder für

$$B_s = B_t, \text{ was gleichbedeutend mit } S'_f = T'_f \quad (22)$$

ist (der vordere sagittale und tangentielle Brennpunkt fallen dann zusammen), oder für

$$S'_f = T'_f, \quad (23)$$

d. h. der unendlich ferne Punkt der Punktreihe $O_s = O_t$ wird anastigmatisch abgebildet, so liefert die Kombination von (14) und (14a) nur noch einen endlichen Schnittpunkt, der beim Bestehen der Bedingung (22) geliefert wird durch

$$x = \frac{A_t - A_s}{S'_f - T'_f} \quad (24)$$

und bei Erfüllung der Bedingung (23) gegeben wird durch:

$$y = \frac{A_s - A_t}{B_s - B_t}. \quad (25)$$

Berühren sich die Hyperbeln in ihren beiden unendlich fernen Punkten, d. h. (22) und (23) bestehen gleichzeitig, das bedeutet, daß der unendlich ferne Punkt und der zusammenfallende, sagittale und tangentielle Brennpunkt der Reihe $O_s = O_t$ anastigmatisch abgebildet werden, so liefert die Kombination von (14) und (14a) keinen weiteren Schnittpunkt. Es wäre nun der Fall noch möglich, daß die beiden Hyperbeln (14) und (14a) zusammenfallen, daß also für jede Dingweite anastigmatische Abbildung unserer Punkte $O_s = O_t$ eintritt; dann ist

$$\left. \begin{aligned} S'_f &= T'_f, \\ S_f &= T_f, \\ f_s^2 &= f_t^2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Dieser letzte Fall (26) liegt vor, wenn der Hauptstrahl alle Flächen des Systems senkrecht durchsetzt. Wir können also sagen: Auf jedem Hauptstrahl lassen sich im allgemeinen zwei Dingpunkte finden, deren Bilder anastigmatisch sind. Gibt es deren mehr, so sind die Bilder aller Dingpunkte anastigmatisch.

Dieses Ergebnis, das sich gleichsam nebenher aus der für uns nötigen Berechnung der anastigmatisch abgebildeten Dingpunkte ergibt, ist übrigens ohne weiteres aus folgender Überlegung einleuchtend. Da nämlich die beiden Punktreihen S'_μ und T'_μ ein und derselben Punktreihe, nämlich $O_s = O_t$ projektiv oder kollinear zugeordnet sind, so sind sie auch unter sich projektiv. Weil ferner in einer kollinearen oder projektiven Verwandtschaft auf derselben Geraden, in unserem Falle auf dem austretenden Hauptstrahl, es zwei und nur zwei sich selbst entsprechende Punkte gibt, oder alle zusammenfallen, so ist damit unser obiger Satz bewiesen. Sind die beiden zusammenfallenden Punkte reell, so heißt die kollineare Zuordnung bekanntlich

hyperbolisch, sind sie imaginär, so heißt sie elliptisch und, fallen sie zusammen, so heißt sie parabolisch.

Der Betrag A des Astigmatismus kann berechnet werden mit Hilfe von (10) und (10a) als:

$$A = T'_\mu - S'_\mu = \frac{T'_f m + A_t}{m + B_t} - \frac{S'_f m + A_s}{m + B_s}. \quad (27)$$

In der rechnenden Optik pflegt man allerdings meist für den Wert des Astigmatismus nicht A , sondern $A \cdot \cos u'$ anzugeben. Der Einfachheit wegen bleiben wir bei der durch (27) eingeführten Größe A . Um den Verlauf der astigmatischen Beträge etwas näher kennen zu lernen, denken wir uns wieder $m = x$ als Abszisse abgetragen und $A = y$ als die zugehörige Ordinate und wir setzen zur Abkürzung:

$$\varphi(x) = \frac{S'_f x + A_s}{x + B_s}, \quad (28)$$

$$\chi(x) = \frac{T'_f x + A_t}{x + B_t}. \quad (28a)$$

Dann gibt von den folgenden drei Beziehungen:

$$y = \chi(x) - \varphi(x), \quad (29)$$

$$y' = \chi'(x) - \varphi'(x), \quad (30)$$

$$y'' = \chi''(x) - \varphi''(x) \quad (31)$$

die erste eine Kurve dritten Grades an, deren Ordinaten also die Beträge der Astigmatie sind, die zweite den ersten Differentialquotienten und die dritte den zweiten Differentialquotienten dieser Kurvenordinaten an. Setzt man in ihnen die linke Seite gleich Null, so liefert (29) die Maßstabswerte x , für die die anastigmatische Abbildung stattfindet [siehe die Gleichung (15)], (30) die Werte von x , für die die Kurve der astigmatischen Abweichungen extreme Werte annehmen kann, und (31) solche x -Werte, für die die genannte Kurve Wendepunkte hat. Diese Gleichungen lauten dann in der entsprechenden Reihenfolge in extenso hingeschrieben:

$$\frac{x^2(T'_f - S'_f) + x(A_t - A_s + B_s T'_f - B_t S'_f) + (A_t B_s - A_s B_t)}{(x + B_s) \cdot (x + B_t)} = 0, \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{f_s^2}{(x + B_s)^2} - \frac{f_t^2}{(x + B_t)^2}}{=} \frac{x^2(f_s^2 - f_t^2) + 2x(B_t f_s^2 - B_s f_t^2) + f_s^2 B_t^2 - f_t^2 B_s^2}{(x + B_s)^3 \cdot (x + B_t)^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{f_t^2}{(x + B_t)^3} - \frac{f_s^2}{(x + B_s)^3}}{=} \frac{x^3(f_t^2 - f_s^2) + 3x^2(B_s f_t^2 - B_t f_s^2) + 3x(B_s^2 f_t^2 - B_t^2 f_s^2) + (B_s^3 f_t^2 - B_t^3 f_s^2)}{(x + B_t)^3 \cdot (x + B_s)^3} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

wobei bei der Ableitung der beiden letzten Gleichungen der nicht interessierende Faktor $\frac{\cos u}{f}$ unterdrückt worden ist.

Nach der Untersuchung der Abhängigkeit des Astigmatismus vom Abbildungsmaßstab, d. h. von der Dingweite, bleibt noch übrig, die entsprechenden Untersuchungen für die Bildfeldwölbungen durchzuführen. Als Maß W_s für die sagittale Bildfeldwölbung wollen wir im Hinblick auf unsere Fig. 1 setzen:

$$W_s = S'_\mu - \frac{\delta' + \frac{f}{m}}{\cos u'} \quad (35)$$

und entsprechend für die tangentielle Bildfeldwölbung:

$$W_t = T'_\mu - \frac{\delta' + \frac{f}{m}}{\cos u'}, \quad (35a)$$

wenn auch in der rechnenden Optik häufiger die Ausdrücke $W_s \cdot \cos u'$ bzw. $W_t \cdot \cos u'$ als Bildfeldwölbung bezeichnet werden; ein wesentlicher Unterschied in den Entwicklungen kann ja dadurch nicht eintreten, daß man die Ausdrücke (35) und (35a) den letztgenannten vorzieht. Wir führen die Untersuchungen weiter an Hand der Beziehung (35) durch; für (35a) würde sie selbstverständlich ganz entsprechend sein, so daß wir uns begnügen können, jedesmal nur das Ergebnis hierfür mit hinzusetzen. Bezeichnen wir wieder m mit x und ferner W_s mit y , so läßt sich (35) auch schreiben:

$$y = \frac{S'_f x + A_s}{x + B_s} - \frac{\delta' x + f}{x \cdot \cos u'} \quad (36)$$

oder, wenn wir den Ausdruck $\frac{\delta' x + f}{x \cdot \cos u'}$, den man als Gaußische Schnittweite bezeichnen kann, noch gleich $\psi(x)$ setzen mit Hilfe von (28):

$$y = \varphi(x) - \psi(x). \quad (37)$$

Die Kurvenordinaten (37) geben uns also die Werte für die sagittale Bildfeldwölbung an. Der Ausdruck

$$\psi(x) = \frac{\delta' x + f}{x \cdot \cos u'} = y, \quad (38)$$

y würde also hierin, die Gaußische Schnittweite bedeuten, stellt übrigens auch eine gleichseitige Hyperbel dar, deren zu den Koordinatenachsen parallel laufende Asymptoten durch

$$x = 0, \quad (39)$$

$$y = \frac{\delta'}{\cos u'} \quad (40)$$

gegeben sind. Da (37) ganz in derselben Weise wie (29) gebaut ist, so können wir auch die gleichen Überlegungen wie oben anstellen. Wir bilden entsprechend (30) und (31)

$$y' = \varphi'(x) - \psi'(x), \quad (41)$$

$$y'' = \varphi''(x) - \psi''(x). \quad (42)$$

Setzen wir die linken Seiten von (37), (41) und (42) gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{x^2 (S_f' \cos u' - \delta') + x (A_s \cos u' - B_s \delta' - f) - f B_s}{x(x + B_s) \cdot \cos u'} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{x^2 (f^2 - f_s^2 \cos u \cos u') + 2 x f^2 B_s + f^2 B_s^2}{x^2 (x + B_s)^2 f \cos u'} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{x^3 (f_s^2 \cos u \cos u' - f^2) - 3 x^2 f^2 B_s - 3 x f^2 B_s^2 - f^2 B_s^3}{x^3 (x + B_s)^3 f \cos u'} = 0. \quad (45)$$

Die Gleichung (43) liefert zwei Werte von x , für die der sagittale Bildpunkt in die Gaußsche Bildebene fällt. Die unendlich fernen Schnittpunkte der beiden durch (14) und durch (38) gegebenen gleichseitigen Hyperbeln sind in der ganz entsprechenden Weise aufzusuchen, wie das weiter oben bei den beiden Hyperbeln (14) und (14a) geschehen ist. Wir unterdrücken daher die entsprechenden Ableitungen. Analog dem obigen Satz über die Anastigmatie können wir jetzt sagen: Es gibt auf jedem Hauptstrahle zwei Dingpunkte, deren sagittale Bildpunkte in die zugehörigen Gaußschen Bildebenen fallen. Gibt es deren mehr, so fallen sämtliche sagittalen Bildpunkte in die zugehörigen Gaußschen Bildebenen. Ein entsprechender Satz gilt natürlich auch für die tangentialen Bildpunkte. Die Gleichung (44) gibt die Werte von x , für die die Kurve der sagittalen Bildfeldwölbung extremale Werte möglicherweise annimmt, und die Gleichung (45) solche x -Werte, für die unsere Kurve Wendepunkte haben kann. Die entsprechenden Werte für die Kurve der tangentialen Bildfeldwölbung sind:

$$y = \frac{T_f' x + A_t}{x + B_t} - \frac{\delta' x + f}{x \cdot \cos u'}, \quad (36a)$$

$$\frac{x^2 (T_f' \cos u' - \delta') + x (A_t \cos u' - B_t \delta' - f) - f \cdot B_t}{x \cdot (x + B_t) \cdot \cos u'} = 0, \quad (43a)$$

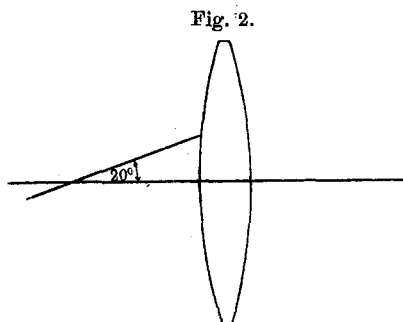
$$\frac{x^2 (f^2 - f_t^2 \cos u \cos u') + 2 x f^2 B_t + f^2 B_t^2}{x^2 (x + B_t)^2 f \cos u'} = 0, \quad (44a)$$

$$\frac{x^3 (f_t^2 \cos u \cos u' - f^2) - 3 x^2 f^2 B_t - 3 x f^2 B_t^2 - f^2 B_t^3}{x^3 (x + B_t)^3 f \cos u'} = 0. \quad (45a)$$

Damit beenden wir unsere allgemeinen Ableitungen, die uns folgendes Ergebnis brachten:

Auf Grund der kollinearen Beziehungen, die zwischen den als anastigmatisch angenommenen Dingpunkten auf dem eintretenden Hauptstrahl und den sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkten auf dem austretenden Hauptstrahl bestehen, stellten wir mit Hilfe der Fluchtpunktrelation eine analytische Beziehung zwischen Dingpunkten und sagittalen bzw. tangentialen Bildpunkten auf. Diese lieferte uns weiter analytische Ausdrücke für den Astigmatismus, die sagittale und tangentiale Bildfeldwölbung, die geometrisch als Kurven dritten Grades gedeutet werden konnten und zur eingehenden Untersuchung der genannten Bildfehler optischer Systeme dienen können.

§ 3. Zahlenbeispiele. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwieweit die eben gegebenen Entwicklungen für die praktische Arbeit des rechnenden Optikers von Wert sind. Wir legen zunächst unserer Betrachtung eine gleichschenklige bikonvexe Linse zugrunde, die nebenstehende Fig. 2 in schematischem Querschnitt zeigt. Ihre Krümmungsradien sind gegeben durch $r_1 = 98,3$ mm, $r_2 = -98,3$ mm, ihre Dicke durch $d = 10$ mm, ihre Brechungszahl ist $n = 1,5$ und ihr Blendenmittelpunkt (Hauptstrahlkreuzungspunkt) soll auf der Achse 25 mm vor dem Scheitel der dem Licht zugekehrten Linsenfläche liegen. Der eintretende Hauptstrahl sei unter einem Winkel von 20° gegen die optische Achse geneigt. Allen im folgenden zahlenmäßigen



Durchrechnungen liegt stets die Genauigkeit fünfstelliger Logarithmen zugrunde. Wir nehmen an, da wir ja hier nur die Verwendbarkeit der von uns abgeleiteten Ausdrücke zu prüfen bezwecken, daß nach den üblichen Rechnungsvorschriften der sagittale und tangentiale Bildpunkt des unendlich fernen Punktes des eintretenden Hauptstrahles, d. h. F'_s und F'_t , bestimmt sind, und zwar ist:

$$S'_f = 93,184 \text{ mm}, \quad (46)$$

$$T'_f = 87,832 \text{ mm}. \quad (46 a)$$

Ferner ist die Brennweite der Linse für den Paraxialraum:

$$f = 99,995 \text{ mm} \quad (47)$$

und es ist

$$\delta' = 97,226 \text{ mm}, \quad (48)$$

$$u = 20,0000^\circ, \quad (49)$$

$$u' = 13,6105^\circ. \quad (50)$$

Diese Werte sind also alle den üblichen Durchrechnungen, die zur Bestimmung des Astigmatismus notwendig sind, unmittelbar zu entnehmen. Die Ermittlung von f_s und f_t hat auf Grund der Gleichungen (7) und (7a) zu erfolgen, macht aber auch keine sonderliche Arbeit, da die dabei auftretenden Größen ebenfalls sämtlich in jenen Durchrechnungen bereits enthalten sind. In unserem Fall ergibt sich

$$\log f_s^2 = 96\,782 + 3, \quad (51)$$

$$\log f_t^2 = 87\,161 + 3. \quad (51a)$$

Zu der sonst üblichen Durchrechnung kommt nur noch hinzu, daß einmal die Strecke GF (siehe Fig. 1) durch rückwärtige Nullstrahlrechnung und ebenfalls durch rückwärtige Durchrechnung, nämlich durch Bestimmung der Bildpunkte des unendlich fernen Punktes des austretenden Hauptstrahles die Lage von F_s und F_t festgestellt werden muß. Es ergibt sich dann:

$$\delta = -97,042 \text{ mm}, \quad (52)$$

$$S_f = -93,370 \text{ „} \quad (53)$$

$$T_f = -79,117 \text{ „} \quad (53a)$$

Damit haben wir alle Werte, die für die Benutzung unserer oben abgeleiteten Formeln notwendig sind. Die eigentliche Mehrarbeit besteht also im wesentlichen nur darin, daß man zwei Durchrechnungen vornimmt, indem man die Nullstrahlrechnung vor- und rückwärts und die Durchrechnung für den tangentialen bzw. sagittalen Abbildungsvorgang ebenfalls vor- und rückwärts ausführt, und zwar stets für die in Betracht kommenden unendlich fernen Punkte. Man hat also gleichsam mit zwei Durchrechnungen sich die Möglichkeit geschaffen, für jede beliebige Dingweite unter Benutzung der Ausdrücke (10) und (10a) die sagittalen und tangentialen Bildpunkte anzugeben. So ergibt sich für unser Beispiel durch Einsetzen der Werte (46), (47), (49), (51), (52) und (53) in (10) und der Werte (46a), (47), (49), (51a), (52) und (53a) bezüglich:

$$S'_2 = \frac{93,184\,m + 95,930}{m + 0,093\,03} \quad (54)$$

und

$$T'_2 = \frac{87,832\,m + 89,858}{m + 0,226\,995}. \quad (54a)$$

Damit ist für unser Zahlenbeispiel eigentlich die gestellte Aufgabe gelöst. Um aber uns eingehender über den Verlauf der in Frage kommenden Größen zu unterrichten, wollen wir hier noch die

Kurven der Gaußischen und der sagittalen Schnittweite, der sagittalen Bildfeldwölbung (für die entsprechenden tangentialen Werte sind die Untersuchungen ganz gleichlaufend) und schließlich des Astigmatismus, wie sie durch unsere oben abgeleiteten Ausdrücke gegeben werden, zur Darstellung bringen. Die durch (38) bestimmte Kurve der Gaußischen Schnittweite wird hier zu:

$$y = \frac{97,226x + 99,995}{0,97192x}. \quad (55)$$

Ferner ergibt sich aus (54) als Kurve der sagittalen Schnittweite

$$y = \frac{93,184x + 95,930}{x + 0,09303}. \quad (56)$$

Die Differenz der beiden Kurvenordinaten (55) und (56) gibt entsprechend unserer Beziehung (37):

$$y = \frac{93,184x + 95,930}{x + 0,09303} - \frac{97,226x + 99,995}{0,97192x} \quad (57)$$

die Werte für die sagittale Bildfeldwölbung. Durch Nullsetzen der linken Seite von (57) erhält man die Schnittpunkte der beiden Kurven (55) und (56), d. h. die beiden endlichen Abbildungsmaßstäbe, für die die Bildpunkte in die Gaußsche Bildebene fallen. Man erhält mit Hilfe von (43):

$$x^2 + 2,37357x + 1,39701 = 0 \quad (58)$$

und daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -1,07977, \\ x_2 &= -1,29379. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die extremalen Werte der Kurve (57) ergeben sich aus Gleichung (44) als:

$$x^2 + 1,22534x + 0,056994 = 0 \quad (60)$$

mit den Wurzeln:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -0,04842, \\ x_2 &= -1,17692. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Für die im Endlichen gelegenen Wendepunkte der Kurve (57) liefert die Gleichung (45) folgende kubische Gleichung:

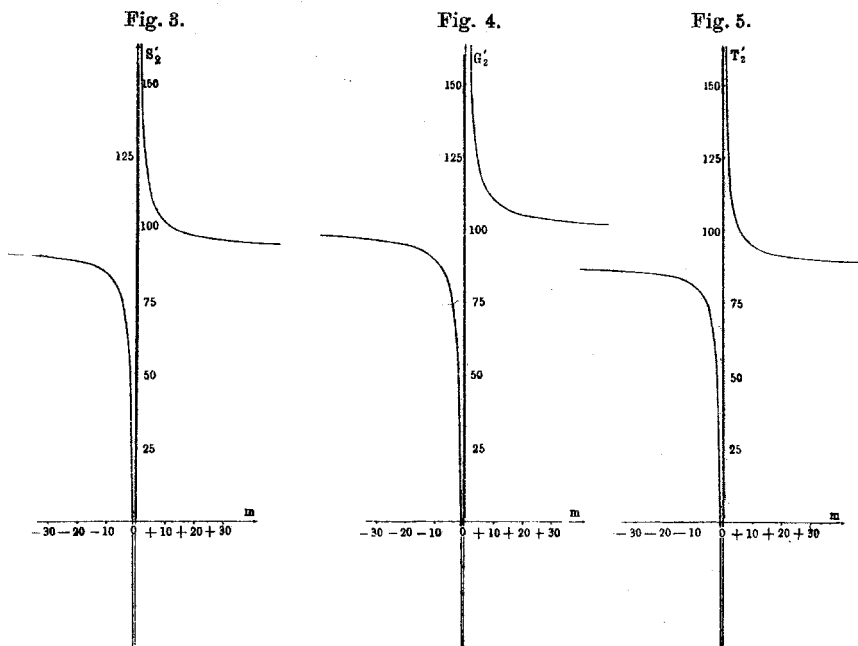
$$x^3 + 1,838x^2 + 0,171x + 0,0053 = 0, \quad (62)$$

die nur eine reelle Wurzel besitzt, nämlich auf Hundertstel abgerundet:

$$x = -1,74. \quad (63)$$

Damit sind für unser Zahlenbeispiel die oben gegebenen Ausdrücke für die Kurve der sagittalen Bildfeldwölbung berechnet. Die umstehenden Fig. 3, 4 und 5 zeigen entsprechend den Kurvengleichungen (54) oder (56), (55) und (54a) die Abhängigkeit der sagittalen

Schnittweite S'_2 , der Gaußischen Schnittweite G'_2 und der tangentialen Schnittweite T'_2 von dem Abbildungsmaßstab m . Will man die Werte für die sagittale Bildfeldwölbung bestimmen, so braucht man nur aus den Kurven der Fig. 3 und 4 die Differenz der Ordinaten für gleiche m -Werte zu bilden; entsprechend kann man für die tangentiale Bildfeldwölbung mit Hilfe der Hyperbeln der Fig. 4 und 5 verfahren. Den Astigmatismus für einen bestimmten Abbildungsmaßstab m erhält man, indem man für diesen m -Wert die Differenz der Ordinaten der Kurven der Fig. 3 und 5 bildet. Wollte man die sagittale und tangentiale Bildfeldwölbung und den Astigmatismus in ihrer



Abhängigkeit von m direkt durch Kurven darstellen, so würde man eben jene oben erwähnten Kurven dritter Ordnung erhalten, deren Gleichung wir in (57) für die sagittale Bildfeldwölbung für unser Zahlenbeispiel angegeben haben.

In der Einleitung haben wir schon darauf hingewiesen, daß man in der Regel zur Feststellung der sagittalen und tangentialen Bildfeldwölbung eines optischen Systems diese für eine Anzahl von Hauptstrahlneigungen (etwa für drei) für eine bestimmte Dingweite ermittelt, für dazwischenliegende Hauptstrahlneigungen interpoliert und so die Kurve der sagittalen bzw. tangentialen Bildfeldwölbung

findet. Will man diese Kurven für mehrere Dingweiten bestimmen, so braucht man nur wieder unsere Beziehungen (10) und (10a) zu benutzen. Wir geben die so gewonnenen Kurven für das unter dem Namen Planar bekannte sechslinsige Objektiv der Firma Carl Zeiss, dessen schematischer Querschnitt umstehend in Fig. 6 abgebildet ist, und zwar für folgende Ausführungsform:

| Flächenradien: | Linsendicken: | Brechungszahlen |
|----------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| $r_1 = 24,8 \text{ mm}$ | $d_1 = 3,2 \text{ mm}$ | für die D -Linie |
| $r_2 = 61,5 \text{ "}$ | $d_2 = 2,6 \text{ "}$ | des Spektrums: |
| $r_3 = 30,4 \text{ "}$ | $d_3 = 1,0 \text{ "}$ | $L_1: 1,611$ |
| $r_4 = -22,7 \text{ "}$ | $d_4 = 1,0 \text{ "}$ | $L_2: 1,530$ |
| $r_5 = 17,4 \text{ "}$ | $d_5 = 2,6 \text{ "}$ | $L_3: 1,523$ |
| $r_6 = -17,4 \text{ "}$ | $d_6 = 3,2 \text{ "}$ | $L_4: 1,523$ |
| $r_7 = 22,7 \text{ "}$ | Luftabstände und Blendenraum: | $L_5: 1,530$ |
| $r_8 = -27,2 \text{ "}$ | | $L_6: 1,611$ |
| $r_9 = -51,8 \text{ "}$ | $l_1 = 0,1 \text{ mm}$ | Brennweite: $f = 100 \text{ mm}$ |
| $r_{10} = -25,8 \text{ "}$ | $b_1 = 3,6 \text{ "}$ | |
| | $b_2 = 3,6 \text{ "}$ | |
| | $l_2 = 0,1 \text{ "}$ | |

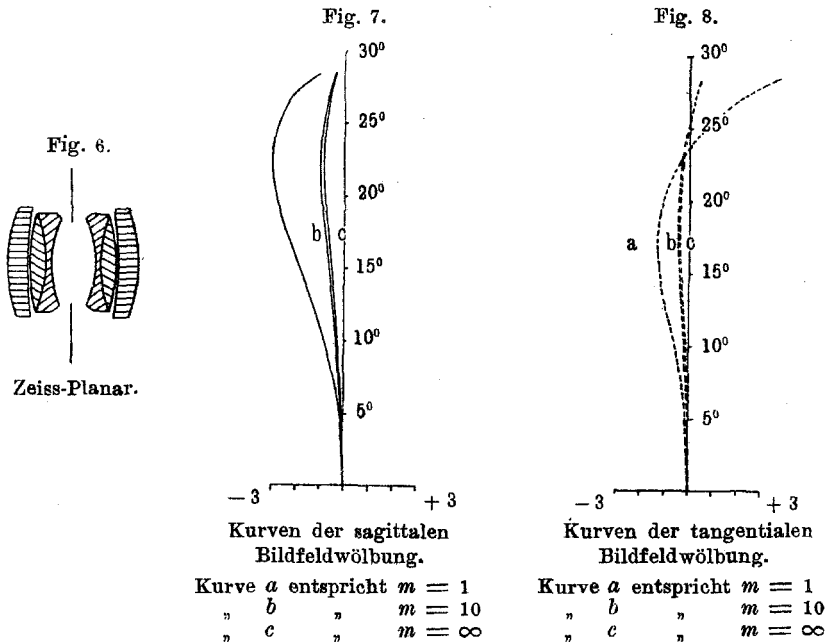
Mit Hilfe der Fig. 6 sind die für das Planar gegebenen optischen Konstanten wohl eindeutig erkennbar.

Die Ausdrücke (10) bzw. (10a) nehmen in entsprechender Reihenfolge die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 S'_{10} &= \frac{93,916m + 103,879}{m + 0,00646} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 16,7^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl,} \end{array} \right. \\
 S'_{10} &= \frac{97,823m + 108,243}{m + 0,00882} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 23,2^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl,} \end{array} \right. \\
 S'_{10} &= \frac{102,795m + 113,845}{m + 0,00470} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 28,3^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl,} \end{array} \right. \\
 T'_{10} &= \frac{94,098m + 104,507}{m + 0,00528} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 16,7^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl,} \end{array} \right. \\
 T'_{10} &= \frac{98,363m + 109,880}{m + 0,00478} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 23,2^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl,} \end{array} \right. \\
 T'_{10} &= \frac{103,786m + 116,857}{m - 0,00280} \left\{ \begin{array}{l} \text{für den um den Winkel } u = 28,3^\circ \text{ gegen die} \\ \text{Achse geneigten, eintretenden Hauptstrahl.} \end{array} \right.
 \end{aligned} \quad (64)$$

Die Fig. 7 gibt die Kurven der sagittalen Bildfeldwölbung gemäß den Beziehungen (64) und die Fig. 8 die der tangentialen Bildfeldwölbung entsprechend den Gleichungen (64a). Man erkennt aus ihnen, daß die Kurven für $m = \infty$ und $m = 10$ einander sehr ähnlich sind und nahe beieinander liegen, während die Kurven für den

Abbildungsmaßstab $m = 1$ in Gestalt und Lage schon erheblich mehr von denen der beiden anderen Maßstäbe abweichen. Dieses Verhalten der Kurven der sagittalen und tangentialen Bildfeldwölbung für verschiedene Dingweiten wird für photographische Objektive, die für eine weit entfernte Dingebene anastigmatisch geebnet sind, die



Regel bilden. Der Verfasser behält sich vor, in einer späteren Veröffentlichung die vorliegenden Untersuchungen für eine größere Zahl photographischer Objektive durchzuführen, um für diese durch einen systematischen Überblick über die Abhängigkeit der sagittalen und tangentialen Bildfeldwölbung von der Dingweite vielleicht zu eingehenderer allgemeiner Erkenntnis zu gelangen.

Jena, Dezember 1919.