

## 2. *Über die Elastizität des Eises*<sup>1)</sup>; von K. R. Koch.

Vor nunmehr nahezu 30 Jahren führte ich während eines einjährigen Aufenthaltes an der Küste von Labrador (wohin ich als Delegierter der Deutschen Polarkommission während der Dauer der internationalen Polarforschung 1882/83 vom Deutschen Reich geschickt war) zahlreiche Beobachtungen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls des Eises aus; trotz guter *innerer* Übereinstimmung fielen die Werte des Moduls für verschiedene Stäbe zum Teil größer als frühere Beobachter ihn gefunden, und außerdem nicht unerheblich verschieden voneinander aus. Ich bemerkte jedoch am Schluß meiner Messungen, daß trotz der dort herrschenden ständigen tiefen Temperatur eine starke Verdunstung der benutzten Eisstäbe stattfand. Hierdurch wurden die Dimensionswerte (Querschnitt), welche ich nicht allein, sondern nur mit Beihilfe, die mir aber nur hier und da zur Verfügung stand, ausführen konnte, unsicher, da zwischen den Dimensionsbestimmungen und den Biegunismessungen zum Teil größere Zeiträume lagen, so daß ich die Veröffentlichung dieser Versuche verschob, bis ich im Winter 1884/85 im Physikalischen Institut in Freiburg Gelegenheit fand, sie nachzuprüfen. Um aber allen Einwänden von vornherein zu entgehen, benutzte ich von den in Labrador gemachten Messungen nur die, bei denen die Dimensionsbestimmungen *innerhalb* der Zeit der Beobachtungen der Durchbiegung fielen. Die in Freiburg untersuchten Stäbe ergaben:  $E = 646,5 \text{ kg/mm}^2$ ; als mittlerer Wert der Labradorstäbe war  $E = 696 \text{ kg/mm}^2$  gefunden. Ihre Dicke und der Pfeil der Biegung lagen senkrecht zur Gefrierfläche.<sup>2)</sup>

Durch diese Verwerfung des größten Teiles der Labradorbeobachtungen, zu der ich, wie erwähnt, hauptsächlich des-

1) Ausgeführt mit Unterstützung des Fonds der Rob. Bosch-Stiftung.

2) K. R. Koch, Wied. Ann. 25. p. 438 ff. 1885.

halb bewogen wurde, weil die Werte des Moduls der einzelnen Stäbe, trotz *innerer* Übereinstimmung so merkwürdig voneinander abwichen, war natürlich eine Feststellung, in welcher Weise die elastischen Kräfte von ihrer Richtung zur kristallographischen Hauptachse abhängig seien, nicht möglich.

Vor ca. 11 Jahren<sup>1)</sup> erschien in diesen Annalen eine Arbeit von Hrn. Hess, die zu wesentlich anderen Resultaten kommt. Er gibt als Werte von  $E$  für Stäbe

$l \parallel$ der Hauptachse	182 kg/mm <sup>2</sup>	
und	59	„ (?)
$b \parallel$ der Hauptachse	383	„
	418	
$d \parallel$ „ „	254	„

als Mittelwert (p. 425)

$$E = 276 \text{ kg/mm}^2.$$

Merkwürdigerweise ignoriert Hr. Hess meine Untersuchungen vollkommen. Ich hatte nun gehofft, daß bei diesen sich gegenseitig ausschließenden Resultaten irgend eine jüngere Kraft den Widerspruch aufzuklären versuchen würde, sah mich aber darin bisher getäuscht; im Gegenteil werden in den neuesten Tabellenwerken<sup>2)</sup>, nur die von Hrn. Hess publizierten Werte aufgeführt.

Im allgemeinen ist zu bemerken, daß Biegunsmessungen am Eis nicht so einfach anzustellen sind, wie sonst bei festen Körpern, da man, worauf ich schon in meinen ersten Veröffentlichungen<sup>3)</sup> hingewiesen habe, durch die während jeder Belastung auftretende ständige Deformation (hervorgerufen durch die Viskosität des Materials) sehr leicht zu große Werte der Durchbiegung und damit zu kleine des Elastizitätsmoduls erhält.\*

Da ferner die Beanspruchung des Materials nur äußerst gering sein darf, so sind sehr empfindliche Meßmethoden notwendig, denn Stäbe von z. B. 150 mm Länge, ca. 10 mm Dicke

1) H. Hess, Ann. d. Phys. 8. p. 410. 1902.

2) H. Landolt u. R. Börnstein, Physik.-Chemische Tabellen, IV. Aufl. p. 50ff. 1912, ferner in den Tables annuelles de Constantes... publ. sous le patronage de l'Association internat. des Académies... 1. p. 723ff. Paris 1912.

3) K. R. Koch, l. c. p. 441.

und 20 mm Breite (wie ich sie meist benutzte) vertragen kaum eine größere Durchbiegung als ca. 0,2 mm; damit ist bedingt, daß die Aufstellung eine äußerst feste und die Ablesegenauigkeit bei der Messung der Biegung eine sehr große sein muß, und mit peinlicher Sorgfalt alle Fehlerquellen beachtet werden müssen, wenn die erhaltenen Werte noch auf 1 Proz. richtig sein sollen.

Ferner ist die Beschaffenheit des Eises von größter Bedeutung. Das sich auf Seen und Teichen bildende Eis ist von Luftblasen und Luftkanälen durchsetzt; die Blasen sind in horizontalen Schichten, also in Ebenen parallel zur Gefrierfläche angeordnet, die länglichen Luftkanäle immer senkrecht zu dieser; also, da erfahrungsgemäß beim Seeeis die kristallographische Hauptachse senkrecht zur Gefrierfläche liegt, parallel ersterer.

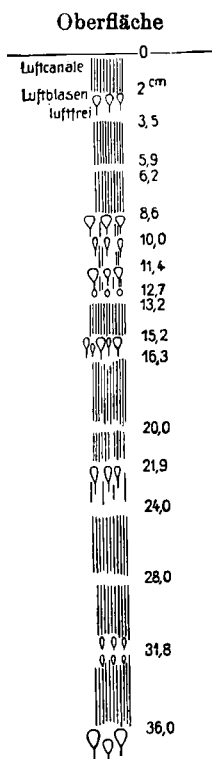
Fig. 1<sup>1)</sup> gibt einen Querschnitt durch einen Eisblock, wie ich ihn in Labrador benutzte, Fig. 2<sup>2)</sup> einen von den diesjährigen Untersuchungen auf dem Berninapaß.<sup>3)</sup> Stellt man nun Stäbe aus derartigem lufthaltigen Eis her, so werden diese Luftblasen und Kanäle im ganzen so wirken, als wäre der Querschnitt geringer als der aus der direkten Messung gewonnene; diese Ungenauigkeit wird mithin so wirken, daß hierbei sich der Elastizitätsmodul zu klein ergibt. Bei allen

1) Die nebenstehenden Zahlen bedeuten die Tiefe der Schicht unter der Oberfläche.

2) Der Block liegt umgekehrt auf dem Schlitten, d. h. *E* ist die ursprüngliche Oberfläche; *DDCC* sind Schichten mit größeren und zahlreicheren Luftblasen, zwischen ihnen ist die Luft in Kanälen  $\perp$  zur Gefrierfläche eingeschlossen; erst von *AA* ab beginnt luftfreies (blaugrünes) Eis. Im Original ist die Schichtung deutlicher als in der Reproduktion.

3) Das Zustandekommen dieser Struktur stelle ich mir so vor, daß eine solche Luftblasenschicht einer Zeit entstammt, in der wegen Nachlassen des Frostes die absorbierte Luft Zeit hatte, sich unter der gebildeten Eisdecke auszuschcheiden; bei erneutem Einsetzen des starken Frostes findet dann ein Einfrieren der Luftblasen statt; die Luftkanäle denke ich mir bei anhaltendem Frostwetter und kontinuierlichem schnelleren Weitergefrieren, also Dickerwerden der Eisdecke entstanden. Erst wenn dann die oberen Schichten des Wassers nahezu luftfrei geworden sind, entsteht das glasklare Eis. Bei Flüssen wird durch die Strömung die Luft zum Teil fortgeführt, deshalb findet man dort oft schon von der Oberfläche ab nahezu luftfreies Eis.

Messungen sollte mithin möglichst luftfreies Eis benutzt werden. Dieser Luftgehalt des Eises setzt sich nun beim Seeis verhältnismäßig bis zu großen Tiefen fort; das von mir in Labrador (Fig. 1) benutzte Eis war erst von 40 cm Tiefe ab nahezu luftfrei (l. c. p. 442). Solches Eis wird also nur dort anzutreffen sein, wo der Frost stark und anhaltend genug ist, um derartig dickes Eis zu erzeugen. Deshalb begab ich mich gegen Ende dieses Winters auf die Höhe des Berninapasses (2310 m), auf dem sich bekanntlich



von 36 cm ab bis 76 cm  
Tiefe luftfrei.

Fig. 1. (Schematische  
Zeichnung.)

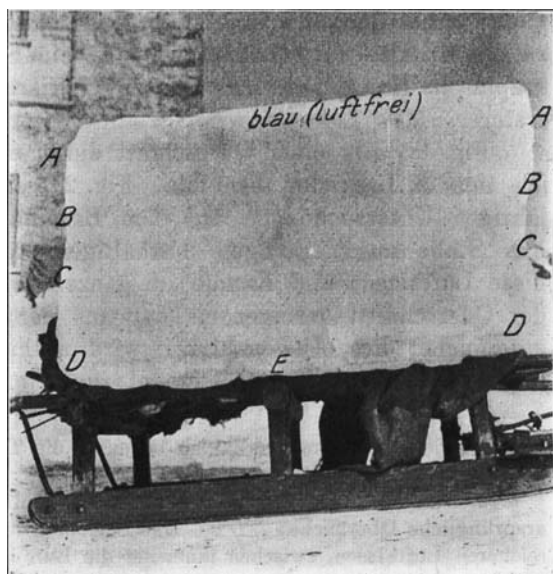


Fig. 2.

drei Seen befinden, und ließ einen ca. 1 qm großen Block aus dem Eis des Lago della Crocetta ausschneiden. Das Eis besaß eine Dicke von ca. 85 cm. Bei diesem reichten die Schichten mit Luftblasen aber bis zu ca. 75 cm hinunter, so daß leider nur eine brauchbare Schicht von ca. 10 cm Dicke übrig blieb.<sup>1)</sup>

1) In Fig. 2 die Schicht oberhalb A A.

Aus dieser nahezu glasklaren Schicht wurden die Stäbe, bei denen  $b$  und  $d$  parallel zur Normale der Gefrierfläche waren, geschnitten; für solche, bei denen  $b \parallel$  dazu lag<sup>1)</sup>, war dies der geringen Mächtigkeit der luftfreien Schicht wegen natürlich nicht möglich; bei diesen bestand ein Teil des Stabes aus lufthaltigem Eis.

Die *Herstellung* der Stäbe für die Biegungsbeobachtungen erfolgte in derselben Weise wie l. c. p. 442 beschrieben; d. h. nachdem mittelst Säge und Raspel bei tiefer Temperatur die Stäbe ungefähr in die gewünschte Form und Stärke gebracht waren, wurden sie auf einer warmen (Zimmertemperatur), ebenen Platte (benutzt wurde eine sogenannte Richtplatte) vollends eben und gleichmäßig geschliffen. In der Natur dieses Verfahrens liegt es, daß natürlich die Stäbe wegen des eintretenden Schmelzungs Vorganges nicht genau scharfkantig

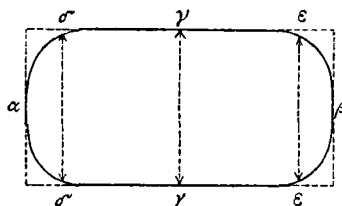


Fig. 3.

bleiben, sondern etwas abgerundete Kanten und etwas mehr oder weniger konvexe Flächen erhalten (vgl. Fig. 3, wo ihre Querschnittsform in stark übertriebener Weise gezeichnet ist).

Die Versuche wurden in dem kältesten zur Verfügung stehenden Raum des Berninahospiz angestellt, in welchem konstant eine Temperatur von  $-8^{\circ}$  bis  $-6^{\circ}$  C. herrschte; auch bei tieferer äußerer Temperatur war selbst durch Lüften auf die Dauer eine niedrigere Temperatur nicht zu erreichen. Dem Vorstand des Hospiz Hrn. Nicolay bin ich für die Bereitwilligkeit, mit der er mir diesen Raum zur Verfügung stellte, wie auch alle meine Wünsche erfüllte, zu großem Dank verpflichtet.

1)  $l$  bedeutet die Länge,  $b$  die Breite und  $d$  die Dicke des Stabes.

Der *Biegungsapparat* muß fest und doch für auswärtigen Gebrauch leicht zerlegbar und handlich sein. Fig. 4 gibt eine photographische Ansicht, wozu ich erläuternd folgendes bemerken möchte.

Vermittelst vier Steindollen *St* sind zwei Balken (Querschnitt  $5 \times 8$  cm) fest an die Hauswand geschraubt; diese

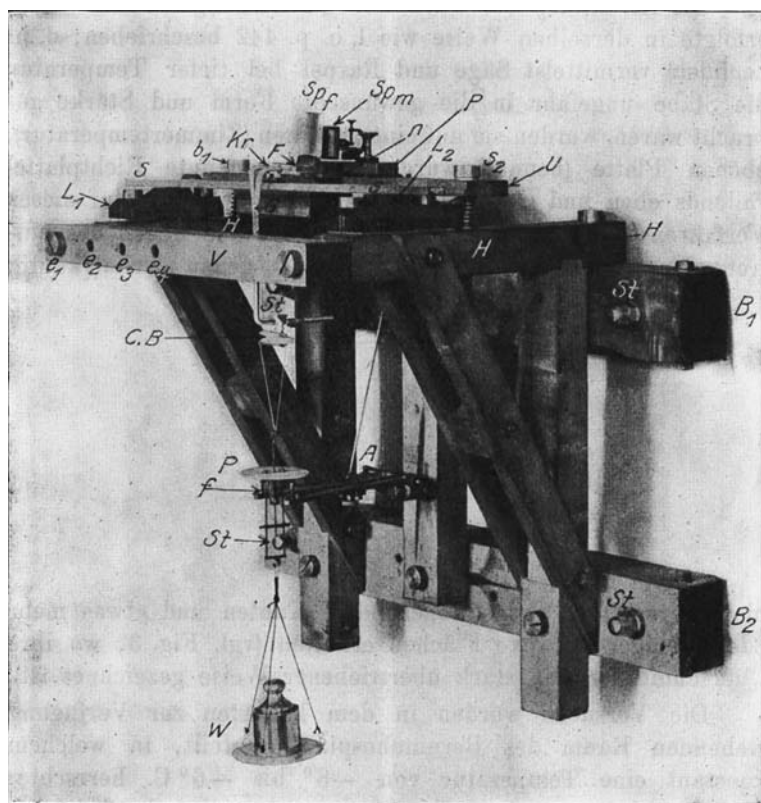


Fig. 4.

tragen zwei horizontale Träger *H*, die, wie aus der Figur ersichtlich, gehörig versteift sind; auf diese sind die zwei Lager  $L_1 L_2$  aufgeschraubt, auf denen beim Biegungsversuch der Eisstab ruht.  $L_1$  ist drehbar (um eine Achse parallel der Längsrichtung des Stabes) eingerichtet, um, wenn etwa

der zu untersuchende Stab etwas windschief ist, ein sattes Aufliegen auf den beiden ganzen Lagerkanten zu ermöglichen, als auch um das, die Messung bei angreifender Belastung fälschende Kippen des Stabes zu verhüten. Derartige Vorrichtungen sind immer, wenn es sich wie hier um kleine zu messende Werte handelt, unerlässlich; wenn man sie nicht anbringt, so läuft man Gefahr, Drehungen statt Biegungen zu beobachten.

Auf diesen Lagern  $L_1, L_2$  also ruhte der zu untersuchende Stab  $S$ , indem, wie erwähnt, mit den Stellschrauben das Lager  $L_1$  so lange korrigiert wurde, bis ein Kippen des Stabes bei (an verschiedenen Punkten der Breite) angreifender Belastung nicht mehr zu bemerken war. Die Belastung griff mittelst Kreuzschneiden  $Kr$  durch den Bügel  $G$  an; an diesem hängt bifilar das Belastungsgewicht  $W$ , gestützt durch die Platte  $P$ . Beim Lösen der Arretierung, das durch Kegelhäder und Schraube geschieht (in der Figur nicht sichtbar), tritt zunächst die Spiralfeder  $f$  in Funktion und erst bei weiterer Senkung von  $A$  gibt die Arretierung die Platte  $p$  ganz frei; hierdurch wird eine nahezu ganz erschütterungsfreie Belastung und Entlastung bewirkt, bekanntlich für die richtige Ermittlung der Biegung ein ebenfalls sehr wichtiger Faktor! Die in Rechnung zu ziehende Gesamtbelastung besteht dann außer dem auf der Wagschale befindlichen Gewicht  $W$  noch aus der ganzen Aufhängevorrichtung bis zum Bifilarfaden. Das Gewicht dieses Systems betrug bei diesem Apparat 34,56 g. In der Figur befindet sich hinter dem Stab  $S$  eine in Höhe verstellbare starke Leiste  $U$ , auf dieser ist durch die Platte  $P$  die Platte  $N$ , welche die Nute für die hinteren Spitzen  $\alpha, \beta$  des Spiegelfühlhebels (Fig. 5) besitzt, festgeschraubt. Da  $P$ , wie erwähnt, in Höhe verstellbar war, so war es möglich, auch bei beliebig dicken Stäben die Normale des Spiegels des Fühlhebels immer nahezu horizontal zu stellen. Einen ferner sehr wichtigen Bestandteil bildet der Mierenspiegel  $Sp_m$ . Man muß offenbar eine gewisse Kontrolle darüber ausüben können, ob sich bei angreifender Belastung nicht der ganze Apparat verstellt, was bei eintretender Lockerung irgend einer Verbindung leicht eintreten kann. Die Biegungsbeobachtungen wurden deshalb mit einem der-

artigen Versuch über die Stabilität des Ganzen eingeleitet. War alles in Ordnung, so betrug bei einer — sogar an

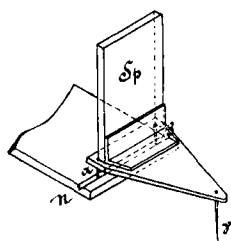


Fig. 5.

ungünstigster Stelle, nämlich an der Versteifungsleiste  $V$  angreifenden — Belastung von 5 kg (dem rund 3 fachen der gewöhnlich bei den Versuchen angewandten Maximalbelastung) die Verschiebung des Bildes einer 3 m entfernten Skala im Fadenkreuz des Fernrohres noch nicht  $\frac{1}{10}$  mm; die Stabilität kann mithin als hinreichend gelten. Die Löcher  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , denen an den anderen

Leisten ähnlich gelegene entsprechen, dienen dazu, den Abstand der Lager  $L_1, L_2$  zu variieren.

#### Die Dimensionsbestimmungen.

a) Die Länge der Stäbe bzw. der Abstand der Lager  $L_1, L_2$  (Fig. 4) wurde mit freiem Auge durch Auflegen eines prismatischen Präzisionsmaßstabes gemessen; die hierbei zu erreichende Genauigkeit (durch Schätzung auf  $\frac{1}{10}$  mm) ist bei dem meist benutzten Lagerabstand von ca. 150 mm und mehr als ausreichend zu erachten.

b) Die Breite der Stäbe wurde mit einem Kalibermaßstab (Ablesung auf  $\frac{1}{10}$  mm) gemessen; wegen der Form der Stäbe (vgl. Fig. 3) wird die Dimension auf diese Weise etwas zu groß gefunden werden, da es in der Natur des gewöhnlichen Kaliber(Schnabel)-maßes liegt, immer nur die größte Dimension zu geben; der Fehler dürfte jedoch wohl wesentlich unter 1 Proz. bleiben.

c) Der Dickenmessung wurde, da diese Größe in der dritten Potenz in die bekannte Formel für den Elastizitätsmodul eingeht, eine sehr große Sorgfalt zugewendet; die Dicke wurde an 5 verschiedenen Querschnitten, die in gleichen Abständen auf der benutzten Länge verteilt waren, je an zwei Punkten ( $\delta$  und  $\epsilon$ ), Fig. 3 gemessen; diese Punkte wurden so gewählt, daß sie ungefähr der mittleren Dicke (im Querschnitt) entsprachen; aus diesen so erhaltenen 20 Werten, jede Messung wurde doppelt gemacht, wurde dann (als definitiver Wert) das Mittel genommen.



Die Messung selbst geschah vermitteltst eines Spiegelfühlhebels, wie ich ihn für diese Zwecke seinerzeit während meiner Versuche 1882/83 in Labrador konstruiert und l. c. p. 439 beschrieben habe; drei Nähnadelspitzen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (vgl. Fig. 5) sind in Dreieckform in ein Blech gelötet;  $\alpha$ ,  $\beta$  stehen fest in einer Nute  $n^1$  (Fig. 5) oder  $n$  (Fig. 4) und bilden mit ihren Spitzen die Drehungsachse, die selbst ungefähr in der Verlängerung der Reflexionsebene des Spiegels  $Sp$  liegt. Später sah ich<sup>2)</sup>, daß bereits im Jahre 1875 Hr. Cornu einen ähnlichen (er wird als Reflexionshebel bezeichnet) beschrieben hat.<sup>3)</sup> Die Spitze  $\gamma$  des Fühlhebels war für die Dickenmessung kugelförmig ausgebildet (Fig. 6). Der durch die Kugelform

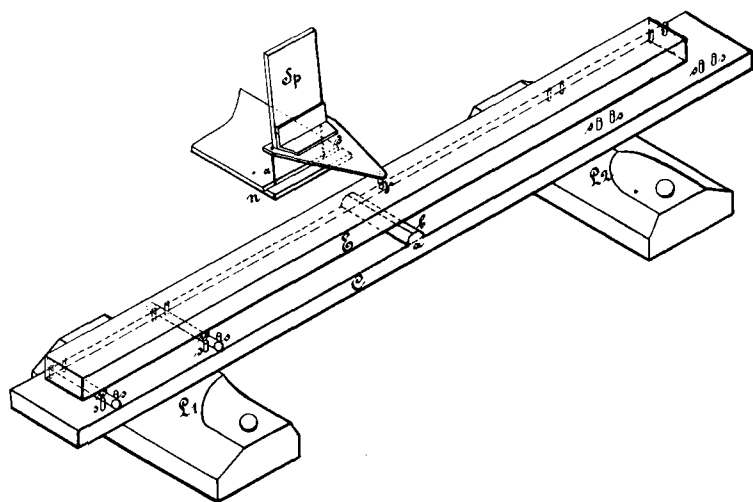


Fig. 6.

( $d = 2$  mm) bei der unvermeidlichen Schiefstellung bedingte Fehler ist so gering, daß er erst in höheren Dezimalen eingeht, also für die vorliegenden Zwecke zu vernachlässigen ist. Die Eichung der Ausschläge des Fühlhebels (gemessen mit Fernrohr und Skala) geschah durch Johanssonsche End-

1) Die durch den Stoß einer Shapingmaschine in einer Messingplatte hergestellt, eventuell etwas nachgeschliffen ist.

2) J. Violle, Lehrb. d. Physik. Deutsch. Ausg. 1. I. p. 332. 1892.

3) A. Cornu, Journ. de Physique 4. p. 7. 1875.

maße; es sind dies nach besonderem Verfahren gehärtete, von der Firma C. E. Johansson in Eskilstuna (Schweden) hergestellte parallelepipedische Stahlstücke, deren eine Dimension dem auf ihnen angegebenen Nennwert auf  $\pm 0,001$  mm recht genau entspricht. Diese Endmaße dürften auch im wissenschaftlichen Betrieb ein wichtiges und bequemes Hilfsmittel für genaue Dimensionsmessungen abgeben. Die Ebenheit der Flächen und ihre Planparallelität ist so groß, daß die oben erwähnte Genauigkeit auch beim Übereinanderschichten mehrerer dieser Endmaße noch besteht.<sup>1)</sup>

Die Dickenmessung selbst, wie natürlich auch die eben erwähnten Eichungen wurden auf dem Durchbiegungsapparat selbst vorgenommen in der Weise, daß auf die Lager eine 10 mm dicke Messungsschiene *C* (Fig. 6) gelegt wurde, diese trug in ihrer Mitte einen quer herüber angelöteten Halbzylinder, an den bei *b* wieder eine kleine (3,5 mm breite) Ebene angeschliffen war; diese diente dem zu messenden Stab als Auflage, außerdem stützte er sich auf Walzen von gleicher Dicke *a b* (von 3,9 mm), die durch Stäbchen  $s_1 s_2$  an ihren Orten gehalten wurden; selbstverständlich wurde die Unterstützung des Stabes immer so eingerichtet, daß man die Gewißheit hatte, daß er auf *C* satt auflag. Über der Mitte der erwähnten Fläche von *C* griff dann die vordere Spitze  $\gamma$  des Fühlhebels an, dessen zwei andere Spitzen  $\alpha, \beta$  in der Lagernute ruhten (vgl. Fig. 5). Zunächst wurde dann die Eichung durch ein oder mehrere passende Stücke der Johanssonschen Endmaße, deren Dicke ungefähr der Stabdicke entsprach, ausgeführt, dann wurde der Eisstab dazwischen gebracht und wie erwähnt, an fünf verschiedenen Querschnitten in je zwei Punkten gemessen.

---

1) Ich hatte einen Satz Endmaße nach Art der Gewichtssätze zusammengestellt; nämlich

3	Stück à	1 mm
1	" "	2 "
1	" "	5 "
1	" "	10 "
1	" "	20 "

Durch Übereinanderschichten ließen sich dann von Millimeter zu Millimeter fortschreitende Dicken bis zu 40 mm herstellen; soweit meine Kontrollmessungen reichen, ist die Genauigkeitsangabe der Fabrik zutreffend.

## Messung des Pfeils der Biegung.

Da, wie schon mehrfach erwähnt, die Durchbiegungen der Stäbe der geringen relativen Festigkeit des Eisens wegen (ungefähr nur  $\frac{1}{100}$  der des Eisens entsprechend) nur gering sein dürfen, so ist bei einer anzustrebenden Genauigkeit dieser Größe von 1 Proz. eine Methode notwendig, welche die Tausendstelmillimeter der Biegung noch zu messen erlaubt.

Die Anwendung des Mikroskops mit Mikrometer ist nicht zu empfehlen, da sich hierbei der Beobachter in unmittelbarer Nähe des Eisstabes aufhalten muß und dadurch leicht unkontrollierbare Änderungen der Temperatur des Stabes hervorgerufen werden können. Es wurde deshalb auch hierfür der Spiegelfühlhebel — der ja seinerzeit von mir eigentlich zu diesem Zweck konstruiert war — gewählt. Die Eichung geschah auch durch ein Johanssonsches Endmaß von 1 mm Dicke, das auf einen Stab aus Spiegelglas, der auf den Lagern  $L_1$   $L_2$  ruhte, gelegt wurde. Die Ausschläge des Spiegelfühlhebels sind also damit geeicht.

Die Fehlerquellen, mit denen man hierbei zu rechnen hat, sind die folgenden. Um die gewünschte Genauigkeit der Messung von  $\frac{1}{1000}$  mm zu haben, dürfen die Drehpunkte, also die Fußpunkte des Fühlhebels  $\alpha$ ,  $\beta$ , während der Messung keine Verschiebung in Höhe erleiden. Die Nute, in der sie ruhen, wird natürlich keine genaue Linie, sondern eine kleine Fläche sein und bei irgend einer Verschiebung der Spitzen  $\alpha$ ,  $\beta$  wird eine Höhenänderung, wenn die kleine Fläche nicht eben ist, auftreten können. Deshalb wurde bei jeder Beobachtung, um über die mögliche Größe dieser Fehler ungefähr orientiert zu sein, eine kleine Verrückung des Hebels (durch seitliches Anstoßen) bewirkt und so die Beobachtung mehrfach wiederholt. Hierfür ein Beispiel einer solchen Eichung: Verzeichnet sind die Einstellungen der Skala im Fadenkreuz des Fernrohres (ca. 50fache Vergrößerung); der Abstand der Skala betrug ca. 2500 mm.

Nullpunkt	1 mm Endmaß	Differenz
533,3	652,7	119,4
533,25	652,6	119,35
532,9	651,9	119,0
		Mittel: 119,25

Also 1 mm Verschiebung der Meßspitze  $\gamma$  ruft 119,25 ps. Skalenverschiebung hervor. Die Unsicherheit beträgt mithin bei dem immerhin primitiven Apparat nur ca.  $\frac{2}{1000}$  mm. Die zu beobachtenden Pfeile der Biegungen lagen zwischen den Werten von rund 0,02 bis 0,15 mm; trotz der scheinbar großen Empfindlichkeit können also doch bei den kleineren Biegungen (bei Benutzung *dieses* Fühlhebels) Unsicherheiten bis zu 10 Proz. auftreten.

Eine andere Fehlerquelle bildet die bei jeder Beanspruchung des Eisstabes auftretende ständige Deformation, worauf ich schon in meiner ersten Veröffentlichung l. c. p. 441 hingewiesen habe. Bei angreifender Belastung nämlich wandert das Skalenbild kontinuierlich durch das Fadenkreuz, einer kontinuierlich verlaufenden ständigen weiteren Biegung entsprechend; deshalb ist von vornherein die Bestimmung der Biegung bei der *Belastung* zu verwerfen; dieselbe kann nur bei der *Entlastung* mit der nötigen Genauigkeit bestimmt werden (l. c. p. 441), aber auch hierbei treten Schwierigkeiten auf, über die an derselben Stelle meiner Arbeit berichtet ist.

Es mag hier die Untersuchung an einem der Stäbe etwas ausführlicher, um einen Begriff von der Genauigkeit zu geben, in einer Tabelle mitgeteilt werden. Bei dem angewandten Fühlhebel entsprach 1 mm 238,4 Skt.

Tabelle 1.

Belastung in kg	0,5346	0,7846	1,0346	1,2846	1,5346
Pfeil der } I	8,4	12,5	16,5	20,55	24,05
Biegung in ps. } II	7,95	11,35	15,45	19,20	23,80
Mittel aus I und II	8,175	11,925	15,975	19,875	23,925
Pfeil der } I	0,03525	0,0524	0,0692	0,0862	0,1060
Biegung in mm } II	0,0333	0,0476	0,0648	0,0806	0,0998
Mittel aus I und II	0,0343	0,05005	0,0670	0,0834	0,103
$P/s$ (kg/mm) I	15,15	14,95	14,94	14,90	15,22
$P/s$ (kg/mm) II	16,02	16,45	15,96	15,93	15,35
Mittel aus I und II	15,60	15,70	15,45	15,41	15,28
$E$	631,5	635,5	625,4	623,8	618,5

Mittel:  $626,9 \pm 2,9$

Die Versuche wurden so ausgeführt, daß mit der kleinsten Belastung 0,5 kg (bzw. 0,25 kg bei anderen Stäben) begonnen und jede folgende um 0,25 kg größer gemacht wurde, bis zu dem Punkt, bei welchem die stärker werdende permanente Deformation bzw. die auftretenden Nachwirkungserscheinungen Zweifel an der Zuverlässigkeit aufkommen ließen. So wurden bei diesem (eben erwähnten) Stab auch bei höheren Belastungen — bis 2,5 kg (+ 0,0346 kg Wagschalengewicht) Messungen ausgeführt, die für  $P/s$  14,98, 15,51, 15,93, 15,76, 14,60 ergaben, die mir jedoch aus den angegebenen Gründen für die Berechnung nicht mehr verbürgt genug erschienen; nachdem so bei wachsender Belastung beobachtet war, wurde ebenso bei abnehmender Belastung die Biegung bestimmt. Bei Belastung von rund 3 kg trat Bruch ein, was einer relativen Festigkeit von rund

$$0,33 \text{ kg/mm}^2$$

entsprechen würde.

Es mag noch besonders darauf hingewiesen werden, daß die Zahlen der mit I bezeichneten Reihen in obiger Tabelle bei ansteigender Belastung, die mit II bei absteigender Belastung gefunden sind und daß letztere den Pfeil der Biegung durchgehend kleiner ergeben; dies war bei allen Stäben der Fall.<sup>1)</sup> Es mögen jetzt in abgekürzter Form die übrigen Messungen folgen; hierbei sind überall die Mittel aus den Reihen I und II genommen.

Tabelle 2.

I. Stäbe, bei denen die Dicke senkrecht zur Gefrierfläche liegt.

1.  $l = 149,2 \text{ mm}$ ,  $b = 18,1 \text{ mm}$ ,  $d = 9,947 \text{ mm}$ .

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 116,65 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,5346	1,0346	1,5346	2,0346	2,5346
Pfeil der } in ps. (Mittel)	4,835	9,415	14,00	18,68	23,00
Biegung } in mm	0,0415	0,08085	0,1201	0,1603	0,1972
$P/s$ (kg/mm)	12,90	12,795	12,775	12,69	12,84
$E$	601,3	596,4	595,45	591,5	598,5

Mittel:  $E = 596,6 \pm 1,6$  (29 Messungen bei fünf versch. Belastungen).

1) Vgl. A. Winkelmann, Handbuch 1. p. 570 über die Wiederholungen von Elastizitätsmessungen und die zuverlässigsten Werte.

2.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,32$  mm,  $d = 10,2975$  mm.

Bieigungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,46 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,2846	0,5345	0,7846	1,0346	1,2846
Pfeil der } in ps. (Mittel)	1,925	3,70	5,425	7,20	8,875
Biegung } in mm	0,0161	0,0310	0,0454	0,0603	0,0743
$P/s$ (kg/mm)	17,67	17,25	17,25	17,14	17,27
$E$	661,2	645,5	641,4	646,2	644,8

Belastung in kg	1,5346	1,7846	2,0346
Pfeil der } in ps. (Mittel)	10,625	12,15	14,05
Biegung } in mm	0,0890	0,1017	0,1177
$P/s$ (kg/mm)	17,24	17,55	17,27
$E$	656,7	646,2	645,5

Mittel:  $E = 648,4 \pm 2,4$  (28 Messungen bei acht versch. Belastungen).

3.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,10$  mm,  $d = 8,772$  mm.

Bieigungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,46 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,2846	0,5346	0,7846
Pfeil der } in ps. (Mittel)	3,325	6,225	9,15
Biegung } in mm	0,0279	0,0522	0,0767
$P/s$ (kg/mm)	10,16	10,24	10,23
$E$	621,75	626,6	626,0

Belastung in kg	1,0346	1,2846	1,5346
Pfeil der } in ps. (Mittel)	12,10	15,00	18,50
Biegung } in mm	0,1014	0,1257	0,1550
$P/s$ (kg/mm)	10,20	10,21	9,91
$E$	624,2	624,8	606,45

Mittel:  $E = 621,6 \pm 3,1$  (22 Messungen bei sechs versch. Belastungen).

II. Stäbe, bei denen  $l$  senkrecht zur Gefrierfläche liegt.

1.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,28$  mm,  $d = 8,005$  mm.

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,10 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,5346	1,0346	1,5346*
Pfeil der } in ps. (Mittel)	8,4	16,55	24,6
Biegung } in mm	0,0706	0,1389	0,2063
$P/s$ (kg/mm)	7,58	7,44	7,435
$E$	605,1	593,9	593,5

Mittel:  $E = 597,5 \pm 3,8$  (acht Messungen bei drei versch. Belastungen).

\* Stab zerbricht bei 2 kg Belastung.

2.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,34$  mm,  $d = 7,394$  mm.

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,00 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,2846	0,5346	1,0346*
Pfeil der } in ps. (Mittel)	4,4	10,0	19,4
Biegung } in mm	0,0370	0,08405	0,1630
$P/s$ (kg/mm)	6,335	6,37	6,34
$E$	639,7	643,3	640,3

Mittel:  $E = 641,1 \pm 1,1$  (sechs Messungen bei drei versch. Belastungen).

\* Stab zerbricht bei 1,5 kg Belastung.

3.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,64$  mm,  $d = 9,854$  mm.

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,25 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,5346	0,7846	1,0346	1,2846
Pfeil der } in ps. (Mittel)	4,65	6,72	8,73	10,7
Biegung } in mm	0,0390	0,05638	0,07320	0,08970
$P/s$ (kg/mm)	13,72	13,92	14,11	14,33
$E$	576,8	585,2	593,2	602,45

Mittel:  $E = 589,4 \pm 5,5$  (16 Messungen bei vier versch. Belastungen).

III. Stäbe, bei denen  $b$  senkrecht zur Gefrierfläche liegt.1.  $l = 149,2$  mm,  $b = 18,86$  mm,  $d = 8,6745$  mm.

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 119,46 ps. Skalenausschlag.

Belastung in kg	0,2846	0,5346	0,7846	1,0346	1,2846
Pfeil der Biegung } in ps. (Mittel)	3,30	6,31	9,14	12,03	15,35
in mm	0,02765	0,0528	0,0766	0,1007	0,1285
$P/s$ (kg mm)	10,30	10,11	10,50	9,95	9,98
$E$	694,7	681,9	708,2	671,1	673,15

Mittel:  $E = 685,8 \pm 7,0$  (29 Messungen bei fünf versch. Belastungen).2.  $l = 149,2$  mm,  $b = 20,70$  mm,  $d = 9,970$  mm.

Biegungsbeobachtung: 1 mm gibt 238,4 ps. Skalenausschlag.

(Ist schon in Tab. 1 angegeben.)

Mittel:  $E = 626,9 \pm 2,9$  (20 Messungen bei fünf versch. Belastungen).

## Hieraus ergeben sich folgende Schlußwerte:

I. Stäbe, bei denen  $d \perp$  zur Gefrierfläche lag:

$E$	Bemerkungen	Temperatur
$596,6 \pm 1,6$	29 Messung. b. 5 versch. Belastungen	$- 7,8^{\circ}$
$648,4 \pm 2,4$	28   "   " 8   "   "	$- 7,2$
$621,6 \pm 3,1$	22   "   " 6   "   "	$- 7,2$

Mittel 622,2

II. Stäbe, bei denen  $l \perp$  zur Gefrierfläche lag.

$597,5 \pm 3,8$	8 Messung. b. 3 versch. Belastungen	$- 7,8^{\circ}$
$641,1 \pm 1,1$	6   "   " 3   "   "	$- 7,6$
$589,4 \pm 5,5$	16   "   " 4   "   "	$- 6,5$

Mittel 609,3

III. Stäbe, bei denen  $b \perp$  zur Gefrierfläche lag.

$685,8 \pm 7,0$	29 Messung. b. 5 versch. Belastungen	$- 7,3^{\circ}$
$629,9 \pm 2,9$	20   "   " 5   "   "	$- 6,5$

Mittel 656,3

Ein dritter Stab dieser Sorte konnte, da mein Urlaub abgelaufen, nicht mehr untersucht werden.



Als Generalmittel ergibt sich

$$E = 625,9 \text{ kg/mm}^2 \text{ für } t_m = -7,2,$$

ein Wert, der dem bei meinen ersten Untersuchungen ermittelten ziemlich nahe kommt.

Man möchte geneigt sein, aus den angegebenen Zahlen auch eine Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Orientierung des Stabes gegen die Gefrierfläche herauszulesen; obgleich ich natürlich ebenfalls von dem wahrscheinlichen Bestehen einer solchen überzeugt bin, so glaube ich doch nicht, daß aus diesen Beobachtungen schon auf eine solche mit Sicherheit geschlossen bzw. ihre Größe angegeben werden könnte. Denn die für die einzelnen in derselben Richtung orientierten Stäbe erhaltenen Zahlen weichen so stark voneinander ab, daß sie sogar mit denen anderer Orientierung besser übereinstimmen. Dieselbe Beobachtung machte ich bei meinen Messungen in Labrador, die mich s. Z. veranlaßten, die meisten Beobachtungsreihen zu streichen; damals schob ich diese großen Abweichungen auf meine sehr primitiven Hilfsmittel und die verschiedenen zum Teil großen zeitlichen Differenzen zwischen den Dimensions- und den Biegunismessungen, während welcher unkontrollierte Veränderungen der Querschnittsgrößen wahrscheinlich aufgetreten waren. Ich hoffte bei diesen jetzigen, neuen, mit den besten Hilfsmitteln ausgeführten Versuchen nun übereinstimmendere Werte zu erhalten und war um so erstaunter, daß auch diesmal wiederum bei großer *innerer* Übereinstimmung der Werte für den *einzelnen* Stab die Größen des Moduls sich von Stab zu Stab so beträchtlich änderten. Der größte Wert der Abweichungen für den einzelnen Stab beträgt rund 1 Proz., dagegen weichen die Werte für die Stäbe gleicher Orientierung ganz bedeutend voneinander ab — es kommen Unterschiede über 10 Proz. vor.

Es wurde auch noch von mir versucht, diese Frage direkt zu entscheiden, indem ich einen Vierkantstab herstellte, d. h. einen Stab, dessen Breite und Dicke ungefähr dieselben waren — die beide Dimensionen betragen 15,94 mm und 14,78 mm. — Der Stab wurde nun einmal so gebogen, daß die Durchbiegung

- a)  $\perp$  zur Gefrierfläche,
- b)  $\perp$  zu ihrer Normale

erfolgte. Er entspricht also einmal den Stäben I, das andere Mal den mit III bezeichneten. Hier unterschied sich der eine Wert von  $E$  von dem anderen nur um sechs Einheiten (also 1 Proz.); die Werte jedes Stabes waren erhalten aus je 20 Messungen bei je sechs verschiedenen Belastungen, wobei die mittleren Fehler vier und zwei Einheiten betrug.

Wie man sieht, ergibt sich hieraus ein Unterschied entsprechend der Orientierung gegen die Normale zur Gefrierfläche nicht.

Es muß mithin eine Art systematischen Fehlers vorliegen, wenn anders eben eine solche Abhängigkeit existiert. Man könnte an fehlerhafte Orientierung der Stäbe denken; doch kann dieser Fehler nicht groß sein, da man aus der Lage der Luftkanäle, die immer senkrecht zur Gefrierfläche stehen, sofort die Orientierung des Stabes bestimmen kann. Es könnten ferner auch Fehler in den Dimensionsbestimmungen vorliegen, doch bin ich überzeugt, daß solche in derartiger Größe nicht vorgekommen sind.

Die beobachteten Abweichungen müssen also andere Ursachen haben. Hier scheinen mir nun zwei andere Umstände möglicherweise von Bedeutung zu sein.

In seiner natürlichen Lage wird die auf dem flüssigen Wasser ruhende Fläche des Eises stets die Temperatur von ca.  $0^{\circ}$  haben. Der herausgenommene Eisblock, der frei gelagert war und zwar mit der luftblasenfreien Seite nach oben (vgl. Fig. 2) wird während der Nacht die niederen Nachttemperaturen annehmen, event. sich durch Ausstrahlung noch weiter abkühlen, während des Tages aber durch die Sonnenstrahlung auf höhere Temperaturen gebracht werden. Die Nachttemperaturen betrugen ca.  $-15^{\circ}$ , während unter Tage die Schmelztemperatur wohl erreicht sein mag.<sup>1)</sup> Daß tatsächlich hierdurch im Eisblock innere Spannungen auftraten, folgt daraus, daß nach 4—5tägigem Lagern (der Dauer meines dortigen Aufenthaltes) der Block von vielen Sprüngen durchzogen war.

---

1) Es fand tatsächlich in der Mittagszeit unter Einwirkung der Sonnenstrahlung eine Ansammlung von Schmelzwasser unter dem Eisblock statt.

Ein weiterer Punkt ist folgender. Wie in der Einleitung angegeben, wurden die Stäbe nach vorläufiger Bearbeitung mit Schaber, Raspel und Feile zuletzt auf einer (zimmerwarmen) Platte eben geschliffen; hierbei werden sie sich jedenfalls bis auf die Temperatur von  $0^{\circ}$  erwärmen; wenn sie sich dann wieder bis auf die Gebrauchstemperatur ca.  $-7^{\circ}$  abkühlen, so wäre vielleicht die Möglichkeit vorhanden, daß sich beim Abkühlen ihre Kristallstruktur ändert und zwar bei den verschiedenen Stäben etwa in verschiedenem Maß.

Zusammenfassend käme man zu folgendem Resultat. Der *mittlere* Elastizitätsmodul für *beliebig* orientiertes Eis wäre nach diesen, auf dem Berninapafß angestellten Versuchen bei einer mittleren Temperatur von rund  $-7^{\circ}$  C.

$$626 \text{ kg/mm}^2. ^1)$$

Ich muß hiernach an der Richtigkeit meiner früheren Resultate festhalten! Aufgabe erneuter Untersuchung wird es sein, festzustellen, ob und wodurch der in verschiedenen Richtungen gegen die Hauptachse zu vermutende Unterschied des Moduls verschleiert wird.

Stuttgart, Physik. Institut der Kgl. Techn. Hochschule,  
April 1913.

---

1) Benutzt man von den gemessenen Biegungen nur die in II. Reihe (Tab. 1) aufgeführten, so erhält man einen um ungefähr 3 Proz. größeren Wert, also  $E = 644$ , mithin den gleichen Wert, den die Freiburger Beobachtungen ergaben; ein als Wiederholung (vgl. oben p. 721, Anm.) möglicherweise richtigeres Resultat.

(Eingegangen 18. April 1913.)