1915. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 47.

1. *Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium;* von *R. Gans.*

Der theoretischen Behandlung der Frage, wie ein Lichtstrahl sich durch ein Medium mit stetig veränderlichem Brechungsexponenten fortpflanzt, stellen sich in ihrer Allgemeinheit bedeutende Schwierigkeiten in den Weg. Deshalb hat man sich bisher auf gewisse Näherungen beschränkt, die in verschiedenen Gebieten der Physik und Astrophysik anwendbar sind.

So hat Försterling[1]) die Annahme gemacht, daß der Brechungsexponent sich nur unendlich wenig verändert, aber daß diese Änderungen auf Strecken stattfinden können, welche Bruchteile einer Wellenlänge sind. Die Resultate der Rechnung wandte er auf die Lippmannsche Farbenphotographie an, bei der das Licht selbst in der empfindlichen Schicht die Inhomogenität erzeugt.

Der entgegengesetzte Grenzfall ist der, daß der Brechungsindex sich zwar beliebig stark ändern kann, daß aber die Änderung auf der Strecke einer Wellenlänge sehr klein ist.

Dieser Fall ist auf die terrestrische Strahlenbrechung und auf den Lichtdurchgang durch die Chromosphäre der Sonne ganz unbedenklich anzuwenden, da die Voraussetzung der „langsamen" Änderung des Brechungsindex bei diesen Problemen wie bei vielen anderen zutrifft.

Die Aufgabe ist von Interesse, weil seine Lösung die Frage beantwortet, ob die Grundsätze der geometrischen Optik über den Strahlengang, die bei den genannten Problemen der Astronomie resp. Astrophysik stets angewandt wurden, in optisch stetig veränderlichen Medien ihre Gültigkeit behalten, ob ferner Lichtverlust durch Reflexion auftritt, und was aus der sogenannten Totalreflektion wird.

1) K. Försterling, Phys. Zeitschr. 14. p. 265. 1913.

Während nämlich für den reinen Astronomen der Strahlen*gang* das vorwiegende Interesse verdient, wünscht der Astrophysiker sich gerade über die Intensitätsverhältnisse genau klar zu werden. Beides zusammen muß man kennen, will man z. B. das Problem des scharfen Sonnenrandes und der Helligkeit der Sonnenscheibe behandeln.

Die Frage ist auch bereits theoretisch in Angriff genommen worden, und zwar von Boussinesq[1]). Da er aber erstens die elastische Lichttheorie seinen Betrachtungen zugrunde legt, und zweitens den Fall ganz außer acht läßt, in welchem der Lichtstrahl nach den Regeln der geometrischen Optik der Schichtung parallel wird (Totalreflexion), so kann man sich mit seinen Resultaten nicht zufrieden geben.

Vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie aus kommt später Seeliger[2]) in einer Kontroverse mit Schmidt[3]) zu dem Ergebnis, daß bei der Krümmung des Strahls im inhomogenen Medium kein Lichtverlust durch Reflexion eintritt, während Schmidt sich auf den entgegengesetzten Standpunkt stellt.

Seeliger formuliert seine Sätze, ohne die Beweise mitzuteilen, auch geht er nicht auf die Totalreflexion ein, die eine besondere Untersuchung erfordert.

Außer den soeben zitierten Arbeiten habe ich, wenn ich nicht irre, vor Jahren einmal eine Berliner Dissertation zur Hand bekommen, die auf Plancks Anregung hin gemacht war, in der auch die Brechung in inhomogenen Medien behandelt worden ist, aber in der aus mathematischen Gründen der Brechungsindex als ganz spezielle Funktion der Koordinaten angenommen war. Wegen der bisher noch gänzlich unzureichenden Bibliotheksverhältnisse an den argentinischen Universitäten bin ich nicht in der Lage, genauere Angaben über diese Abhandlung zu machen.

Bei dieser Lage der Dinge dürfte es vielleicht von Interesse sein, die Fortpflanzung einer ebenen Lichtwelle durch ein inhomogenes Medium auf Grund der Maxwellschen elektromagnetischen Lichttheorie zu behandeln.

---

1) J. Boussinesq, C. R. **129**. p. 794. 1899.

2) H. Seeliger, Phys. Zeitschr. **5**. p. 237. 1904.

3) A. Schmidt, Phys. Zeitschr. **4**. p. 282, 341, 453, 476. 1903. **5**. p. 67. 1904.

Dabei wollen wir annehmen, daß das inhomogene Medium in parallelen Ebenen geschichtet sei, d. h. daß der Brechungsexponent nur von *einer* Koordinate abhänge. Die Resultate wird man dann unbedenklich auch auf den Fall übertragen können, daß die Flächen gleicher Brechungsexponenten Krümmungsradien besitzen, die groß gegen die Querschnittsdimensionen des Lichtbündels sind. Die Lichtwelle sei eben.

A. Senkrechte Inzidenz.

Die Dielektrizitätskonstante ε, und damit der Brechungsindex ν, sei reine Funktion der Koordinate y. Der elektrische Vektor $\mathfrak{E}$ der linear polarisierten ebenen Welle schwinge parallel der z-Achse, der magnetische Vektor $\mathfrak{H}$ parallel der x-Achse. Das ganze Phänomen sei von den Koordinaten x und z unabhängig. Dann ist nach den Maxwellschen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} -c\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}, \\ c\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} = -\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Abhängigkeit von t werde in der Form angenommen

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = U e^{2\pi i n t}, \\ \mathfrak{H}_x = V e^{2\pi i n t}, \end{cases}$$

unter U- und V-Funktionen von y allein verstanden.

Hierdurch gehen die Gleichungen (1) über in

$$(1') \qquad \begin{cases} -c\dfrac{dV}{dy} = \varepsilon 2\pi n i U, \\ c\dfrac{dU}{dy} = -2\pi n i V. \end{cases}$$

Elimination von V ergibt

$$(3) \qquad \frac{d^2U}{dy^2} + k^2 U = 0.$$

In dieser Gleichung ist

$$(4) \qquad k = \frac{2\pi n\sqrt{\varepsilon}}{c} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

eine Funktion von y, da ε und somit die Wellenlänge λ in dem Medium dies ist, aber diese Funktion ist nach unserer Voraussetzung im Vergleiche zur Wellenlänge langsam veränderlich. (λ_0, die Wellenlänge im Vakuum, ist natürlich eine Konstante.)

Wäre k in (3) eine Konstante (homogenes Medium), so würden die beiden Integrale lauten

$$U_1 = A e^{-iky} \quad \text{und} \quad U_2 = B e^{+iky},$$

unter A und B zwei willkürliche Konstanten verstanden.

Wir wollen im Falle des inhomogenen Mediums versuchen, ob wir der Gleichung (3) genügen können, indem wir eine ganz analoge Annahme über die Änderung der Phasen machen. Es ist klar, daß an Stelle von ky das Integral $\int^y k\,dy$ zu treten hat. Es handelt sich also um den Versuch, ob

$$U_1 = F e^{-i\int^y k\,dy} \tag{5}$$

zu einem Integral von (3) gemacht werden kann, indem man über die Amplitude F frei verfügt, jedoch annimmt, daß sie nur Funktion des langsam veränderlichen Parameters k sei.[1])

Wie man durch direktes Einsetzen erkennt, ist (5) in der Tat eine Lösung von (3), wenn F der Gleichung genügt

$$-ik'\left(2k\frac{dF}{dk} + F\right) + \frac{d^2F}{dk^2}k'^2 + \frac{dF}{dk}k'' = 0, \tag{6}$$

und k' und k'' die Bedeutung dk/dy resp. d^2k/dy^2 haben.

Da k langsam veränderlich sein soll, so können wir k'^2 und k'' vernachlässigen und erhalten

$$\frac{dF}{F} + \frac{dk}{2k} = 0$$

oder

$$F = \frac{C}{\sqrt{k}}, \tag{7}$$

und somit

$$U_1 = \frac{C}{\sqrt{k}} e^{-i\int^y k\,dy}. \tag{8}$$

Ebenso ist

$$U_2 = \frac{C'}{\sqrt{k}} e^{+i\int^y k\,dy} \tag{9}$$

ein Integral von (3).

Um sicher zu sein, daß die Vernachlässigungen wirklich berechtigt waren, setzen wir (8) resp. (9) in die linke Seite von (3) ein und erhalten

---

1) Eine Methode, die Gleichung (3) mit beliebiger Annäherung zu integrieren, werde ich demnächst an einem anderen Orte angeben.

$$\frac{d^2U}{dy^2} + k^2 U = e^{\mp i\int^y k\,dy} \cdot \frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right). \tag{10}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber gegen jedes der beiden Glieder auf der Linken zu vernachlässigen, falls $k^{-4}k'^2$ und $k^{-3}k''$ klein gegen die Einheit sind, oder mit Einführung des Brechungsexponenten $\nu = \sqrt{\varepsilon}$ nach (4): es müssen

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dy}\cdot\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\nu}\frac{d^2\nu}{dy^2}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \tag{11}$$

klein gegen Eins sein.

Diese Bedingungen (11) bilden die exakte Formulierung der Voraussetzung der „langsamen" Änderung des Brechungsexponenten. Sie sind praktisch an allen Stellen bei astrophysikalischen Problemen erfüllt, an denen der Brechungsexponent keinen Sprung aufweist.

Aus der zweiten Gleichung (1′) erhält man V aus U, und zwar wird

$$V_1 = \frac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C\left[1 - \frac{i}{2}\frac{k'}{k^2}\right] e^{-i\int k\,dy} = \frac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C e^{i\xi} e^{-i\int k\,dy}, \tag{12}$$

$$V_2 = -\frac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C'\left[1 + \frac{i}{2}\frac{k'}{k^2}\right] e^{i\int k\,dy} = -\frac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C' e^{-i\xi} e^{i\int k\,dy}, \tag{13}$$

wo ξ die kleine Größe

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{d\lambda}{dy} \tag{14}$$

ist.

Somit ergibt sich aus (2), daß sich folgende beiden Wellensysteme in dem Medium ausbreiten können:

$$\text{(15)} \qquad \text{I} \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \dfrac{C}{\sqrt{k}} e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda}\right)} \\ \mathfrak{H}_x = \dfrac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda} + \frac{1}{8\pi^2}\frac{d\lambda}{dy}\right)}, \end{cases}$$

$$\text{(16)} \qquad \text{II} \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \dfrac{C'}{\sqrt{k}} e^{2\pi i\left(nt + \int_0^y \frac{dy}{\lambda}\right)} \\ \mathfrak{H}_x = -\dfrac{c\sqrt{k}}{2\pi n} C' e^{2\pi i\left(nt + \int_0^y \frac{dy}{\lambda} - \frac{1}{8\pi^2}\frac{d\lambda}{dy}\right)}. \end{cases}$$

System I ist eine ebene, linear polarisierte Welle, die sich in Richtung der positiven y-Achse fortpflanzt. Die Amplituden des elektrischen und des magnetischen Vektors ändern sich mit dem Ort, und zwar ist [siehe (4)] die des elektrischen der Wurzel aus der am betreffenden Orte vorhandenen Wellenlänge direkt, die des magnetischen dieser Wurzel umgekehrt proportional.

Die Phasendifferenz zwischen den beiden Vektoren ist nicht, wie in homogenen Medien, Null, sondern sie hat den kleinen Betrag $\frac{1}{4\pi}\frac{d\lambda}{dy}$, der von der Inhomogenität *an der betreffenden Stelle* abhängt.

Ähnliches gilt vom System II [Gleichung (16)], welches eine nach negativen y sich fortpflanzende Welle darstellt.

Der zeitliche Mittelwert der Strahlung $\bar{\mathfrak{S}}$ berechnet sich nach Poynting aus der Formel

$$\bar{\mathfrak{S}}_y = \frac{c}{4\pi}\overline{\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x}$$

und hat für das System I den Wert

$$\bar{\mathfrak{S}}_y = \frac{c\,C^2}{16\,\pi^2\,n}, \tag{17}$$

für das System II

$$\bar{\mathfrak{S}}_y = -\frac{c\,C'^2}{16\,\pi^2\,n}, \tag{17'}$$

d. h. die Strahlung ist von y unabhängig.

Da die beiden Lösungssysteme (15) und (16) völlig unabhängig von einander sind, so bedeutet das, daß die nach positiven y sich fortpflanzende Welle nicht zwangsweise eine Strahlung in entgegengesetzter Richtung erzeugt, oder daß *keine Reflexion infolge der Inhomogenität auftritt.*

Die aus (17) folgende konstante Intensität der Strahlung ist eine notwendige Konsequenz dieser Tatsache.

Der Satz, daß keine reflektierte Welle auftritt, braucht natürlich nur in den Gültigkeitsgrenzen unserer Näherungslösung richtig zu sein, d. h. es könnte immerhin eine solche Welle existieren, deren Amplitude von der Größenordnung der kleinen Glieder (11) ist, ihre Strahlung wäre aber höchstens von der Größenordnung der Quadrate und Produkte der Terme (11).

Daß an der Grenze zweier homogener Medien Reflektion eintritt, die von den Brechungsindizes ν_1 und ν_2 an beiden Seiten der Grenzfläche abhängt, ist eine bekannte Tatsache. Das Reflexionsvermögen hat den Betrag

$$\frac{S_r}{S_i} = \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\right)^2.$$

Wir wollen uns jetzt fragen, was passiert, wenn im Falle eines inhomogenen Mediums an der Stelle $y = 0$ zwar der Brechungsexponent und somit k konstant bleibt, dagegen sein Differentialquotient nach y einen Sprung erleidet (vgl. Fig. 1).

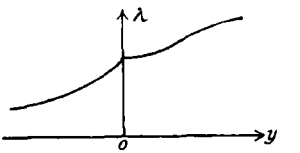

Fig. 1.

Dann gilt für $y < 0$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{C}{\sqrt{k}} e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda}\right)} + \frac{C'}{\sqrt{k}} e^{2\pi i\left(nt + \int_0^y \frac{dy}{\lambda}\right)}$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{c\sqrt{k}}{2\pi n}$$

$$\left[C e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda} + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_1\right)} - C' e^{2\pi i\left(nt + \int_0^y \frac{dy}{\lambda} - \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_1\right)}\right]$$

und für $y > 0$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{D}{\sqrt{k}} e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda}\right)}$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{c\sqrt{k}}{2\pi n} D e^{2\pi i\left(nt - \int_0^y \frac{dy}{\lambda} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_2\right)}.$$

Da für $y = 0$ $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_x$ stetig sein müssen, so folgt, daß das Reflexionsvermögen, d. h. das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Strahlung den sehr kleinen Wert haben muß

$$\frac{S_r}{S_i} = \frac{1}{64\pi^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_2\right]^2.$$

B. Schiefe Inzidenz.

1. *Der Lichtstrahl sei in der Einfallsebene polarisiert.*

Dann gelten die Gleichungen

$$(18)\qquad \begin{cases} c\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} \\ c\,\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} \\ c\,\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Machen wir den Ansatz

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = e^{2\pi i n t} e^{ikax}\, U \\ \mathfrak{H}_x = e^{2\pi i n t} e^{ikax}\, V \\ \mathfrak{H}_y = e^{2\pi i n t} e^{ikax}\, W, \end{cases}$$

wo U, V, W Funktionen von y sind und α auch von y abhängen kann, so folgen die Gleichungen

$$(20)\qquad \begin{cases} c\left(ik\alpha W - \frac{dV}{dy} - ixV\frac{d(k\alpha)}{dy}\right) = 2\pi n i \varepsilon U \\ c\left(\frac{dU}{dy} + ixU\frac{d(k\alpha)}{dy}\right) = -2\pi n i V \\ cik\alpha U = 2\pi n i W. \end{cases}$$

Es ist klar, daß in den ersten beiden dieser Gleichungen die Faktoren von x verschwinden müssen, da die anderen Glieder reine Funktionen von y sind, d. h. es muß sein

$$(21)\qquad k\alpha = \text{Const.},$$

und die Gleichungen (20) gehen in die einfachere Form über.

$$(20')\qquad \begin{cases} c\left(ik\alpha W - \frac{dV}{dy}\right) = 2\pi n i \varepsilon U \\ c\frac{dU}{dy} = -2\pi n i V \\ cik\alpha U = 2\pi n i W. \end{cases}$$

Gleichung (21) bedeutet nach (4)

$$(22)\qquad \alpha v = \text{Const.}$$

Wir nehmen erstens $\alpha < 1$ *an.*

Durch Elimination von V und W aus den Gleichungen (20′) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{d y^2} + k^2 \beta^2 U = 0, \tag{23}$$

wenn zur Abkürzung

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{24}$$

eingeführt wird.

Gleichung (23) ist der Gleichung (3) ganz analog. Nur steht hier $k\beta$, wo dort k stand, also sind auch die Integrale analog, d. h. sie haben die Form [vgl. (8) und (9)]

$$U_1 = \frac{C}{\sqrt{k\beta}} e^{-i\int_0^y k\beta\, dy} \tag{25}$$

$$U_2 = \frac{C'}{\sqrt{k\beta}} e^{i\int_0^y k\beta\, dy} \tag{26}$$

Diese Ausdrücke sind mit der gewünschten Näherung Integrale, solange α nicht gleich 1 und somit β nicht gleich Null wird. Nähert sich aber β der Null, so hören (25) und (26) auf, Lösungen von (23) zu sein, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann [vgl. (10)].

Ob der Fall $\alpha = 1$ und $\alpha > 1$ an irgendeiner Stelle eintreten kann, ergibt sich ohne weiteres aus (22), falls an einer beliebigen Stelle der Wert von α gegeben ist, da v als Funktion von y als bekannt vorausgesetzt wird.

Um β eindeutig zu definieren, setzen wir fest, daß

$$\beta = \sqrt[+]{1 - \alpha^2}, \tag{27}$$

d. h. die positive Wurzel aus $1 - \alpha^2$ sein soll.

Somit ergeben sich nach (25) und (26) aus (19) und der zweiten und dritten Gleichung (20′) die beiden Lösungssysteme

$$\text{(28)}\quad \text{I.}\begin{cases} \mathfrak{E}_z = \Re\mathfrak{e}\, \dfrac{C}{\sqrt{k\beta}} e^{i\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta\, dy\right)} \\ \mathfrak{H}_x = \Re\mathfrak{e}\, \dfrac{C}{\sqrt{k\beta}} \dfrac{ck\beta}{2\pi n} e^{i\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta\, dy + \eta\right)} \\ \mathfrak{H}_y = \Re\mathfrak{e}\, \dfrac{C}{\sqrt{k\beta}} \dfrac{ck\alpha}{2\pi n} e^{i\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta\, dy\right)} \end{cases}$$

und

$$(29)\quad \text{II.}\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \quad \Re\mathrm{e}\,\dfrac{C'}{\sqrt{k\beta}}\,e^{\,i\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\,dy\right)} \\ \mathfrak{H}_x = -\Re\mathrm{e}\,\dfrac{C'}{\sqrt{k\beta}}\,\dfrac{ck\beta}{2\pi n}\,e^{\,i\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\,dy - \eta\right)} \\ \mathfrak{H}_y = \quad \Re\mathrm{e}\,\dfrac{C'}{\sqrt{k\beta}}\,\dfrac{ck\alpha}{2\pi n}\,e^{\,i\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\,dy\right)}, \end{cases}$$

wo η die kleine Größe

$$(30)\qquad \eta = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{k\beta}\right)$$

bedeutet.

Wir sehen, daß auch im Falle schiefer Inzidenz die nach positiven y sich fortpflanzende Welle I gänzlich unabhängig von der nach negativen y laufenden Welle II ist, daß also die Inhomogenität keine Reflexion bedingt.

Ferner ergibt sich, daß in jedem Punkte die Größen α und β die Richtungskosinus der Wellennormale bedeuten, und *daß nach* (22) *das Snelliussche Brechungsgesetz wie in homogenen Medien gültig ist.*

Man erkennt das durch Differentiation der Phase

$$\Phi = 2\pi n t + k\alpha x \mp \int_0^y k\beta\,dy$$

und Nullsetzung von $d\Phi$, nämlich

$$d\Phi = 2\pi n\,dt + k\alpha\,dx \mp k\beta\,dy.$$

Das gilt auch für die Komponente $\mathfrak{H}_x$, bei der noch die Phasendifferenz η auftritt, da $d\eta/dy$ als Größe zweiter Ordnung vernachlässigt werden kann.

Die einzigen Unterschiede gegenüber der Lichtausbreitung in homogenen Medien ist erstens die kleine Phasendifferenz η [siehe Gleichung (30)] zwischen $\mathfrak{H}_x$ einerseits und $\mathfrak{E}_z$ sowie $\mathfrak{H}_y$ andererseits, infolge deren, bei einer linearen Schwingung von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ eine etwas elliptische Schwingung ausführt, so zwar, daß im zeitlichen Mittel die Feldstärken senkrecht auf der Richtung der Wellennormalen stehen.

Zweitens hängen die Amplituden der Feldstärken in der durch (28) und (29) gekennzeichneten Weise vom Ort ab.

Der zeitliche Mittelwert des Strahlungsvektors ist

$$(31)\quad \begin{cases} \text{für das System I} \\ \bar{\mathfrak{S}}_x = -\dfrac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\operatorname{tg}\psi \\ \bar{\mathfrak{S}}_y = +\dfrac{c^2 C^2}{16\pi^2 n} \\ \bar{\mathfrak{S}}_z = 0 \\ \text{für das System II} \\ \bar{\mathfrak{S}}_x = -\dfrac{c^2 C'^2}{16\pi^2 n}\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{c^2 C'^2}{16\pi^2 n}\operatorname{tg}\psi \\ \bar{\mathfrak{S}}_y = -\dfrac{c^2 C'^2}{16\pi^2 n} \\ \bar{\mathfrak{S}}_z = 0 \end{cases}$$

unter ψ den Einfallswinkel (Winkel zwischen Wellennormale und y-Achse) verstanden, so daß $\alpha = \sin\psi$; $\beta = \cos\psi$.

Für den absoluten Betrag der Strahlung S folgt

$$(32)\qquad S_{\mathrm{I}} = \frac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\cdot\frac{1}{\cos\psi}; \quad S_{\mathrm{II}} = \frac{c^2 C'^2}{16\pi^2 n}\cdot\frac{1}{\cos\psi}$$

und für die Richtung des Strahls

$$(32')\qquad \frac{\bar{\mathfrak{S}}_x}{\bar{\mathfrak{S}}_y} = \mp \operatorname{tg}\psi$$

d. h. die *Strahlung ist dem Kosinus des Einfallswinkels umgekehrt proportional,* oder die Normalkomponente der Strahlung ist konstant.

Strahlung und Wellennormale haben dieselbe Richtung.

Wir nehmen zweitens $\alpha > 1$ *an.*

In welchen Teilen des Strahlungsfeldes dieses eintritt, ergibt sich ohne weiteres aus der Gleichung (22).

Setzen wir

$$(33)\qquad \alpha^2 - \beta'^2 = 1$$

und definieren eindeutig

$$(34)\qquad \beta' = \underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

so sieht man sofort, daß

$$(35)\qquad \begin{cases} U_3 = \dfrac{D}{\sqrt{k\beta'}}\, e^{-\int_0^y k\beta'\,dy} \\ U_4 = \dfrac{D'}{\sqrt{k\beta'}}\, e^{+\int_0^y k\beta'\,dy} \end{cases}$$

Lösungen der Gleichung (23) darstellen.

Befindet sich die Strahlungsquelle am Orte $y = -\infty$ und erstreckt sich das Gebiet, in dem $\alpha > 1$ ist, bis nach $y = +\infty$, so gilt nur der Wert U_3, da U_4 für $y = +\infty$ selbst unendlich groß würde, während U_3 für $y = +\infty$ sich der Null nähert, somit erlaubte Werte der Feldstärken gibt.

Die Feldstärken haben nach (35), (19) und (20′) folgende Werte:

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \Re\mathrm{e}\,\dfrac{D}{\sqrt{k\beta'}}\, e^{-\int_0^y k\beta'\,dy}\, e^{i(2\pi n t + k\alpha x)} \\ \mathfrak{H}_x = \Re\mathrm{e}\,\dfrac{D\,e^{-i\pi/2}}{\sqrt{k\beta'}}\,\dfrac{c\,k\,\beta'}{2\pi n} \\ \qquad\qquad \left[1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{k\beta'}\right)\right] e^{-\int_0^y k\beta'\,dy}\, e^{i(2\pi n t + k\alpha x)} \\ \mathfrak{H}_y = \Re\mathrm{e}\,\dfrac{D}{\sqrt{k\beta'}}\,\dfrac{c\,k\,\alpha}{2\pi n}\, e^{-\int_0^y k\beta'\,dy}\, e^{i(2\pi n t + k\alpha x)} \end{cases}$$

In diesem Gebiete $\alpha > 1$ ist von einer ebenen Welle nicht mehr die Rede. Da $k\beta'$ einen beliebig kleinen Wert haben kann, so können die Feldstärken bis zu beliebig großen Werten von y hin endlich bleiben.

Bilden wir jedoch die mittlere Strahlung, so erhalten wir

$$(37)\qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{S}}_x = -\dfrac{c^2\,|D|^2}{16\,\pi^2\,n}\,\dfrac{\alpha}{\beta'}\, e^{-2\int_0^y k\beta'\,dy} \\ \bar{\mathfrak{S}}_y = 0 \\ \bar{\mathfrak{S}}_z = 0 \end{cases}$$

und sehen, daß der zeitliche Mittelwert der Normalkomponente $\bar{\mathfrak{S}}_y$ der Strahlung Null ist; d. h. in normaler Richtung pendelt die elektromagnetische Energie wie im Falle homogener Medien

nur hin und her, ohne sich dauernd in einem bestimmten Sinne fortzupflanzen.

Tangentiale Strahlung $\mathfrak{S}_x$ tritt auf, nimmt aber mit wachsendem y an Stärke ab.

Durch Einsetzen der Werte von U aus (35) in die Differentialgleichung (23) erkennt man, daß diese Ausdrücke aufhören, Lösungen zu sein, wenn $\alpha = 1$ wird. Dieser Fall verlangt also eine besondere Behandlung, und er verdient auch besonderes Interesse, weil er die Frage entscheidet, was aus der Lichtwelle wird, wenn ihre Fortpflanzungsrichtung nach den Gesetzen der geometrischen Optik parallel der Schichtung geworden ist.

Totalreflexion ($\alpha = 1$).

Um den Fall $\alpha = 1$ zu behandeln, nehmen wir an, daß der Brechungsexponent und somit auch k eine mit wachsendem y stets abnehmende Funktion sei. Eine ebene Lichtwelle durchstrahle dieses Medium schief, von $y = -\infty$ kommend.

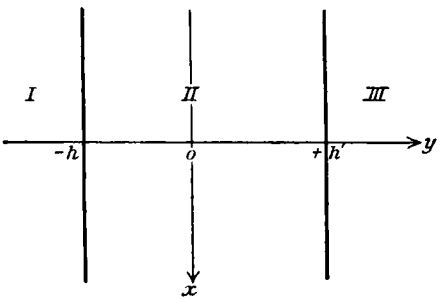

Fig. 2.

Da nach (21) das Produkt ka konstant ist, so wird α mit y wachsen, bis es an einer Stelle den kritischen Wert $\alpha = 1$ erreicht hat. Wir spezialisieren das Problem nicht, wenn wir willkürlich dieser kritischen Ebene die Koordinate $y = 0$ beilegen.

Wir teilen den ganzen Raum durch die beiden Ebenen $y = -h$ und $y = +h'$ in drei Teile. h und h' seien willkürliche Werte, die allerdings gewissen, später zu formulierenden Einschränkungen zu genügen haben.

Im Raume I, d. h. für $y < -h$, ist $\alpha < 1$. Dort gelten demnach die bereits früher gefundenen beiden Lösungen der Differentialgleichung (23) [vgl. (25) und (26)]

$$(38)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{C}{\sqrt[+]{k\beta}}\, e^{-i\int_0^y k\beta\, dy} \\ U_2 = \dfrac{C'}{\sqrt[+]{k\beta}}\, e^{i\int_0^y k\beta\, dy} \end{cases},$$

wo

$$(39)\qquad \beta = \sqrt[+]{1-\alpha^2}$$

bedeutet.

Die $\frac{\text{erste}}{\text{zweite}}$ Gleichung (38) stellt eine Welle dar, welche sich nach $\frac{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ y hin fortpflanzt.

Im Raume III, d. h. für $y > +h'$, ist $\alpha > 1$. Dort gilt die erste der beiden Gleichungen (35)

$$(40)\qquad U_3 = \frac{D}{\sqrt[+]{k\beta'}}\, e^{-\int_0^y k\beta'\, dy}$$

mit

$$(41)\qquad \beta' = \sqrt[+]{\alpha^2 - 1},$$

während die zweite Lösung der Gleichungen (35) zu verwerfen ist, da sie eine nach $y = -\infty$ hin laufende Welle darstellt, welche für $y = +\infty$ unendlich große, somit unzulässige Werte der Feldstärke liefern würde.

Es handelt sich also nur noch darum, im Raume II, d. h. für $-h < y < +h'$, eine Lösung der Differentialgleichung (23)

$$(42)\qquad \frac{d^2U}{dy^2} + k^2\beta^2 U = 0$$

zu finden, die in diesem Raume endlich und stetig ist, und die, damit sämtliche Komponenten der Feldstärken auch für $y = -h$ und $y = +h'$ stetig bleiben [siehe die Gleichung (20′)], mit ihrem ersten Differentialquotienten für $y = -h$ in den dort geltenden Wert von $U_1 + U_2$ und für $y = +h'$ in den dort geltenden Wert von U_3 übergehen müssen, wobei C als gegeben betrachtet werden soll, während über C' und D noch frei verfügt werden kann.

Im Punkte $y = 0$ ist $\alpha = 1$; in der Nähe dieser Stelle gelte die Entwicklung

$$k^2(1 - \alpha^2) = -ay + \ldots, \tag{43}$$

wo a eine positive Konstante ist, da für $y \gtrless 0$ $\alpha \gtrless 1$ sein soll.

Nun mögen h und h' einerseits so klein angenommen werden, daß man *im ganzen Raume* II die höheren Glieder der Entwicklung (43) vernachlässigen kann, andererseits so groß, daß an den Grenzen des Raumes II

$$(44)\quad \begin{cases} \text{für negative } y\text{:} & \frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3} = -\int_0^y \sqrt[+]{-ay}\,dy = -\int_0^y k\beta\,dy \\ \text{für positive } y\text{:} & \frac{2}{3}\sqrt[+]{ay^3} = \int_0^y \sqrt[+]{ay}\,dy = \int_0^y k\beta'\,dy \end{cases}$$

groß gegen die Einheit sind.

Ob diese beiden Beschränkungen der sonst willkürlich wählbaren Werte von h und h' möglich sind, hängt natürlich von der Art der gegebenen Funktion k ab. Da $k\alpha$ konstant ist, so ist die erste Beschränkung um so leichter zu erfüllen, je eher k^2 als Funktion von y in der Nähe von $y = 0$ sich linear verhält.

Um die zweite Beschränkung auf andere Form zu bringen, differentiiere man (43) nach y und berücksichtige, daß $k = (2\pi\nu/\lambda_0)$ (ν Brechungsexponent, λ_0 Wellenlänge im Vakuum); so erhält man für $y = -h$

$$4\pi^2 \frac{h^2}{\lambda_0^2} \cdot \frac{d\nu^2}{dy} h = (ay^3)_{y=-h},$$

also muß nach (44)

$$(45)\quad \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right)_{y=-h} = \frac{4\pi}{3}\frac{h}{\lambda_0}\sqrt{-\frac{d\nu^2}{dy}h} \\ \text{und ebenso} \\ \left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{ay^3}\right)_{y=+h'} = \frac{4\pi}{3}\frac{h'}{\lambda_0}\sqrt{-\frac{d\nu^2}{dy}h'} \end{cases}$$

groß gegen Eins sein.

Um sich von dem hohen Näherungsgrad und der Bedeutungslosigkeit der soeben eingeführten Beschränkungen ein konkretes Bild machen zu können, nehmen wir ein Medium

an, das dieselbe Brechbarkeit und Inhomogenität hat, wie die Luft in der Nähe der Erdoberfläche und berechnen mittels der Lorentz-Lorenzschen Formel sowie der Barometerformel, daß in diesem Medium

$$\nu^2 = 1{,}000589 - 7{,}36 \cdot 10^{-8} y + 4{,}54 \cdot 10^{-12} y^2$$

ist, y in Metern gemessen. Dann ergibt sich für gelbes Licht, daß

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dy}\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 = 12 \cdot 10^{-30}; \quad \frac{1}{\nu}\frac{d^2\nu}{dy^2}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 = 4{,}0 \cdot 10^{-26}$$

in der Tat sehr klein sind, wie Formel (11) es verlangt.

Wählen wir ferner $h = h' = 1$ m, so ist der Fehler in ν^2, den wir begehen, wenn wir im Raume II ν^2 als lineare Funktion auffassen, $4{,}5 \cdot 10^{-12}$, und es ist [siehe (45)]

$$\frac{4\pi}{3}\frac{h}{\lambda_0}\sqrt{-\frac{d\nu^2}{dy}h} = 1930$$

in der Tat sehr groß, da, wie wir im folgenden sehen werden, das „groß" nur so groß bedeutet, daß man sich auf das erste Glied der semikonvergenten Reihen der Besselschen Funktionen der Ordnung $^1/_3$ beschränken darf.

Die Bedingungen sind somit so glänzend erfüllt, daß man unbedenklich die Resultate auch auf viel inhomogenere Medien, wie z. B. die Chromosphäre der Sonne, anwenden darf.

Unter den im vorstehenden formulierten Bedingungen geht im Raume II Gleichung (42) mittels (43) in

$$\frac{d^2U}{dy^2} - a y U = 0 \tag{46}$$

über, deren Integral

$$U = \sqrt{y}\, Z_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-a y^3}\right) \tag{47}$$

ist, wo $Z_{1/3}$ eine Besselsche Funktion der Ordnung $^1/_3$ bedeutet.[1])

Bezeichnet J die Zylinderfunktion erster Art, N die zweiter Art, H die Hankelsche Zylinderfunktion in der Bezeichnungsweise von Jahnke und Emde (l. c.), an die wir uns im folgenden durchweg halten, so ist für sehr große reelle Argumentwerte[2])

$$\left\{\begin{aligned} H^{(1)}_{1/3}(x) &= J_{1/3}(x) + i N_{1/3}(x) = \frac{e^{i(x - 5/12\pi)}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}} \\ H^{(2)}_{1/3}(x) &= J_{1/3}(x) - i N_{1/3}(x) = \frac{e^{-i(x - 5/12\pi)}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

1) Vgl. z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionstafeln. p. 167. 4. Gleichung. Leipzig und Berlin 1909.

2) Ibid. p. 98 u. 95.

Setzen wir

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3},$$

so folgt für negative sehr große Werte von y mit Berücksichtigung der ersten Gleichung (44)

$$(49)\quad \begin{cases} H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right) = \dfrac{e^{i\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}-\frac{5}{12}\pi\right)}}{\sqrt{\pi/3}\sqrt[4]{-a y^3}} = \dfrac{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}{\sqrt{\pi/3}}\dfrac{e^{-i\int_0^y k\beta\, dy}}{\sqrt[4]{-a y^3}}, \\ H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right) = \dfrac{e^{-i\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}-\frac{5}{12}\pi\right)}}{\sqrt{\pi/3}\sqrt[4]{-a y^3}} = \dfrac{e^{\frac{5}{12}\pi i}}{\sqrt{\pi/3}}\dfrac{e^{i\int_0^y k\beta\, dy}}{\sqrt[4]{-a y^3}}, \end{cases}$$

also

$$(50)\quad \begin{cases} \sqrt[+]{-y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right) = \dfrac{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}{\sqrt{\pi/3}}\dfrac{e^{-i\int_0^y k\beta\, dy}}{\sqrt[+]{k\beta}}, \\ \sqrt[+]{-y}\, H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right) = \dfrac{e^{\frac{5}{12}\pi i}}{\sqrt{\pi/3}}\dfrac{e^{i\int_0^y k\beta\, dy}}{\sqrt[+]{k\beta}}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese asymptotischen Ausdrücke mit den im Raume I gültigen Werten (38), so erhält man für negative y im Raume II mit Berücksichtigung der Stetigkeit der Funktion U an der Grenze der Räume I und II

$$(51)\quad \begin{cases} U_1 = C\sqrt{\pi/3}\, e^{5/12\,\pi i}\sqrt[+]{-y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right) \\ U_2 = C'\sqrt{\pi/3}\, e^{-5/12\,\pi i}\sqrt[+]{-y}\, H^{(2)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt[+]{-a y^3}\right). \end{cases}$$

Für große positive x gelten die asymptotischen Formeln[1])

$$(52)\qquad e^{2\pi i/3} H^{(1)}_{1/3}(i x) = e^{-2\pi i/3} H^{(2)}_{1/3}(-i x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}.$$

Da $H^{(1)}_{1/3}(i x)$ und $H^{(2)}_{1/3}(-i x)$ konjugiert komplex[2]), nach Gleichung (61) (siehe unten) aber bis auf einen konstanten

1) Ibid. p. 100.
2) Ibid. p. 95.

multiplikativen Faktor $e^{2\pi i/3}$ identisch sind, so brauchen wir nur $H^{(1)}_{1/3}$ zu behandeln und erhalten aus (52) für $x = \frac{2}{3}\sqrt{a y^3}$ mit Berücksichtigung von (44) für positive große y im Raume II

$$(53)\quad \lim_{y=\infty} \sqrt[+]{y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3} i \sqrt[+]{a y^3}\right) = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{\sqrt{\pi/3}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\sqrt{a y^3}}}{\sqrt[4]{a y}} = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{\sqrt{\pi/3}} \frac{e^{-\int_0^y \sqrt{k\beta'}\, dy}}{\sqrt[4]{k\beta'}}.$$

Vergleicht man diesen asymptotischen Ausdruck mit dem im Raume III gültigen Werte (40), so erhält man für positive y im Raume II mit Berücksichtigung der Stetigkeit von U an der Grenze der Räume II und III

$$(54)\quad U_3 = D\sqrt{\pi/3}\, e^{2\pi i/3} \sqrt[+]{y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3} i \sqrt[+]{a y^3}\right)$$

Die Konstanten C' und D in (51) und (54) sind bei gegebenem C so zu bestimmen, daß für $y = 0$ $U_1 + U_2$ stetig mit seinem ersten Differentialquotienten in U_3 übergeht.

Zu dem Zwecke machen wir die folgenden Reihenentwicklungen[1]):

$$(55)\quad \begin{cases} J_{1/3}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i x}{2}\right)^{2\nu}}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu+\frac{1}{3})} \\ J_{-1/3}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i x}{2}\right)^{2\nu}}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu-\frac{1}{3})} \end{cases}$$

Setzen wir

$$(56)\quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} i u^{3/2} \\ u = a^{1/3} y \end{cases}$$

in (55) ein, so wird

$$(57)\quad \begin{cases} \sqrt{u}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3} i u^{3/2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt[3]{3}\,\Pi(\frac{1}{3})} P(u) \\ \sqrt{u}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} i u^{3/2}\right) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt[3]{3}}{\Pi(-\frac{1}{3})} Q(u) \end{cases}$$

1) Ibid. p. 90.

wo

$$(58)\qquad \begin{cases} P(u) = u\left(1 + \frac{u^3}{12} + \frac{u^6}{504} + \frac{u^9}{45360} + \cdots\right) \\ Q(u) = 1 + \frac{u^3}{6} + \frac{u^6}{180} + \frac{u^9}{12960} + \cdots \end{cases}$$

bedeuten.

Zur Abkürzung setzen wir

$$(59)\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{3}\,\Pi(\frac{1}{3})} = c_1 = 0{,}7762\,; \qquad \frac{\sqrt[3]{3}}{\Pi(-\frac{1}{3})} = c_2 = 1{,}065$$

ein, benutzen die Formeln[1])

$$(60)\qquad \begin{cases} H^{(1)}_{1/3} = \dfrac{i}{\sin\frac{\pi}{3}}\left[e^{-i\pi/3} J_{1/3} - J_{-1/3}\right] \\ H^{(2)}_{1/3} = -\dfrac{i}{\sin\frac{\pi}{3}}\left[e^{i\pi/3} J_{1/3} - J_{-1/3}\right] \end{cases}$$

und erhalten so die Potenzreihe

$$(61)\qquad \sqrt{a^{1/3} y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3} i \sqrt{a y^3}\right) = \frac{2 e^{i\pi/3}}{\sqrt{3}}\left[c_1 P(u) - c_2 Q(u)\right],$$

die für $\lim y = 0$ in

$$(62)\qquad \lim_{y=0} \sqrt{a^{1/3} y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3} i \sqrt{a y^3}\right) = \frac{2 e^{i\pi/3}}{\sqrt{3}}\left(c_1 a^{1/3} y - c_2\right)$$

übergeht.

Ebenso wird, wenn wir

$$(63)\qquad v = -a^{1/3} y = -u$$

setzen,

$$(64)\qquad \begin{cases} \sqrt{v}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3} v^{3/2}\right) = c_1 v\left(1 - \frac{v^3}{12} + \frac{v^6}{504} - \frac{v^9}{45360} + \cdots\right) = -c_1 P(u) \\ \sqrt{v}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} v^{3/2}\right) = c_2 \left(1 - \frac{v^3}{6} + \frac{v^6}{180} - \frac{v^9}{12960} + \cdots\right) = c_2 Q(u), \end{cases}$$

also nach (60)

$$(65)\qquad \begin{cases} \sqrt{-a^{1/3} y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-a y^3}\right) = \dfrac{2 e^{-i\pi/2}}{\sqrt{3}}\left[e^{-i\pi/3} c_1 P(u) + c_2 Q(u)\right] \\ \sqrt{-a^{1/3} y}\, H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-a y^3}\right) = \dfrac{2 e^{i\pi/2}}{\sqrt{3}}\left[e^{i\pi/3} c_1 P(u) + c_2 Q(u)\right]; \end{cases}$$

1) Ibid. p. 95.

diese Reihen gehen für $\lim y = 0$ über in

$$(66)\quad \begin{cases} \lim\limits_{y=0} \sqrt{-a^{1/3}y}\, H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-a y^3}\right) = \frac{2e^{-i\pi/2}}{\sqrt{3}}\left(e^{-i\pi/3} c_1 a^{1/3} y + c_2\right) \\ \lim\limits_{y=0} \sqrt{-a^{1/3}y}\, H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-a y^3}\right) = \frac{2e^{i\pi/2}}{\sqrt{3}}\left(e^{i\pi/3} c_1 a^{1/3} y + c_2\right). \end{cases}$$

Da, wie oben erwähnt, U für $y = 0$ mit seinem ersten Differentialquotienten stetig sein muß, so ergibt sich nach (51), (54), (62) und (66)

$$C e^{5/12\pi i} e^{-i\pi/2}(e^{-i\pi/3} c_1 a^{1/3} y + c_2) + C' e^{-5/12\pi i} e^{i\pi/2}(e^{i\pi/3} c_1 a^{1/3} y + c_2) = D e^{2\pi i/3} e^{i\pi/3}(c_1 a^{1/3} y - c_2),$$

d. h. es müssen die von y unabhängigen Glieder links dem von y unabhängigen Glied rechts gleich sein, und ebenfalls muß der Faktor von y links dem auf der rechten Seite gleich sein, oder

$$(67)\quad \begin{cases} C e^{-5/12\pi i} + C' e^{5/12\pi i} = -D \\ C e^{-1/12\pi i} + C' e^{1/12\pi i} = +D, \end{cases}$$

woraus

$$(68)\quad \begin{cases} C' = C e^{i\pi/2} \\ D = C e^{i\pi/4} \end{cases}$$

folgt, so daß die Werte von U im Raume I und III übergehen in [vgl. (38) und (40)]

$$(69)\quad \begin{cases} U_1 = \frac{C}{\sqrt{k\beta}} e^{-i\int_0^y k\beta\, dy} \\ U_2 = \frac{C}{\sqrt{k\beta}} e^{i\pi/2} e^{+i\int_0^y k\beta\, dy} \\ U_3 = \frac{C}{\sqrt{k\beta'}} e^{i\pi/4} e^{-\int_0^y k\beta'\, dy} \end{cases}$$

Die nach negativen y fortlaufende Welle U_2 hat also dieselbe Amplitude, wie die nach positiven y strahlende Welle. Dieses Resultat lautet in anderen Worten:

Die einfallende Welle wird im vollen Betrage an der Stelle reflektiert, an welcher die Inzidenz nach dem Snelliusschen Gesetz streifend würde (Totalreflexion). Bei dieser Reflexion findet eine Phasenverzögerung von $3\pi/2$ statt.

Hiernach gibt es also in Medien mit stetig veränderlichem

Brechungsexponenten keine partielle Reflexion, wohl aber Totalreflexion.

Daß der Strahl wirklich an der Stelle $y = 0$ reflektiert wird und nicht etwa, wie es der üblichen Auffassung entspricht, dort umbiegt, geht aus weiter unten folgenden Ausführungen hervor.

Um noch Einzelheiten über die Energiebewegung in der Nähe der kritischen Ebene $y = 0$ angeben zu können, untersuchen wir jetzt die *Strahlung im Raume II.*

1. *Für positive y:*

Es ist nach (19), (20'), (54), (61) und (68)

$$(70)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = -C\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{a^{1/3}}}\{c_1 P(u) - c_2 Q(u)\}\cos(2\pi n t + k\alpha x + \pi/4) \\ \mathfrak{H}_x = +C\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{a^{1/3}}}\frac{c}{2\pi n}\frac{d}{dy} \\ \qquad \{c_1 P(u) - c_2 Q(u)\}\sin(2\pi n t + k\alpha x + \pi/4) \\ \mathfrak{H}_y = -C\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{a^{1/3}}}\frac{c k \alpha}{2\pi n} \\ \qquad \{c_1 P(u) - c_2 Q(u)\}\cos(2\pi n t + k\alpha x + \pi/4). \end{cases}$$

Hieraus berechnet sich der zeitliche Mittelwert der Strahlung

$$(71)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{S}}_x = -\frac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\frac{k\alpha}{a^{1/3}}\frac{4\pi}{9}\{c_1 P(u) - c_2 Q(u)\}^2 \\ \bar{\mathfrak{S}}_y = 0 \\ \bar{\mathfrak{S}}_z = 0. \end{cases}$$

Zur numerischen Auswertung geben wir folgende von uns mittels der Reihen (58) berechnete Tabelle

u	$c_1 P(u)$	$c_2 Q(u)$	$\frac{4\pi}{9}\{c_1 P(u) - c_2 Q(u)\}^2$
0,0	0,0000	1,065	1,584
0,2	0,1553	1,066	1,101
0,4	0,3121	1,076	0,8151
0,6	0,4742	1,104	0,5542
0,8	0,6479	1,158	0,3632
1,0	0,8424	1,248	0,2301
1,2	1,071	1,390	0,1421
1,4	1,352	1,599	0,08515
1,6	1,709	1,898	0,05010
1,8	2,177	2,319	0,02817
2,0	2,803	2,908	0,01540

Man sieht, wie die Tangentialkomponente der Strahlung jenseits der kritischen Ebene (d. h. für $y > 0$) schnell abnimmt. Für größere Argumentwerte als $u = 2$ kann man bereits mit guter Näherung die asymptotische Formel (37)

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\,\frac{k\alpha}{k\beta'}\,e^{-2\int_0^y k\beta'\,dy} \tag{72}$$

benutzen. Aus u berechnet sich [siehe Formel (44)] die Phase

$$\int_0^y k\beta'\,dy = \tfrac{2}{3}u^{3/2}. \tag{73}$$

Eine Normalkomponente der Strahlung jenseits der kritischen Ebene existiert nicht. Durch diese Ebene dringt also keine Strahlung hindurch.

2. *Für negative y:*

Um die Strahlung im Raume II für negative y zu berechnen, soll zunächst auf eine Hilfsformel aufmerksam gemacht werden.

Ganz allgemein gilt für jede Zylinderfunktion Z die Beziehung [1])

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{p}{2}} Z_p(\sqrt{\alpha x})\right] = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} x^{\frac{p-1}{2}} Z_{p-1}(\sqrt{\alpha x}). \tag{74}$$

Daraus folgt ohne weiteres die Hilfsformel

$$\frac{d}{dy}\left[\sqrt{-a^{1/3}y}\,H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-ay^3}\right)\right] = a^{2/3} y\, H^{(1)}_{-2/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-ay^3}\right). \tag{75}$$

Nach (51) ergibt sich nur für die einfallende Welle

$$U_1 = C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{5/12\,\pi i}\,\sqrt{-y}\,H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-ay^3}\right)$$

und nach (20′)

$$V_1 = \frac{ci}{2\pi n} C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{5/12\,\pi i}\,\frac{d}{dy}\left\{\sqrt{-y}\,H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-ay^3}\right)\right\},$$

also nach der Hilfsformel (75)

$$V_1 = \frac{c}{2\pi n} C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{11/12\,\pi i}\,\sqrt{a}\,y\,H^{(1)}_{-2/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{-ay^3}\right). \tag{76}$$

Somit folgt aus (19), da nach (48)

$$H^{(1)} = J + iN$$

ist,

1) l. c. p. 165.

$$(77)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\sqrt[+]{-y}\begin{cases} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right)\cos\left(2\pi nt + k\alpha x + \frac{5\pi}{12}\right) \\ -N_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right)\sin\left(2\pi nt + k\alpha x + \frac{5\pi}{12}\right) \end{cases} \\ \mathfrak{H}_x = \frac{c}{2\pi n}C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\sqrt{a}\,y\begin{cases} -J_{-2/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right)\sin\left(2\pi nt + k\alpha x + \frac{5\pi}{12}\right) \\ -N_{-2/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right)\cos\left(2\pi nt + k\alpha x + \frac{5\pi}{12}\right) \end{cases} \end{cases}$$

so daß sich die y-Komponente der mittleren Strahlung zu

$$(78)\qquad \bar{\mathfrak{S}}_y = \frac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}\,\frac{\pi}{3}\sqrt[+]{-a\,y^3}\,(J_{1/3}N_{-2/3} - J_{-2/3}N_{1/3})$$

ergibt.

Da aber [1])

$$(79)\qquad J_p N_{p-1} - N_p J_{p-1} = \frac{2}{\pi x}$$

ist, so folgt

$$(80)\qquad \bar{\mathfrak{S}}_y = \frac{c^2 C^2}{16\pi^2 n}.$$

In Worten:

Die Normalkomponente der Strahlung der einfallenden Welle hat im Raume II bis an die kritische Ebene heran denselben konstanten Wert wie im Raume I.[2])

Die y-Komponente der Strahlung der reflektierten Welle hat den gleichen Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen.

Zur Berechnung der tangentialen Komponente bilden wir nach (20′)

$$(81)\quad \begin{cases} U_1 = C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{\frac{5}{12}\pi i}\sqrt[+]{-y}\,H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right) \\ W_1 = \frac{ck\alpha}{2\pi n}C\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,e^{\frac{5}{12}\pi i}\sqrt[+]{-y}\,H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt[+]{-ay^3}\right), \end{cases}$$

woraus sich nach (19) und (65)

$$(82)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{a^{1/3}}}C\,\Re e\left\{e^{i\left(2\pi nt + k\alpha x - \frac{\pi}{12}\right)}(W + iW')\right\} \\ \mathfrak{H}_y = \frac{ck\alpha}{2\pi n}\,\frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{a^{1/3}}}C\,\Re e\left\{e^{i\left(2\pi nt + k\alpha x - \frac{\pi}{12}\right)}(W + iW')\right. \end{cases}$$

1) l. c. p. 165.

2) Dieses Resultat läßt sich einfacher und allgemeiner beweisen; ich komme an anderem Orte darauf zurück.

ergibt, unter $W + iW'$

$$W + iW' = e^{-\pi i/3} c_1 P(u) + c_2 Q(u) \tag{83}$$

verstanden.

Somit berechnet sich

$$\bar{\mathfrak{S}}_x = -\frac{e^2 C^2}{16\pi^2 n}\frac{\alpha}{\beta}\frac{4\pi}{9}(W^2 + W'^2)\sqrt{-u}\,. \tag{84}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\Delta = \frac{4\pi}{9}\sqrt{-u}(W^2 + W'^2), \tag{85}$$

und nennen wir ψ den Winkel, welchen der Strahl nach den Gesetzen der geometrischen Optik mit dem Einfallslot bilden würde ($\operatorname{tg}\psi = \alpha/\beta$), γ den Winkel zwischen dem wirklichen Strahl und dem Einfallslot ($\operatorname{tg}\gamma = \bar{\mathfrak{S}}_x/\bar{\mathfrak{S}}_y$), so wird

$$\operatorname{tg}\gamma = \Delta \cdot \operatorname{tg}\psi\,, \tag{86}$$

d. h. in der Nähe der kritischen Ebene weicht der Strahl von der gewöhnlich angegebenen Richtung ab.

Um sich eine Anschauung von der Größe dieser Abweichung zu bilden, habe ich die folgende Tabelle nach (83) und (58) berechnet.

$-u$	W	W'	W^2	W'^2	$W^2+W'^2$	$\sqrt{-u}$	Δ
0,0	1,065	0,0000	1,1342	0,0000	1,1342	0,0000	0,0000
0,2	0,986	0,1344	0,9722	0,0181	0,9903	0,4472	0,6183
0,4	0,900	0,2675	0,8100	0,0715	0,8815	0,6325	0,7784
0,6	0,798	0,3961	0,6368	0,1569	0,7937	0,7746	0,8584
0,8	0,6786	0,5150	0,4605	0,2652	0,7257	0,8944	0,9061
1,0	0,5368	0,6176	0,2882	0,3814	0,6696	1,0000	0,9350
1,2	0,3743	0,6950	0,1401	0,4830	0,6231	1,095	0,9530
1,4	0,1943	0,7394	0,0377	0,5467	0,5844	1,183	0,9654
1,6	0,0032	0,7427	0,0010	0,5516	0,5526	1,265	0,9761
1,8	−0,1869	0,6982	0,0350	0,4875	0,5225	1,342	0,9790
2,0	−0,3646	0,6037	0,1329	0,3644	0,4973	1,414	0,9819

Sobald die Phase [vgl. (44)]

$$\frac{2}{3}(-u)^{3/2} = -\int_0^y k\beta\, dy \tag{87}$$

ihrem Betrag nach größere Werte annimmt, geht also γ in ψ über, wie das ja auch aus den für den Raum I geltenden asymptotischen Formeln (31) erhellt.

Für $y = 0$ versagt Formel (86), da die rechte Seite die Form $0 \cdot \infty$ annimmt. Deshalb schreiben wir dort $\overline{\mathfrak{S}}_x$ in der Form

$$\overline{\mathfrak{S}}_x = -\frac{c^2 C^2}{16 \pi^2 n} \frac{4\pi}{9} \frac{k a}{a^{1/3}} (W^2 + W'^2), \tag{88}$$

und da für $y = 0$

$$a = 1, \; W^2 + W'^2 = 1{,}1342$$

wird, so ergibt sich

$$\lim_{y=0} \operatorname{tg} \gamma = \frac{4\pi}{9} 1{,}1342 \frac{k}{a^{1/3}}, \tag{89}$$

der Winkel hängt also von der Inhomogenität $-2k \frac{dk}{dy} = a$ ab. Substituiert man diesen Wert in (89), so erhält man

$$\lim_{y=0} \operatorname{tg} \gamma = \frac{2{,}319}{\sqrt[3]{-\frac{d \lg \nu}{dy} \frac{\lambda_0}{\nu}}}. \tag{90}$$

Die Strahlung wird also niemals der Schichtung parallel *einfallende und reflektierte Strahlung bilden in der kritischen Ebene einen Knick* (siehe die ausgezogene Linie in Fig. 3). Von einem *Umbiegen* des Strahls, von dem man zu sprechen pflegt, ist nicht die Rede.

Die punktierte Linie in Fig. 3 stellt den Strahlengang nach den Regeln der geometrischen Optik dar.

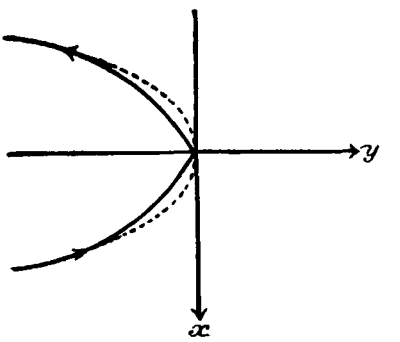

Fig. 3.

2. *Der Lichtstrahl sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.*

Bestehen nur die Vektoren $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$, und ist das Feld von z unabhängig, so gelten die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \\ -c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} \\ -c \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}. \end{aligned} \right. \tag{91}$$

Zum Integrieren setzen wir

$$(92)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = X e^{2\pi i n t} e^{ikax} \\ \mathfrak{E}_y = Y e^{2\pi i n t} e^{ikax} \\ \mathfrak{H}_z = Z e^{2\pi i n t} e^{ikax} \end{cases}$$

und erhalten das System von Differentialgleichungen

$$(93)\qquad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dy} = \dfrac{\varepsilon 2\pi n i}{c} X \\ ika Z = -\dfrac{\varepsilon 2\pi n i}{c} Y \\ ika Y - \dfrac{dX}{dy} = -\dfrac{2\pi n i}{c} Z. \end{cases}$$

Eliminiert man X und Y, so folgt

$$(94)\qquad \beta^2 Z + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{k^2}\frac{dZ}{dy}\right) = 0,$$

Setzt man

$$(95)\qquad \psi = \frac{Z}{k},$$

so gilt für ψ

$$(96)\qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} + k^2\beta^2\psi = k\psi\frac{d^2\left(\frac{1}{k}\right)}{dy^2}$$

oder mit genügender Annäherung

$$(97)\qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} + k^2\beta^2\psi = 0.$$

Diese Gleichung ist ganz analog der Gleichung (23), hat also dieselben Integrale. Der einzige Unterschied ist der, daß während die Gleichung (23) für U in Strenge gilt, Gleichung (97) nur mit der von uns geforderten Annäherung richtig ist.

Durch die soeben durchgeführte Transformation ist der Fall des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichts auf den des in der Einfallsebene polarisierten zurückgeführt.

Im Raume I ist [vgl. (69)]

$$(98)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \dfrac{A}{\sqrt{k\beta}}\, e^{-i\int_0^y k\beta\, dy} \\ \psi_2 = \dfrac{A}{\sqrt{k\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{+i\int_0^y k\beta\, dy} \end{cases}$$

und im Raume III

$$\psi_3 = \frac{A}{\sqrt{k\beta'}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\int_0^y k\beta' dy}, \tag{98}$$

woraus nach (95)

$$\begin{cases} Z_1 = A\sqrt{\frac{k}{\beta}}\, e^{-i\int_0^y k\beta dy} \\ Z_2 = A\sqrt{\frac{k}{\beta}}\, e^{i\frac{\pi}{2}} e^{+i\int_0^y k\beta dy} \\ Z_3 = A\sqrt{\frac{k}{\beta'}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\int_0^y k\beta' dy} \end{cases} \tag{99}$$

folgt.

Im Raume I haben die Feldstärken der einfallenden Welle die folgenden Werte

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_z = A\sqrt{\frac{k}{\beta}} \cos\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta\, dy + \delta\right) \\ \mathfrak{E}_x = -\frac{2\pi n\beta}{c} \frac{A}{\sqrt{k\beta}} \cos\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta dy + \delta - \eta'\right) \\ \mathfrak{E}_y = -\frac{2\pi n\alpha}{c} \frac{A}{\sqrt{k\beta}} \cos\left(2\pi n t + k\alpha x - \int_0^y k\beta\, dy + \delta\right), \end{cases} \tag{100}$$

wo η' die kleine Größe

$$\eta' = \frac{1}{2} \frac{d}{dk}\left(\frac{k}{\beta}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{k}\right) \tag{101}$$

und δ eine beliebige Phasenkonstante bedeutet.

Die reflektierte Welle hat die Feldstärken

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_z = -A\sqrt{\frac{k}{\beta}} \sin\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\, dy + \delta\right) \\ \mathfrak{E}_x = -\frac{2\pi n\beta}{c} \frac{A}{\sqrt{k\beta}} \sin\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\, dy + \delta + \eta'\right) \\ \mathfrak{E}_y = +\frac{2\pi n\alpha}{c} \frac{A}{\sqrt{k\beta}} \sin\left(2\pi n t + k\alpha x + \int_0^y k\beta\, dy + \delta\right). \end{cases} \tag{102}$$

Auch hier tritt wieder eine Phasenverzögerung $\pm\eta'$ auf, ähnlich wie η im Falle des parallel der Einfallsebene polarisierten Strahls. Das bedeutet: Wenn der magnetische Vektor linear schwingt, so beschreibt der elektrische eine Ellipse. Diese Elliptizität vergrößert sich aber ebenso, wie im anderen Falle nicht längs des Strahls durch Summation, sondern hängt nach (101) nur von der Inhomogenität *am betreffenden Orte* selber ab.

Zusammenfassung.

1. In einem inhomogenen Medium pflanzt sich das Licht ohne Reflexion fort, wohl aber gibt es Totalreflexion.

2. Überall gelten die Regeln der geometrischen Optik über die Richtung des Strahls, außer in der Nähe der Ebene, in der die Totalreflexion eintritt. Hier ist der Einfallswinkel kleiner als es dem Snelliusschen Brechungsgesetz entspricht.

La Plata, Instituto de Física, 1. März 1915.

(Eingegangen 8. April 1915.)