

Über den Zusammenhang des reellen und imaginären Theiles einer Potenzreihe.

Von Alfred Tauber in Wien.

Während für Werte, die auf einer Kreislinie stetig vorgeschrieben sind, die Construction der betreffenden „Fundamentalfunctiön“ u erst gezeigt werden muss *), entfällt dies allerdings, wenn die gegebene Function $\varphi(x)$ des Azimuthes die Form einer trigonometrischen Reihe hat. Dafür lassen sich in diesem zu betrachtenden Falle die Eigenschaften des imaginären Theiles der analytischen Function, deren reeller Theil u ist, auf dem Rande näher untersuchen, wobei von $\varphi(x)$ nur die absolute Integrierbarkeit voranzusetzen ist.

§ 1. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}$ hat auf dem Kreis mit dem Radius r den Wert $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} r^{\nu} (\cos \nu x + i \sin \nu x)$, und bei

$$c_{\nu} r^{\nu} = a_{\nu} + i b_{\nu},$$

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu x - b_{\nu} \sin \nu x)$$

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \sin \nu x + b_{\nu} \cos \nu x)$$

ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu} = \varphi(x) + i \psi(x)$. Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ untersucht werden.

*) Siehe z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Auflage, S. 396.

Vermöge der Relationen

$$2\pi \cos \nu x = \int_0^\pi [\sin \nu(x+\beta) - \sin \nu(x-\beta)] \cot \frac{1}{2} \beta d\beta$$

$$- 2\pi \sin \nu x = \int_0^\pi [\cos \nu(x+\beta) - \cos \nu(x-\beta)] \cot \frac{1}{2} \beta d\beta$$

für jedes ganze $\nu \geq 1$ besteht zunächst für den Fall, dass $\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu, \sum_{\nu=1}^\infty b_\nu$ unbedingt convergieren, zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, da gliedweise zu integrieren ist, der Zusammenhang

$$2\pi \varphi(x) = \int_0^\pi [\psi(x+\beta) - \psi(x-\beta)] \cot \frac{1}{2} \beta d\beta$$

$$- 2\pi \psi(x) = \int_0^\pi [\varphi(x+\beta) - \varphi(x-\beta)] \cot \frac{1}{2} \beta d\beta;$$

wenn aber die Voraussetzung der unbedingten Convergenz von $\Sigma a_\nu, \Sigma b_\nu$, nicht gemacht wird, der Kreis also mindestens der Convergenzkreis ist, müssen diese Gleichungen auf anderem Wege nachgewiesen werden. Man kommt dabei zu dem Resultat, dass, wenn die linke Seite einen endlichen bestimmten Wert für ein x hat, dann auch die rechte Seite diesen Wert besitzt, vorausgesetzt, dass die Functionen $\psi(x)$, resp. $\varphi(x)$ absolut integrierbar sind. Die Continuitätseigenschaften von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ können wesentlich verschieden sein; man könnte aber trotzdem $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ihrer Form wegen complementär nennen.

Sei die Summe der Reihe

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots = f(x) \quad (1)$$

eine absolut integrierbare Function, und die Reihe

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (2)$$

convergiere. Dann convergiert auch die Reihe

$$a_1 \int_0^\pi \sin x \cot \frac{1}{2} x dx + a_2 \int_0^\pi \sin 2x \cot \frac{1}{2} x dx + \dots,$$

da $\int_0^\pi \sin kx \cot \frac{1}{2} x dx = \pi$ für alle ganzen $k \geq 1$ ist. Nach der

Verallgemeinerung eines Satzes von Dubois-Reymond, welche später bewiesen wird (§ 2), ist für jeden Wert von δ größer als Null

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx = a_1 \int_{\delta}^{\pi} \sin x \cot \frac{1}{2} x dx + a_2 \int_{\delta}^{\pi} \sin 2x \cot \frac{1}{2} x dx + \dots,$$

und es wird, auch wenn $x=0$ ein singulärer Punkt für $f(x) \cot \frac{1}{2} x$ ist, der Definition des Integrales gemäß, dem Integral $\int_{\delta}^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx$ ein endlicher, und zwar der Wert

$\pi(a_1 + a_2 + \dots)$ zugeschrieben werden müssen, wofern noch bewiesen wird, dass die rechtsstehende Function von δ stetig nicht nur bei $\delta=0$, sondern auch in $\delta=0$ selbst ist, oder dass

$$a_1 \int_{\delta}^{\pi} \sin x \cot \frac{1}{2} x dx + a_2 \int_{\delta}^{\pi} \sin 2x \cot \frac{1}{2} x dx + \dots \quad (3)$$

durch Wahl von δ stetig in Null übergeht. Dies gilt in der That für jede, auch nur bedingt convergente Reihe. Die Größen

$$B_{nk} = \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^n \nu^k a_{\nu}$$

sind alle, wie groß auch n ist, unter einer endlichen Schranke,

wie aus der Form $B_{nk} = a_1 + \dots + a_n + \sum_{\nu=2}^{n+1} \frac{(\nu-1)^k - \nu^k}{n^k} c_{\nu}$,

$$c_{\nu+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{\nu}, \quad c_0 = c_1 = 0, \quad (4)$$

hervorgeht, wenn Σa_{ν} convergiert. Aus

$$\frac{n^k}{(n+1)^k} B_{nk} = B_{n+1k} - a_{n+1}$$

folgt, wenn B_{nk}, B_{n+1k} verschiedene Zeichen haben $|\alpha_{n+1}| > |B_{n+1k}|$; wären B_{nk}, B_{n+1k}, \dots alle an Betrag größer als c , so müssten diese Größen von einem bestimmten n an alle gleich bezeichnet sein. Da aber aus der Gleichung

$$\sum_{n=n'}^{n''} (B_{nk} - B_{n+1k}) = \sum_{n=n'}^{n''} \frac{(n+1)^k - n^k}{(n+1)^k} B_{nk} - \sum_{n=n'}^{n''} \alpha_{n+1}$$

die Convergenz von $\sum_n \frac{(n+1)^k - n^k}{(n+1)^k} B_{nk}$ zu schließen ist, kann nicht stets $|B_{nk}| > c$ sein; also findet man einen speciellen Wert $n = m$, so dass $|B_{mk}| < c$ ist. Dann folgt

$$B_{m+qk} = B_{mk} \left(\frac{m}{m+q} \right)^k + \frac{a_{m+1}(m+1)^k + \dots + a_{m+q}(m+q)^k}{(m+q)^k}$$

$$|B_{m+qk}| < c \left(\frac{m}{m+q} \right)^k + 2Rm,$$

wo Rm die größte der Summen $|a_{m+1} + \dots + a_{m+q}|$, $|a_{m+2} + \dots + a_{m+q}|, \dots$ bedeutet; daher kann zu c ein m gefunden werden, so dass $|B_{m+qk}| < c$. Es wird bei Annahme einer Potenzreihe

$$\varphi(x) = \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots \quad (5)$$

mit einem Convergenzradius größer als 1, deren Werte für reelle x von 0 bis 1 positiv sind und wachsen, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx = \sum_{\nu=1}^n a_\nu \left(\omega_1 \frac{\nu}{n} + \omega_2 \frac{\nu^2}{n^2} + \dots \right),$$

weil $\omega_1 + \frac{\omega_2}{2} + \dots$ unbedingt convergiert, in die Form

$$\omega_1 B_{n1} + \frac{1}{2} \omega_2 B_{n2} + \dots$$

gebracht werden können. Wählt man zuerst k so, dass $\frac{1}{k} \omega_k B_{nk} + \frac{1}{k+1} \omega_{k+1} B_{nk+1} + \dots$ kleiner als c wird für jedes n , was immer möglich ist; nimmt man ferner m so an, dass $B_{n1}, B_{n2}, \dots, B_{nk-1}$ für $n > m$ alle kleiner als c sind, so ist auch

$\sum_{\nu=1}^n a_\nu \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx < c(1 + |\omega_1| + \dots + |\omega_{k-1}|)$ für $n > m$, und convergiert also mit wachsenden Werten von m nach Null.

Solange ν kleiner als n ist, wachsen die Integrale $\int_\delta^\varepsilon \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx$

mit ν , weil auch $\varphi(x)$ wächst, wenn $\frac{1}{n} > \varepsilon > \delta$ ist. Dadurch

wird der absolute Betrag von $\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx$ kleiner als

$$c'_n \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\varphi(nx)}{x} dx < c'_n (\varepsilon - \delta) n \sum_{\nu=1}^{\infty} |\omega_{\nu}|,$$

unter c'_n den größten Wert aus $|c_2|, \dots, |c_n|$ verstanden. Für $\varepsilon - \delta$ kleiner als δ^2 wird daher auch $\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx$ mit $n = \infty$ verschwinden; man kann aber immer eine ganze Zahl $m = \frac{1}{\delta}$ so bestimmen, dass $\varepsilon - \delta < \delta^2$ ist, wenn $\varepsilon < 1$ gegeben ist. Damit ist bewiesen, dass die Reihe

$$a_1 \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + a_2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(2x)}{x} dx + \dots, *$$

wofern Σa_{ν} convergirt, mit ε stetig in Null übergeht. Die Function $\varphi(x) = \sin \frac{1}{2} x \pi$ erfüllt die oben für $\varphi(x)$ gestellten Bedingungen, da sie von $x=0$ bis 1 positiv ist und wächst, wenn noch bemerkt wird, dass $\frac{2}{x} - \cot \frac{1}{2} x$ von $x=0$ bis $\frac{1}{2} \pi$ positiv ist und zunimmt, so ist auch die Stetigkeit der Reihe (3) in $\delta=0$ selbst bewiesen. Wofern also die Reihe $a_1 + a_2 + \dots$ convergirt, ist

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx = a_1 + a_2 + \dots \quad (6)$$

Für den umgekehrten Schluss vom Integral auf die Reihe in (6) ist zu bemerken, dass, während $\int_0^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx$ aus den Werten $\int_{\delta}^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx$ als Grenzwert für $\delta=0$ definiert ist,

*) Wofern $\int_0^x \frac{\varphi(\nu x)}{x} dx$ für ein endliches x und alle ν endlich bleibt;

$\varphi(x)$ ist dabei auch für sämtliche reelle x definiert gedacht.

bei der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \int_{\delta}^{\pi} \sin \nu x \cot \frac{1}{2} x dx$ ein Sprung in $\delta = 0$ selbst a priori denkbar ist. Im folgenden wird nur für positive abnehmende Größen a_{ν} die Convergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ aus der Endlichkeit von $\int_0^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx$ bewiesen. In der Identität

$$B_{k-1} = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_{\nu} a_{\nu} = b_k c_k + \sum_{\nu=2}^k (b_{\nu-1} - b_{\nu}) c_{\nu}$$

soll $b_1 > b_2 > \dots > b_k > \frac{1}{2} b_1 > 0$ sein; ferner sei $|c_k|$ der absolut größte Wert unter $|c_2|, \dots, |c_k|$ und c_k positiv, sonst wäre $-c_k$ zu betrachten. Der Betrag von $\sum_{\nu=2}^k (b_{\nu-1} - b_{\nu}) c_{\nu}$ ist kleiner als $c_k (b_1 - b_k)$, und je nach $\sum_{\nu=2}^k (b_{\nu-1} - b_{\nu}) c_{\nu} \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} b_k c_k &> B_{k-1} > (2b_k - b_1) c_k \\ b_k c_k &< B_{k-1} < b_1 c_k. \end{aligned}$$

Wofern alle Größen c_k unter einer endlichen Schranke bleiben, kann man sie auch, eventuell nach Hinzufügung derselben positiven Größe, alle als positiv voraussetzen; dann ist

$$b_k c_k < B_{k-1} < b_k c_k + (b_1 - b_k) c_{\nu}$$

wenn c_{ν} der größte Wert unter c_2, \dots, c_k ist. Nun werde gesetzt

$$b_{\nu n} = \int_{\beta}^{\pi} \sin \nu x \cot \frac{1}{2} x dx; \quad \beta = \frac{\pi}{n}$$

$$b_{\nu-1n} - b_{\nu n} = - \int_{\beta}^{\pi} [\cos \nu x + \cos (\nu-1)x] dx = \frac{\sin \nu \beta}{\nu} + \frac{\sin (\nu-1)\beta}{\nu-1};$$

statt $b_{\nu n}$ kann für wachsende ν auch $2 \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sin \nu x}{x} dx$ betrachtet werden, weil $\frac{2}{x} - \cot \frac{1}{2} x < \frac{1}{4} x$ für $0 < x < \pi$ ist und also

$\int_{\beta}^{\pi} \sin \nu x \left(\frac{2}{x} - \cot \frac{x}{2} \right) dx$ mit $\frac{1}{\nu}$ vergleichbar wird. Mit wachsendem ν wechseln $b_{\nu n}$ und $\int_{\beta}^{\pi} \frac{\sin \nu x}{x} dx$ immer wieder das Zeichen. Aus der Formel

$$B_{k-1n} = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_{\nu n} a_{\nu} = b_{kn} c_k + \sum_{k=2}^k (b_{\nu-1n} - b_{\nu n}) c_{\nu}$$

ergibt sich nach dem obigen, dass, wie groß auch k gegeben ist, ein m zu finden ist, so dass sich c_k von πB_{k-1n} für $n > m$ beliebig wenig unterscheidet; es ist

$$\pi - b_{1n} = \int_0^{\beta} \sin x \cot \frac{1}{2} x dx < \int_0^{\beta} \sin x \frac{dx}{\sin \frac{1}{2} x} < 4 \sin \frac{\beta}{2}.$$

Wenn man also beweisen kann, dass B_{k-1n} für ein fixiertes k und alle $n > m$ unter einer endlichen Schranke bleibt, so ist auch $\sum a_{\nu}$ convergent. Andernfalls sei $k = \tau n + s$, also

$$\begin{aligned} B_{k-1n} &= b_{kn} c_k + c_2 \left(\frac{\sin \beta}{1} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + \dots + c_n \sin \frac{(n-1)\beta}{n-1} \\ &- \left[c_{n+1} \frac{\sin \beta}{1} + c_{n+2} \left(\frac{\sin \beta}{1} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + \dots + c_{2n} \frac{\sin (2n-1)\beta}{2n-1} \right] \\ &+ (-1)^{\tau} \left[c_{n\tau+1} \frac{\sin \beta}{1} + \dots \right]; \end{aligned}$$

als Coëfficienten von $\sin \lambda \beta$, $\sin (\lambda-1)\beta$ treten die Größen

$$\frac{c_{\lambda}}{\lambda} - \frac{c_{n+\lambda}}{n+\lambda} + \dots, \quad \frac{c_{\lambda+1}}{\lambda} - \frac{c_{n+\lambda+1}}{n+\lambda} + \dots,$$

auf, denen bei $c'_{\lambda} = a_{\lambda} + \dots + a_{n+\lambda-1}$, $c''_{\lambda} = a_{n+\lambda} + \dots + a_{2n+\lambda-1}, \dots$ die Form

$$\begin{aligned} c_{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{n+\lambda} + \dots \right) - c'_{\lambda} \left(\frac{1}{n+\lambda} - \frac{1}{2n+\lambda} + \dots \right) + \\ + c''_{\lambda} \left(\frac{1}{2n+\lambda} - \frac{1}{3n+\lambda} + \dots \right) \end{aligned}$$

gegeben werden kann. Weil $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ sein muss, wie aus der

Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt ist, kann man μ so wählen, dass $a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \dots$ kleiner als δ sind, also

$$\left| \frac{c_k}{k} \right| < \frac{\mu a}{k} + \frac{\mu - k}{k} \delta,$$

wo a der größte Wert aus $|a_1|, |a_2|, \dots$ ist, mit $\frac{\mu}{k}$ beliebig klein machen. Seien z. B. die Größen a_ν positiv und abnehmend, also $c'_\lambda > c'_\lambda > \dots$. In diesem Falle ist

$$B_{k-1n} = b_{kn} c_k + c_2 \left(\frac{\sin \beta}{1} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + \dots + c_n \frac{\sin(n-1)\beta}{n-1} - \delta_{kn}, \quad (7)$$

wo δ_{kn} mit $\frac{1}{n}$, unabhängig von k , schließlich nur einen aliquoten Theil der Größen rechts ausmacht. Aus dieser Gleichung ist die Convergenz von Σa_ν wenigstens für positive a_ν abzuleiten. Zu einem fixierten n kann k' so gewählt werden, dass B_{k-1n} für alle $k > k'$ unter einer endlichen Schranke B bleibt; gleichzeitig wähle man ein k , welches b_{kn} positiv macht. Nun nehmen zwar die Größen $\frac{\sin \beta}{1}, \frac{\sin 2\beta}{2}, \dots$ ab, jedoch ist, solange $(\lambda + 1)\beta < \frac{\pi}{2}$, ist, auch $\frac{\sin(\lambda + 1)\beta}{\lambda + 1} > \frac{\beta}{4}$, also

$$c_2 \left(\frac{\sin \beta}{1} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + \dots + c_{\lambda+1} \left(\frac{\sin \lambda \beta}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda + 1)\beta}{\lambda + 1} \right) > \frac{\pi}{2n} (c_2 + \dots + c_{\lambda+1}) \\ > \frac{\pi}{2n} (\lambda a_1 + (\lambda - 1) a_2 + \dots) > \frac{\pi}{2n} (\lambda - \mu) (a_1 + a_2 + \dots + a_\mu).$$

Da nach Wahl von μ die Wahl von λ freisteht, sei $\lambda = 2\mu$, und da $\lambda + 1 < \frac{n}{2}$ sein sollte, sei $n = 4(\mu + 1)$. Dann ist dargethan, dass für jedes μ $a_1 + \dots + a_\mu$ unter einer endlichen

Schranke bleibt, also $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ als Summe positiver Größen con-

vergiert. Entweder es existiert ein m , so dass $b_{km} c_k$ für alle k von einem $k = k'$ an dasselbe Vorzeichen hat oder nicht; im ersten Fall kann man zu einem gegebenen $q \geq 1$ unendlich viele Zahlen $k = m(m + q) \frac{2\mu + 1}{q}$ finden, wenn q ungerade ist. Für alle diese Zahlen k haben aber b_{km} und b_{km+q} verschiedene Vorzeichen, wodurch man zum zweiten Fall gelangt; somit ist aus der Gleichung (7) die Endlichkeit von

$$c_2 \left(\frac{\sin \beta}{1} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + \dots + c_n \frac{\sin(n-1)\beta}{n-1}$$

bewiesen, da man $b_{kn} c_k$ immer wieder das Vorzeichen dieses Ausdrucks geben kann.

Um aus der Reihe

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \sin \nu u + b_{\nu} \cos \nu u)$$

die Reihe $\varphi^0(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu u - b_{\nu} \sin \nu u)$ abzuleiten, werde $2f(x) = \varphi(u+x) - \varphi(u-x)$ gesetzt, oder

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x (a_{\nu} \cos \nu u - b_{\nu} \sin \nu u),$$

so ist nach dem Vorigen, zum mindesten für jede Stelle u , an welcher $\varphi^0(u)$ convergiert,

$$\begin{aligned} \varphi^0(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\varphi(u+x) - \varphi(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu u - b_{\nu} \sin \nu u), \end{aligned} \quad (8)$$

was den eingangs erwähnten Satz auch für den Convergenzkreis beweist, wofern $\varphi(x)$ absolut integrierbar ist. In dem Beweise war der Umstand benützt, dass $f(x)$ gleich einer trigonometrischen Reihe ist. Setzt man jedoch $a_{\nu} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \nu x dx$, wo von $f(x)$ z. B. bloß bekannt ist, dass es eine stetige Function ist, so folgt durch wirkliches Summieren

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin \nu x f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \left(\sin^2 \frac{1}{2} nx \cot \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin nx \right) \\ \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} &= \lim_{n=\infty} 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin^2 \frac{1}{2} nx \cot \frac{1}{2} x dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x dx - \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} f(x) \cot \frac{1}{2} x \cos nx dx. \end{aligned}$$

Die Reihe Σa_ν convergiert also dann, wenn

$$\int_0^\pi f(x) \cot \frac{1}{2} x \cos nx dx$$

für $n = \infty$ einen endlichen bestimmten Grenzwert hat, wofern $f(x) \cot \frac{1}{2} x$ integrierbar vorausgesetzt wurde; dies trifft jedenfalls zu, wenn $\left| f(x) \cot \frac{1}{2} x \right|$ integrierbar ist, wo der Grenzwert Null ist. Umgekehrt ist für $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$ bei Con-

vergenz Σa_ν sofort $\lim \int_0^\pi f(x) \cot \frac{1}{2} x dx \cos nx = 0$. Damit

$\int_0^\pi f(x) \cot \frac{1}{2} x dx$ endlich ist, könnte $f(x)$ in $x = 0$ höchstens derartig unstetig sein, dass es beständige Schwankungen um die Null macht, wie z. B. bei $f(x) = \sin \frac{1}{x} \int_0^x \sin \frac{1}{x} \cot \frac{1}{2} x$ endlich ist.

Statt der Function $f(x) \cot \frac{1}{2} x$ kann auch $\frac{f(x)}{x}$ betrachtet werden; dabei ist zu beweisen, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{x} dx$ convergiert.

Setzt man $\tau_\nu = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{x} dx$, so ist $\tau(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu \sin \nu x$ eine stetige Function von x ; es ist nämlich

$$\begin{aligned} (-1)^\nu \tau_\nu &= \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{x + \nu\pi} - \frac{1}{x + \nu + 1\pi} + \dots \right) dx \\ &= \int_0^\pi \sin x dx \left[\left(\frac{1}{\nu\pi} - \frac{x}{\nu\pi(x + \nu\pi)} \right) - \left(\frac{1}{(\nu + 1)\pi} - \frac{x}{(\nu + 1)\pi(x + \nu + 1\pi)} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

und $\frac{1}{x} \int_0^\pi x \sin x dx \left[\frac{1}{\nu(x + \nu\pi)} - \frac{1}{(\nu + 1)(x + \nu + 1\pi)} + \dots \right] < \frac{1}{\nu^2}$. Für

$$(-1)^\nu \sigma_\nu = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + 1} + \dots \text{ ist also } \tau(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \sin \nu x + \text{einer}$$

gleichmäßig convergenten Reihe. Eine jede Summe $\sum \sigma_\nu \sin \nu x$ ist zu berechnen, wenn man für $\varrho_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu+1}$ die Summe $\sum \varrho_\nu \sin \nu x$ kennt, nachdem man mit Hilfe dieser Reihe $\sum \varrho_\nu \cos \nu x$ berechnet hat. Setzt man

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \sin \nu x; \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu \sin \nu x$$

$$\Phi^0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \cos \nu x; \quad \varphi^0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu \cos \nu x$$

$$\Phi(x) \cos x - \Phi^0(x) \sin x = \Phi(x) - \varphi(x)$$

$$\Phi(x) \sin x + \Phi^0(x) \cos x = \Phi^0(x) - \varphi^0(x) + \sigma_1$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x (\sigma_1 - \varphi^0(x))$$

$$\Phi^0(x) = \frac{1}{2} (\varphi^0(x) - \sigma_1) + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x \varphi(x),$$

so ist in unserem Fall $\varrho_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$, $\varphi(x) = -\frac{1}{2} x$, $\Phi(x) = -l 2 \cos \frac{1}{2} x$, oder $\Phi(x) = -\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x l \cos \frac{1}{2} x$ stetig von 0 bis π , bis auf 0, π wo $\Phi(x)$ endliche Sprünge macht. Ferner kann $\Phi(x)$ in einsinnige Functionselemente zerlegt werden, damit erfüllt aber $\tau(x) = \frac{2}{\pi} \Phi(x) + \dots$ Die Bedingungen (§ 2), unter welchen gesetzt werden darf

$$\int_0^\pi f(x) \tau(x) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_0^\pi \sin \nu x \tau(x) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \tau_\nu.$$

$$\text{Es ist dann } \int_\delta^\pi \frac{f(x)}{x} dx = \int_\delta^\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\sin \nu x}{x} dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_\delta^\pi \frac{\sin \nu x}{x} dx,$$

und nach der Zerlegung $\int_\delta^\pi \frac{\sin \nu x}{x} dx = \int_\delta^\infty - \int_\pi^\infty - \int_0^\delta$ ist wieder die End-

lichkeit von $\int_0^\pi \frac{f(x)}{x} dx$ bei Convergenz von $\sum a_\nu$ zu beweisen.

Bei stetigen Functionen $f(x)$, von denen nicht bewiesen ist, dass sie in eine trigonometrische Reihe entwickelbar sind, ist aus

einem endlichen bestimmten Werte von $\lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(x) \sin^2 n x dx$

die Convergenz von $\int_0^\pi f(x) d\lambda x$ nicht so unmittelbar zu beweisen. In diesem Fall ist der Weg, den H. Kronecker zur Aufstellung von Bedingungen für $f(x)$ in $\lim_{n=\infty} \int_0^\delta f(x) \sin nx d\lambda x = 0$ vorgeschrieben hat, in Bezug auf $\lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(x) \cos nx d\lambda x$ einzuschlagen.

§ 2. Der Satz, dass für eine absolut integrierbare Function $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots = f(x)$ die Beziehung besteht

$$\int_{x_0}^\pi f(x) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_{x_0}^\pi \sin \nu x dx,$$

(Dubois-Reymond, Math. Annalen, Bd. 22) lässt sich auf ein Product $f(x) \psi(x)$ in der Weise ausdehnen

$$\int_{x_0}^\pi f(x) \psi(x) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int_{x_0}^\pi \sin \nu x \psi(x) dx. \quad (9)$$

Wenn $\sum a_\nu$ unbedingt convergiert, ist dies klar, anderenfalls gelangt man für $\sum_{\nu=1}^n a_\nu \int_{x_0}^\pi \sin \nu x \psi(x) dx$ bei einem mit dem Dubois-Reymonds gleichen Verfahren zur Summe der drei Integrale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x_0)} du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi(u), \quad \chi(u) = \int_{x_0}^{\pi-2u} d\alpha f(2u+\alpha) \psi(x) \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}(\pi+x_0)}^0 du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi_1(u), \quad \chi_1(u) = \int_{x_0}^\pi d\alpha f(2u+\alpha) \psi(\alpha) \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}(\pi+x_0)}^{-\pi} du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi_2(u), \quad \chi_2(u) = \int_\pi^{-\pi-2u} d\alpha f(2u+\alpha) \psi(\alpha), \end{aligned}$$

deren Grenzwerte für ungradzahlig wachsende $h = 2n + 1$ zu untersuchen sind. Als Bedingungen für das Bestehen von (9)

sind zu stellen, dass $\chi_2(u)$ eine endliche integrierbare Function von u zwischen $-\frac{1}{2}(\pi + x_0)$ und $-\pi$ ist, und dass $\chi(u)$, $\chi_1(u)$ der Dirichlet'schen Integralbeziehung genügen, so dass statthat

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \chi(u) \frac{\sin hu}{\sin u} du &= \frac{\pi}{2} \chi(0) \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \chi_1(u) \frac{\sin hu}{\sin u} du &= \frac{\pi}{2} \chi_1(0); \end{aligned} \quad (10)$$

dann ist eben $\chi(0) + \chi_1(0) = \pi \int_{x_0}^{\pi} d\alpha f(\alpha) \psi(\alpha)$. Zunächst sollen $f(x)$, $\psi(x)$ positive Functionen sein.

Der Beziehung (10) für $\chi(u)$, $\chi_1(u)$ wird z. B. genügt, wenn $\psi(x)$ zwischen x_0 und π endlich ist und eine endliche Zahl Maxima und Minima hat. Nimmt ψ mit seinem Argument nicht ab, so nimmt $\chi(u)$ nicht zu, wie aus

$$\begin{aligned} \chi(u + \delta) - \chi(u) &= \int_{x_0 + 2u + \delta}^{\pi} d\alpha f(\alpha) [\psi(\alpha - 2u - 2\delta) - \psi(\alpha - 2u)] - \\ &\quad - \int_{x_0 + 2u}^{\pi_0 + 2u + \delta} d\alpha f(\alpha) \psi(\alpha - 2u) \end{aligned}$$

hervorgeht, also ist $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - x_0)} du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi(u) = \frac{\pi}{2} \chi(0)$. Oder es nimmt ψ ab, $C - \psi$ zu, dann ist

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - x_0)} du \frac{\sin hu}{\sin u} \int_{x_0}^{\pi - 2u} d\alpha f(\alpha) [C - \psi(\alpha)] = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{\pi} d\alpha f(\alpha) [C - \psi(\alpha)],$$

was wieder, da f positiv ist, die Bedingung (10) für $\chi(u)$ erfüllt; man kann aber ψ aus seinen einsinnigen Bestandtheilen zusammensetzen. Das Integral $\int_{-\frac{1}{2}(\pi + x_0)}^0 du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi_1(u)$ werde zerlegt

in $\int_{-\frac{1}{2}(\pi + x_0)}^{-u'} + \int_{-u'}^0$ und $u' < \frac{\pi - x_0}{2}$ gewählt. Das erste Integral con-

vergiert mit $h = \infty$ nach Null, wenn $\chi_1(u)$ endlich und integrierbar ist. Bei der Betrachtung des zweiten Integrales

$$\int_{-u'}^0 du \frac{\sin hu}{\sin u} \int_{x_0+2u}^{\pi+2u} f(\alpha) \psi(\alpha - 2u) d\alpha$$

werde $\int_{x_0+2u}^{\pi+2u} f(\alpha) \psi(\alpha - 2u) d\alpha$ wieder zerlegt in $\int_{x_0+2u}^{\pi-2u'} + \int_{\pi-2u'}^{\pi+2u}$, wobei also

$x_0 + 2u < \pi - 2u' < \pi + 2u$ wird, und für diese Theilintegrale von $\chi_1(u)$ können dieselben Bemerkungen wie früher für $\chi(u)$ gemacht werden, so dass auch $\chi_1(u)$ die Bedingung (10) erfüllt.

Daher gilt der Satz (9), wenn $\int_0^{\pi} \text{mod} |f(2u + \alpha) \psi(\alpha)| d\alpha$ endlich

und $\psi(x)$ eine Dirichlet'sche Function ist. Für $x_0 = 0$ erhält man, da dann $\psi(x)$ in eine Reihe $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$ entwickelt werden kann, welche nur an einer endlichen Zahl von Stellen sich nicht mit $\psi(x)$ deckt, den Satz von Parseval, dass

$$\text{für } f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu x, \quad \psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu x$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \psi(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu}$$

ist. Derselbe könnte auch zur Ableitung von Eigenschaften der a_{ν} dienen.

Ein weiterer Fall ist der, dass $\psi(x)$ in x_0 unendlich wird, und zwar gegen x_0 beständig wachsend, dabei aber integrierbar bleibt, während $f(x)$ in und bei x_0 endlich ist; zunächst seien wieder $f(x)$, $\psi(x)$ positiv. Die Integration in Bezug auf u kann man auf das Intervall 0 bis $\pm \varepsilon$ einschränken, wo $f(x_0 - 2\varepsilon)$ bis $f(x_0 + 2\varepsilon)$ endlich und $\pi - 2\varepsilon > x_0$ ist. Nun ist für $u > 0$

$$0 < \int_{x_0+2u}^{\pi} [\psi(\alpha - 2u) - \psi(\alpha)] d\alpha = \int_{x_0}^{x_0+2u} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{\pi-2u}^{\pi} \psi(\alpha) d\alpha < \int_{x_0}^{x_0+2u} \psi(\alpha) d\alpha,$$

daher ist, wenn f das Maximum von $f(x)$ zwischen x_0 und $x_0 + 2\varepsilon$ bedeutet auch

$$\int_{x_0+2u}^{\pi} d\alpha f(\alpha) [\psi(\alpha - 2u) - \psi(\alpha)] < f \int_{x_0}^{x_0+2u} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Die Function $\frac{1}{u} \int_{x_0}^{x_0+2u} \psi(\alpha) d\alpha$ braucht nicht bis $u=0$ integrierbar zu sein, z. B. $x_0=0$, $\psi(x) = \frac{1}{x(lx)^3}$; setzt man dies dagegen voraus, so ist $\lim \int_0^\epsilon du \frac{\sin hu}{\sin u} \int_{x_0+2u}^\pi d\alpha f(\alpha) [\psi(\alpha-2u) - \psi(\alpha)] = 0$ und die Bedingung (10) für $\chi(u)$ erfüllt. Analog ist mit dem Integral $\int_{-\epsilon}^0 du \frac{\sin hu}{\sin u} \chi_1(u)$ zu verfahren, nachdem wieder $\chi_1(u) = \int_{x_0+2u}^{\pi+2u} f(\alpha) \psi(\alpha-2u) d\alpha$ in $\int_{x_0+2u}^{\pi-2\epsilon} + \int_{\pi-2\epsilon}^{\pi+2u}$ zerlegt wurde, wobei das zweite Integral als einsinnige Function von u von selbst der Bedingung (10) genügt. Daher kann man die obige Bedingung für das Bestehen von (9) dahin verallgemeinern, dass man bestimmte und integrierbare Unendlichkeitsstellen von $\psi(x)$ zulässt, in deren Umgebung $f(x)$ und $\psi(x-x_0) l(x-x_0)^3$ endlich bleiben.

Nachdem auch für $\varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \sin vx + a'_v \cos vx$ der Satz $\int_{x_0}^{\pi} \varphi(x) \psi(x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \int_{x_0}^{\pi} \sin vx \psi(x) dx + a'_v \int_{x_0}^{\pi} \cos vx \psi(x) dx$ unter denselben Bedingungen ebenso beweisbar ist, werde $\psi(x) = \psi_1(u-x)$ und $\psi_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v \cos vx$ gesetzt. Für $x_0 = -\pi$ erhält man

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \psi_1(u-x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} (b_v a_v \sin vu + b_v a'_v \cos vu).$$

Die Function $\psi_1(x) = -l 2 \sin \frac{1}{2} x = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos vx}{v}$ lässt $\psi(x) = \psi_1(u-x)$ in $x=u$ unendlich werden, wobei $\psi(x)$ der oben angegebenen Bedingung entspricht, daher wird für eine absolut integrierbare und an der Stelle $x=u$ endliche Function $\varphi(x)$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) l 2 \sin \frac{1}{2} (u-x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} (a_v \sin vu + a'_v \cos vu), \quad (11)$$

wobei wegen $\psi_1(u-x) = \psi_1(x-u)$ negative Argumente des

log. durch dieselben positiven zu ersetzen sind. Ist die Function $\varphi^0(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu u - a'_{\nu} \sin \nu u)$ absolut integrierbar, so ergibt

das Integral $\int_0^u \varphi^0(u) du = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (a_{\nu} \sin \nu u + a'_{\nu} \cos \nu u) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_{\nu}}{\nu}$ das

zweite Glied von (11) weniger $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_{\nu}}{\nu}$. Man könnte also zur Ableitung der Eigenschaften von $\varphi^0(u)$ auch von der Gleichung (11) ausgehen.

§ 3. Es ist leicht Functionen zu construieren, welche stetig sind und die Form haben $A_1 \sin u + A_2 \sin 2u + \dots$, während die Reihe $A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots$ für gewisse Punkte z. B. alle rationalen Werte von $\frac{u}{\pi}$ divergiert. Diese Aufgabe ist allgemeiner als die, eine Function zu finden, deren Differentialquotient für dieselben Werte von u unendlich ist; denn

$F(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \sin \nu u$ hat sicher an der Stelle u keinen Differential-

quotienten, wo $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \cos \nu u$ divergiert, während andererseits

z. B. die Functionen $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin a_{\nu} u$, welche gar keinen Differential-

quotienten haben, nicht genügen, da auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \cos a_{\nu} u$ convergiert, wenn $\sum |b_{\nu}|$ convergiert.

Seien $f_1(x), f_2(x), \dots$ durchwegs endliche Functionen, und zwar Summen von Sinusreihen, dann bildet

$$F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots, \quad (12)$$

wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}|$ convergiert, eine stetige Function, für welche

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(x) \sin nx dx = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{2} A_n = 0$$

ist, woraus folgt, dass $S_n(x) = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \sin \nu x$ der Bedingung

$$\pi S_n(x) = \int_0^a \frac{F(x+\beta) + F(x-\beta)}{\beta} \sin n\beta d\beta + \varepsilon_n; \quad \lim \varepsilon_n = 0$$

genügt, bei $a > 0$. Es ist $\lim S_n(x) = F(x)$, wenn

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^a [F(x+\beta) + F(x-\beta) - 2F(x)] \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \int_0^a \frac{f_{\nu}(x+\beta) + f_{\nu}(x-\beta) - 2f_{\nu}(x)}{\beta} \sin n\beta d\beta \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} R_{\nu n} \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{n}$ Null wird. Vorausgesetzt, dass die $R_{\nu n}$ alle unter einer endlichen Schranke bleiben, kann man statt dessen $\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} R_{\nu n}$ nehmen. Für $R_{\nu n} \lesssim \frac{\nu}{n}^*$ ist sofort $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} R_{\nu n} = 0$. Andernfalls sind an die a_{ν} gewisse Bedingungen zu stellen. Es werde speciell

$$f_{\nu}(x) = f_1(\nu x); f_1(x) = f \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx \quad (13)$$

gewählt, wobei $f(x)$ eine stetige, von $x=0$ bis 1 positive und wachsende Function und $f(-x) = -f(x)$ ist. Wegen der eindeutigen Entwicklung $f_{\nu}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \nu kx$ ist es gestattet, für $R_{\nu n} R_{\nu k \nu}$ zu nehmen, $k = E\left(\frac{n}{\nu}\right) + 1$, wenn $n > \nu$ ist.

Sei $\varphi(x)$ eine Dirichlet'sche Function zwischen 0 und π , ferner $\varphi(x \pm \pi) = -\varphi(x)$ und $\varphi(2\pi - x) = \varphi(x)$. In dem Integrale

$$S = \int_0^{\pi} \varphi(\nu\beta) \sin n\beta \frac{d\beta}{\beta} \quad (14)$$

werde weiter $\frac{n}{\nu} = k + \vartheta$, $0 < |\vartheta| < 1$, gesetzt, dann wird $S = S' + S''$,

$$S' = \int_0^{\nu\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \cos \vartheta\beta \frac{d\beta}{\beta}; S'' = \int_0^{\nu\pi} \varphi(\beta) \cos k\beta \sin \vartheta\beta \frac{d\beta}{\beta}.$$

*) Zur Bezeichnung vgl. Dubois-Reymond Crelles Journal Bd. 100, hier soll jedoch $\varphi(x) \infty \psi(x)$ nur bedeuten, dass $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ endlich von Null verschieden ist, wenn x dem gerade zu betrachtenden Wert x_0 sich nähert.

Bei der Zerlegung $S' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \cos \vartheta \beta \frac{d\beta}{\beta} + \Sigma'$ ist zu beweisen, dass $\Sigma' \lesssim \frac{1}{k}$ ist. Zunächst ist

$$\Sigma' = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta d\beta \left[\frac{\cos \vartheta \beta}{\beta} + (-1)^{k-1} \frac{\cos \vartheta (\beta + \pi)}{\beta + \pi} + \right. \\ \left. + (-1)^{2(k-1)} \frac{\cos \vartheta (\beta + 2\pi)}{\beta + 2\pi} + \dots \right];$$

jedes Glied $\frac{\cos \vartheta (\beta + \varrho\pi)}{\beta + \varrho\pi}$ ist durch $\cos \vartheta (\beta + \varrho\pi) \left[\frac{1}{\varrho\pi} - \frac{\beta}{\varrho\pi(\beta + \varrho\pi)} \right]$ zu ersetzen, bei jedem Integrale

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \frac{\beta \cos \vartheta (\beta + \varrho\pi)}{\varrho\pi(\beta + \varrho\pi)} d\beta$$

ist von dem Satze Gebrauch zu machen, dass ein Integral

$\int_a^b \Phi(\beta) \sin k\beta d\beta \lesssim_K \Phi$ ist, wenn $\Phi(\beta)$ das Product einer end-

lichen Anzahl Dirichlet'scher Functionen mit dem absolut größten Werte Φ ist. Man hat nur die Factoren von Φ in einsinnige Elemente zu zerlegen, die in einem Theilintervall $a' \dots b'$ von $a \dots b$ gleichartigen zusammenziehen $\Phi(\beta) = \varphi(\beta) \psi(\beta)$, und wenn φ dort zu- und ψ abnimmt, folgt

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(\beta) \psi(\beta) \sin k\beta d\beta < \frac{\varphi(b')}{k} \int_{ka'}^{ka'+\pi} \psi \left(\frac{\beta}{k} \right) \sin \beta d\beta < \frac{\varphi(b') \psi(a') \pi}{k}.$$

Deshalb ist $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \frac{\cos \vartheta (\beta + \varrho\pi)}{\varrho\pi(\beta + \varrho\pi)} \beta d\beta \lesssim \frac{1}{\varrho^2 k}$ und die Summe für

$\varrho = 1, \dots$ noch immer mit $\frac{1}{k}$ zu vergleichen. In

$$\Sigma' = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \left[\frac{\cos \vartheta \beta}{\beta} + (-1)^{k-1} \frac{\cos \vartheta (\beta + \pi)}{\pi} + \dots \right] d\beta + \lesssim \frac{1}{k}$$

kann man noch das Glied $\varphi(\beta) \sin k\beta \frac{\cos \vartheta \beta}{\beta}$ fortlassen, und indem

$$A = \cos \vartheta \pi \pm \frac{1}{2} \cos 2 \vartheta \pi + \frac{1}{3} \cos 3 \vartheta \pi \dots$$

$$B = \sin \vartheta \pi \pm \frac{1}{2} \sin 2 \vartheta \pi + \frac{1}{3} \sin 3 \vartheta \pi \dots$$

gesetzt wird, schreiben

$$\pi \Sigma' = \pm \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta d\beta (A \cos \vartheta \beta - B \sin \vartheta \beta) + \lesssim \frac{1}{k}.$$

Zerlegt man $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$ und setzt im zweiten Integral $\beta = 2\pi - \beta'$,

so ist wegen $\varphi(2\pi - \beta') = \varphi(\beta')$

$$\pi \Sigma' = \pm \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} d\beta \varphi(\beta) \sin k\beta \begin{bmatrix} \cos \beta \vartheta (A - A \cos 2\pi \vartheta + B \sin 2\pi \vartheta) \\ -\sin \beta \vartheta (B + B \cos 2\pi \vartheta + A \sin 2\pi \vartheta) \end{bmatrix}.$$

Die Größen B sind endliche Constante, ebenso $A \sin \pi \vartheta$ wie man aus $2A \sin \pi \vartheta = \sum \pm \left[\frac{\sin(r+1)\pi \vartheta}{r} - \frac{\sin(r-1)\pi \vartheta}{r} \right]$ erkennt, da $\sum \frac{\sin r x}{r} - \sum \frac{\sin r x}{r+1}$ endlich ist. Daraus folgt schließlich, dass Σ' mit $\frac{1}{k}$ äquivalent ist. Analog ist mit S'' zu ver-

fahren, nur dass hier auch das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\beta) \cos k\beta \frac{\sin \vartheta \beta}{\beta} d\beta$

für $k \geq 1$ mit $\frac{1}{k}$ äquivalent und für $k = 0$ endlich ist. Lässt man

noch im Integrale $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\beta) \sin k\beta \frac{\cos \vartheta \beta}{\beta} a \beta$ den Factor $\cos \vartheta \beta$

weg, da der Unterschied $\lesssim \frac{1}{k}$ ist, so erhält man

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} a \beta + \lesssim \frac{1}{k}; \quad (15)$$

dabei kann $\vartheta = \frac{n}{\nu} - k$ positiv oder negativ gewählt werden; für $n < \nu$ bleibt S unter einer endlichen Schranke.

Es ist erlaubt $\varphi(\beta) = f_1(\nu x + \beta) + f_1(\nu x - \beta)$ zu setzen, weil $\varphi(\beta \pm \pi) = -\varphi(\beta)$, $\varphi(2\pi - \beta) = \varphi(\beta)$ erfüllt ist. Ferner ist $\int_0^\pi \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta$ gleich $\int_0^\pi \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta + \lesssim \frac{1}{k}$, daher ist

$$\begin{aligned} R_{\nu n} &= \int_0^\pi [f_1(\nu x + \nu\beta) + f_1(\nu x - \nu\beta) - 2f_1(\nu x)] \frac{\sin n\beta}{\beta} d\beta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f_1(\nu x + \beta) + f_1(\nu x - \beta) - 2f_1(\nu x)] \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta + \lesssim \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Die Substitution $\nu x = \varrho_\nu \pi \pm x_\nu$, $0 \leq x_\nu \leq \frac{\pi}{2}$ lässt in

$$R_{\nu n} = \pm \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f_1(x_\nu + \beta) + f_1(x_\nu - \beta) - 2f_1(x_\nu)] \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta$$

die Argumente von f_1 zwischen π und $-\frac{\pi}{2}$ sich bewegen. Um eine hinreichende Bedingung für $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n a_\nu R_{\nu n} = 0$ zu erhalten, braucht man nur eine Function $\chi(k)$ so zu wählen, dass

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta < \chi(k),$$

$\psi(x, \beta) = f_1(x + \beta) + f_1(x - \beta) - 2f_1(x)$. Der Ausdruck $\psi_1(x, \beta) = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\psi}{\beta}$ verschwindet für $\beta = 0$; je nachdem also

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi_1(x, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \psi(x, \beta)}{\partial \beta^2} = f_1''(x + \beta) + f_1''(x - \beta)$$

positiv ist oder nicht, nimmt $\psi(x, \beta) \frac{1}{\beta}$ zu oder ab.

Nunmehr werde angenommen, dass $f_1''(x)$ von $x = 0$ bis $\frac{\pi}{2}$ negativ sei und algebraisch zunehme. Wegen $f_1(x) = f \sin x$ ist noch $f_1\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f_1\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $f_1'\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f_1'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ...

für $x > \beta$ $x + \beta < \pi$ ist demnach $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} < 0$ und $\frac{\psi(x, \beta)}{\beta}$ nimmt ab, während für $x < \beta$ sowohl bei $x + \beta < \frac{\pi}{2}$ $f_1''(x + \beta) - f_1''(\beta - x)$, als auch bei $x + \beta > \frac{\pi}{2}$ $f_1''(\pi - (x + \beta)) - f_1''(\beta - x)$ wegen $\pi > 2\beta$ positiv ist. Daher nimmt $\frac{\psi(x, \beta)}{\beta}$ von $\beta = 0$ bis $\beta = x$ ab und sodann zu bis $\beta = \pi - x \geq \frac{\pi}{2}$. Für $x > 0$ ist $\frac{\psi(x, \beta)}{\beta}$ gleich Null für $\beta = 0$ und gleich $-\frac{4}{\pi} f_1(x)$ für $\beta = \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt, dass $\frac{\psi(x, \beta)}{\beta}$ für $x \leq \frac{\pi}{2}$, $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ nicht positiv und absolut am größten für $\beta = x$ bei einem bestimmten Wert von x ist.

Ebenso wächst ψ für ein bestimmtes β zunächst von $x = \beta$ bis $x = \frac{\pi}{2} - \beta$; ferner wächst ψ noch bis $x = \frac{\pi - \beta}{2}$, denn für $x + \beta = \frac{\pi}{2} + \xi$ ist $f_1''(x + \beta) - f_1''(x) = f_1''\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) - f_1''(x)$ positiv bei $\xi < \frac{\beta}{2}$, daraus folgt, dass $f_1'(x + \beta) - f_1'(x)$ bis $x = \frac{\pi - \beta}{2}$ wächst, also $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ positiv ist. Für $\xi > \frac{\beta}{2}$ nimmt wegen $f_1''(x + \beta) - f_1''(x) < 0$ $f_1'(x + \beta) - f_1'(x)$ ab, ebenso $f_1'(x - \beta) - f_1'(x)$, solange $x < \frac{\pi}{2}$ bleibt; also nimmt auch $\frac{\partial \psi}{\partial x} = [f_1'(x + \beta) - f_1'(x)] + [f_1'(x - \beta) - f_1'(x)]$ von $x = \frac{\pi - \beta}{2}$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ ab, ist aber positiv, weil $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ verschwindet. $\psi(x, \beta)$ wächst demnach von $x = \beta$ bis $x = \frac{\pi}{2}$. Im Intervall $0 < x < \beta$ ist

$$\psi(x, \beta) = f_1(x + \beta) - 2f_1(x) - f_1(\beta - x).$$

Der Ausdruck $f_1(x) + f_1(\beta - x)$ nimmt für $\beta - x < x$ ab und für $\beta - x > x$ zu, hat also den Maximalwert $2f_1\left(\frac{\beta}{2}\right)$, demnach

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, \beta)| &< f_1(x) + f_1(\beta - x) < 2f_1\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
 |\psi(x, \beta)| &\geq |\psi(\beta, \beta)| \geq |2f_1(\beta) - f_1(2\beta)|.
 \end{aligned}$$

Wenn nun das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta = \int_0^x + \int_x^{\frac{1}{2}\pi}$ zerlegt wird, so wächst $\frac{\psi(x, \beta)}{\beta}$ im ersten und nimmt im zweiten

Integral ab, absolut genommen; daher ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta \gtrless \psi(x, x) \frac{1}{kx}.$$

Für $x < \frac{\pi}{k}$ ist $\left| \int_0^x \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta \right| < \int_0^{kx} \psi\left(x, \frac{\beta}{k}\right) d\beta$ und

$$\left| \int_x^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta \right| \text{ kleiner als } \left| \int_{kx}^{kx+\pi} \psi\left(x, \frac{\beta}{k}\right) d\beta \right|, \text{ demnach}$$

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta \right| < 2\pi \text{Max} \left| \psi(x, \beta) \right|_{\beta=0}^{\frac{2\pi}{k}}.$$

Wofern noch die Voraussetzung gemacht wird, dass $f_1(2\beta) - f_1(\beta)$ für eine endliche Strecke um $\beta = 0$ kleiner als $\frac{1}{2} f_1(\beta)$ ist, so wird nach dem Vorigen das Maximum von $\psi(x, \beta)$ mit $f_1(\beta)$ vergleichbar, oder

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \psi(x, \beta) \frac{\sin k\beta}{\beta} d\beta \gtrless f_1\left(\frac{2\pi}{k}\right). \quad (16)$$

Der Ausdruck $\left| \frac{1}{x} \psi(x, x) \right| = \left| \frac{f_1(2x) - 2f_1(x)}{x} \right|$ nimmt ab von $x = 0$ bis wenigstens $x = \frac{\pi}{4}$. Also ist für $\frac{\pi}{k} < x < \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\psi(x, x)}{kx} < \frac{\psi\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right)}{\pi} \gtrless f_1\left(\frac{2\pi}{k}\right).$$

Damit ist gezeigt, dass es genügt, $\sum_{\nu=1}^n a_\nu f_1\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right)$ mit $\frac{1}{n}$ nach Null convergent zu wählen, um $\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^n a_\nu R_{\nu n} = 0$ zu erhalten.

§ 4. Die für $f_1(x)$ angegebenen Bedingungen werden von

$$f_1(x) = f \sin x; f(+x) = \frac{-l}{lcx}, f(-x) = \frac{1}{lcx}, c < 1 \quad (17)$$

erfüllt; denn es ist

$$f_1(2\beta) - f_1(\beta) = f_1(\beta) f_1(2\beta) l 2 \cos \beta$$

und $f_1''(x) = \frac{-1}{\sin^2 x (lc \sin x)^2} \left(1 + \frac{2 \cos^2 x}{lc \sin x} \right)$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ negativ und zunehmend. $f \sin \left(\frac{2\pi}{k} \right)$ ist kleiner als $f \left(\frac{2\pi}{k} \right) = \frac{1}{lk - l 2c\pi} \sim \frac{1}{lk}$,

deshalb genügt es für $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v R_{vn} = 0$ zu bewirken, dass $\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{Env} \frac{a_v}{l \left(\frac{n}{v} \right)}$ gleich Null. In dieser Summe braucht man die Summation nur soweit fortzuführen, als $l \left(\frac{n}{v} \right) > 2$ ist, weil R_{vn} unter einer endlichen Schranke bleibt; dann ist $(lv - 1)(2 + lv) > (lv)^2$, $(lv - 1)ln > (lv)^2$, $\frac{lv}{ln} > \frac{1}{l \frac{n}{v}}$, woraus folgt, dass es genügt

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v lv$ convergent anzunehmen. Von der Function $f(\pm x) = \mp \frac{1}{lcx}$ ist also bewiesen, dass

$$F(x) = a_1 f \sin x + a_2 f \sin 2x + \dots$$

eine stetige Function ist, welche in eine sie überall deckende Reihe $A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots$ zu entwickeln ist, wofern

$$\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| lv \text{ convergiert.}$$

Damit $A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$ convergiere, muss

$$\int_0^{\pi} \frac{F(x+\beta) - F(x-\beta)}{\beta} d\beta \text{ endlich, oder } \sum_{v=1}^{\infty} a_v \int_{\delta}^{\pi} \frac{f_1(vx + v\beta) - f_1(vx - v\beta)}{\beta} d\beta$$

für jedes $\delta > 0$ unter einer anzugebenden Schranke sein. Wegen $f_1(x \pm \pi) = -f_1(x)$ ist

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{f_1(vx + v\beta) - f_1(vx - v\beta)}{\beta} d\beta = \int_{v\delta}^{v\delta + \pi} \frac{f_1(vx + \beta) - f_1(vx - \beta)}{\beta} d\beta - \dots,$$

und weil $[f_1(vx + \beta) - f_1(vx - \beta)] \left[\frac{1}{\beta + \pi} - \dots \right] < \frac{-2}{lc}$, und

auch $\int_{v\delta + \frac{1}{4}\pi}^{v\delta + \pi} \frac{f_1(vx + \beta) - f_1(vx - \beta)}{\beta} d\beta$ endlich ist, kann man die Be-

trachtung zunächst auf

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \int_{\nu\delta}^{\nu\delta + \frac{1}{4}\pi} \frac{f_1(\nu x + \beta) - f_1(\nu x - \beta)}{\beta} d\beta$$

beschränken. Der Ausdruck $\varphi = \frac{f_1(x + \beta) - f_1(x - \beta)}{\beta}$ hat das Vorzeichen von $\sin(x + \beta) - \sin(x - \beta) = 2 \cos x \sin \beta$. Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ist $f_1'(x + \beta) - f_1'(x - \beta)$ negativ für $x < \beta$ und positiv für $x > \beta$ zunächst für $x + \beta < \frac{\pi}{2}$, aber auch für $x + \beta > \frac{\pi}{2}$ ist $f_1'(\pi - x - \beta) - f_1'(x - \beta)$ positiv. Daher nimmt φ bis $\beta = x$ zu und dann ab mit dem Maximum $\frac{f_1(2x)}{x}$. Nun kann man die Summation auf $\nu = \nu'$ beschränken, solange $\nu\delta < \frac{1}{4}\pi$, da der Rest kleiner als $\frac{-2}{lc} \sum_{\nu=\nu'}^{\infty} a_{\nu}$ ist; setzt man noch $\nu x = \varrho_{\nu} \pi \pm x_{\nu}$, $0 < x_{\nu} \leq \frac{\pi}{2}$, so verbleibt

$$\sum_{\nu=1}^{\nu'} a_{\nu} (-1)^{\varrho_{\nu}} \int_{\nu\delta}^{\nu\delta + \frac{1}{4}\pi} \frac{f_1(x_{\nu} + \beta) - f_1(x_{\nu} - \beta)}{\beta} d\beta$$

Jetzt sei $\frac{x}{\pi}$ ein rationaler Wert, z. B. $x = \frac{k\pi}{\sigma}$. Ist ν nicht durch σ theilbar, so ist das zugehörige Integral kleiner als $\frac{1}{4}\pi f_1\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)\sigma$; die Glieder mit Indices $\nu = \mu\sigma$ ergeben

$$2 \sum_{\mu=1}^{\mu'} a_{\mu\sigma} (-1)^{\mu k} \int_{\mu\sigma\delta}^{\mu\sigma\delta + \frac{1}{4}\pi} f(\beta) \frac{d\beta}{\beta}.$$

Nimmt man noch die Größen a_{ν} positiv abnehmend an, so kann man zu jeder Zahl g ein δ finden, so dass dieser Ausdruck absolut größer als g ist. Für ein gerades k ist derselbe positiv

und größer als $a_{\sigma} \int_{\sigma\delta}^{\sigma\delta + \frac{1}{4}\pi} f(\beta) \frac{d\beta}{\beta}$, also mit $\frac{1}{\delta}$ beliebig groß. Für

ein ungerades k ist zu bemerken, dass die Größen $\int_{\mu \sigma \delta}^{\mu \sigma \delta + \frac{1}{4} \pi} f(\beta) \frac{d\beta}{\beta}$ mit wachsendem μ abnehmen, so lange $\mu \sigma \delta < \frac{\pi}{4}$ ist; daraus folgt, dass $\sum_{\mu=1}^{\mu \sigma \delta + \frac{1}{4} \pi} a_{\mu \sigma} (-1)^{\mu} \int_{\mu \sigma \delta}^{\mu \sigma \delta + \frac{1}{4} \pi} f(\beta) \frac{d\beta}{\beta}$ negativ und absolut größer als $(a_{\sigma} - a_{2\sigma}) \int_{2\sigma \delta}^{\mu \sigma \delta + \frac{1}{4} \pi} f(\beta) \frac{d\beta}{\beta}$ ist. Daher wird $A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$ für $\frac{x}{\pi} = \frac{k}{\sigma}$ mit dem Zeichen $(-1)^k$ unendlich, wofern der Ausdruck mit $\int_0^{\pi} [f(x + \beta) - f(x - \beta)] \cot \frac{1}{2} \beta d\beta$ übereinstimmt, keinesfalls hat er einen endlichen bestimmten Wert.

Es lassen sich auch irrationale Werte von $\frac{x}{\pi}$ finden, für welche $A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$ convergirt. Wie später (§ 5) bewiesen wird, ist für $f_1(x) = \frac{1}{l \frac{1}{2} \sin x}$

$$\int_0^{\pi} \frac{f_1(x_{\nu} + \beta) - f_1(x_{\nu} - \beta)}{\beta} d\beta \leq l l \frac{2}{\sin x_{\nu}} \leq l l \frac{6}{x_{\nu}},$$

und umsomehr, wenn statt der unteren Grenze Null $\nu \delta$ geschrieben wird. Ist ν nicht der Nenner eines Näherungsbruches $\frac{p_n}{\theta_n}$ von $\frac{x}{\pi}$, so folgt wegen $\frac{x_{\nu}}{\pi} > \frac{1}{2\nu} l l \frac{6}{x_{\nu}} < l \nu$ und die betreffenden Glieder haben eine unbedingt convergente Summe, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} l_{\nu}$ convergirt. Wenn ν dagegen ein Nenner θ_n ist, so hat $\frac{x_{\nu}}{\pi}$ den Wert $\frac{c_n}{\theta_{n+1}}$, $\frac{1}{2} < c_n < 1$, und man kann die unvollständigen Quotienten p_n von $\frac{x}{\pi}$ in $\theta_{n+1} = p_n \theta_n + \theta_{n-1}$ so wählen, dass

$$l l \frac{6}{x_{\nu}} < l \theta_n \text{ oder } l \theta_{n+1} < \theta_n$$

ist, so dass $\Sigma a_\nu l l \frac{6}{x_\nu}$ convergiert, wenn ν die Zahlen Θ_n durchläuft. Umsomehr hat dann die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cos \nu x$ eine endliche Summe.

$$\text{Sollen die Integrale } \Phi_\nu(x) = \int_0^\pi \frac{f_\nu(x+\beta) - f_\nu(x-\beta)}{\beta} d\beta$$

zwar endlich für jedes endliche ν bleiben, dagegen ihre Maxima mit ν an Betrag zunehmen, so ist zu unterscheiden, ob dabei auch die Zahl der Maxima zunehmen soll, analog wie der Differentialquotient $\Phi_\nu(x)$ von $f_\nu(x) = \sin \nu x$ ν Maxima des Betrages ν hat. Ohne diese zweite Bedingung genügt z. B. $f_\nu(x) = \sin^2 \nu x$, für $x \geq 0$ und $f_\nu(-x) = -f_\nu(x)$; es ist

$$\Phi_\nu(0) = 2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \nu \beta}{\beta} d\beta \text{ mit } l\nu \text{ vergleichbar. Setzt man ferner}$$

$$\varphi(x) = (-1)^k \text{ für } x = k\pi + x_\nu, \quad 0 \leq x_\nu < \pi$$

und $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, so ist $\varphi(x)$ eindeutig fixiert und erfüllt $\varphi(x \pm \pi) = -\varphi(x)$. Die Function $\Phi_\nu(x)$ zu

$$f_\nu(x) = \varphi(\nu x) \sin^2 \nu^2 x \quad (18)$$

besitzt dann die Eigenschaft, dass ihre Maxima an Zahl und Größe mit ν wachsen. Es ist

$$\Phi_\nu(x) = (-1)^k \int_0^\pi [\varphi(x_\nu + \beta) \sin^2(\nu^2 x + \nu \beta) - \varphi(x_\nu - \beta) \sin^2(\nu^2 x - \nu \beta)] \frac{d\beta}{\beta}$$

bis auf eine Größe, die kleiner als 2 ist. Man kann $x_\nu \leq \frac{\pi}{2}$ nehmen, da das Integral nur das Zeichen ändert, wenn x_ν durch $\pi - x_\nu$ ersetzt wird und weiter in

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_\nu} [\sin^2(\nu^2 x + \nu \beta) - \sin^2(\nu^2 x - \nu \beta)] \frac{d\beta}{\beta} + \\ & + \int_{x_\nu}^{\pi - x_\nu} [\sin^2(\nu^2 x + \nu \beta) + \sin^2(\nu^2 x - \nu \beta)] \frac{d\beta}{\beta} + \\ & + \int_{\pi - x_\nu}^\pi [\sin^2(\nu^2 x - \nu \beta) - \sin^2(\nu^2 x + \nu \beta)] \frac{d\beta}{\beta} \end{aligned}$$

erlegen. Von diesen Integralen ist das erste und dritte kleiner als 2π , also ist für $\nu x = \varrho_\nu \pi \pm x_\nu$ $0 \leq x_\nu \leq \frac{\pi}{2}$

$$(-1)^{\varrho_\nu} \Phi_\nu(x) \sim 2 \int_{x_\nu}^{\pi - x_\nu} [\sin^2 \nu^2 x \cos^2 \nu \beta + \cos^2 \nu^2 x \sin^2 \nu \beta] \frac{d\beta}{\beta}$$

und für $x_\nu = 0$ ist $\Phi_\nu(x)$ mit $l\nu$ zu vergleichen.

§ 5. Das Integral $\int_0^\pi \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} = F(u)$ ist endlich

an der Stelle u , wenn $[f(u+x) - f(u-x)] \frac{1}{x}$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen kleiner als M hat, und $f(x)$ eine stetige Function ist. Für ein Intervall u_0 bis u_1 , in welchem $\frac{f(u+x) - f(u-x)}{x}$ diese Eigenschaft hat, ist $F(u)$ auch eine stetige Function, u_0 kann gleich 0 genommen werden, da man nur $F_0(u) = F(u - u_0)$, $f_0(u) = f(u - u_0)$ zu betrachten brauchte. Der Voraussetzung nach ist $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ durchwegs endlich. Wählt man demnach eine Function $f_1(x)$ gleich $f(+x)$ für das Argument $+x$, so ist in $f(x) = f_1(x) + \psi(x)$ die Function $\psi(x)$ Null für positive Argumente und gleich $-x\varphi(x)$ für das Argument $-x$. Nun ist

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \int_0^\pi \frac{\psi(u+x) - \psi(u-x)}{x} dx = \int_u^\pi \frac{(x-u)\varphi(x-u)}{x} dx \\ &= \Psi(0) - \int_{\pi-2u}^\pi \varphi(x) dx - u \int_u^{\pi-u} \frac{\varphi(x-u)}{x} dx \end{aligned}$$

eine stetige Function von u in $u=0$. Da $\frac{\psi(u+x) - \psi(u-x)}{x}$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen hat, muss auch $\frac{f_1(u+x) - f_1(u-x)}{x}$ endlich sein, und deshalb werde direct $f(-x) = f(x)$ angenommen,

$$\text{also} \quad F(u) = \int_0^u \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx + \int_u^\pi \frac{f(x+u) - f(x-u)}{x} dx;$$

wegen $\left| \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} \right| < M$ und $\left| \frac{f(x+u) - f(x-u)}{x} \right| < M$ ist

$$|F(u)| < M[u + lu + lu_1] + \int_{u_1}^\pi \frac{f(x+u) - f(x-u)}{x} dx$$

mit u beliebig klein, da u_1 eine bestimmte positive GröÙe ist.

Erleidet die Function $f(u)$ an der Stelle u_0 eine derartige Unstetigkeit, dass $f(u_0 + 0)$ und $f(u_0 - 0)$ bestimmt aber verschieden sind, so wird $F(u_0)$ bestimmt unendlich, denn der Unterschied von $f(u+x)$ und $f(u-x)$ ist für gewisse x größer als eine zu findende GröÙe δ . Solange man die Integrationsfolge in

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx$$

vertauschen darf, insbesondere immer bei $x_0 > 0$ wird

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} \int_{u_1-x}^{u_1+x} f(u) du - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} \int_{u_0-x}^{u_0+x} f(u) du;$$

die rechte Seite ist auch für $x_0 = 0$ endlich, wenn $f(u)$ endlich und integrierbar ist, und ebenso, wenn $f(u)$ an der Stelle u_0

unendlich, aber absolut integrierbar und kleiner als $\frac{1}{l(u-u_0)^s(u-u_0)}$ ist. Wird z. B. $F(u_0)$ dadurch unendlich, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x}$

an der Stelle u_0 eine vereinzelte Unendlichkeitsstelle hat, so ist $F(u)$ bis $u = u_0$ integrierbar; denn dann ist die Vertauschung der Integrationsfolge erlaubt für $u_0 + \delta$ statt u_0 , und die Integrale rechts bleiben unter einer zu findenden Schranke, wie klein auch δ ist. Insbesondere ist hervorzuheben, dass vereinzelte Unstetigkeiten der Differentialquotienten die Function $F(u)$ integrierbar unendlich werden lassen. Berechnet man

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx \text{ gleich } F(u, x_0) \text{ zuerst für } x_0 > 0,$$

und lässt erst dann $x_0 = 0$ werden, so ist damit noch nicht die Integrierbarkeit von $F(u)$ bewiesen.

Hat $f(x)$ an der Stelle $x=0$ entweder ein endliches Maximum (Minimum) oder ist $f(x)$ von $-a$ bis $+a$ einsinnig, so können die Werte von $F(u)$ in der Umgebung von $u=0$, wenn $F(0)$ unendlich ist, in folgender Weise determinirt werden. Zunächst darf man voraussetzen, dass $f(0)=0$ und entweder $f(x)$ zu beiden Seiten von $x=0$ positiv und wachsend, oder für positive x positiv und negative x negativ, dem absoluten Betrag nach von $x=0$ anwachsend ist; darauf kann man die anderen Fälle zurückführen. In

$$F(u) = \int_0^u \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx + \int_u^a \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx, \quad a > 0,$$

ist $\int_u^a \frac{f(u+x)}{x} dx = (1+\theta) \int_u^a \frac{f(u+x)}{u+x} dx$, $0 < \theta < 1$; ferner ist für
 $f(-x) = f_1(x) \int_u^a \frac{f(u-x)}{x} dx = \int_u^a \frac{f_1(x)}{x} dx - \int_u^a \frac{f_1(x) - f_1(x-u)}{x} dx =$
 $= (1-\theta') \int_u^a \frac{f_1(x)}{x} dx$, wo θ' kleiner als der Maximalwert von
 $\left| 1 - \frac{f_1(x-u)}{f_1(x)} \right|$ ist. Daher ist $F(u)$, $u > 0$, in der Umgebung
 von $u=0$ jedenfalls mit dem größten der drei Integrale

$$\int_0^u \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx, \int_{2u}^u \frac{f(x)}{x} dx, \int_u^a \frac{f(-x)}{x} dx \quad (19)$$

zu vergleichen. Ist insbesondere $f(-x) = -f(x)$, so folgt

$$F(u) = \int_0^u \frac{f(u+x) - f(u-x)}{x} dx + (1+\theta)(1+\theta') \int_{2u}^{a+u} \frac{f(x)}{x} dx, \quad \begin{matrix} 0 < \theta < 1 \\ 0 < \theta' < 1 \end{matrix}$$

Speciell für die oben betrachtete Function $f(x) = \frac{-1}{l \frac{1}{2} \sin x}$
 $f(-x) = -f(x)$, wird, da $\frac{f(u+x) - f(u-x)}{x}$ das Maximum für
 $x=u$ hat,

$$F(u) \gtrsim u \frac{f(2u)}{u} + \int_{2u}^u \frac{1}{l \frac{1}{2} \sin x} \frac{dx}{x};$$

statt dieses Integrales kann man $\int_{2u}^u \frac{1}{l \frac{1}{2} \sin x} \cot x dx = ll \frac{2}{\sin 2u}$ wählen.

In der geschlossenen Form von Integralen lassen die Functionen $f^0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x - b_{\nu} \sin \nu x$ häufig die Bildung von Differentialquotienten zu, was in der Reihenform nicht möglich ist, und zwar mit Hilfe der Differentialquotienten von

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \sin \nu x + b_{\nu} \cos \nu x). \text{ Aus}$$

$$2\pi f^0(u) = \int_0^a [f(u+x) - f(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \int_a^{\pi} \dots; \quad a > 0$$

folgt, dass, wenn $\frac{f'(u+x)-f'(u-x)}{x}$ eine stetige Function beider Variablen in einer Umgebung von u , während x von 0 bis zu einer positiven GröÙe a variiert, ist, weiter

$$2\pi \frac{df^0(u)}{du} = \int_0^a [f''(u+x) - f''(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \frac{\partial}{\partial u} \int_a^\pi [f'(u+x) - f'(u-x)] \cot \frac{x}{2} dx$$

Ist auch noch im Intervall $x = a$ bis π $f''(u+x) - f''(u-x)$ eine stetige Function beider Variablen, so ist sofort

$$2\pi \frac{df^0(u)}{du} = \int_0^\pi [f''(u+x) - f''(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx.$$

Wird dagegen der Fall angenommen, dass $f(x)$ an der Stelle $x = c$ einen endlichen Sprung mache, sonst aber stetig sei, so ist für eine Stelle u , die von c verschieden ist, z. B. $u < c$

$$2\pi f^0(u) = \int_0^a [f(u+x) - f(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \int_a^{c-u} + \int_{c-u}^\pi$$

zu zerlegen. Für $V(u) = \int_a^{c-u} f(u+x) \varphi(x) dx$, wo $0 < a < c-u$ und φ stetig ist von $x = a$ bis $c-u$ folgt

$$V(u+\delta) - V(u) = \int_a^{c-u-\delta} [f(u+x+\delta) - f(u+x)] \varphi(x) dx + \int_{c-u-\delta}^{c-u} f(u+x) \varphi(x) dx$$

$$V(u-\delta) - V(u) = - \int_a^{c-u} [f(u+x) - f(u+x-\delta)] \varphi(x) dx + \int_{c-u}^{c-u+\delta} f(u+x-\delta) \varphi(x) dx$$

$$\int_{c-u-\delta}^{c-u} f(u+x) \varphi(x) dx = \delta f(c-\theta\delta) \varphi(c-u-\theta\delta)$$

$$\int_{c-u}^{c-u+\delta} f(u+x-\delta) \varphi(x) dx = \delta f(c-\theta'\delta) \varphi(c-u+\delta(1-\theta')).$$

Der Voraussetzung nach sei in

$$\frac{f(u+x) - f(u+x-\delta)}{\delta} = f'_-(u+x) + \varepsilon, \delta > 0$$

mit δ beliebig klein, unabhängig von u in einer Umgebung der betrachteten Stelle, während x von a bis einschließlich

$$c-u \text{ variiert. Ferner ist } \int_a^{c-u-\delta} [f(u+x+\delta) - f(u+x)] \varphi(x) dx = \\ = \int_{a+\delta}^{c-u} [f(u+x) - f(u+x-\delta)] \varphi(x-\delta) dx, \text{ also ist } \frac{dV(u)}{du} \text{ vor-}$$

wärts und rückwärts genommen gleich, und zwar

$$\frac{dV(u)}{du} = \int_a^{c-u} f'_-(u+x) \varphi(x) dx - f'(c-0) \varphi(c-u).$$

Behandelt man die einzelnen Theile von $2\pi f^0(u)$ in derselben Weise, so ergibt sich für eine Function $f(x)$ mit der endlichen Zahl endlicher Sprungstellen c, c', \dots , deren Ableitungen zu beiden Seiten jeder Sprungstelle stetig sind bis auf diese selbst, und für eine Stelle u , in deren Umgebung $\frac{f'(u+x) - f'(u-x)}{x}$ eine stetige Function beider Variablen ist, die Gleichung

$$(20) 2\pi \frac{df^0(u)}{du} = \int_0^\pi [f'(u+x) - f'(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \Sigma [f'(c+0) - f'(c-0)] \cot \frac{c-u}{2}.$$

Dabei sind unter $f(c+0)$, $f(c-0)$ die wirklichen Grenzwerte von $\lim f(c \pm \delta)$ zu verstehen, und nicht die Werte, welche $f(x)$ an der Stelle c selbst haben kann. Z. B. ist für

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x, \text{ wenn } f(x) \text{ für } x=0 \text{ und } x=\pi \text{ anderen}$$

Werten als Null zustrebt, sonst aber stetig ist

$$2\pi \frac{df^0(u)}{du} = \int [f'(u+x) - f'(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx - 2 \left[f(0) \cot \frac{1}{2} u + f(\pi) \tan \frac{1}{2} u \right],$$

wo $f(0)$, $f(\pi)$ die bei Annäherung innerhalb 0, π erhaltenen Werte darstellen.

Kennt man für $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \sin \nu x + b_{\nu} \cos \nu x)$ einen analytischen Ausdruck $f_1(x)$, welcher sich mit $f(x)$ mit Ausnahme einzelner Stellen deckt, so darf man in dem Ausdruck für $f^0(u)$ die Function $f_1(x)$ statt $f(x)$ zum mindesten dann einführen, wenn $f(x) - f_1(x)$ endlich ist. Insbesondere tritt dieser Fall ein, wenn umgekehrt eine gegebene Function $f_1(x)$ zwischen $x = 0$ und π in eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu x$ oder $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cos \nu x$ entwickelbar ist, welche mit $f_1(x)$ höchstens in einer endlichen Zahl von Stellen sich nicht decken. Um dann die Ausdrücke $f_-^0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x$ und $f_+^0(x) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu x$ zu berechnen, muss im Integralausdruck für $f^0 \pm(u)$

$$\int_0^{\pi} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx$$

bei $f_-^0(x)$ der Ausdruck $f_-^0(x)$ als Abkürzung für $-f_1(x)$ und bei $f_+^0(x)$ ebenso $f_1(-x) = f_1(x)$ gelten, ferner ist auch $f_1(x+\pi) = f_1(x-\pi)$ in beiden Fällen zu verstehen. Ohne Anwendung dieser Abbreviaturen, muss geschrieben werden

$$u \leq \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{aligned} 2\pi f_+^0(u) &= \int_0^u [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \\ &+ \int_u^{\pi-u} [f_1(x+u) - f_1(x-u)] \cot \frac{1}{2} x dx - \int_{\pi-u}^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx \\ 2\pi f_-^0(u) &= \int_0^u [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx + \\ &+ \int_u^{\pi-u} [f_1(x+u) + f_1(x-u)] \cot \frac{1}{2} x dx + \int_{\pi-u}^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx \end{aligned} \right.$$

$$u \geq \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} 2\pi f_+^0(u) = \int_0^{\pi-u} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx - \\ - \int_{\pi-u}^u f_1(u-x) \cot \frac{1}{2} x dx - \int_u^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx \\ 2\pi f_+^0(u) = \int_0^{\pi-u} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx - \\ - \int_{\pi-u}^u f_1(u-x) \cot \frac{1}{2} x dx + \int_u^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx. \end{array} \right.$$

Erfüllt der Ausdruck $f_1(x)$ analytisch bereits eine der Eigenschaften $f_1(-x) = \pm f_1(x)$, so brauchen in dem betreffenden Ausdruck für $f^0 \pm(x)$ nur die Argumente $> \pi$ entfernt zu werden

$$2\pi f^0(u) = \int_0^{\pi-u} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx - \int_{\pi-u}^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx.$$

Durch Subtraction der correspondierenden Gleichungen erhält man den Zusammenhang von $f_-^0(u)$ und $f_+^0(u)$ als

$$f_-^0(u) - f_+^0(u) = \frac{1}{\pi} \int_u^{\pi+u} f_1(x-u) \cot \frac{1}{2} x dx, \quad (21)$$

wo die Argumente von f_1 bereits zwischen 0 und π sind. Dem Ausdruck für $f^0(\pi-u)$ kann die Form

$$2\pi f^0(\pi-u) = \int_0^{\pi} [f(-u-x) - f(x-u)] \tan \frac{1}{2} x dx$$

ertheilt werden, und für $f(x) = f_1(x)$, je nach $f_1(-x) = \pm f_1(x)$ ist

$$\pm 2\pi f_{\pm}^0(\pi-u) = \int_0^{\pi} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \tan \frac{1}{2} x dx, \quad (22)$$

wobei links die gleichen Zeichen correspondieren. Dadurch lassen sich $f^0(\pi-u)$, $f^0(u)$ mit Hilfe von Integralen, welche kleinere Grenzen haben, auf einander zurückführen. So ist z. B.

$$f_-^0(u) + f_-^0(\pi - u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{1}{2} x \, dx$$

$$f_-^0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[f_1\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - f_1\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] \cot \frac{1}{2} x \, dx.$$

Nach Gleichung (20) ist für ein Integral

$$\int_0^{\pi} [f_1(u+x) - f_1(u-x)] \cot \frac{x}{2} \, dx,$$

in welchem $f_1(-x)$ durch $-f_1(x)$ zu ersetzen ist der Differentialquotient gleich

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} [f_1'(u+x) - f_1'(u-x)] \cot \frac{1}{2} x \, dx - 2 \overline{f_1(u)} \\ & - \frac{1}{2} \overline{f_1(u)} = f_1(0) \cot \frac{1}{2} u + f_1(\pi) \tan \frac{1}{2} u, \end{aligned}$$

wenn $f_1'(-x) = f_1'(x)$ zu verstehen ist; und analog für $f_1(-x) = f_1(x)$ der Differentialquotient gleich dem vorigen Ausdruck ohne das Glied $-2 \overline{f_1(u)}$, wenn für $f_1'(-x) = f_1'(x)$ eingesetzt wird. Danach ist z. B. von $f_-^0(u)$ der ν^{te} Differentialquotient durch

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{d^{\nu} f_-^0(u)}{du^{\nu}} &= \int_0^{\pi} [f_1^{(\nu)}(u+x) - f_1^{(\nu)}(u-x)] \cot \frac{1}{2} x \, dx \\ &+ \frac{d^{\nu-1} \overline{f_1(u)}}{du^{\nu-1}} + \frac{d^{\nu-3} \overline{f_1''(u)}}{du^{\nu-3}} - \dots \end{aligned} \quad (23)$$

gegeben, und $f_1^{(\nu)}(-x)$ durch $(-1)^{\nu-1} f_1^{(\nu)}(x)$ zu ersetzen. Die Ausdrücke $\frac{d^{\nu-1} \overline{f_1(u)}}{du^{\nu-1}}, \dots$ sind rationale Functionen von $\tan \frac{1}{2} u$.

§ 6. Man kann die gegebenen Entwicklungen benützen, um aus einer bekannten Reihe

$$f(u) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos u + \dots, \quad (24)$$

wenn ν, λ zwei ganze Zahlen sind, für welche $\nu > \lambda > 0$ ist, die Reihe

$$\frac{1}{2} a_\lambda + a_{\lambda+\nu} \cos u + a_{\lambda+2\nu} \cos 2u + \dots \quad (25)$$

zu berechnen. Die Entwicklung der Functionen

$$f_\lambda(u) = f(u) \sin \lambda u = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda n} \sin n u$$

ergibt wegen $a_{n+\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos n t \cos \lambda t f(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin n t \sin \lambda t f(t) dt$

$$\chi(u) = \frac{1}{2} a_\lambda + a_{\lambda+1} \cos u + \dots = f(u) \cos \lambda u - \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda n} \cos n u$$

$$\nu \left[\frac{1}{2} a_\lambda + a_{\lambda+\nu} \cos u + \dots \right] = \chi\left(\frac{u}{\nu}\right) + \chi\left(\frac{u+2\pi}{\nu}\right) + \dots + \chi\left(\frac{u+\nu-1 \cdot 2\pi}{\nu}\right).$$

Die Berechnung der Reihe (25) ist demnach auf die Theilung von $\chi(u)$, oder da $f(u) \cos \lambda u$ als bekannt anzusehen ist, auf diejenige von $f_\lambda^0(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\lambda n} \cos n u$ zurückgeführt. Es ist

$$\begin{aligned} 2\pi f_\lambda^0(u) &= \int_0^\pi f_\lambda(u+x) - f_\lambda(u-x) \cot \frac{1}{2} x dx \\ &= \sin \lambda u \int_0^\pi [f(u+x) - f(u-x)] \cos \lambda x \cot \frac{1}{2} x dx \\ &\quad + \cos \lambda u \int_0^\pi [f(u+x) + f(u-x)] \sin \lambda x \cot \frac{1}{2} x dx, \end{aligned}$$

dabei ist $f_\lambda(-u)$ durch $-f_\lambda(u)$, also $f(-u)$ durch $f(u)$ zu ersetzen, wenn $f(u)$ nur zwischen 0 und π analytisch gegeben ist. Die Integrale

$$\int_u^{u+\pi} f(x) \cos^\mu \frac{1}{2} x \sin^\varrho \frac{1}{2} x dx$$

mögen für ganze Zahlen μ, ϱ als bekannt angesehen werden; dann kann man schreiben

$$f_{\lambda}^0(u) \equiv \sin \lambda u f^0(u) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f^0(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(u+x) - f(u-x)] \cot \frac{1}{2} x dx \\ &= - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu u. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\sum_{r=1}^{\nu-1} f_{\lambda}^0(r b) \equiv \sum_{r=1}^{\nu-1} \sin \lambda r b f^0(r b)$, $b = \frac{2\pi}{\nu}$, ergibt sich, da

$$2 \sum_{r=1}^{\nu-1} \sin \lambda r b \sin \mu r b = \sum_{r=1}^{\nu-1} \cos(u-\lambda) r b - \sum_{r=1}^{\nu-1} \cos(u+\lambda) r b$$

für $\mu \equiv \pm \lambda \pmod{\nu}$ gleich $\pm \nu$, sonst aber, außer für $2\lambda \equiv 0 \pmod{\nu}$, verschwindet, congruent

$$- \frac{\nu}{2} (a_{\lambda} + a_{\nu+\lambda} + \dots - (a_{\nu-\lambda} + a_{2\nu-\lambda} + \dots))$$

Andererseits ist

$$- \sum_{r=0}^{\nu-1} f_{\lambda}^0(r b) \equiv \sum_{r=0}^{\nu-1} \chi(r b) = \nu \left(\frac{1}{2} a_{\lambda} + a_{\lambda+\nu} + \dots \right),$$

was $a_{\lambda} + a_{\lambda+\nu} + \dots + a_{\nu-\lambda} + a_{2\nu-\lambda} + \dots \equiv 0$ beweist.

Die Zahl der Größen $f_{\lambda}^0(r b)$ lässt sich wegen $f_{\lambda}^0(r b) = f_{\lambda}^0(\overline{\nu - r b})$ auf $\frac{\nu}{2}$ oder $\frac{\nu-1}{2}$ reducieren, ferner kann man die Fälle, wo r nicht prim zu ν ist, als Transcendente niedrigerer Art ansehen, insofern sie eine Theilung mit kleinerem Divisor erfordern. Manchmal lassen sich die Größen $f_{\lambda}^0(r b)$ auf Transcendente niedrigerer Art, als $f^0(u)$ im allgemeinen ist, zurückführen. So ist z. B. für $4f(x) = x^2 + 2\pi x$ $a_{\nu} = \frac{1}{\nu^2}$, und

$$\begin{aligned} a_{\lambda} + a_{\lambda+\nu} + \dots &= \frac{1}{\nu^2} \frac{d^3 l \Gamma(x)}{d x^3} \text{ für } x = \frac{\lambda}{\nu} \text{ wird gleich } \int_0^1 \frac{z^{\lambda-1} l z}{z^{\nu}-1} dz \\ &= \int_0^1 \sum_{\alpha} \frac{\alpha^{\lambda-\nu}}{\nu} \frac{\alpha z}{z-\alpha}, \text{ wo } \alpha \text{ eine } \nu^{\text{te}} \text{ Einheitswurzel bedeutet. Setzt} \end{aligned}$$

man also $\psi(\alpha) = \alpha^{1-\nu} \int_0^\alpha \frac{l \alpha d\alpha}{\alpha-1}$ so ist $\sum_{r=0}^{1-\nu} f_l^0(r b)$ auf die Function $\psi(\alpha)$ für algebraische Argumente zurückzuführen, wo $\psi(\alpha)$ einer algebraischen Differentialgleichung 2. O. genügt, während zu f^0 eine solche 3. O. erforderlich ist. Es hat dies den Grund, dass hier $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2\pi x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten genügte. Ist allgemein

$$0 = \frac{d^m f(u)}{d u^m} + c_1 \frac{d^{m-1} f(u)}{d u^{m-1}} + \dots,$$

so genügt, wenn R eine rationale Function bedeutet, f^0 der Relation

$$R \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \frac{d^m f^0}{d u^m} + c_1 \frac{d^{m-1} f^0}{d u^{m-1}} + \dots,$$

welche durch eine algebraische Differentialgleichung $(m+1).0$ zu ersetzen ist, während für $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = v$ eine solche $m.0$

$$R(v) = \varphi_0(v) \frac{d^m f^0}{d v^m} + \varphi_1(v) \frac{d^{m-1} f^0}{d v^{m-1}} + \dots$$

resultiert, wo v für rationale $\frac{u}{\pi}$ algebraisch ist.

§ 7. Das Integral $\int_0^a f(x) \cot x \sin^2 n x dx$, welches bei der

Summierung von $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ für $a_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin n x f(x) dx$ auftritt, lässt sich in der Form schreiben

$$\frac{1}{2} \int_0^{2n} dy \int_0^a x f(x) \cot x \sin x y dx.$$

Ist nämlich $\Phi(y) = \int_0^a \frac{\lambda(x)}{x} \sin^2 x y dx$, so verschwinden in

$$\begin{aligned} \Phi(y+\varepsilon) - \Phi(y) &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\lambda(x)}{x} \sin 2xy \sin 2x\varepsilon dx + \\ &+ \int_0^a \frac{\lambda(x)}{x} \cos 2xy \sin^2 x\varepsilon dx \end{aligned}$$

die Integrale

$$\int_0^a \lambda(x) \cos 2xy \frac{\sin^2 x \varepsilon}{x \varepsilon} dx \quad \text{und} \quad \int_0^a \lambda(x) \sin 2xy \left(1 - \frac{\sin 2x \varepsilon}{2x \varepsilon}\right) dx$$

mit ε für jedes endliche y und für eine zwischen $x = 0$ und a absolut integrierbare Function $\lambda(x)$; das erste z. B. ist kleiner

als $\sin \varepsilon a \int_0^a dx |\lambda(x)|$. Daher ist

$$\Phi'(y) = \int_0^a \lambda(x) \sin 2xy dx.$$

Man wird so auf Integrale der Form

$$A = \int_0^{\infty} dy \int_0^a \lambda(x) \psi(xy) dx$$

geführt, welche nicht von a unabhängig sind. In unserem Fall deshalb, weil das Integral die Summe von zweien ist, deren eines ein Fourier'sches ist, während das andere von a abhängt. Diese Integrale A können auch durch eine Transformation berechnet werden, vorausgesetzt, dass man für $\lambda(x) = x$ das specielle Integral kennt.

$$B_p = \int_0^p dy \int_0^b \lambda(\xi) \psi(\xi y) d\xi$$

gestattet die Substitution $x = \int_0^{\xi} \lambda(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$, wenn $\frac{\lambda(\xi)}{\xi}$ positiv und integrierbar zwischen $\xi = 0$ bis b ist. $\xi = \varphi(x)$ ist eine positive wachsende Function von $x = 0$ bis $a = \int_0^b \lambda(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$, dann ist

$$B_p = \int_0^p dy \int_0^a \varphi(x) \psi[y \varphi(x)] dx.$$

So oft nun in diesem Integral die Substitution $v = y \frac{\varphi(x)}{x}$

erlaubt ist, und $\varepsilon_p = \int_0^a x dx \int_p^{\frac{\varphi(x)}{x}} \psi(xv) dv$ gesetzt wird, folgt

$$B_p = \int_0^p dy \int_0^a x \psi(xy) dx + \varepsilon_p.$$

Wenn das Integral A sowohl für $\lambda(x)$, als auch für $\lambda = x$ einen bestimmten Wert A' hat, so ist

$$\int_0^\infty dy \int_0^b \lambda(\xi) \psi(\xi y) d\xi = \int_0^\infty dy \int_0^a x \psi(xy) dx, \quad (27)$$

wofern noch $\lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0$ ist. Wegen

$$\int_0^a x \psi(xy) dx = \int_0^a dx \int_x^a \psi(xy) dx$$

folgt bei $\int \psi(x) dx = \omega(x)$ $A' = \int_0^\infty dy \int_0^a \frac{\omega(ay) - \omega(xy)}{y} dx$. Hat

$$\chi(x) = \int_0^\infty \frac{\omega(y) - \omega(xy)}{y} dy \quad (28)$$

z. B. den Wert $\omega(0) l x$, so ist A' in $a \omega(0)$ auszuwerten. Vorausgesetzt überhaupt, dass $\chi(x)$ einen bestimmten Wert für $x = x_0$ hat, also in

$$\chi(x_0) = \int_0^\pi \frac{\omega(y) - \omega(x_0 y)}{y} dy - \int_{\pi x_0}^\pi \frac{\omega(y)}{y} dy + \lim_{p=\infty} \int_{p x_0}^p \frac{\omega(y)}{y} dy$$

$\int_{p x_0}^p \frac{\omega(y)}{y} dy$ einen bestimmten Grenzwert hat, so kann derselbe von x_0 abhängig sein, wie das Beispiel $\omega(y) = 1$ zeigt. Soll aber

dieser Grenzwert verschwinden, so ist $\int_{\pi x}^\infty \frac{\omega(y)}{y} dy$ endlich anzunehmen, und daher wird

$$\chi(x) = \int_0^\pi \frac{\omega(y) - \omega(xy)}{y} dy - \int_{\pi x}^\pi \frac{\omega(y)}{y} dy$$

$$\chi(x) - \chi(x') = \chi\left(\frac{x}{x'}\right)$$

für alle Werte von x , für welche $\chi(x)$ bestimmt ist. Besitzt $\chi(x)$ an der einen Stelle $x = 1$ einen Differentialquotienten C , so ist für $x > 0$

$$\frac{\chi(x+h) - \chi(x)}{h} = \frac{1}{x} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \sim \frac{C}{x},$$

insbesondere, wenn $\psi(x)$ eine stetige Function ist, folgt sofort $\chi'(x) = \frac{\omega(0)}{x}$.

§ 8. Sowie das Integral $\int_0^{\pi} \sin \nu x \cot \frac{1}{2} x dx = \text{const.}$ für

alle ganzen Werte von $\nu \geq 1$ durch die Function $\cot \frac{1}{2} x$ und im allgemeinen nur durch diese geliefert werden kann, führt die Anwendung ähnlicher Functionen zu analogen Summierungen,

wenn $\int_0^{\pi} \sin \nu x \varphi(x) dx$ eine endliche Zahl von Werten hat. Z. B. sind wegen

$$\int_0^{\pi} [\sin \nu x - \sin(\nu-2)x] \varphi(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(\nu-1)x \sin x \varphi(x) dx$$

für $\varphi(x) = \frac{1}{\sin x}$ oder $= \cot x$ nur zwei Werte möglich; ebenso für

$$\varphi(x) = \frac{\cos \mu x}{\sin x} \int_0^{\pi} \varphi \sin \nu x dx = \pi, \quad \mu < \nu, \quad \mu + \nu \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\varphi(x) = \cos \mu x \cot x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin \nu x dx = \frac{\pi}{2} \mu = \nu$$

$$= \pi, \quad \mu < \nu, \quad \mu \equiv \nu \pmod{2}.$$

u. s. f. Schließlich kann man die Potenzreihen statt auf Kreisen allgemein auf Curven mit der Gleichung $r = \varrho(x)$ betrachten, und erhält analog die Aufgabe,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho(x)^{\nu} (a_{\nu} \cos \nu x - b_{\nu} \sin \nu x) \\ \psi(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho(x)^{\nu} (a_{\nu} \sin \nu x + b_{\nu} \cos \nu x) \end{aligned} \quad (29)$$

zu vergleichen.