

**5. Die Gesetze der Molekularströmung
und der inneren Reibungsströmung der Gase
durch Röhren;
von Martin Knudsen.**

1 Einleitung.

Für die Strömung der Gase durch lange, enge Röhren ist es, wie bekannt, möglich, Poisseuilles Gesetz zu verwenden, wenn die mittlere Weglänge der Gasmoleküle im Vergleich mit dem Durchmesser der Röhre verschwindend klein ist. Aus den Versuchen, welche Kundt und Warburg¹⁾ und später Warburg²⁾ ausgeführt haben, geht hervor, daß Poisseuilles Gesetz nicht mit voller Genauigkeit gilt, wenn die Röhre so eng ist, daß die mittlere Weglänge der Gasmoleküle im Vergleich mit dem Durchmesser der Röhre nicht als verschwindend klein betrachtet werden kann. Die Abweichungen vom Gesetze gaben Anlaß zur Überführung der Begriffe von äußerer Reibung und Gleitung auf die Bewegung eines Gases längs einer festen Wand; die Gleitungserscheinung ist aber doch nicht so eingehend untersucht worden, daß diese Untersuchungen zu viel mehr als zu Korrekturen geführt haben, wenn man aus Strömungsversuchen oder Versuchen mit schwingenden Platten den Koeffizienten der inneren Reibung berechnete. Der einzige, der soviel mir bekannt, in bezug auf die Strömung von Gasen durch sehr enge Kanäle entscheidende Versuche ausgeführt hat, ist C. Christiansen³⁾, welcher zeigte, daß Poisseuilles Gesetz, für die Strömung zwischen parallelen Wänden modifiziert, seine Gültigkeit verliert, wenn der Abstand der Wände sehr klein gemacht wird. Christiansen wies außerdem nach, daß das Gesetz für die Strömung dann mit Grahams Gesetz für die Diffusion von Gasen durch Körper wie künstlichen Graphit stimmt, indem

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337, 525. 1875.

2) E. Warburg, Pogg. Ann. 159. p. 399. 1876.

3) C. Christiansen, Wied. Ann. 41. p. 565. 1890.

es sich zeigte, daß die Volumina von verschiedenen Gasen, die in gleich langen Zeiten zwischen den Wänden passieren, sich umgekehrt wie die Quadratwurzel vom spezifischen Gewicht der Gase verhalten. Aus seinen Versuchen zieht Christiansen den Schluß, daß die Atmolyse durch poröse Körper wesentlich als eine rein mechanische Erscheinung zu deuten ist, daß es einen kontinuierlichen Übergang von Transpiration zur Diffusion gibt und daß gemischte Gase sich teilweise scheiden, wenn sie durch recht enge Spalten oder Röhren strömen.

Es soll nun meine Aufgabe sein, zu finden, wie die atmolytische oder molekulare Strömung von den Dimensionen der Röhre und den physikalischen Eigenschaften der Gase abhängt, ferner die Gesetze zu finden für den Übergang von der Strömung, wo die innere Reibung vorherrschend ist (Poisseuilles Gesetz), zur molekularen Strömung.

2. Zusammenfassung der Resultate.

Als Resultat der Untersuchungen kann hervorgehoben werden, daß man bei Strömung durch einen Kanal, dessen Weite oder Breite im Vergleich mit der Länge des Kanales und mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle verschwindend klein ist, eine molekulare Strömung hat, für welche folgendes Gesetz gilt:

$$Q_t = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{p_1 - p_2}{W}.$$

Hier bedeutet Q_t die in der Zeiteinheit durchströmende Gasmenge, durch das Produkt von Volumen und Druck bei der Temperatur der Röhrenwände gemessen, ϱ_1 das spezifische Gewicht des Gases bei dem Druck 1 Dyn/cm² und bei der Temperatur der Röhre. Die Strömung geht vom Druck p_1 bis zum Druck p_2 vor sich. Absolute Einheiten werden benutzt. Die Größe W (der Widerstand des Strömungskanales) hängt allein von den Dimensionen der Röhre ab und kann so ausgedrückt werden

$$W = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} \int_0^L \frac{dl}{A^2},$$

wo L die Länge der Röhre ist; o ist der Umkreis und A das Areal eines Normalschnittes in der Entfernung l vom einen Ende des Kanales. Dieser Ausdruck des Widerstandes gilt für zylindrische Röhren mit beliebiger Querschnittsform und kann unter gewissen Voraussetzungen auch bei anderen Röhrenformen verwendet werden. Auf eine zylindrische Röhre mit kreisförmigem Querschnitt mit Radius R verwendet, gibt diese Formel, indem

$$W = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{L}{R^3}$$

ist,

$$Q_t = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} R^3 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{\varrho_0}} \frac{p_1 - p_2}{L},$$

wo α der Ausdehnungskoeffizient des Gases und ϱ_0 das spezifische Gewicht des Gases bei 0° und 1 Dyn/cm^2 ist.

Das Gesetz ist durch eine einfache theoretische Betrachtung gefunden, die von Maxwells Geschwindigkeitsverteilungsgesetz samt einer Theorie von der Wechselwirkung zwischen Gasmolekülen und einer festen Wand ausgeht. Diese neue Theorie, die im folgenden begründet werden soll und vielleicht für künftige Untersuchungen von Bedeutung werden wird, sagt, daß ein Gasmolekül, wenn es eine feste Wand trifft, in einer Richtung zurückfliegt, die vollständig unabhängig von der Richtung ist, in welcher es sich der Wand nähert, samt daß eine große Anzahl von Molekülen, wenn sie ein Flächenelement einer festen Wand treffen, nach dem für die Ausstrahlung glühender fester Körper bekannten Cos-Gesetz wieder herausgesendet werden.

Das theoretisch gefundene Gesetz für die Gasmenge, die durch eine Röhre hindurchströmt, ist durch Versuche mit kreisförmigen zylindrischen Röhren vollkommen bestätigt worden. Bei den Versuchen wurde die mittlere Weglänge der Moleküle von Größen ca. 225 mal so klein bis zu Größen ca. 6000 mal so groß als der Radius der Röhre variiert.

Man sieht, daß das gefundene Gesetz für die molekulare Strömung ein ganz anderes als Poisseuilles Gesetz ist. So ergibt es beim niedrigsten mittleren Druck, bei welchem Messungen vorgenommen sind, für Kohlensäure einen etwa 50000 mal größeren Wert für die durchströmende Gasmenge, als man durch Verwendung von Poisseuilles Gesetz ohne Gleitungskorrektion finden würde.

Ist die mittlere Weglänge der Gasmoleküle im Vergleich mit dem Verhältnis zwischen dem Areal und dem Umkreis des Querschnittes der Röhre nicht sehr groß oder sehr klein, gilt ein komplizierteres Gesetz, das sowohl Pisseuilles Gesetz wie das Gesetz für die molekulare Strömung in sich einschließt. Es soll gezeigt werden, daß die durchströmende Gasmenge, wenn bei kreisförmigen Röhren durch Steigerung des Druckes die mittlere Weglänge verkleinert wird, für einen gegebenen Druckfall abnimmt bis zu einem Minimum, welches für jedes Gas und jede Röhre erreicht wird, wenn die mittlere Weglänge 5,0mal so groß als der Röhrenradius geworden ist. Die durchströmende Gasmenge ist für die rein molekulare Strömung 5 Proz. größer als für dieses Minimum. Bei weiterer Steigerung des Druckes nimmt die durchströmende Gasmenge wieder zu. Es zeigt sich, daß, wenn die Strömung beim mittleren Druck p Dyn/cm² vor sich geht, für jeden Wert von p mit hinlänglicher Annäherung folgende allgemeine Formel für kreisförmige zylindrische Röhren gilt, indem man absolute Einheiten benutzt:

$$(13) \quad Q_t = \left(ap + b \frac{1 + c_1 p}{1 + c_2 p} \right) (p_1 - p_2),$$

wo a der Pisseuillesche Ausdruck

$$a = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L}$$

ist, worin η den Koeffizient der inneren Reibung bei der gegenwärtigen Temperatur, b den Koeffizient der molekularen Strömung bedeuten.

$$b = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{q_1}} \frac{R^3}{L},$$

$$c_1 = 2,00 \frac{\sqrt{q_1}}{\eta} R, \quad c_2 = 2,47 \frac{\sqrt{q_1}}{\eta} R.$$

Man wird sehen, daß die ausgeführten Versuche nebenbei eine experimentelle Bestätigung, und zwar so weit ich sehen kann, die einzige des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes Maxwells und meiner oben angeführten Theorie von der Wechselwirkung zwischen Luftmolekülen und einer festen Wand abgeben. Die Messungen beweisen die Brauchbarkeit von Mc Leods Manometer, sowie die Gültigkeit von Mariottes und Gay-Lussacs Gesetzen bei niedrigen Drucken. Es kann bemerkt werden, daß die molekulare Strömung zur Bestim-

mung sehr kleiner Druckunterschiede brauchbar ist (z. B. der Dampfdruck des Quecksilbers und anderer Körper bei niedrigen Temperaturen), und wird auch über Dissoziationserscheinungen Aufschlüsse geben können.

3. Die Meßapparate und ihre Anwendung.

Für die Strömungsversuche wurden ausschließlich enge Glasröhren benutzt, deren Dimensionen mit ziemlich großer Genauigkeit bestimmt werden konnten. Zwei Glasbehälter, in welchen die Drucke, jeder für sich, durch Mc Leods Gauge bestimmt werden konnten, wurden mit der zu untersuchenden Röhre miteinander verbunden. Besteht ein Druckunterschied in den beiden Behältern, so strömt das Gas durch die Verbindungsröhre hindurch, und man hat dann nur zu messen, wie sich der Unterschied des Druckes während der Strömung verändert, um daraus zu berechnen, wieviel Gas in einer gewissen Zeit bei einem gegebenen konstanten Unterschied des Druckes durch die Röhre hindurchströmen würde, wenn das Volumen jeden Behälters bekannt ist.

Es wurde zunächst ein Apparat benutzt, worauf die Strömungsröhre durch Kautschukschläuche und Quecksilberverschlüsse angebracht werden konnte. Es zeigte sich, daß diese Verbindung nicht dicht genug war, und da der Apparat mit mehreren Hähnen versehen war, die auch Undichtigkeit veranlassen konnten, wurde ein neuer Apparat konstruiert, welcher nur mit einem Hahn versehen war, und dessen Diffusionsröhre durch Anblasung befestigt wurde.

Da ich nie etwas davon gehört hatte, daß Mc Leods Gauge zu genauen Druckbestimmungen verwendet worden ist, und da aus der Literatur hervorgeht, daß Mariottes Gesetz bei kleinen Drucken seine Gültigkeit verliert, hatte ich nicht mehr, als eine ziemlich grobe Annäherung an die gesuchte Gesetzmäßigkeit der Strömung des Gases bei niedrigen Drucken zu finden erwartet. Im Laufe der Arbeit zeigte es sich indessen, daß der Gaugeapparat sehr wohl zu genauen Bestimmungen benutzt werden kann, indem die Messungen nicht die geringste Andeutung von Abweichungen von Mariottes Gesetz gaben, weder für Wasserstoff, noch Sauerstoff, noch Kohlensäure bis zu einem Druck von $\frac{1}{10\,000}$ mm, dem niedrigsten,

mit der Genauigkeit von einigen Prozent im Apparate meßbaren Drucke. Es findet sich auch nicht die geringste Andeutung von Unsicherheit wegen etwaiger Gaskondensation am Glase. Die Fehler meiner Gaugemessungen rühren hauptsächlich von der Unsicherheit der Kapillardepression des Quecksilbers in der engen Gaugeröhre und von Unreinheiten der Gase her. Da ich nur allmählich darüber klar wurde, daß der Gaugeapparat genaue Druckbestimmungen gestattete, habe ich bei den Versuchen mit dem ersten Apparat und bei den ersten Versuchen mit dem zweiten Apparat nicht viel Gewicht darauf gelegt, die Temperaturen der Strömungsröhre oder der Gasbehälter konstant zu halten, und kleinere Fehler können auch dadurch entstanden sein, daß das Volumen der beiden Behälter während den ersten Versuchen nicht genau unverändert gehalten wurde.

Eine Reihe von Bestimmungen, die mit dem ersten Apparat mit Röhren von verschiedener Länge und verschiedenem Radius und mit verschiedenen Gasen bei ungleichen Temperaturen unternommen wurden, ergaben eine so gute Übereinstimmung mit dem theoretisch aufgestellten Gesetze, daß die Abweichungen durch Beobachtungsfehler erklärt werden konnten. Da die Beobachtungen mit dem zweiten Apparat mit etwas größerer Genauigkeit gemacht werden konnten, und da der Apparat dazu eingerichtet war, weit größere Drucke zu messen als der erste Apparat, soll dessen Einrichtung nicht näher beschrieben werden. Die mitgeteilten Versuchsergebnisse sind, mit Ausnahme der Versuche über den Einfluß der Temperatur auf die molekulare Strömung, mit dem zweiten Apparat gewonnen.

Die Fig. 1 zeigt eine schematische Darstellung des Meßapparates. Die Glasbehälter V_1 und V_2 waren jeder mit seiner Gauge G_1 und G_2 verbunden. Die zu untersuchende Röhre wurde dem Apparate bei a_1 und a_2 angeblasen. Die Röhren g_1 , g_2 , g_3 und g_4 waren über einen Barometerstand lang und durch Kautschukschläuche mit Quecksilberbehältern verbunden, die gehoben und gesenkt werden konnten. In den obersten Teil dieser vier Röhren waren Luftfallen eingeblasen. Durch Hebung des mit g_4 in Verbindung stehenden Quecksilberbehälters kann der ganze Apparat von der Pumpe abgesperrt

werden. Durch Hebung des mit g_3 in Verbindung stehenden Quecksilberbehälters, so daß das Quecksilber bis a_1 und a_2 steigt, kann man jede Gasströmung von einer Seite des Apparates zur anderen unterbrechen. Wird das Quecksilber etwas gesenkt, kann man durch die Strömungsröhre allein Verbindung herbeischaffen, und wird es noch mehr gesenkt, so daß es nicht in die beiden Zweige der U-förmigen Röhre hinaufreicht, in die der obere Teil von g_3 sich fortsetzt, so kann man die beiden Seiten des Apparates in direkte Verbindung miteinander bringen. Alle Verbindungsröhren des Apparates waren zusammengeblasen und hatten überall 10–12 mm lichte Weite.

Das Volumen jedes der Behälter V_1 und V_2 war ca. 500 ccm und das Volumen jedes Gaugebehälters ca. 400 ccm. In V_1 und V_2 wurde etwas Phosphorsäureanhydrid eingebracht, worauf diese Behälter durch Schliff und

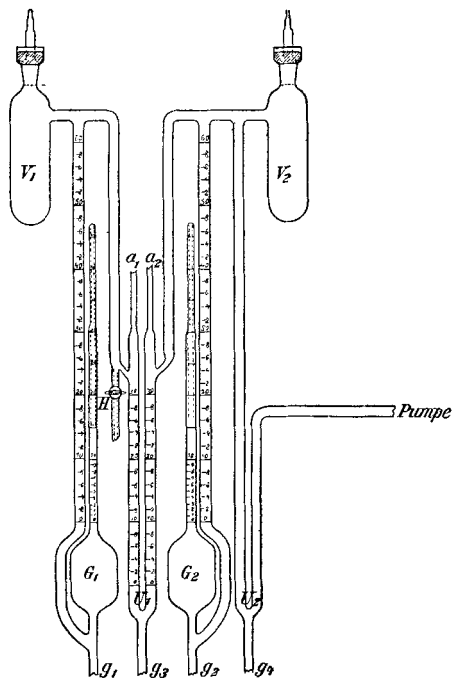


Fig. 1.

Quecksilberdichtung verschlossen wurden. Die Steigröhren und die Kapillarröhren der Gaugen waren mit eingätzter Zentimeterskala versehen, die beiden Zweige der U-förmigen Röhre ebenso.

Vor der Zusammenblasung des ganzen Apparates wurde das Volumen der Gaugenbehälter und die Einteilung der Gaugenröhren bestimmt. Jede der Gaugenröhren war aus drei Stücken zusammengesetzt, wovon jedes ca. 15 cm lang war. Das oberste Stück hatte eine lichte Weite von ca. 0,8 mm, das mittlere ca. 2 mm und das unterste ca. 5 mm. Diese Abstufung der Gaugenröhren sollte es ermöglichen, mittels der Gauge ziemlich große Drucke (bis 5 mm Quecksilberdruck) und ziemlich

kleine Drucke ohne zu große Veränderung der prozentischen Genauigkeit zu messen.

Nach der Zusammenstellung des Apparates und dem Auffüllen von Phosphorsäureanhydrid und Quecksilber wurden die Volumina der beiden Seiten für sich durch Messung der Steigerung des Druckes bestimmt, die das Auffüllen einer bekannten Luftmenge hervorbrachte. Das Volumen des Behälters V_1 mit Gauge und Röhre ergab sich zu 942,0 cm³, das des Behälters V_2 mit Gauge und Röhre zu 1019,0 ccm.

Nachdem der Apparat luftleer gepumpt war, wurden die Korrekturen bestimmt, die von dem Umstande, daß die Nullpunkte der zusammengehörigen Einteilungen nicht in gleicher Höhe angebracht waren, sowie von der Kapillardepression des Quecksilbers in den Gaugenröhren herrührten.

Die drei Gase Wasserstoff, Sauerstoff und Kohlensäure wurden untersucht. Der Wasserstoff wurde in Kipps Apparat aus Zink und verdünnter Schwefelsäure entwickelt. Für die Kohlensäure wurde gleichfalls ein Kippscher Apparat mit Marmor und verdünnter Salzsäure benutzt. Der Sauerstoff wurde einem käuflichen Behälter mit komprimiertem Sauerstoff entnommen. Der Sauerstoff und der Wasserstoff wurden mit konzentrierter Schwefelsäure und in U-Röhren mit Phosphorsäureanhydrid getrocknet. Die Kohlensäure wurde durch Wasser geleitet und dann auf dieselbe Weise wie die anderen Luftarten getrocknet.

Für das Auspumpen des Apparates wurde eine Gaedeschsche Pumpe benutzt.

Die Strömungsröhre war während der Versuche in einem Wasserbad angebracht, das durch elektrische Aufwärmung um 3—4° wärmer als der übrige Apparat gehalten wurde, um zu verhindern, daß sich Quecksilbertropfen in der Röhre verdichteten und die Strömung der Luft teilweise versperreten.

Eine Reihe von Versuchen wurde auf folgende Weise ausgeführt. Die zu untersuchende Luftart wurde durch den Hahn H in den Apparat hineingebracht. Es wurde zur Pumpe abgesperrt und der Stand des Quecksilbers in den beiden Zweigen der Röhre U_1 dann abgelesen, indem gleichzeitig ein Sekundenähler in Gang gesetzt ward. Dadurch wurde der Unterschied des Druckes $p_1 - p_2$ bestimmt. Wenn der Druck-

unterschied durch die Strömung des Gases durch die Röhre bis auf die Hälfte oder ein Drittel des ursprünglichen Wertes gesunken war, wurde der Druckunterschied wieder bestimmt, indem gleichzeitig die Zeit aufgezeichnet ward. Dann wurde das Quecksilber in der Röhre U_1 gesenkt, so daß die beiden Seiten des Apparates in direkte Verbindung miteinander gebracht und der Druckunterschied ausgeglichen wurde. Der mittlere Druck p im Apparate, so wie er während des Versuches gewesen, wurde dann dadurch bestimmt, daß man mit einem Kathetometer den Stand des Quecksilbers in den beiden Zweigen der Röhre U_2 ablas, nachdem die Pumpe so lange gearbeitet hatte, daß der Raum zwischen dem Quecksilber in U_2 und der Pumpe als luftleer betrachtet werden konnte. Die Temperatur der Strömungsröhre wurde mit samt dem Stand eines Thermometers abgelesen, welcher auf dem Apparate selbst aufgehängt war, damit man wissen könne, bei welcher Temperatur die Druckmessungen vorgenommen sind.

Obgleich die Strömung des Gases durch die Röhre nicht während der ganzen Zeit eines Versuches stationär ist, kann sie doch in jedem einzelnen Zeitelement als stationär betrachtet werden, da die Luftmenge, die in kurzer Zeit durch die Röhre hindurchströmt, keine merkbare Veränderung des Druckunterschiedes $p_1 - p_2$ erzeugt.

Vorausgesetzt, daß die durch das Produkt Q von Volumen und Druck gemessene Gasmenge, die im Zeitelement $d\tau$ bei stationärer Strömung durch die Röhre passiert, dem Druckunterschied $p_1 - p_2$ proportional ist, kann man

$$Q d\tau = T(p_1 - p_2) d\tau = -d(p_1 V_1) = d(p_2 V_2)$$

setzen, indem $-d(p_1 V_1)$ die Luftmenge bezeichnet, die von einer Seite des Apparates verschwindet, und $d(p_2 V_2)$ die Luftmenge, die in die andere Seite hineinkommt. Man hat also

$$\frac{T d\tau}{V_1} = -\frac{dp_1}{p_1 - p_2} \quad \text{und} \quad \frac{T d\tau}{V_2} = \frac{dp_2}{p_1 - p_2},$$

woraus folgt

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2} = -T \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) d\tau,$$

woraus man findet:

$$(1) \quad T = -\frac{\Delta \log \text{nat}(p_1 - p_2)}{\tau} \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}.$$

$\Delta \log \text{nat } (p_1 - p_2)$ bezeichnet die Differenz zwischen den natürlichen Logarithmen von zwei Druckunterschieden, die in dem Zeitintervall von τ Sekunden gemessen sind. T bezeichnet die durch das Produkt von Volumen und Druck gemessene Gasmenge, die in einer Sekunde vom Druckunterschied 1 durch die Röhre getrieben wird. Die Druckeinheit ist hier eine beliebige, wenn nur dieselbe Einheit bei der Bestimmung des Druckunterschiedes wie bei der Angabe von T benutzt wird.

Die Voraussetzung, daß die in einem Zeitelement durchströmende Gasmenge dem treibenden Druckunterschied proportional ist, ist nach der theoretischen Untersuchung voraussetzlich kaum ganz richtig, was sich dadurch zu erkennen gäbe, daß man verschiedene Werte von T finden würde, wenn man in obenstehende Gleichung eine Reihe verschiedener, während derselben Strömungsversuche bestimmter Druckunterschiede einsetzen sollte. Von solchen Reihen sind viele bei den verschiedensten mittleren Drucken ausgeführt worden; die gefundenen Verschiedenheiten von T in jeder einzelnen Reihe sind aber nicht größer und gesetzmäßiger gewesen, als daß sie durch die Beobachtungsfehler erklärt und jedenfalls gedeckt werden können.

Alle mittleren Drucke, größer als 5 mm Quecksilber, sowie deren Druckunterschiede wurden in der erwähnten Weise ohne Benutzung der Gaugen bestimmt. Für alle Drucke, unter 5 mm Quecksilber, wurden die Gaugen benutzt, durch welche die Größen von p_1 und p_2 selbst gefunden wurden. Der mittlere Druck p wurde dann aus der Gleichung

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2$$

bestimmt. Bei jeder einzelnen Bestimmung von T erhält man zwei voneinander unabhängige Bestimmungen von p , nämlich eine zu Anfang des Versuches und eine bei dem Schluß desselben. Diese beiden Größen sollen natürlich gleich sein; und wenn sie es nicht sind, muß ein Fehler irgend einer Art begangen sein.

Wenn der Apparat rein und trocken war, stimmten die beiden Bestimmungen des mittleren Druckes so gut miteinander, daß die Abweichungen Beobachtungsfehlern, bis-

weilen in Verbindung mit einer verschwindend kleinen Undichtigkeit oder Unreinheit des Gases oder des Glases zugeschrieben werden konnten.

Die Zeit τ zwischen zwei aufeinander folgenden Paaren von Druckbestimmungen wurde nach der Gasart und dem Widerstand der Röhre gerichtet, indem man so viel wie möglich dafür sorgte, daß der Druckunterschied bis zwischen Hälfte und Drittel der ursprünglichen Größe sank. Eine Berechnung zeigt nämlich, daß man in dem Falle die genaueste Bestimmung von T mittels der Gleichung (1) erhält. Die Dauer jedes Versuches war bei den größten mittleren Drucken einige Minuten, und bei allen Gaugenmessungen zwischen $\frac{3}{4}$ Stunden und 12 Stunden.

Da die Strömungsröhre um einige Grad wärmer als die Gaugen gehalten wurde, mußten die gefundenen Werte T alle auf die Temperatur der Röhre reduziert werden.

Der größte mittlere Druck, bei welchem T bestimmt wurde, war ca. 23 cm Quecksilberdruck, wogegen der kleinste ca. 0,000014 cm Quecksilberdruck, also ca. um $1\frac{1}{2}$ Millionen mal so klein als der größte war.

Es sind vier verschiedene Röhren untersucht worden. Die Röhre Nr. 1 hatte eine Länge von ca. 6 cm und einen Radius von ca. 0,01 cm. Die Röhre Nr. 2 hatte denselben Radius, war aber doppelt so lang wie die Röhre No. 1. Die Röhre Nr. 3 hatte dieselbe Länge wie die Röhre Nr. 1, aber einen 1,4 mal größeren Radius. Die Röhre Nr. 4 bestand aus 24 parallelen, 2 cm langen Röhren mit einem Radius von ca. 0,003 cm. Die genaue Bestimmung der Dimensionen dieser Röhren ging auf folgende Weise vor sich.

Die Röhren 1 und 2 wurden von demselben Röhrenstück genommen, das, unter dem Mikroskop betrachtet, einen einigermaßen kreisförmigen Querschnitt hatte. Die Röhre wurde durch Quecksilberfäden verschiedener Länge kalibriert, und das Volumen eines Röhrenstückes wurde durch Wägung mit Quecksilber bestimmt. Die beiden zu untersuchenden Röhrenstücke, 1 und 2, wurden von der Röhre abgeschnitten, und etwa 5 mm weite Röhrenstücke an jedem Ende angeblasen. Bei dieser Anblasung wurde dafür gesorgt, daß die Kapillarröhre ihren Querschnitt, so weit möglich, un-

verändert behielt; es konnte aber natürlich nicht vermieden werden, daß die Kapillarröhre auf einer kurzen Strecke durch kegelförmige Erweiterung dieselbe Weite erhält, wie die angeschmolzene Röhre. Die Dimensionen der kegelförmigen Teile wurden auf folgende Weise bestimmt. Nahe an jedem Ende der Röhre wurde ein Strich geätzt und der Abstand zwischen den Strichmarken gemessen. Dann wurde der Durchmesser des kegelförmigen Teiles der Röhre in verschiedener Entfernung von den geätzten Marken durch Ausmessung mit Mikroskop mit Okularmikrometer bestimmt, indem Messungen für eine jedesmalige Entfernung von 0,2 mm von den Marken vorgenommen wurden. Bei diesen Messungen wurde die Oberfläche der Glasröhre durch Deckglas und Immersionsöl optisch plan gemacht. Messungen, die auf dieselbe Weise auf dem fast zylindrischen, kalibrierten Teil der Röhre ausgeführt wurden, ergaben die Einheit der gefundenen Masse. Durch diese mikroskopischen Messungen in Verbindung mit der Kalibrierung und der Quecksilberwägung wurde der Widerstand der Röhren bestimmt:

$$W = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \frac{1}{A^2} dl = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L \frac{dl}{R^3},$$

ebenso der mittlere Wert R des kalibrierten Teiles des Röhrenradius. Bei der Berechnung des Widerstandes zeigte es sich, daß man bei den gewählten Dimensionen von dem Widerstande der etwa 5 mm weiten Zuleitungsröhren absehen konnte. Der Widerstand der Röhre 3 wurde auf ähnliche Weise wie der der Röhren 1 und 2 bestimmt.

Die Röhre Nr. 4 wurde auf folgende Weise hergestellt. Eine enge und ziemlich dünnwandige Kapillarröhre wurde gezogen, und ein einigermaßen kalibrisches Stück von reichlich 50 cm Länge abgeschnitten. Dieses Röhrenstück wurde kalibriert und mit Quecksilber ausgewägt, worauf eine Länge von genau 48 cm abgeschnitten wurde. Diese Länge wurde in 24 möglichst gleiche Teile geteilt, die mit Siegelack in ein Bündel gesammelt wurden, das in eine weitere Glasröhre eingelackt wurde, welche dem Apparat angeblasen werden konnte. Der Widerstand dieses Röhrenbündels konnte dann leicht mit

ziemlich großer Genauigkeit berechnet werden, indem der größte Fehler, der in diese Bestimmung eingeht, von Fehlern bei der Wägung des Quecksilberfadens herrührt, welcher, obgleich er 50 cm lang ist, nur ein paar Zentigramm wiegt. Die genaueren Angaben der Widerstände und der Dimensionen der Röhren finden sich in den Tabellen über die Strömungsergebnisse.

4. Die rein molekulare Strömung. Versuchsergebnisse.

Aus dem ganzen Beobachtungsmaterial sollen hier nur einzelne Beobachtungen zur Bestätigung des im folgenden theoretischen Teile gefundenen Gesetzes hervorgezogen werden:

$$T = \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1} W},$$

wo T die in der Zeiteinheit vom Druckfall 1 durchgetriebene Gasmenge, durch das Produkt von Volumen und Druck gemessen, bezeichnet. ϱ_1 ist das spezifische Gewicht der Luftart bei der Temperatur der Röhre und dem Druck 1, R ist der Radius der Röhre, L deren Länge.

Zur Untersuchung des Einflusses der Länge werden die Versuche mit der Strömung des Wasserstoffs bei niedrigen mittleren Drucken durch die Röhren 1 und 2 gewählt, die nahezu denselben Radius haben, während die Röhre 2 ungefähr doppelt so lang ist wie die Röhre 1.

Das Verhältnis zwischen den ausgemessenen Widerständen ergab sich als 2,05, das Verhältnis zwischen entsprechenden Werten von T als 1,95. Die Nichtübereinstimmung kann sehr wohl durch Beobachtungsfehler erklärt werden, da die Messungen mit Wasserstoff, besonders in der Röhre 1, wie wir später sehen werden, ziemlich ungenau sind, weshalb man annehmen kann, daß die durchgeströmte Gasmenge der von der Theorie erforderten Länge umgekehrt proportional ist.

Zur Untersuchung des Einflusses des Radius der Röhre können Versuche mit Kohlensäure in der Röhre 1 und der Röhre 3 gewählt werden. Die Röhre 3 war ca. doppelt so lang und hatte einen ca. 1,4 mal größeren Radius als die Röhre 1.

Das Verhältnis zwischen den ausgemessenen Widerständen ergab sich als 1,15, das zwischen entsprechenden Werten von T als 1,20, woraus man schließt, daß die durchströmende Gasmenge dem Radius in dritter Potenz direkt proportional ist.

Zur Untersuchung des Einflusses der Gasart können die Messungen mit der Röhre 4 benutzt werden. In der folgenden Tabelle sind die Werte von T angegeben, sowie die Quadratwurzel des spezifischen Gewichtes ρ der Gase mit Wasserstoff als Einheit, ferner das Produkt von T und $\sqrt{\rho}$

	T	$\sqrt{\rho}$	$T \times \sqrt{\rho}$
Wasserstoff	0,168	1	0,168
Sauerstoff	0,0409	4	0,164
Kohlensäure	0,0348	4,69	0,163

Man sieht also, daß die durchströmende Gasmenge, durch das Produkt von Volumen und Druck gemessen, der Quadratwurzel des spezifischen Gewichtes umgekehrt proportional ist.

Zur Untersuchung des Einflusses der Temperatur habe ich einige mit der Röhre 1 im ersten Apparat ausgeführte Messungen vorgenommen; die Messungen wurden bei einem mittleren Druck von ca. 0,03 cm Quecksilber mit Wasserstoff ausgeführt. Obgleich die gegenseitigen Zusammenstöße der Molekeln noch bei diesem Druck einen merkbaren Einfluß auf die Strömung haben, wird die Theorie doch auch hier bestätigt. Versuche wurden angestellt bei einer Zimmertemperatur von 22° ; dann wurde die Röhre in einem Wasserbad bis auf 100° und danach in einem Glyzerinbad bis auf 196° erwärmt. In der folgenden Tabelle sind unter T die direkt gefundenen Werte ohne Reduktion auf die Temperatur der Röhre aufgeführt, weshalb die angeführten Werte den durchgeströmten Gewichtsmengen proportional sind. Man sieht, daß je höher die Temperatur wird, je geringer ist die Gewichtsmenge Gas, die hindurchströmt. In der nächsten Kolonne sind unter $T \times \frac{273 + t}{273 + 22}$ die auf die Temperatur der Röhre reduzierten Werte von T aufgeführt. Man sieht, daß sie bei wachsender Temperatur wachsen. In der letzten Kolonne sind unter $T \sqrt{\frac{273 + t}{273 + 22}}$ die Größen angeführt, die, wenn das Gesetz richtig ist, gleich sein sollten.

t	T	$T \times \frac{273 + t}{273 + 22}$	$T \sqrt{\frac{273 + t}{273 + 22}}$
22°	0,0713	0,0713	0,0713
100	0,0641	0,0811	0,0721
196	0,0588	0,0935	0,0741

Die Abweichungen vom Gesetze von der Abhängigkeit der Durchströmung von der Temperatur sind nicht größer, als daß sie durch Beobachtungsfehler erklärt werden können, weshalb man annehmen kann, daß die Gewichtsmenge Gas, die durch die Röhre hindurchströmt, der Quadratwurzel der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, während die Gasmenge, durch das Produkt von Volumen und Druck bei der Temperatur der Röhre angegeben, der absoluten Temperatur direkt proportional ist.

Wird dieses Resultat mit dem für verschiedene Gase gefundenen kombiniert, kann man also sagen, daß die durchgeströmte Luftmenge (Volumen \times Druck) der Quadratwurzel des spezifischen Gewichtes des Gases bei dem Druck 1 und bei der Temperatur der Röhre umgekehrt proportional ist.

Als Beweis für die Richtigkeit der Konstante $\frac{4}{3}\sqrt{2\pi}$ in der Formel für T können Messungen mit allen Röhren angeführt werden. In folgender Tabelle sind die aus der Formel berechneten Werte neben den experimental gefundenen für die drei ersten Röhren aufgeführt.

	T beobachtet	T berechnet
Röhre 1: Wasserstoff	0,073	0,080
„ 1: Sauerstoff	0,0187	0,0202
„ 1: Kohlensäure	0,0166	0,0172
„ 2: Wasserstoff	0,0375	0,0392
„ 3: Kohlensäure	0,0199	0,0198

Man wird bemerken, daß die beobachteten Werte in den meisten Fällen niedriger sind als die berechneten. Da ich nach dem ersten Versuch mit Wasserstoff in der Röhre 1 vermutete, daß die Ursache darin gesucht werden dürfte, daß die in der Röhre mutmaßlich enthaltenen gesättigten Quecksilberdämpfe auf die Strömung der Luft hemmend wirken könnten, unternahm ich einen vorläufigen Versuch zur Bestimmung der Spannung gesättigter Quecksilberdämpfe bei 25° . Die Methode, die sich als besonders brauchbar ergab, bestand darin, gesättigten Quecksilberdampf bei 25° molekular durch ein Röhrenbund mit bekanntem Widerstand in einen Raum hineinströmen zu lassen, wo die Temperatur auf -80° gehalten wurde, und wo das Quecksilber nach Beendigung des

Versuches gesammelt und gemessen werden konnte. Der Versuch gab ein Resultat, das mit dem von Hertz durch Extrapolation gefundenen Wert gut stimmte. Wenn der Druck der Quecksilberdämpfe bekannt ist, läßt sich ihr Widerstand gegen die Strömung des Gases durch die Röhre leicht berechnen, und er ergibt sich als zu gering, um die gefundenen Abweichungen zu erklären. Es zeigte sich übrigens später, daß bei dem Versuche mit der Strömung des Wasserstoffs durch die Röhre 1 Fehler begangen worden waren, die sich nicht später berichtigen ließen. Außerdem kann man mit den benutzten Dimensionen des Apparates bei diesen verhältnismäßig weiten Röhren genaue Druckmessungen nicht unternehmen, wenn der Druck so klein ist, daß der Radius der Röhre im Vergleich mit der mittleren Weglänge verschwindend klein ist.

Die Versuche mit der Röhre 4 wurden zuletzt ausgeführt und sind daher wahrscheinlich auch die besten. Es ergab sich

	<i>T</i> beobachtet	<i>T</i> berechnet
Röhre 4: Wasserstoff	0,168	0,161
„ 4: Sauerstoff	0,0409	0,0404
„ 4: Kohlensäure	0,0348	0,0344

Man sieht, daß die berechneten Werte hier etwas kleiner sind als die beobachteten, was wahrscheinlich dadurch veranlaßt ist, daß sich der Widerstand der Röhre durch die Wägung mit Quecksilber als zu groß ergeben hat. Die Unsicherheit in bezug auf die Widerstandsbestimmung ist jedenfalls genügend, um die Abweichungen zu erklären; wir können also annehmen, daß die in theoretischer Weise aufgestellte Formel mit der Konstante $\frac{4}{3}\sqrt{2\pi}$ richtig ist.

Die oben angeführten Werte von *T* beobachtet sind die mittleren Zahlen der bei so niedrigen Drucken angestellten Beobachtungen, daß eine Druckverminderung keine meßbare Veränderung von *T* hervorbrachte. Obgleich man hier eigentlich den Wert benutzen sollte, gegen welchen *T* konvergiert, wenn der mittlere Druck sich Null nähert, ist doch die Bildung der Mittelwerte benutzt worden, weil sie brauchbar ist, und um nicht andere theoretische Voraussetzungen als höchst notwendig einzuführen.

5. Gemischte molekulare Strömung und innere Reibungsströmung. Versuchsergebnisse.

Um zu untersuchen, wie die Durchströmung vor sich geht, wenn die mittleren Weglängen der Moleküle im Vergleich mit den Röhrendimensionen, worauf es hier ankommt, nicht besonders groß oder verschwindend klein sind, werden die vollständigen Reihen von Versuchsergebnissen mit verschiedenen Röhren in der Ordnung angeführt werden, in welcher sie ausgeführt worden sind.

In der folgenden Tab. I bezeichnet L die Länge der Röhre, R ihren Radius, beide Größen in Zentimetern ungefähr angegeben. W bezeichnet den durch Kalibrierung und Ausmessung gefundenen genaueren Wert des Widerstandes, indem

$$W = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} \int_0^L \frac{o}{A^2} dl = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L \frac{dl}{R^3}.$$

Unter t ist die Temperatur der Strömungsröhre aufgeführt, unter p die beiden voneinander unabhängigen Bestimmungen des mittleren Druckes, in Zentimetern Quecksilberhöhe angegeben; beide Bestimmungen sind aufgeführt, um die Verwendbarkeit des Gaugenapparates zu beweisen, und eine Vorstellung von der Genauigkeit der einzelnen Bestimmungen zu geben. Endlich ist unter T_o observiert der aus der Formel (1), p. 83, berechnete Wert der durchgeströmten Gasmenge angeführt. Ein wagerechter Strich in einer Messungsreihe bezeichnet, daß der Apparat mit frischem Gas gefüllt worden ist. Unter T_a sind angeführt die aus der Formel (13) (Einleitung, p. 78) aus den gemessenen Dimensionen der Röhre und den bekannten Werten der inneren Reibung und des spezifischen Gewichtes berechneten Werte von $T = Q_t / (p_1 - p_2)$, und in der letzten Kolonne sind die Abweichungen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von T angegeben.

Da die Übereinstimmung zwischen T_o und T_a nicht so vollkommen ist, daß man unmittelbar sehen kann, daß T_o durch eine Funktion derselben Form wie T_a ausgedrückt werden kann, ist für jede Versuchsreihe auch eine spezielle rein empirische Formel bestimmt worden, die im folgenden (Abschnitt 7) näher besprochen werden wird. Die aus diesen

Formeln berechneten Werte von T finden sich unter T_s , und die folgende Kolonne gibt die Abweichung zwischen diesen Werten und den beobachteten Werten von T an.

Tabelle I.

Röhre Nr. 1.

 $L = \text{ca. } 6 \text{ cm. } R = \text{ca. } 0,01084 \text{ cm. } W = 1379000.$

Wasserstoff.

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o \div T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
25,7°	0,000369 373	0,0732	0,0731	+0,0001	0,0803	÷0,0071
25,1	0,3612 3617	0,1067	0,1058	+0,0009	0,1146	÷0,0079
24,8	0,2248 2254	0,0900	0,0902	-0,0002	0,0970	-0,0070
24,4	0,1475 1483	0,0815	0,0817	-0,0002	0,0874	-0,0059
24,2	0,0966 970	0,0756	0,0761	-0,0005	0,0816	-0,0060
23,7	0,0943 947	0,0753	0,0759	-0,0006	0,0814	-0,0061
23,9	0,0665 665	0,0732	0,0731	+0,0001	0,0787	-0,0055
23,8	0,04750 4743	0,0715	0,0715	0,0000	0,0773	-0,0058
23,8	0,02322 2334	0,0700	0,0702	-0,0002	0,0767	-0,0067
23,7	0,01134 1139	0,0703	0,0706	-0,0003	0,0776	-0,0073
22,9	0,01834 1843	0,0708	0,0702	+0,0006	0,0769	-0,0061
23,3	0,00397 401	0,0724	0,0719	+0,0005	0,0791	-0,0067
21,8	0,02885 2871	0,0720	0,0703	+0,0017	0,0767	-0,0047
24,8	0,001080 1031	0,0749	0,0729	+0,0020	0,0801	-0,0052
24,9	0,000103 109	0,0729	0,0734	-0,0005	0,0804	-0,0075

Röhre Nr. 1.
Sauerstoff.
Manometermessungen.

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o \div T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
21,3°	14,04	0,846	0,883	$\div 0,037$	0,875	-0,029
26,8	6,84	0,439	0,438	+0,001	0,434	+0,005
26,3	3,25	0,212	0,216	-0,004	0,215	-0,003
25,2	1,470	0,1064	0,1061	+0,003	0,1062	+0,0002
25,2	0,694	0,0579	0,0581	-0,002	0,0589	-0,0010

Gaugenmessungen.

25,4°	0,4853 4843	0,0461	0,0452	+0,0009	0,0461	0,000
25,4	0,2415 2413	0,03009	0,03032	-0,00023	0,0314	-0,0013
25,2	0,1162 1161	0,02281	0,02281	0,00000	0,0239	-0,0011
25,0	0,05611 5592	0,09948	0,01949	-0,00001	0,0206	-0,0011
24,8	0,02723 2684	0,01847	0,01826	+0,00021	0,0194	-0,0009
25,0	0,01313 1308	0,01804	0,01803	+0,00001	0,0193	-0,0012
24,8	0,006317 6314	0,01813	0,01817	-0,00004	0,0195	-0,0014
24,5	0,003046 3023	0,01834	0,01837	-0,00003	0,0198	-0,0015
24,6	0,001452 1442	0,01867	0,01851	+0,00016	0,0200	-0,0013
24,7	0,000812 815	0,01847	0,01858	-0,00011	0,0201	-0,0016
24,7	0,000400 402	0,01861	0,01863	-0,00002	0,0201	-0,0015
24,9	0,000197 194	0,01868	0,01866	+0,00002	0,0202	-0,0015
24,8	0,0000420 421	0,01874	0,01868	+0,00006	0,0202	-0,0015
24,9	0,000370 369	0,0190	0,0186	+0,0004	0,0201	-0,0011

Röhre Nr. 1.
Sauerstoff (Fortsetzung).
Manometermessungen.

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
25,3°	13,79	0,845	0,868	÷ 0,023	0,859	- 0,014
25,3	5,81	0,380	0,374	+ 0,006	0,371	+ 0,009

Kohlensäure.
Manometermessungen.

25,0°	14,20	1,183	1,212	- 0,029	1,148	+ 0,035
26,6	6,07	0,526	0,525	+ 0,001	0,498	+ 0,028
26,7	2,66	0,242	0,237	+ 0,005	0,227	+ 0,015
26,5	1,22	0,115	0,116	- 0,001	0,112	+ 0,003
25,3	0,57	0,064	0,060	+ 0,004	0,059	+ 0,005

Gaugenmessungen.

25,2°	0,4742 4742	0,0522	0,0523	- 0,0001	0,0519	+ 0,0003
24,7	0,2282 2280	0,03204	0,03165	+ 0,00039	0,0323	- 0,0003
23,8	0,2472 2458	0,03310	0,03319	- 0,00009	0,0338	- 0,0007
25,1	0,1186 1187	0,02256	0,02256	0,00000	0,0237	- 0,0011
25,3	0,05686 5699	0,01766	0,01768	- 0,00002	0,0190	- 0,0013
25,2	0,02733 2718	0,01584	0,01565	+ 0,00019	0,0170	- 0,0012
25,2	0,01339 1335	0,01510	0,01506	+ 0,00004	0,0164	- 0,0013
25,1	0,006631 6660	0,01498	0,01503	- 0,00005	0,0164	- 0,0014
24,9	0,003447 3466	0,01517	0,01517	0,00000	0,0166	- 0,0014
25,2	0,001678 1707	0,01510	0,01530	- 0,00020	0,0168	- 0,0017
25,2	0,000826 845	0,01550	0,01539	+ 0,00011	0,0170	- 0,0015
25,1	0,000413 413	0,01550	0,01544	+ 0,00006	0,0171	- 0,0016

Röhre Nr. 1.

Kohlensäure (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
25,0°	0,000199 209	0,0158	0,0155	+0,0003	0,0172	-0,0014
25,0	0,000100 108	0,0160	0,0155	+0,0005	0,0172	-0,0012
25,0	0,000022 33	0,0175	0,0155	+0,0020	0,0172	+0,0003

Röhre Nr. 2.

 $L = \text{ca. } 12 \text{ cm. } R = \text{ca. } 0,01078 \text{ cm. } W = 2833000.$

Wasserstoff.

Manometermessungen.

23,8°	19,10	1,300	1,327	-0,027	1,268	+0,032
23,8	7,85	0,563	0,563	0,000	0,540	+0,023
24,0	3,63	0,275	0,276	-0,001	0,266	+0,009
24,7	1,684	0,1432	0,1443	-0,0011	0,1408	+0,0024

Gaugenmessungen.

25,5°	0,3172 3128	0,0511	0,0518	-0,0007	0,0527	-0,0016
24,7	0,1506 1504	0,0408	0,0411	-0,0003	0,0427	-0,0019
25,5	0,0731 726	0,0366	0,0366	0,0000	0,0386	-0,0020
25,3	0,03469 3482	0,0352	0,0354	-0,0002	0,0374	-0,0022
25,1	0,01641 1643	0,0356	0,0354	+0,0002	0,0376	-0,0020
25,5	0,00789 795	0,0356	0,0361	+0,0005	0,0381	-0,0025
26,3	0,003826 3828	0,0372	0,0367	+0,0005	0,0386	-0,0014
26,1	0,001832 1843	0,0371	0,0371	0,0000	0,0389	-0,0018
25,4	0,000886 928	0,0358	0,0373	-0,0015	0,0390	-0,0032

Röhre Nr. 2.
Wasserstoff (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
24,7°	0,000476 492	0,0333	0,0375	-0,0042	0,0391	-0,0053
24,8	0,000238 258	0,0317	0,0376	-0,0059	0,0392	-0,0075
24,9	0,000308 324	0,0379	0,0375	+0,0004	0,0391	-0,0012
24,7	0,015526 15535	0,0355	0,0355	0,0000	0,0376	-0,0021
24,8	0,007432 7409	0,0364	0,0362	+0,0002	0,0382	-0,0018
24,8	0,003534 3583	0,0371	0,0368	+0,0003	0,0386	-0,0015
25,7	0,001718 1735	0,0367	0,0371	-0,0004	0,0389	-0,0022
25,8	0,000820 831	0,0364	0,0374	-0,0010	0,0390	-0,0026
25,7	0,000475 484	0,0371	0,0375	-0,0004	0,0391	-0,0020

Röhre Nr. 3.

$L = \text{ca. } 12 \text{ cm.}$ $R = \text{ca. } 0,01415.$ $W = 1196000.$

Kohlensäure.

Manometermessungen.

24,9°	10,284	1,215	1,271	-0,026	1,252	-0,007
	3,490	0,449	0,441	+0,008	0,436	-0,013
	1,624	0,220	0,213	+0,007	0,211	+0,009

Gaugenmessungen.

24,4°	0,3848 3840	0,06224	0,06213	+0,00011	0,0623	-0,0001
24,4	0,2385 2381	0,04429	0,04435	-0,00006	0,0448	-0,0005
24,5	0,1667 1663	0,03579	0,03567	+0,00012	0,0362	-0,0004
24,5	0,12784 12771	0,03109	0,03101	+0,00008	0,0316	-0,0005

Röhre Nr. 3.

Kohlensäure (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
25,6°	0,06387 6381	0,02345	0,02349	-0,00004	0,0241	-0,0006
26,0	0,04988 4933	0,02223	0,02190	+0,00033	0,0225	-0,0003
25,3	0,03657 3677	0,02036	0,02052	-0,00016	0,0211	-0,0007
25,7	0,01912 1912	0,01901	0,01895	+0,00006	0,0194	-0,0004
26,2	0,01490 1480	0,01898	0,01868	+0,00030	0,0192	-0,0002
25,5	0,01159 1155	0,01861	0,01853	+0,00008	0,0190	-0,0004
25,5	0,008994 8996	0,01855	0,01848	+0,00007	0,0189	-0,0003
25,5	0,006694 6689	0,01857	0,01849	+0,00008	0,0189	-0,0003
24,7	0,004010 4015	0,01856	0,01861	-0,00005	0,0190	-0,0004
24,7	0,002699 2738	0,01852	0,01878	-0,00021	0,0192	-0,0007
24,6	0,001702 1717	0,01887	0,01886	+0,00001	0,0193	-0,0004
24,6	0,001060 1076	0,01906	0,01896	+0,00010	0,0195	-0,0004
24,6	0,000735 748	0,01899	0,01903	-0,00004	0,0196	-0,0006
24,6	0,000549 558	0,01900	0,01906	-0,00006	0,0196	-0,0006
24,5	0,000411 422	0,01926	0,01909	+0,00017	0,0197	-0,0004
24,6	0,000300 311	0,01959	0,01911	+0,00048	0,0197	-0,0001
24,5	0,000211 222	0,01974	0,01913	+0,00061	0,0197	0,0000
24,8	0,000166 175	0,02017	0,01914	+0,00103	0,0197	+0,0004

Röhre Nr. 3.
Kohlensäure (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
24,5°	0,000119 132	0,0206	0,01915	+0,0014	0,0197	+0,0009
24,6	0,000092 98	0,0212	0,01916	+0,0020	0,0198	+0,0014
24,4	0,000427 452	0,01899	0,01909	-0,00010	0,0197	-0,0007
25,0	0,000225 238	0,01952	0,01913	+0,00039	0,0197	-0,0002
24,6	0,000168 175	0,02000	0,01914	+0,00086	0,0197	+0,0003
24,0	0,000097 110	0,0181	0,0192	-0,0011	0,0198	-0,0017

Röhre Nr. 4 (Bündel aus 24 Röhren).

$L = \text{ca. } 2 \text{ cm.}$ $R = 0,00333.$ $W = 689400.$

Sauerstoff.

Manometermessungen.

24,3°	15,79	0,595	0,594	+0,001	0,626	-0,031
24,0	7,05	0,294	0,284	+0,010	0,298	-0,004
24,9	3,282	0,1509	0,1505	+0,0004	0,1561	-0,0052
24,8	1,554	0,0886	0,0892	-0,0006	0,0914	-0,0028

Gaugenmessungen.

24,6°	0,4113 4106	0,04830	0,04907	-0,00077	0,0490	-0,0007
24,5	0,23909 23912	0,04311	0,04335	-0,00024	0,0431	0,0000
24,6	0,16307 16304	0,04101	0,04101	0,00000	0,0407	+0,0003
24,7	0,11208 11230	0,03975	0,03966	+0,00009	0,0394	+0,0003
24,7	0,07232 7243	0,03884	0,03889	-0,00005	0,0386	+0,0002
24,8	0,04996 5014	0,03821	0,03872	-0,00051	0,0385	-0,0003

Röhre Nr. 4.

Sauerstoff (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
24,7°	0,03356 3343	0,03869	0,03883	-0,00014	0,0386	+0,0001
24,7	0,02350 2333	0,03916	0,03908	+0,00008	0,0389	+0,0003
25,5	0,01586 1578	0,03920	0,03942	-0,00022	0,0392	0,0000
25,2	0,01059 1055	0,03981	0,03977	+0,00004	0,0395	+0,0003
24,6	0,00740 751	0,03924	0,04002	-0,00078	0,0397	-0,0005
25,7	0,004935 4967	0,03990	0,04028	-0,00038	0,0399	0,0000
26,1	0,003375 3361	0,04071	0,04045	+0,00026	0,0401	+0,0006
25,7	0,002185 2201	0,04076	0,04060	+0,00016	0,0402	+0,0006
25,6	0,001423 1424	0,0414	0,0407	+0,0007	0,0403	+0,0011
25,6	0,000939 947	0,0414	0,0408	+0,0006	0,0403	+0,0011
25,2	0,000593 603	0,0403	0,0408	-0,0005	0,0404	-0,0001
24,7	0,000397 397	0,0412	0,0408	+0,0004	0,0404	+0,0008
24,7	0,000263 267	0,0410	0,0409	+0,0001	0,0404	+0,0006
24,6	0,000168 173	0,0407	0,0409	-0,0002	0,0404	+0,0003

Wasserstoff.

Manometermessungen.

25,5°	17,60	1,583	1,535	+0,048	1,576	+0,007
	6,00	0,625	0,619	+0,006	0,624	+0,001
25,7	2,69	0,353	0,358	-0,005	0,353	0,000

Röhre Nr. 4.
Wasserstoff (Fortsetzung).
Gaugenmessungen.

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
24,8°	0,4437 4449	0,1720	0,1811	-0,0091	0,172	0,000
25,0	0,2625 2620	0,1647	0,1674	-0,0027	0,160	+0,005
25,2	0,1794 1794	0,1606	0,1616	-0,0010	0,156	+0,005
25,3	0,1273 1270	0,1593	0,1583	+0,0010	0,154	+0,005
25,3	0,08832 8808	0,1566	0,1565	+0,0001	0,153	+0,004
25,0	0,06881 6860	0,1578	0,1559	+0,0019	0,154	+0,004
24,9	0,04753 4742	0,1560	0,1561	-0,0001	0,154	+0,002
25,4	0,04913 4882	0,1567	0,1560	+0,0007	0,154	+0,003
24,5	0,02686 2683	0,1579	0,1576	+0,0003	0,156	+0,002
24,4	0,01800 1795	0,1581	0,1594	-0,0013	0,157	+0,001
24,4	0,01226 1222	0,1576	0,1614	-0,0038	0,158	0,000
24,4	0,008218 8238	0,1560	0,1633	-0,0073	0,159	-0,003
24,4	0,011773 11789	0,1598	0,1615	-0,0017	0,158	+0,002
24,4	0,005763 5777	0,1622	0,1649	-0,0027	0,160	+0,002
24,4	0,001146 1152	0,1687	0,1689	-0,0002	0,161	+0,008
24,4	0,000564 567	0,1638	0,1695	-0,0057	0,161	+0,003
24,3	0,005573 5589	0,1709	0,1650	+0,0059	0,160	+0,011
24,2	0,002720 2735	0,1697	0,1673	+0,0024	0,160	+0,010

Röhre Nr. 4.
Wasserstoff (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
24,2°	0,001317 1328	0,1707	0,1687	+0,0020	0,161	+0,010
24,2	0,000975 983	0,1689	0,1691	-0,0002	0,161	+0,008
24,2	0,000197 202	0,1698	0,1700	-0,0002	0,161	+0,009

Kohlensäure.

Manometermessungen.

24,5°	22,92	1,140	1,143	-0,003	1,153	-0,013
24,4	11,64	0,605	0,595	+0,010	0,599	+0,006
24,4	5,51	0,307	0,297	+0,010	0,298	+0,009
24,5	2,56	0,155	0,153	+0,002	0,154	+0,001
24,6	1,214	0,0877	0,0875	+0,0002	0,0877	0,0000
24,6	16,21	0,797	0,817	-0,020	0,823	-0,026
24,6	6,68	0,362	0,353	+0,009	0,356	+0,006
24,6	2,93	0,176	0,171	+0,005	0,172	+0,004
	1,352	0,0948	0,0942	+0,0006	0,0945	+0,0003
24,5	0,640	0,0589	0,0597	-0,0008	0,0597	-0,0008

Gaugenmessungen.

24,9°	0,4370 4364	0,04850	0,04986	-0,00136	0,0498	-0,0013
25,1	0,2516 2504	0,04076	0,04101	-0,00025	0,0410	-0,0002
25,0	0,1721 1718	0,03774	0,03736	+0,00038	0,0374	+0,0003
24,8	0,1300 1304	0,03547	0,03551	-0,00004	0,0357	-0,0002
24,5	0,09112 9117	0,03385	0,03390	-0,00005	0,0342	-0,0003
24,4	0,06244 6243	0,03300	0,03290	+0,00010	0,0333	-0,0003
24,4	0,04345 4354	0,03245	0,03244	+0,00001	0,0329	-0,0004

Röhre Nr. 4.
Kohlensäure (Fortsetzung).

t	Mitteldruck p cm Hg	T_o observiert	T_s nach spezieller Formel berechnet	$T_o - T_s$	T_a nach all- gemeiner Formel berechnet	$T_o - T_a$
25,1 ⁰	0,03157 3144	0,03237	0,03233	+0,00004	0,0328	-0,0004
25,0	0,01747 1737	0,03282	0,03259	+0,00023	0,0331	-0,0003
25,2	0,01595 1588	0,03274	0,03267	+0,00007	0,0332	-0,0005
25,0	0,011080 11068	0,03293	0,03301	-0,00008	0,0334	-0,0005
25,0	0,007911 7927	0,03313	0,03334	-0,00021	0,0336	-0,0005
25,3	0,005799 5859	0,03354	0,03363	-0,00009	0,0338	-0,0003
24,5	0,003911 3912	0,03381	0,03395	-0,00014	0,0340	-0,0002
24,5	0,002661 2683	0,03401	0,03421	-0,00020	0,0341	-0,0001
24,4	0,001781 1799	0,03419	0,03441	-0,00022	0,0342	0,0000
24,4	0,001196 1206	0,03462	0,03455	+0,00007	0,0343	+0,0003
24,4	0,001153 1164	0,03495	0,03456	+0,00039	0,0343	+0,0006
24,5	0,000843 851	0,0349	0,0347	+0,0002	0,0344	+0,0005
24,4	0,000602 609	0,0345	0,0347	-0,0002	0,0344	+0,0001
24,4	0,000425 429	0,0353	0,0348	+0,0005	0,0344	+0,0009
24,6	0,016583 16543	0,03330	0,03264	+0,00066	0,0332	+0,0001
24,3	0,000277 287	0,0347	0,0348	-0,0001	0,0344	+0,0003
25,4	0,000046 52	0,0379	0,0349	+0,0030	0,0345	+0,0034
25,0	0,000011 18	0,0312	0,0349	-0,0037	0,0345	-0,0033

6. Theorie der molekularen Strömung.

Bei der Anwendung der kinetischen Theorie auf ein ruhendes Gas setzt man u. a. voraus, daß die Geschwindigkeitsrichtungen aller einzelnen Moleküle gleich häufig sind, und daß die Anzahl von Molekülen des einheitlichen Volumens dieselbe ist, wo in der Luft die Volumeneinheit auch gelegen sei. Nehmen wir an, daß diese Voraussetzungen auch in der unmittelbaren Nähe einer festen Wand in dem Gas richtig sind, so kann man leicht berechnen, wie viele Molekülstöße jede Flächeneinheit der Wand in einer gegebenen Richtung empfängt.

Gibt es in der Volumeneinheit N Moleküle, und ist die mittlere Geschwindigkeit Ω und die mittlere Weglänge λ , werden diese Moleküle $N\Omega/\lambda$ mal in der Sekunde gestoßen werden. Von den Molekülen des Volumenelementes $L^2 dL \delta\omega$

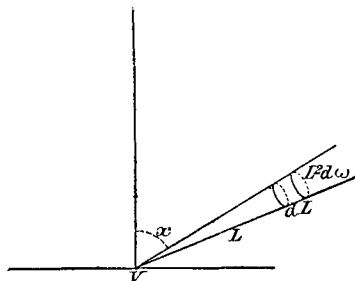


Fig. 2.

(Fig. 2) gehen folglich $N\Omega/(\lambda)L^2 dL \delta\omega$ Moleküle in der Sekunde aus, die direkt von Zusammenstößen kommen. Von diesen ist ein Bruchteil $\frac{1}{4\pi} \frac{\cos x}{L^2}$ gegen die betrachtete Flächeneinheit der Wand V gerichtet, also im ganzen eine Anzahl von

$$\frac{1}{4\pi} \frac{N\Omega}{\lambda} \cos x dL \delta\omega.$$

Von diesen legt nur ein Bruchteil $e^{-L/\lambda}$ den Weg L zurück, ohne gegen andere Moleküle zu stoßen, so daß die ganze Anzahl, die die betrachtete Flächeneinheit erreicht,

$$\frac{1}{4\pi} \frac{N\Omega}{\lambda} \cos x e^{-\frac{L}{\lambda}} dL d\omega$$

ausmacht. Vom ganzen Raumwinkel $d\omega$, der den Winkel x mit der Normale der Wand bildet, empfängt die Wand folglich

$$\int_{L=0}^{L=\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{N\Omega}{\lambda} \cos x e^{-\frac{L}{\lambda}} d\omega dL$$

Stöße in der Sekunde.

Wird die Integration ausgeführt, erhält man

$$\frac{1}{4\pi} N \Omega \cos x d\omega.$$

Wird diese Größe über den ganzen Raumwinkel 2π integriert, erhält man den bekannten Ausdruck $\frac{1}{4} N \Omega$ als die Anzahl von Stößen, die jede Flächeneinheit in der Sekunde von allen Seiten empfängt. Eine notwendige Bedingung für die Realität der oben angeführten Voraussetzungen ist es nun, daß die Flächeneinheit in jeder Sekunde ebenso viele Moleküle in der Richtung x aussendet, wie sie in derselben Richtung empfing, also die Anzahl

$$\frac{1}{4\pi} N \Omega \cos x \delta\omega;$$

wäre nämlich dies nicht der Fall, würden die Geschwindigkeitsrichtungen $+x$ und $-x$ in einem Raumelement nahe an der Wand nicht gleich häufig sein können. Das angeführte Kosinusetz muß folglich gelten sowohl für die Anzahl von Molekülen, die eine Flächeneinheit der Wand empfängt, als auch für die Anzahl, die sie in der Zeiteinheit in einer gegebenen Richtung aussendet.

Diese Forderung wird erfüllt werden, wenn die Moleküle, indem sie an die Wand anprallen, nach dem Gesetz der spiegelnden Zurückwerfung zurückgeworfen würden, oder wenn sie in genau derselben Richtung zurückgeworfen werden, in welcher sie die Wand treffen.

Die Erfahrung zeigt aber, daß keiner von diesen beiden Fällen stattfindet; denn bei spiegelnder Zurückwerfung könnten die Moleküle keine der Wand parallele Bewegungsgröße an diese abgeben, und die Strömung der Luft durch eine enge Röhre müßte dann mit derselben Geschwindigkeit ganz dicht bei der Wand, wie weiter von derselben entfernt, vor sich gehen, und umgekehrt würde ein bewegter Körper, z. B. eine in ihrem eigenen Plan schwingende Platte, der Luft keine Bewegung mitteilen können.

Wenn ein anprallendes Molekül immer von der Wand in derselben Richtung zurückgeworfen würde, in welcher es die Wand trifft, so müßte das Gesetz Poisseuilles, wie eng die Strömungsröhre auch gemacht wird, mit voller Genauigkeit

gelten; wir wissen aber aus den Versuchen Kundts und Warburgs, sowie aus denen Christiansens, daß dies nicht der Fall ist, was auch aus meinen Versuchen hervorgeht.

Falls die Richtung, in welcher ein Molekül von einer festen Wand zurückgeworfen wird, durch die Einfallrichtung bestimmt ist, muß also die Gesetzmäßigkeit von einer merkwürdig verwickelten Natur sein, weshalb mir die Annahme viel einfacher und mit der Vorstellung von der Größe der Gasmoleküle im Vergleich mit den Molekularabständen eines festen Körpers besser übereinstimmend scheint, daß die Richtung, in welcher ein Molekül aus der Wand ausgeht, von der Richtung vollständig unabhängig ist, in welcher es dieselbe trifft.

Wir wollen also annehmen, daß jedes Molekül mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem beliebigen Azimut zurückgeworfen werden kann, und daß die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Ausfallswinkels durch das Kosinusetz gegeben ist. Hieraus folgt, daß ein gegen die Wand anprallendes Molekül mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vor wie hinter der Ebene zurückgeworfen wird, welcher durch die Normale des getroffenen Punktes rechtwinkelig auf die Einfallsebene gelegt wird; hat nun eine große Anzahl (n) von Molekülen, jedes mit der Masse m , dieselbe Einfallrichtung und Geschwindigkeit c , deren Komposant, mit der Wand parallel, w ist, so empfängt also die Wand durch den Stoß dieser Moleküle die Bewegungsgröße $n m w$ in der Richtung der Wand; denn nach den Stößen gegen die Wand wird die gesamte Bewegungsgröße längs der Wand infolge des obenstehenden Null sein. Hierbei nimmt man an, daß die absolute Geschwindigkeit der Moleküle in keiner anderen gesetzmäßigen Weise als in der durch das Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gegebenen verändert wird, indem die Temperatur als konstant gedacht wird. Ist das Gas als Gesamtheit in Ruhe, gleichen sich die von der Wand von allen Seiten empfangenen Komposanten der Bewegungsgröße mit der Wand parallel aus. Ist das Gas in Strömung, bleibt der angeführte Komposant der Bewegungsgröße in der Richtung des Stromes als Rest übrig.

Finden sich N Moleküle in der Volumeneinheit, so wird eine Anzahl dN , dem Maxwellschen Geschwindigkeitsver-

teilungsgesetz gemäß, eine Geschwindigkeit zwischen c und $c + d\bar{c}$ haben, wo

$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\alpha^3} c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc.$$

Hier bedeutet α die wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Die Anzahl von Molekülen, die mit der Geschwindigkeit c eine Flächeneinheit der Wand in der Zeiteinheit trifft, ist wie bekannt $\frac{1}{4}c dN$. Diese Anzahl von Stößen gibt der Wand einen Komposanten der Bewegungsgröße von $\frac{1}{4}cmwdN$, wo w die translatorische mittlere Geschwindigkeit dieser Moleküle ist; w kann auch als die mittlere Geschwindigkeit aller dN Moleküle, mit der Wand parallel, bezeichnet werden und muß folglich c proportional, also kc gleich sein, wo k eine Konstante ist. Die übertragene Bewegungsgröße wird folglich $\frac{1}{4}kc^2m dN$. Die bei allen Stößen in der Richtung der Wand beigebrachte Bewegungsgröße (B) wird also für jeden Quadratzentimeter und für jede Sekunde

$$B = \frac{1}{4} N k \frac{4}{\pi} m \int_0^{\infty} \frac{c^4}{\alpha^3} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dc = \frac{1}{4} N k m \frac{3}{2} \alpha^2.$$

Nennen wir den arithmetischen Mittelwert der Geschwindigkeiten aller anprallenden Moleküle Ω , hat man bekanntlich

$$\Omega = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und also} \quad B = \frac{3\pi}{32} N m k \Omega^2.$$

Ω ist gleich $\Sigma c/N$ in Folge der Definition von Ω , und also

$$k\Omega = \frac{\Sigma kc}{N} = \frac{\Sigma w}{N}.$$

Diese Größe wird v genannt und ist der geometrische Mittelwert der Geschwindigkeiten aller Moleküle, muß folglich als die Geschwindigkeit der ganzen Luftmasse betrachtet werden, weshalb man die obengenannte Bewegungsgröße (B) findet

$$B = \frac{3\pi}{32} N m \Omega v.$$

Dies unter der Voraussetzung, daß die Größe v in jeder Entfernung von der Wand dieselbe ist, was, wie bekannt, nicht der Fall ist, wenn die Dimensionen des Querschnittes im Vergleich mit der mittleren Weglänge nicht mehr verschwindend klein sind.

Strömt das Gas durch eine annäherungsweise zylindrische Röhre, deren Querschnitt eine beliebige Form hat, und ist eine der Querschnittsdimensionen der Röhre im Vergleich mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle verschwindend klein, wollen wir ein Röhrenstück von der Länge dl betrachten und den Umkreis eines Normalschnittes an dieser Stelle mit o und das Areal desselben mit A bezeichnen. Die von einem solchen Röhrenstück in der Zeit dt empfangene Bewegungsgröße in der Richtung der Oberfläche wird dann sein

$$\frac{3\pi}{32} Nm \Omega v o dl dt.$$

In diesem Ausdruck wird das spezifische Gewicht der Luft $Nm = \rho$ gesetzt, und die mittlere Geschwindigkeit Ω kann infolge des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes aus der Gleichung $p = \pi/(8) Nm \Omega^2$ bestimmt werden, wo p den Druck bezeichnet. Man erhält dann die Bewegungsgröße

$$\frac{3\pi}{32} Nm \Omega v o dl dt = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho \sqrt{\frac{p}{\rho}} v o dl dt.$$

Vorausgesetzt, daß die Röhrenwand $o dl$ die ganze Bewegungsgröße empfängt, die vom Druckfall $-(dp/dl) dl$ hervorgebracht wird, d. h. die Bewegungsgröße $-A(dp/dl) dl dt$, erhält man also

$$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho \sqrt{\frac{p}{\rho}} v o = -A \frac{dp}{dl}.$$

Für die Gewichtsmenge Gas G , die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Röhre strömt, hat man $G = A \rho v$, weshalb man aus obenstehender Gleichung findet

$$G = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\rho}{p}} \frac{A^2}{o} \frac{dp}{dl}.$$

Wird die Gültigkeit von Mariottes Gesetz vorausgesetzt und das spezifische Gewicht des Gases bei der gegenwärtigen Temperatur und dem Druck 1 Dyn/cm^2 ρ_1 genannt, hat man $\rho/p = \rho_1$ und also

$$G = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\rho_1} \frac{A^2}{o} \frac{dp}{dl}.$$

Bezeichnet man die durchströmende Gasmenge nicht durch

ihr Gewicht, sondern durch das Produkt Q_t von Volumen (ccm) und Druck (Dyn/cm²), hat man $Q_t = G/\varrho_1$ und also

$$Q_t = \div \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{A^2}{o} \frac{dp}{dl}.$$

Bei stationärer Strömung muß Q_t überall in der Pore oder der Röhre denselben Wert haben. Wenn die Länge der Röhre L und die Drucke an ihren Enden p_1 und p_2 ($p_1 > p_2$) sind, erhält man

$$Q_t \frac{o}{A^2} dl = \div \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} dp,$$

woraus durch Integration

$$Q_t = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{p_1 - p_2}{\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \frac{o}{A^2} dl} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{p_1 - p_2}{W},$$

indem die Größe

$$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^L \frac{o}{A^2} dl$$

W genannt wird. Diese Größe, die nur von der Form und den Dimensionen der Röhre abhängig ist, kann dem Sprachgebrauch der Elektrizitätslehre gemäß als der Widerstand der Röhre bezeichnet werden. Der Umkreis einer kreisförmigen zylindrischen Röhre mit dem Radius R ist $o = 2\pi R$ und das Querschnittsareal $A = \pi R^2$; dieses gibt

$$W = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2L}{\pi R^3}$$

und folglich

$$Q_t = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} (p_1 - p_2).$$

Für Strömung zwischen zwei planparallelen Wänden mit dem Abstand a , der Breite b und der Länge L erhält man, wenn a im Vergleich mit b als verschwindend klein gerechnet wird, daß der Widerstand $W = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2b}{a^2 b^2} L$ ist, und also

$$Q_t = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{a^2 b}{L} (p_1 - p_2).$$

Hat der Strömungskanal andere Formen, muß man bei dem experimentalen Versuch durch Kalibrierung und Ausmessung die Größen bestimmen, auf die es hier ankommt.

Es bedarf kaum einer näheren Begründung, daß man bei stationärer Strömung durch Röhrensysteme oder Röhrenverzweigungen ein dem aus der Elektrizitätslehre bekannten Kirchhoffschen Gesetze ganz analoges verwenden kann.

Bei der Berechnung der Anzahl von Stößen $\frac{1}{4} N \Omega$, die eine Flächeneinheit in der Sekunde empfängt, wurde vorausgesetzt, daß sowohl N wie Ω in jeder Entfernung von der Wand gleich waren. Gegen die Richtigkeit dieser Voraussetzung könnte die Adsorptionerscheinung angeführt werden, durch deren Wirkung man annehmen muß, daß N gegen die Wand hin zunimmt. Die Übereinstimmung der Versuche und der Theorie zeigen aber, daß es wahrscheinlich keine Adsorption hier gibt.

Ferner wurde bei der Berechnung von $\frac{1}{4} N \Omega$ vorausgesetzt, daß die Flächeneinheit sich in einer ausgedehnten Gasmasse befindet, was aber bei der Verwendung der Formel im vorhergehenden gerade nicht der Fall war. Unter der Voraussetzung von der Gültigkeit des gefundenen Kosinusesetzes verändert aber eine feste Wand nichts in der Verteilung der Geschwindigkeitsrichtungen und der Geschwindigkeitsgrößen, woraus folgt, daß die Anzahl der Stöße unverändert bleibt, wie klein man auch den Raum macht, worin das Gas sich befindet, wenn nur der Druck konstant gehalten wird. Dieses kann übrigens leicht verifiziert werden durch eine direkte Berechnung der Anzahl von Stößen gegen die Wände eines Raumes mit einfachen geometrischen Formen, z. B. einer Kugel oder einer zylindrischen kreisförmigen Röhre.

Es wurde vorausgesetzt, daß die durch den Druckfall $(dp/dl)dl$ hervorgebrachte Bewegungsgröße ganz und gar auf das Röhrenstück dl übergehe. Wie bei Effusion erhält die Gesamtgasmasse auch hier eine lebendige Kraft durch den Druckfall hervorgebracht, so daß wir statt die dritte Gleichung p. 107 folgende Bewegungsgleichung erhalten

$$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varrho \sqrt{\frac{p}{q}} v o = - A \frac{dp}{dl} - A \varrho v \frac{dv}{dl},$$

oder, da $G = A \varrho v$

$$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{o}{A^2} G = - \frac{dp}{dl} - \frac{G^2}{A^2 \varrho_1} \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{p} \right),$$

woraus durch Integration über die ganze Röhre

$$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} G \int_o^L \frac{o}{A^2} dl = p_1 - p_2 - \frac{G^2}{A^2 \varrho_1} \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2},$$

woraus, indem

$$W = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_o^L \frac{o}{A^2} dl,$$

$$G = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{W} (p_1 - p_2) \frac{1}{1 + \frac{G}{A^2 \sqrt{\varrho_1} W} \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2}}.$$

Wenn die Größe

$$U = \frac{G}{A^2 \sqrt{\varrho_1} W} \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2}$$

im Vergleich mit 1 verschwindend klein ist, hat man

$$G = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{W} (p_1 - p_2)$$

und also

$$U = \frac{1}{A^2 W^2} \frac{(p_1 - p_2)^2}{p_1 p_2}.$$

Da eine kreisförmige zylindrische Röhre von allen zylindrischen Röhren diejenige ist, die bei einer gegebenen Länge und einem gegebenen Querschnitt den geringsten Widerstand W hat, wollen wir speziell die Größe von U bei einer solchen Röhre mit dem Radius R untersuchen. Man findet

$$U = \frac{32}{9 \pi} \frac{R^2}{L^2} \frac{(p_1 - p_2)^2}{p_1 p_2}.$$

Da der größte bei den Messungen verwendete Wert von R/L $1/600$ ist, sieht man also, daß U , wenn p_1 auch viele hundertmal so groß als p_2 ist, gegen 1 als verschwindend klein betrachtet werden muß. Da U bei einer kreisförmigen zylindrischen Röhre von gegebenem Querschnittsareal im Vergleich mit 1 verschwindend klein, und da W für eine solche Röhre das Minimum ist, so ist also — unter sonst gleichen Verhältnissen — in zylind-

drischen Röhren von irgend einer anderen Querschnittsform U im Vergleich mit 1 um so mehr verschwindend klein.

Ist der Druckunterschied $p_1 - p_2$ nur ein geringer Bruchteil von p_2 , so zeigt die Gleichung, daß die Länge der Röhre im Verhältnis zum Radius nicht groß zu sein braucht, damit man von der Geschwindigkeitsveränderung der Luftmasse absehen kann, und daß man dann auch die Theorie auf Röhren, die vom zylindrischen etwas abweichen, anwenden kann.

Endlich wurde bei der Berechnung vorausgesetzt, daß die Anzahl von gegenseitigen Zusammenstößen der Moleküle in der Röhre im Vergleich mit den Stößen gegen die Wand als verschwindend klein betrachtet werden kann. Ist dies nicht der Fall, werden die Verhältnisse komplizierter, weshalb dieser Fall später besprochen werden wird.

Im folgenden wird eine andere und mehr direkte Berechnung von der Gasmenge angeführt werden, die in der Zeiteinheit durch eine kreisförmige zylindrische Röhre mit dem Radius R und der Länge L durchströmt, wenn R im Vergleich mit L und der mittleren Weglänge verschwindend ist. Wir wollen hier von der Annahme ausgehen, die durch die vorige Berechnung bestätigt wurde, daß der Druck bei stationärer Strömung gleichmäßig durch die Röhre abnimmt. (Dies ist, wie bekannt, nicht der Fall bei Strömungen nach Poisseuilles Gesetz.) Wird ein Querschnitt der Röhre gewählt, worin die Anzahl von Molekülen im einheitlichen Volumen N_0 ist, wird man also in der Entfernung l davon die Anzahl N von Molekülen im einheitlichen Volumen durch $N = N_0 + q l$ bestimmt haben. Wir wollen außerdem davon ausgehen, daß die Moleküle, bei Stößen gegen die Wand, nach dem früher angeführten Kosinusetz zurückgeworfen werden.

Betrachtet man einen Querschnitt der Röhre in der Entfernung l vom Anfangsquerschnitt, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül ohne Zusammenstoß mit anderen Molekülen den Weg l_1 zwischen den beiden Querschnitten, eventuell in schräger Richtung, durchläuft, auf folgende Weise berechnet.

Die Wahrscheinlichkeit für die kleine Strecke $d l_1$ ist, wie bekannt, $e^{-d l_1 / \lambda_1}$, wo λ_1 die mittlere Weglänge ist, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die übrigen Strecken $d l_1$, die

sämtlich l_1 betragen, auch ohne Zusammenstoß durchgelaufen werden, wird dann

$$e^{-\frac{dl_1}{\lambda_1}} \cdot e^{-\frac{dl_1}{\lambda_2}} \cdot e^{-\frac{dl_1}{\lambda_3}} \dots = e^{-\int \frac{dl_1}{\lambda}}.$$

Bildet l_1 mit der Röhrenachse den Winkel y , hat man $l_1 \cos y = l$, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird folglich

$$e^{-\int_0^l \frac{dl}{\lambda \cos y}}.$$

Die mittlere Weglänge λ ist aber dem N umgekehrt proportional, so daß man $\lambda = k/N$, und mit leicht verständlicher Bezeichnung $\lambda_0 = k/N_0$ setzen kann. Man hat also die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^l \frac{dl}{\lambda \cos y}} &= e^{-\frac{1}{\cos y} \int_0^l \frac{N dl}{k}} = e^{-\frac{1}{k \cos y} \int_0^l \left(\frac{k}{\lambda_0} \pm q l \right) dl} \\ &= e^{-\frac{l}{\lambda_0 \cos y}} \cdot e^{\mp \frac{1}{2} \frac{q l^2}{k \cos y}}, \end{aligned}$$

wo das obere Vorzeichen für die Seite des Querschnittes gilt, wo N am größten ist.

Die Anzahl von Molekülen, die von Stößen gegen die Wand ausgehen, verhält sich zu der Anzahl, die von gegenseitigen Zusammenstößen kommen, wie

$$2 \pi R dl \frac{1}{4} N \Omega / \pi R^2 dl \frac{N \Omega}{\lambda} = \frac{\lambda}{2 R}.$$

Der Durchmesser $2R$ wurde im Vergleich mit λ als verschwindend klein vorausgesetzt, weshalb wir von den Molekülen

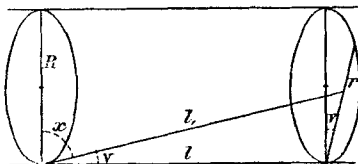


Fig. 3.

absehen können, die direkt von Zusammenstößen kommen, im Vergleich mit denjenigen, die von Stößen gegen die Wand ausgehen. Die Anzahl von Molekülen, die von der Wand des

Röhrenstückes dl kommen, und deren Bewegungsrichtung den Winkel x mit dem Radius bildet, ist infolge des Kosinusetzes

$$\frac{1}{4} 2 \pi R dl N' c' 2 \cos x \frac{d\omega}{2\pi},$$

indem N' die Anzahl von Molekülen im einheitlichen Volumen mit der Geschwindigkeit c' bezeichnet und $d\omega$ der Raumwinkel ist, in welchem ihre Bewegungsrichtungen liegen. Aus der Figur sieht man, daß

$$d\omega = \frac{r dr dv \cos y}{l_1^2}$$

ist, weshalb die Anzahl von Molekülen dn_1' , die von der Wand des Röhrenstückes dl kommen, und in der Zeiteinheit das Flächenelement $r dr dv$ passieren,

$$dn_1' = \frac{1}{2} R c' N' \cos x \cos y \frac{r}{l_1^2} dl dr dv e^{-\frac{l}{\lambda_1 \cos y}} e^{-\frac{q l^2}{2 k \cos y}}$$

wird. Wird hier $N' = N_0' + q l$ eingesetzt und wird von dn_1 der Wert dn_2' der Anzahl von Molekülen subtrahiert, die vom Röhrenstück dl in der Entfernung $-l$ vom betrachteten Querschnitt kommen, erhält man die gesuchte Restanzahl dn' .

$$\begin{aligned} dn' = & \frac{1}{2} R c' \cos x \cos y \frac{r}{l_1^2} dr dl dv \\ & \left\{ N_0 e^{-\frac{l}{\lambda_0 \cos y}} \left(e^{-\frac{q l^2}{2 k \cos y}} - e^{+\frac{q l^2}{2 k \cos y}} \right) \right. \\ & \left. + q l e^{-\frac{l}{\lambda_0 \cos y}} \left(e^{-\frac{q l^2}{2 k \cos y}} + e^{+\frac{q l^2}{2 k \cos y}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Werden die Parenthesen in Reihe entwickelt und wird nur der 0^{te} Grad benutzt und wird ferner $e^{-\frac{l}{\lambda \cos y}} = 1$ gesetzt, erhält man

$$dn' = q R c' \cos x \cos y \frac{r l}{l_1^2} dr dl dv.$$

Wird

$$\cos y = \frac{l}{l_1} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{r}{l_1} \cos v$$

eingesetzt, erhält man

$$dn' = q R c' \cos v dv r^2 dr l^2 (r^2 + l^2)^{-2} dl.$$

Durch Integration erhält man die Anzahl von Molekülen, die in der Zeiteinheit den betrachteten Querschnitt passieren.

÷ die Anzahl, die den entgegengesetzten Weg passieren, nämlich

$$n' = q R c \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos v \, dv \int_0^{2R \cos v} r^2 \, dr \int_0^{\infty} l^2 (r^2 + l^2)^{-2} \, dl = \frac{2}{3} \pi R^3 q c'.$$

Wird $q = dN'/dl$ eingesetzt, erhält man

$$n' = \frac{2}{3} \pi R^3 \frac{dN'}{dl} c'.$$

Für die Moleküle mit den Geschwindigkeiten c'' und c''' erhält man entsprechende Ausdrücke, woraus durch Addition

$$n = n' + n'' + n''' \dots = \frac{2}{3} \pi R^3 \frac{d}{dl} (N' c' + N'' c'' + N''' c''' + \dots).$$

Die Größe in der Parenthese bezeichnet die Anzahl N von Molekülen in Volumeneinheit, mit dem arithmetischen mittleren Wert Ω von sämtlichen Molekülgeschwindigkeiten multipliziert, also

$$n = \frac{2}{3} \pi R^3 \Omega \frac{dN}{dl},$$

woraus die in einer Sekunde durchströmende Gewichtsmenge

$$nm = \frac{2}{3} \pi R^3 \Omega \frac{d(Nm)}{dl} = \frac{2}{3} \pi R^3 \Omega \frac{d\rho}{dl} = \frac{2}{3} \pi R^3 \Omega \varrho_1 \frac{dp}{dl}.$$

Wird

$$\Omega = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{V_{\varrho_1}}$$

eingesetzt, erhält man für stationäre Strömung

$$nm = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} V_{\varrho_1} \frac{R^3}{L} (p_1 - p_2),$$

woraus

$$Q_t = \frac{nm}{\varrho_1} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{V_{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} (p_1 - p_2),$$

welcher Ausdruck dem früher gefundenen identisch ist.

7. Diskussion der Messungsergebnisse bei kombinierter molekularer Strömung und Reibungsströmung.

Aus den Tabellen über die für verschiedene Röhren und Gase gefundenen Werte von T , $T = Q_t/(p_1 - p_2)$ sieht man, daß T eine Funktion des mittleren Druckes p ist, wenn man den schon behandelten Fall ausnimmt, wo man für sehr kleine

Werte von p bei Veränderung desselben keine erkennbare Variation von T findet. Man sieht unmittelbar aus den Tabellen, daß T zunächst bei wachsendem p abnimmt, ein

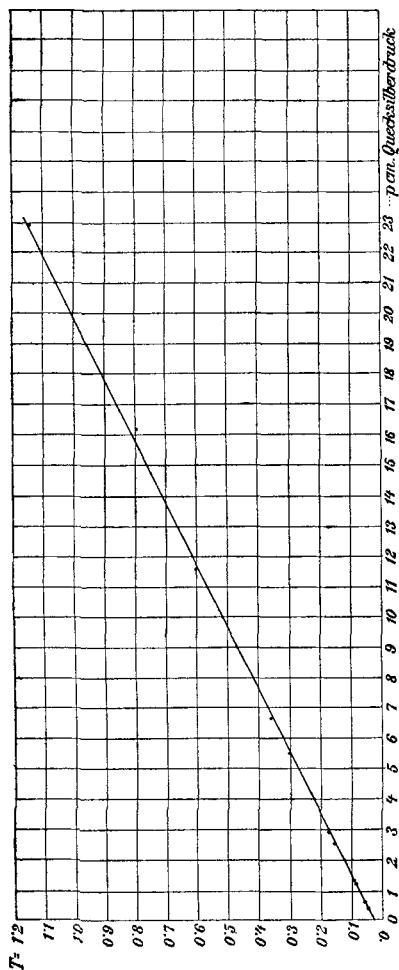


Fig. 4a. Kohlensäure. Die Röhre 4.

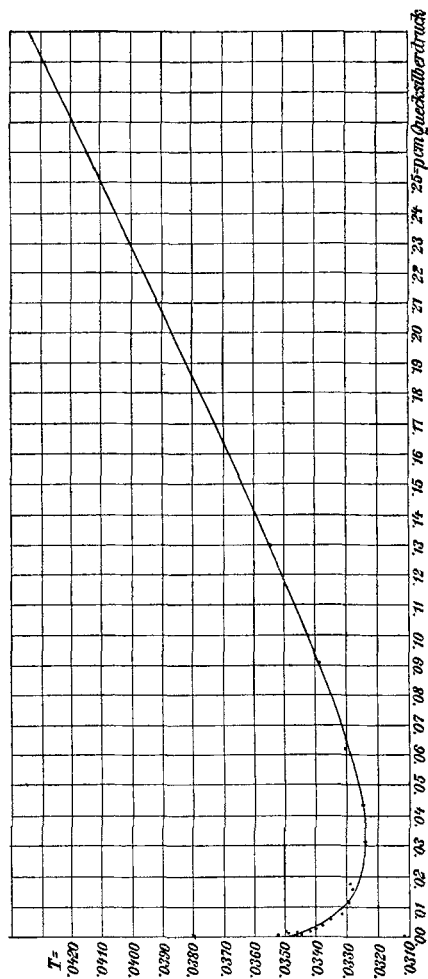


Fig. 4b. Kohlensäure. Die Röhre 4.

Minimum erreicht, um dann zuzunehmen. Die Funktionsabhängigkeit ist in den Figg. 4a und 4b graphisch dargestellt, wo der mittlere Druck p als Abszisse, die bei einheitlichem Druckunterschied durchströmende Gasmenge T als Ordinate

abgesetzt ist. Die Figuren stellen die Versuche mit der Strömung der Kohlensäure durch die Röhre 4 dar. In Fig. 4a sind die durch Versuche gefundenen Werte von T' bei großen Werten von p durch Punkte angegeben, in Fig. 4b, die nach 100mal größerem Maßstab als Fig. 1 gezeichnet ist, sind die Versuchsergebnisse für kleine Werte des mittleren Druckes auf ähnliche Weise eingeführt. Die gezeichneten Kurven, die, wie man sieht, die Versuchsergebnisse mit aller erwünschten Genauigkeit wiedergeben, stellen die empirische Formel

$$(2) \quad T = ap + b \frac{1 + c_1 p}{1 + c_2 p}$$

dar, wo die Konstanten a , b , c_1 und c_2 durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadraten gefunden sind.

Die Versuche mit den anderen Röhren und anderen Gasen werden durch Kurven ganz ähnlicher Form dargestellt, und es zeigt sich, daß die Gleichung (2) bei passender Wahl von Konstanten alle Beobachtungen darstellen kann. In der folgenden Tab. II sind die verschiedenen Werte der Konstanten für die verschiedenen Röhren und Gase aufgeführt. Für die Röhre 3 Kohlensäure und die Röhre 4 Kohlensäure sind die Konstanten durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden, für die übrigen sind sie durch graphische Ausgleichung bestimmt. Die aufgeführten Werte von b sind unabhängig von der gewählten Einheit des mittleren Druckes p , die Werte von a , c_1 und c_2 setzen voraus, daß p in Dyn/cm^2 angegeben wird.

Tabelle II.

Röhre Nr.	a $10^{-8} \times$	b	c_1 $10^{-4} \times$	c_2 $10^{-4} \times$
1 Wasserstoff	8,72	0,0734	41,34	47,81
1 Sauerstoff	4,65	0,01868	32,35	39,92
1 Kohlensäure	6,35	0,01350	39,32	50,08
2 Wasserstoff	5,11	0,03760	27,05	34,02
3 Kohlensäure	$9,18 \pm 0,10$	$0,01918 \pm 0,00014$	$51,17 \pm 8,3$	$65,18 \pm 9,0$
4 Wasserstoff	5,94	0,1702	33,47	39,29
4 Sauerstoff	2,67	0,04090	16,12	19,47
4 Kohlensäure	$3,66 \pm 0,02$	$0,03489 \pm 0,00016$	$32,35 \pm 1,85$	$39,83 \pm 2,87$

Für große Werte von p geht die Formel (2) über in

$$(3) \quad T' = ap + b \frac{c_1}{c_2}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist der Poisseuillesche Ausdruck, das zweite Glied die Gleitungskorrektion.

Bei Strömung durch kreisförmige, zylindrische Röhren gibt Poisseuilles Gesetz ohne Gleitungskorrektion

$$T = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} p.$$

Man soll also haben

$$(4) \quad a = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L}.$$

Aus dieser Gleichung wird a für die verschiedenen Röhren und die verschiedenen Gase berechnet, indem der Koeffizient η der inneren Reibung bei 25° nach den Tabellen Landolts und Börnstains folgende Werte gegeben wird. η für Wasserstoff $10^{-7} \times 919$, für Sauerstoff $10^{-7} \times 2009$ und für Kohlensäure $10^{-7} \times 1538$. Bei der Berechnung wird R^3/L durch den durch Kalibrierung und Ausmessung gefundenen Wert von

$$\frac{1}{\int_0^L \frac{dl}{R^3}}$$

ersetzt, so daß die Formel (4) in

$$\frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R}{\int_0^L \frac{dl}{R^3}}$$

übergeht, wo R im Zähler leichtigkeitshalber dem mittleren Wert des Röhrenradius gleichgesetzt wird. Die so gefundenen Werte von a werden mit „ a berechnet“ bezeichnet, und zum Vergleich mit ihnen sollen hiernach die Werte von a , „ a beobachtet“, aus der Tab. II über die Konstanten angeführt werden.

		$a \times 10^6$ beobachtet	$a \times 10^6$ berechnet
Röhre 1:	Wasserstoff	8,72	10,05
	Sauerstoff	4,65	4,60
	Kohlensäure	6,35	6,00
„ 2:	Wasserstoff	5,11	4,87
„ 3:	Kohlensäure	9,18 \pm 0,10	9,04
„ 4:	Wasserstoff	5,94	6,18
	Sauerstoff	2,67	2,825
	Kohlensäure	3,658 \pm 0,016	3,690

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, daß eine ziemlich gute Übereinstimmung herrscht zwischen den beobachteten und den aus Poisseuilles Gesetz berechneten Werten. Zu bemerken ist jedoch, daß die bei höherem Druck ausgeführten Manometermessungen nicht mit sehr großer Genauigkeit vorgenommen werden konnten, da die Durchströmung bei großen Drucken so geschwind vor sich ging, daß die Zeit zum Ablesen sehr gering wurde. Außerdem wurde nur bei den Messungen mit der Röhre 4 für die bestmögliche Bestimmung Sorge getragen. Die Abweichung zwischen den beiden Werten der Strömung des Wasserstoffs durch die Röhre 1 wird dadurch erklärt, daß hier keine Manometermessungen, sondern nur Beobachtungen bei niedrigen Drucken vorgenommen sind, so daß die Beobachtungen eine unsichere Bestimmung von a ergeben.

Daß die Größe a der Poisseuillesche Ausdruck sein muß, kann man *a priori* annehmen, und die obenstehende Zusammenstellung hat denn auch keine andere wesentliche Bedeutung, als zu bestätigen, daß der Widerstand der Röhren durch Kalibrierung und Ausmessung richtig bestimmt worden ist, was besonders für die äußerst enge Röhre 4 eine ziemlich notwendige Probe ist.

Für sehr kleine Werte von p geht die Formel (2) in $T = b$ über, wo b der Wert ist, den T bei der rein molekularen Strömung hat. Infolge des vorhergehenden hat man

$$b = \frac{1}{W \sqrt{\varrho_1}},$$

oder für kreisförmige, zylindrische Röhren

$$5) \quad b = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L}.$$

Wir wollen danach zu der Untersuchung der Bedeutung der Konstanten c_1 und c_2 in der Formel (2) übergehen. Für diese Untersuchung wollen wir zunächst die Verhältnisse betrachten, wenn die mittlere Weglänge der Luftmoleküle im Vergleich mit dem Radius der Röhre zwar gering, aber nicht verschwindend ist. Diese Betrachtung wird zu einer Bestimmung der Größe c_1/c_2 führen. Dann wollen wir die Verhältnisse betrachten, wenn der Radius der Röhre im Vergleich

mit der mittleren Weglänge gering, aber nicht verschwindend ist, durch welche Betrachtung wir eine Bestimmung der Funktionsform und eine Schätzung der Größe $c_2 - c_1$ erhalten werden.

Den ersteren dieser Fälle hat man, wenn p in der Formel (2) so groß ist, daß $(1 + c_1 p)/(1 + c_2 p)$ mit genügender Annäherung durch c_1/c_2 ersetzt werden kann. Die Formel (2) ergibt dann

$$T = a p + b \frac{c_1}{c_2}.$$

Werden hier die für kreisförmige, zylindrische Röhren geltenden Werte von a und b aus den Gleichungen (4) und (5) eingeführt, erhält man

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} p + \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} \frac{c_1}{c_2} \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} p \left(1 + \frac{32 \sqrt{2} \eta}{3 \sqrt{\pi} \sqrt{\varrho_1} R p c_2} \right). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, was nur annäherungsweise richtig ist, daß man bei dieser Strömung mit genügender Annäherung die Bewegung des Gases als eine solche betrachten kann, wie sie es sein müßte, wenn η in jeder Entfernung von der Röhrenwand den bekannten konstanten Wert hätte, während sich die Gasschicht unmittelbar bei der Wand mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt, so erhält man den bekannten Ausdruck für die Strömung, nämlich Poisseuilles Gesetz mit Gleitungskorrektur. Ist ζ der Gleitungskoeffizient $= \eta/\varepsilon$, wo ε der Koeffizient der äußeren Reibung ist, so hat man den Ausdruck

$$T = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} p \left(1 + \frac{4\zeta}{R} \right).$$

Werden die beiden Ausdrücke von T verglichen, erhält man

$$\frac{4\zeta}{R} = \frac{32 \sqrt{2} \eta c_1}{3 \sqrt{\pi} \sqrt{\varrho_1} R p c_2} \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{8 \sqrt{2} \eta c_1}{3 \sqrt{\pi} \sqrt{\varrho_1} p c_2}.$$

Aus den Versuchen Kundts und Warburgs hat man den Schluß gezogen, daß der Gleitungskoeffizient ζ der mittleren Weglänge λ fast ähnlich, vielleicht etwas kleiner als dieselbe ist. Ersetzen wir deshalb in obenstehender Formel ζ durch $k\lambda$, wo k ein echter Bruch, ungefähr $= 1$, ist, und er-

innern wir uns, daß das **Maxwellsche** Verteilungsgesetz die folgende Relation zwischen λ und η ergibt

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}}}{0,30967} \frac{\eta}{p \sqrt{q_1}},$$

so erhalten wir

$$k \frac{\sqrt{\pi} \eta}{\sqrt{8} \, 0,30967 \, p \sqrt{q_1}} = \frac{8 \sqrt{2} \eta c_1}{3 \sqrt{\pi} \sqrt{q_1} p c_2}$$

oder

$$\frac{c_1}{c_2} \frac{3 \pi k}{0,30967 \times 32} = 0,95 k.$$

Da k etwas kleiner als 1 ist, sieht man also, daß c_1/c_2 auch kleiner ist als 1 und nach den Versuchen Kundts und Warburgs als eine Größe betrachtet werden muß, die von der Natur des Gases, dem Abstand der schwingenden Platten oder dem Radius der Strömungsröhre unabhängig ist. Dasselbe Resultat geht auch aus meinen Versuchen hervor; denn wenn man aus der Tab. II über die gefundenen Konstanten das Verhältnis c_1/c_2 bildet, erhält man die folgende Reihe

	c_1/c_2
Röhre 1: Wasserstoff	0,865
„ 1: Sauerstoff	0,81
„ 1: Kohlensäure	0,785
„ 2: Wasserstoff	0,795
„ 3: Kohlensäure	0,785 $\pm 0,016$
„ 4: Wasserstoff	0,85
„ 4: Sauerstoff	0,83
„ 4: Kohlensäure	0,812 $\pm 0,006$

Man sieht, daß diese Größen sämtlich kleiner sind als 1, und daß es keine nachweisbare gesetzliche Abhängigkeit zwischen diesen Größen und dem spezifischen Gewicht oder der inneren Reibung der Gase gibt. Die Dimensionen der Röhren scheinen auch keinen Einfluß auf c_1/c_2 zu haben, was man übrigens auch nicht erwarten würde. Die Röhre 3 hat doch einen Radius, welcher mehr als viermal größer ist als der Radius der Röhre 4.

Wie früher erwähnt, sind die mit der Röhre 4 ausgeführten Beobachtungen die zuverlässigsten, und von diesen sind wiederum die Wasserstoffbeobachtungen die am wenigsten

guten, da der Wasserstoff durch die Atmolyse immer unreiner wurde, so daß, wenn mehrere Strömungsversuche ohne neues Auffüllen nacheinander ausgeführt wurden, die letzten Versuche zu geringe Werte von T ergaben. Dies geht deutlich aus der Tabellenreihe (Tab. I) über die Versuche mit Wasserstoff hervor. Aus obenstehender Tabelle über c_1/c_2 wollen wir deshalb den Schluß ziehen, daß c_1/c_2 für große Werte vom Verhältnis zwischen dem Röhrenradius und der mittleren Weglänge eine reine Zahl ist, und wir wollen

$$(6) \quad \frac{c_1}{c_2} = 0,81$$

setzen.

Ist der Radius der Röhre im Vergleich mit der mittleren Weglänge klein, aber nicht verschwindend, wollen wir eine Betrachtung benutzen, die an die Berechnung der rein molekularen Strömung anschließt, indem Korrekturen eingeführt werden, die davon herrühren, daß die gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle im Vergleich mit den Stößen gegen die Wand nicht verschwindend wenig sind.

Wir betrachten einen Normalquerschnitt der Röhre mit dem Areal A und dem Umkreis o . Man sieht leicht, daß die Formel $\frac{1}{4} N \Omega$ für die Anzahl von Stößen, die die Flächeneinheit der Wand in der Sekunde empfängt, ihre Gültigkeit behält, auch wenn außer der Molekulanzahl N in jeder Volumeneinheit noch eine Anzahl N_1 von Molekülen eines andern Gases angebracht würde; denn hierdurch würde nur die mittlere Weglänge λ verändert werden, und diese fällt, wie man sehen wird, durch die Integration weg, wodurch $\frac{1}{4} N \Omega$ gefunden wird. Wir wollen uns eine Strömungsröhre vorstellen, in welcher N oder der Partialdruck des ersteren Gases von einem Ende bis zum anderen abnimmt, während N_1 oder der Partialdruck des letzteren Gases überall in der Röhre und in beiden Behältern konstant ist. Die vom Druckfall hervorgebrachte Bewegungsgröße wird dann auf die Röhrenwand übertragen, teils direkt dadurch, daß Moleküle des ersteren Gases gegen die Wand stoßen, teils indirekt dadurch, daß Moleküle des ersteren Gases gegen Moleküle des letzteren Gases stoßen und diese dann wieder die empfangene Bewegungsgröße auf die Röhrenwand übertragen. Man kann

also annehmen, daß die Gegenwart des letzteren Gases so wirken wird, als ob die Wandfläche der Strömungsröhre vergrößert worden wäre, was zur Folge hat, daß eine kleinere Menge des ersteren Gases in der Zeiteinheit durchschlüpft. Wir denken uns sodann, daß jedes der Moleküle des letzteren Gases dieselbe Masse, Geschwindigkeit und Größe wie die Moleküle des ersteren Gases hat. Die Meinung hiermit ist mit andern Worten, daß wir im betrachteten Stück der Röhre einen Druckfall haben, welcher bewirkt, daß die geometrische Summe der Geschwindigkeiten aller Moleküle von Null verschieden ist. Aus der ganzen Anzahl von Molekülen $N + N_1$ in jedem ccm wollen wir eine geringe Anzahl N mit Geschwindigkeiten hauptsächlich in der Richtung des Druckfalles auswählen. Wir können nun diese Wahl so treffen, daß die übrigen Moleküle über den ganzen Raum gleichmäßig verteilt sind, und daß die geometrische Summe ihrer Geschwindigkeiten Null ist. Die gesamte Bewegungsgröße in der Richtung der Röhre, in welche die Moleküle, von denen N_1 in jedem ccm sind, der Röhre geben, ist dann Null, und wir brauchen im betrachteten kleinen Zeitelement nur zu untersuchen, welche Bewegungsgröße die Moleküle, von denen N in jedem ccm sind, auf die Wand übertragen, teils direkt durch Stöße gegen dieselbe, teils indirekt nach Stößen gegen andere Moleküle. Nach dem Verlauf des betrachteten kleinen Zeitelementes können wir wieder auf ähnliche Weise wie vorhin N Moleküle auswählen, so daß wir stets in jedem ccm N Moleküle haben, die zusammen eine bewegte Gasmasse bilden, welche mit den N_1 Molekülen einer ruhenden Gasmasse derselben Art gleichmäßig vermischt ist. Wenn das letztere Gas die empfangene Bewegungsgröße momentan auf die Röhre übertragen konnte, so daß es nicht selbst hindurchgetrieben würde, so leuchtet es ein, daß eine Steigerung des mittleren Druckes des ruhenden Gases eine Verkleinerung der durchströmenden Gasmenge zur Folge haben muß.

Im Röhrenstück dl werden die Moleküle des ersteren Gases in der Zeit dt $\frac{1}{4} N \Omega_0 dl dt$ mal gegen die Röhrenwand stoßen, und ist N im Vergleich mit N_1 klein, werden sie annäherungsweise $N A \frac{\Omega}{\lambda} dl dt$ mal gegen Moleküle des letzteren

Gases stoßen. Haben die Moleküle des ersteren Gases die gemeinsame Geschwindigkeit v in der Richtung der Röhre, wird also die Bewegungsgröße $\frac{1}{4} N \Omega o m v d l d t$ durch die direkten Stöße gegen die Röhrenwand auf dieselbe übertragen. Da man keine gemeinsame Geschwindigkeit v voraussetzen kann, aber das Maxwellsche Verteilungsgesetz zu berücksichtigen hat, muß der Faktor $\frac{1}{4}$ in Analogie mit der Entwicklung unter der Theorie der molekularen Strömung hier durch $3\pi/32$ ersetzt werden, so daß die übertragene Bewegungsgröße $\frac{3\pi}{32} N \Omega o m v d l d t$ wird. Haben die Moleküle des ersteren Gases bei Stößen gegen das andere Gas die durchschnittliche Geschwindigkeit v_1 in der Richtung der Röhre, empfängt also die ganze Gasmenge die Bewegungsgröße $N A \frac{\Omega}{\lambda} m v_1 d l d t$, oder wenn das Maxwellsche Verteilungsgesetz berücksichtigt wird, $\frac{3\pi}{8} N A \frac{\Omega}{\lambda} m v_1 d l d t$. Ist der Röhrendurchmesser im Vergleich mit der mittleren Weglänge sehr klein, müssen v und v_1 gleich sein, da in dem Fall von verschiedenen Gasschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten nicht die Rede sein kann. Ist der Röhrendurchmesser im Vergleich mit der mittleren Weglänge dagegen so groß, daß wegen der inneren Reibung in verschiedenen Entfernungen von der Röhrenwand verschiedene Geschwindigkeiten entstehen, so muß v_1 größer als v sein. Wir wollen aber hier diesen Fall außer Betracht lassen.

Denken wir uns nun, daß die von der Gasmasse empfangene Bewegungsgröße momentan auf die Wand übertragen wird, wird die ganze Bewegungsgröße, die das Röhrenstück dl in der Zeit dt empfängt, folglich

$$\frac{3\pi}{32} N \Omega o m v d l d t + \frac{3\pi}{8} N A \frac{\Omega}{\lambda} m v d l d t,$$

welche Bewegungsgröße der vom Druckfall $\div (dp/dl)$ hervorgerufenen, also $\div A \frac{dp}{dl} d l d t$, gleich sein soll. Wir erhalten also:

$$(7) \quad \frac{3\pi}{32} N \Omega o m v \left(1 + \frac{4A}{\lambda o} \right) = \div A \frac{dp}{dl}.$$

Das Verhältnis ist also so zu betrachten, als ob die Größe der Oberfläche $o dl$ wegen Unebenheiten um $4A/(\lambda) dl$ ge-

steigert worden wäre, welches mit grober Annäherung die Summe der Gasmoleküloberflächen in dem betrachteten Rohrstück ist, indem jedes Molekül als eine Kugel mit einem Radius doppelt so groß als der wirkliche betrachtet wird.

Wenn die von der Gasmasse empfangene Bewegungsgröße momentan auf die Röhrenwand übertragen werden könnte, würde die Gewichtsmenge Gas, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Röhre strömt, $ANmv$ werden. In der Wirklichkeit verläuft einige Zeit, nachdem ein Zusammenstoß zwischen zwei Molekülen stattgefunden hat, bis sie die Wand treffen, und während dieser Zeit haben sie zusammen die Bewegungsgröße mv in der Richtung der Röhre. Die Gasmasse in der Längeneinheit der Röhre empfing in der Zeiteinheit die Bewegungsgröße $NA(\Omega)/(\lambda)mv$, und man kann deshalb annehmen, daß sich die Masse $NA(\Omega)/(\lambda)m$ mit einer Geschwindigkeit v in der Zeit bewegt, die durchschnittlich innerhalb der beiden Zeitpunkte verläuft, wo ein Molekül des ersteren Gases ein anderes trifft und wo seine Bewegungsgröße auf die Wand übertragen wird.

Da $N + N_1$ Moleküle in jedem Kubikzentimeter sind, empfängt die Röhrenlänge l $\frac{1}{4}(N + N_1)\Omega ol$ Stöße in der Sekunde, und da sich im ganzen $(N + N_1)Al$ Moleküle in diesem Röhrenstück finden, wird also jedes Molekül in jeder Sekunde $\frac{1}{4}(\Omega o)/A$ mal gegen die Wand stoßen, oder es wird durchschnittlich eine Zeit $4A/\Omega o$ zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen gegen die Wand von jedem einzelnen Molekül verlaufen. Daß dieses richtig ist, sieht man leicht, wenn l im Vergleich mit den Dimensionen des Querschnittes, groß gewählt wird. Auf seinem Wege von einem Stoß gegen die Wand bis zum folgenden Stoß gegen die Wand wird jedes der betrachteten Moleküle eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür haben, gegen ein anderes Molekül zu stoßen, und diese Wahrscheinlichkeit ist in jedem Punkte der Bahn gleich groß. Ist die Molekülanzahl deshalb im ganzen so gering, daß man von den Fällen absehen kann, wo ein Molekül auf seinem Wege von Wand zu Wand zwei oder mehrere andere Moleküle trifft, wird die Zeit, die durchschnittlich von einem Zusammenstoß bis zu einem Stoß gegen die Wand verläuft, $k(4A)/\Omega o$ werden, wo k eine Zahl ist, die von $\frac{1}{2}$ nicht sehr verschieden ist.

In der Zeit $k(4A)/\Omega o$ hat die Gasmasse $NA(\Omega/\lambda)m$ die Geschwindigkeit v gehabt und also den Weg $k(4A/\Omega o)v$ zurückgelegt, was also der Weg ist, den die erwähnte Masse in jeder Sekunde zurücklegt, oder die mittlere Geschwindigkeit dieser Masse. Die Gasmasse, die in jeder Sekunde durch die Röhre strömt, weil das Gas nicht augenblicklich die empfangene Bewegungsgröße abgibt, wird also

$$NA \frac{\Omega}{\lambda} m k \frac{4A}{\Omega o} v = ANm v k \frac{4A}{\lambda o}.$$

Die ganze Gasmasse, die in der Zeiteinheit durch die Röhre strömt, wird folglich

$$G = ANm v \left(1 + \frac{4A}{\lambda o} k\right).$$

Wird hierin der Wert von $Nm v$ aus der Gleichung (7) eingesetzt, erhält man

$$G = -\frac{32}{3\pi} \frac{A^2}{o} \frac{dp}{d\ell} \frac{1}{\Omega} \frac{1 + \frac{4A}{\lambda o} k}{1 + \frac{4A}{\lambda o}},$$

woraus durch Einsetzen von $\Omega = \frac{\sqrt{8/\pi}}{V_{\varrho_1}}$

$$G = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{\varrho_1} \frac{A^2}{o} \frac{1 + \frac{4A}{\lambda o} k}{1 + \frac{4A}{\lambda o}} \frac{dp}{d\ell}.$$

Da wir hier voraussetzen, daß $4A/o$ im Vergleich mit λ eine kleine Größe ist, wird die Formel so umgeschrieben:

$$G = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{\varrho_1} \frac{A^2}{o} \left(1 - (1-k) \frac{4A}{\lambda o}\right) \frac{dp}{d\ell}.$$

Und dieses ergibt, auf eine kreisförmige zylindrische Röhre angewendet, wo $A = \pi R^2$ und $o = 2\pi R$,

$$T = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{V_{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} \left(1 - (1-k) \frac{2R}{\lambda}\right).$$

Im Vergleich hiermit ergibt die Gleichung (2) für kleine Werte von p

$$T = ap + b(1 - (c_2 - c_1)p) = b \left[1 - \left(c_2 - c_1 - \frac{a}{b}\right)p\right]$$

und folglich muß man haben

$$\frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} \left(1 - (1-k) \frac{2R}{\lambda} \right) = b \left[1 - \left(c_2 - c_1 - \frac{a}{b} \right) p \right].$$

Werden hier die Werte a und b aus den Gleichungen (4) und (5) eingesetzt, erhält man:

$$(1-k) \frac{2R}{\lambda} = \left(c_2 - c_1 - \frac{a}{b} \right) p$$

und da

$$p \lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}} \frac{1}{0,30967} \frac{\eta}{\sqrt{\varrho_1}}$$

ist, ergibt das

$$(8) \quad c_2 - c_1 = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R \left((1-k) \frac{2\sqrt{8} \cdot 0,30967}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{32} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) = K \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R,$$

was, wenn $k = \frac{1}{2}$, ergibt

$$c_2 - c_1 = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}} 0,30967 + \frac{3\sqrt{\pi}}{32\sqrt{2}} \right) = 0,6117 \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R$$

oder

$$c_2 - c_1 = \frac{R}{p \lambda} \left(1 + \frac{3\pi}{0,30967 + 128} \right) = 1,2378 \frac{R}{p \lambda}.$$

Zur Untersuchung der Übereinstimmung dieser Gleichungen mit der Beobachtung sind in der folgenden Zusammenfassung die Werte von $c_2 - c_1$ aufgeführt, der Tab. II über die empirisch gefundenen Konstanten entnommen, sowie der Wert von

$$0,6117 \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R,$$

aus den bekannten Werten von ϱ_1 und η und den durch Kalibrierung und Ausmessung gefundenen Werten von R berechnet.

		$c_2 - c_1$	$0,6117 \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R$
Röhre 1	Wasserstoff	0,00065	0,00065
	Sauerstoff	0,00076	0,00120
	Kohlensäure	0,00108	0,00181
„ 2	Wasserstoff	0,00070	0,00065
„ 3	Kohlensäure	$0,00140 \pm 0,00016$	0,00237
„ 4	Wasserstoff	0,00058	0,00020
	Sauerstoff	0,00034	0,00036
	Kohlensäure	$0,00075 \pm 0,00006$	0,00056

Die beiden Reihen weisen so viel Übereinstimmung auf, daß man hierin eine Bestätigung der Theorie findet, daß man für kleine Drucke $c_2 - c_1$ und damit jede dieser Größen dem $\sqrt{\varrho_1}/(\eta) R$ proportional haben muß. Ob die Konstante 0,6117 dagegen die rechte ist, wenn die Formel hinlängliche Annäherung, auch bei größeren Drucken, ergeben soll, ist zweifelhaft und muß genauer untersucht werden; wir wollen deshalb vorläufig

$$c_2 = d \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R$$

setzen, und also infolge von (6)

$$c_1 = 0,810 \frac{d \sqrt{\varrho_1}}{\eta} R,$$

wo d konstant ist. Mit den gefundenen Konstanten und mit Benutzung von (C.G.S.-)Einheiten kann die Formel (2) also geschrieben werden

$$(9) \quad T = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} p + \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}} \frac{R^3}{L} \frac{1 + 0,810 d \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R p}{1 + d \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\eta} R p}.$$

Durch Differentiation findet man für den Druck p_m , für welchen T das Minimum ist,

$$(10) \quad p_m = \frac{\eta}{d \sqrt{\varrho_1} R} \left(\sqrt{\frac{d \cdot 0,190}{m}} - 1 \right) = \frac{1}{c_2} \left(\sqrt{\frac{d \cdot 0,190}{m}} - 1 \right),$$

wo $m = 3\sqrt{\pi}/32\sqrt{2}$ bedeutet. Wird η aus (9) und (10) eliminiert, erhält man

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \pi \frac{R^3}{\sqrt{\varrho_1} L} \\ &\left[\left(\sqrt{\frac{0,190 d}{m}} - \frac{m}{d} \right) \frac{p}{p_m} + \frac{1 + 0,810 \left(\sqrt{\frac{0,190 d}{m}} - 1 \right) \frac{p}{p_m}}{1 + \left(\sqrt{\frac{0,190 d}{m}} - 1 \right) \frac{p}{p_m}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hieraus sieht man, daß das Verhältnis zwischen den Werten von T , die $p = p_m$ und $p = 0$ entsprechen, dasselbe für alle Röhren und Gase ist. Aus (10) können noch hergeleitet werden ein paar Eigenschaften, den Minimumwert von T betreffend. Erstens zeigt (10), daß $p_m \cdot c_2$ für alle Versuchsreihen

konstant ist, und führt man in die Gleichung λ_m ein, der Formel

$$p_m \lambda_m = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{0,30967} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon_1}}$$

entnommen, erhält man

$$(12) \quad \frac{R}{\lambda_m} = \frac{0,30967}{\sqrt{\frac{\pi}{8} d}} \left(\sqrt{\frac{0,190 d}{m}} - 1 \right),$$

was, in Worten ausgedrückt, besagt, daß das Verhältnis zwischen dem Röhrenradius und der mittleren Weglänge, bei welcher für denselben Druckunterschied am wenigsten Gas durch die Röhre geht, für alle Röhren und alle Gase konstant ist.

Zum Nachweis der Richtigkeit dieser Gesetze dient die Tab. III, die auf Grund der rein empirischen Formelkonstanten der Tab. II berechnet ist. Sie gibt in der ersten Kolonne das Verhältnis T_m/T_0 zwischen dem Minimalwert von T und dem Wert von T , der dem Druck Null entspricht, an.

Tabelle III.

		$\frac{T_m}{T_0}$	$p_m c_2$	$\frac{R}{\lambda_m}$
Röhre 1	Wasserstoff . . .	0,95	1,3	0,15
	Sauerstoff . . .	0,96	0,7	0,18
	Kohlensäure . . .	0,97	0,6	0,18
„ 2	Wasserstoff . . .	0,93	1,3	0,19
„ 3	Kohlensäure . . .	0,96	0,7	0,21
„ 4	Wasserstoff . . .	0,92	3,1	0,13
	Sauerstoff . . .	0,95	1,3	0,19
	Kohlensäure . . .	0,93	1,7	0,19

Man sieht, daß die Zahlen jeder Kolonne als konstant zu betrachten sind, ausgenommen die Werte von Wasserstoff (Röhre 4); daß dieselben abweichen, kann nicht wundern, da die Beobachtungen bei kleinen Drucken in dieser Versuchsreihe große, wahrscheinlich durch Atmolyse verursachte gegenseitige Abweichungen aufweisen, die die Formelkonstanten für diese Röhre in der Tab. II ziemlich unsicher machen.

Es erübrigt noch, die Konstante d in der Formel (9) zu bestimmen; dies kann dadurch geschehen, daß man einer der

Kolonnen der Tab. III einen konstanten Wert beilegt, wonach d mit Verwendung von (11), (10) oder (12) berechnet werden kann. Wegen der Funktionsform gibt sowohl T_m/T_0 als R/λ_m eine unsichere Bestimmung von d , so daß die Übereinstimmung innerhalb jeder dieser Kolonnen einer ähnlichen Sicherheit für d nicht entspricht. Wir wollen es deshalb vorziehen, $p_m c_2$ zur Bestimmung dieser Konstante zu verwenden; diese Größe ist von 1 nicht sehr verschieden, und da $p_m c_2 = 1$ gerade besonders einfache Relationen ergibt, wollen wir $p_m c_2 = 1$ setzen. Wird dies in (10) eingesetzt, erhält man

$$\sqrt{\frac{0,190 d}{m}} = 2 \quad \text{und} \quad d = \frac{4 m}{0,190} = \frac{3 \sqrt{\pi}}{0,190 \cdot 8 \sqrt{2}} = 2,47,$$

was, in (11) eingesetzt,

$$T = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{R_3}{\sqrt{q_1} L} \left[0,0475 \frac{p}{p_m} + \frac{1 + 0,810 \frac{p}{p_m}}{1 + \frac{p}{p_m}} \right]$$

ergibt, woraus folgt $T_m/T_0 = 0,952$, und aus (12) $R/\lambda_m = 0,200$, und endlich wird (9) so umgestaltet

$$(13) \quad T = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \frac{R^4}{L} \cdot p + \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{q_1}} \frac{R_3}{L} \frac{1 + 2,00 \frac{\sqrt{q_1}}{\eta} \cdot R \cdot p}{1 + 2,47 \frac{\sqrt{q_1}}{\eta} \cdot R \cdot p}$$

oder mit Einführung der mittleren Weglänge λ

$$T = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{8 \sqrt{8} \times 0,80967} \frac{R^4}{L} \frac{1}{\lambda \sqrt{q_1}} + \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{R_3}{L} \frac{1}{\sqrt{q_1}} \frac{1 + 0,810 \frac{5 R}{\lambda}}{1 + \frac{5 R}{\lambda}},$$

woraus Q_t durch Multiplikation mit dem Druckunterschied $(p_1 - p_2)$.

Es soll jedoch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß diese allgemeine Formel nur eine empirische ist und wahrscheinlich systematische Abweichungen von wirklichen Beobachtungsreihen aufweisen würde, die mit bedeutend größerer Genauigkeit ausgeführt würden, als ich es getan habe.

Als Probe der Genauigkeit, womit die Formel für T meine Versuchsreihen wiedergibt, sind die aus der Gleichung (13) berechneten Werte von T in der Tab. I über die Versuchsergebnisse unter der Rubrik T_a aufgeführt. Für diese Berechnung

sind die früher angeführten Werte der inneren Reibung benutzt. Die Größe R^3/L ist mit dem durch Kalibrierung und Ausmessung gefundenen Wert von

$$\frac{1}{\int_0^L \frac{dl}{R^3}}$$

ersetzt. Daß systematische Abweichungen vorkommen, kann natürlich nicht wundern, da Unreinheiten der benutzten Gase, Fehler der Bestimmungen der Röhrendimensionen und viele verschiedene andere Beobachtungsfehler solche hervorrufen können.

Die recht bedeutende Arbeit der Berechnung der einzelnen Werte von T aus den Manometerablesungen ist von Frl. cand. mag. Kirstine Smith ausgeführt, die auch die erwähnten Ausgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate besorgt und die übrigen stattgefundenen Berechnungen kontrolliert hat. Für die so geleistete Hilfe sage ich meinen verbindlichsten Dank.

Kobenhavns Universitet, Oktober 1908.

(Eingegangen 29. Oktober 1908.)
