

Über die Umwandlung von Potenzreihen in Kettenbrüche.

Von

Alfred Tauber in Wien.

Einer vorgegebenen Potenzreihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ korrespondierend heißt der Kettenbruch

$$(1) \quad \frac{\alpha_0}{1} - \frac{\alpha_1 x}{1} - \frac{\alpha_2 x}{1} - \frac{\alpha_3 x}{1} - \dots$$

dann, wenn die Größen α_κ mit Hilfe der Determinanten

$$(2) \quad \Psi_{2\nu} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_\nu \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{\nu+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{\nu+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \dots & c_{2\nu+1} \end{vmatrix},$$

(deren keine verschwinden darf) sich für $\kappa \geq 0$ in der Form darstellen lassen¹⁾:

$$(3) \quad \alpha_\kappa = \frac{\Psi_\kappa \Psi_{\kappa-3}}{\Psi_{\kappa-1} \Psi_{\kappa-2}}, \quad \Psi_{-1} = \Psi_{-2} = \Psi_{-3} = 1.$$

Bildet man nun aus den beiden Determinanten (2) andere zwei dadurch, daß man die Indizes der Elemente der letzten Kolonne um 1 erhöht, während die übrigen Kolonnen ungeändert bleiben, so besteht zwischen den so erhaltenen Determinanten

$$(4) \quad \Phi_{2\nu} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{\nu-1} & c_{\nu+1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_\nu & c_{\nu+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-1} & c_{2\nu+1} \end{vmatrix}, \quad \Phi_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_\nu & c_{\nu+2} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{\nu+1} & c_{\nu+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \dots & c_{2\nu} & c_{2\nu+2} \end{vmatrix}$$

¹⁾ Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Berlin-Leipzig 1913, S. 304.

(mit $\Phi_0 = c_1$, $\Phi_1 = c_2$) und den Determinanten (2), wie in § 1 gezeigt wird, die Beziehung

$$(5) \quad \Phi_n \Psi_{n-1} - \Psi_n \Phi_{n-1} = \Psi_{n+1} \Psi_{n-2} \quad (n \geq 0),$$

wobei $\Phi_{-1} = 0$ zu setzen ist. Dadurch erhält man für die gesuchten Größen α die Form²⁾

$$(5a) \quad \alpha_n = \frac{\Phi_{n-1}}{\Psi_{n-1}} - \frac{\Phi_{n-2}}{\Psi_{n-2}} \quad (n \geq 1)$$

oder, wenn statt der α deren Summen eingeführt werden,

$$(5b) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = \frac{\Phi_n}{\Psi_n} \quad (n \geq 0).$$

Ein verhältnismäßig einfaches *Bildungsgesetz* der Ψ kann man angeben, wenn man sich c_0, c_1, c_2, \dots unter Einführung einer Veränderlichen y vorläufig ersetzt denkt durch $\varphi(y), \varphi'(y), \varphi''(y), \dots$. Dann gehen die Determinanten Ψ in Funktionen von y über, für welche die Beziehung

$$(6) \quad \Psi_{n+1} \Psi_{n-2} = \Psi_{n-1} \frac{d\Psi_n}{dy} - \Psi_n \frac{d\Psi_{n-1}}{dy}$$

bewiesen werden kann, und diese nimmt, wenn $\chi_{n+1} = \Psi_{n+1}/\Psi_n$ definiert wird, die Gestalt an

$$(6a) \quad \chi_{n+1} = \frac{\chi_{n-1}}{\chi_n} \frac{d\chi_n}{dy}, \quad \chi_0 = \varphi(y), \quad \chi_{-1} = 1.$$

Nachträglich hat man wieder c_0, c_1, c_2, \dots für $\varphi(y), \varphi'(y), \varphi''(y), \dots$ zu restituieren.

Jedoch ist die Gleichung (6) nur ein Spezialfall des Resultats einer allgemeineren Untersuchung.

Es gelangen nämlich überhaupt die Determinanten Φ und Ψ in einen besonderen Zusammenhang, wenn die Koeffizienten c_n der Potenzreihe von einer Veränderlichen y derart abhängen, daß $c_n = c_n(y)$ der Bedingung genügt

$$(7) \quad c'_n(y) = \sigma_n(y) c_{n+1}(y) + \tau_n(y) c_n(y),$$

mit Funktionen $\sigma_n(y), \tau_n(y)$, deren Differenzen

$$(7a) \quad \sigma_{n+1}(y) - \sigma_n(y) = \sigma(y), \quad \tau_{n+1}(y) - \tau_n(y) = \tau(y)$$

von n unabhängig sind, wie z. B. bei der Taylorsche Reihe für $f(x+y)$ mit

$$(8) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}, \quad \sigma_n(y) = n + 1, \quad \tau_n(y) = 0$$

²⁾ Aus (5a) folgt sofort die bekannte Relation

$$\alpha_{2\nu} + \alpha_{2\nu+1} = \frac{\Phi_{2\nu}}{\Psi_{2\nu}} - \frac{\Phi_{2\nu-2}}{\Psi_{2\nu-2}}$$

(vgl. Perron a. a. O., S. 324, 331).

oder bei der Lagrangeschen Reihe für die Wurzel η einer Gleichung $f(\eta) = 0$ nach Potenzen von $f(y)$, wo y die Rolle eines Parameter spielt, gemäß den Formeln

$$(9) \quad \eta = y - x\psi(\eta), \quad x = f(y), \quad \psi(\eta) = \frac{\eta - y}{f(\eta) - f(y)},$$

$$(10) \quad \eta = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^x h_x(y) x^x}{x!}, \quad h_{x+1}(y) = \frac{h'_x(y)}{f'(y)}, \quad h_0(y) = y,$$

wenn an der so zu gewinnenden Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_x(y) x^x$$

in

$$(11) \quad \eta = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{x=0}^{\infty} c_x(y) x^x, \quad c_x(y) = \frac{(-1)^x h_{x+1}(y) f'(y)}{(x+1)!}$$

die Umwandlung in einen Kettenbruch vorgenommen wird (vgl. 39 b) usf.

Unter der Voraussetzung (7) beweist man aber (s. § 2) die Gleichung

$$(12) \quad \frac{d\Psi_x}{dy} = \sigma_x \Phi_x + \varrho_x \Psi_x, \quad \varrho_{2r} = (r+1)\tau_r, \quad \varrho_{2r+1} = (r+1)\tau_{r+1},$$

eine Gleichung, mittels welcher sich auch eine, nur die Funktionen $\sigma_x(y)$, $\tau_x(y)$ benutzende, Beziehung zwischen den Determinanten Ψ ergibt, denn aus (5) und (12) folgt

$$(13) \quad \Psi_{x+1} \Psi_{x-2} = \frac{\Psi_{x-1}}{\sigma_x} \frac{d\Psi_x}{dy} - \frac{\Psi_x}{\sigma_{x-1}} \frac{d\Psi_{x-1}}{dy} + \left(\frac{\varrho_x}{\sigma_x} - \frac{\varrho_{x-1}}{\sigma_{x-1}} \right) \Psi_x \Psi_{x-1}$$

und aus der Formel (5b) wird dann

$$(14) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{x+1} = \frac{1}{\sigma_x \Psi_x} \frac{d\Psi_x}{dy} - \frac{\varrho_x}{\sigma_x}.$$

Zur Gleichung (6) gelangt man aus (13) in dem besonderen Falle

$$(15) \quad \sigma_x = 1, \quad \tau_x = 0.$$

Über einen Zusammenhang mit dem Newtonschen Näherungsverfahren vgl. § 3.

§ 1.

Obschon der Hilfssatz (5) in einem der zahlreichen allgemeinen Matrizenätze enthalten sein dürfte, erscheint doch in Anbetracht des ziemlich elementaren Charakters der hier besprochenen Aufgaben ein Beweis, der nur die Anfangsgründe der Determinantentheorie heranzieht, wohl nicht überflüssig. Bezeichnet man mit $\Psi_{x\lambda}$ resp. $\Phi_{x\lambda}$ die zum $\lambda + 1$ -ten Elemente, von rechts gerechnet, der untersten Zeile von Ψ_x resp. Φ_x gehörige

Unterdeterminante und entwickelt die Determinanten Ψ_κ und Φ_κ nach der untersten Zeile

$$(16) \quad \Psi_\kappa = \sum_{\lambda=0}^{\kappa'} c_{\kappa-\lambda} \Psi_{\kappa\lambda}, \quad \Phi_\kappa = c_{\kappa+1} \Phi_{\kappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{\kappa'} c_{\kappa-\lambda} \Phi_{\kappa\lambda}, \quad \kappa' = E\left(\frac{\kappa}{2}\right),$$

so ergibt die Substitution dieser Werte in (5) bei $\kappa'' = E\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)$

$$(17) \quad \begin{aligned} & \Psi_{\kappa-1} \left[c_{\kappa+1} \Phi_{\kappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{\kappa'} c_{\kappa-\lambda} \Phi_{\kappa\lambda} \right] - \Phi_{\kappa-1} \sum_{\lambda=0}^{\kappa'} c_{\kappa-\lambda} \Psi_{\kappa\lambda} \\ &= \Psi_{\kappa-2} \sum_{\lambda=0}^{\kappa''} c_{\kappa+1-\lambda} \Psi_{\kappa+1,\lambda} = \Psi_{\kappa-2} \left[c_{\kappa+1} \Psi_{\kappa+1,0} + \sum_{\lambda=0}^{\kappa''-1} c_{\kappa-\lambda} \Psi_{\kappa+1,\lambda+1} \right]. \end{aligned}$$

Hierin sind die Koeffizienten von $c_{\kappa+1}$ und ebenso von c_κ auf beiden Seiten gleich, wegen der sofort als richtig zu erkennenden Gleichungen

$$(18) \quad \Psi_{\kappa 0} = \Phi_{\kappa 0} = \Psi_{\kappa-2}, \quad \Psi_{\kappa 1} = -\Phi_{\kappa-2},$$

aber auch für jedes der übrigen $c_{\kappa-\lambda}$ kann die Übereinstimmung der Koeffizienten auf beiden Seiten nachgewiesen werden, d. h. *das Bestehen von*

$$(19) \quad \Psi_{\kappa-1} \Phi_{\kappa\lambda} - \Phi_{\kappa-1} \Psi_{\kappa\lambda} = \Psi_{\kappa-2} \Psi_{\kappa+1,\lambda+1}$$

für $\lambda = 1$ bis $\kappa'' - 1$; links in (17) nimmt zwar die Summationsvariable λ im Falle eines *geraden* κ noch den Wert $\frac{\kappa}{2}$ an, welcher rechts nicht vorkommt, dafür verschwindet dann links der Koeffizient von $c_{\kappa-\frac{\kappa}{2}}$, nämlich die Differenz $\Psi_{\kappa-1} \Phi_{\kappa,\frac{\kappa}{2}} - \Phi_{\kappa-1} \Psi_{\kappa,\frac{\kappa}{2}}$, mit Rücksicht auf

$$(20) \quad \Psi_{\kappa,\frac{\kappa}{2}} = (-1)^{\frac{\kappa}{2}} \Psi_{\kappa-1}, \quad \Phi_{\kappa,\frac{\kappa}{2}} = (-1)^{\frac{\kappa}{2}} \Phi_{\kappa-1}.$$

Nunmehr seien die beiden Fälle $\kappa = 2\nu$ und $2\nu + 1$ unterschieden.

I. Bei $\kappa = 2\nu$ lautet die zu beweisende Gleichung (19)

$$(21) \quad \Psi_{2\nu-1} \Phi_{2\nu,\lambda} - \Phi_{2\nu-1} \Psi_{2\nu,\lambda} = \Psi_{2\nu-2} \Psi_{2\nu+1,\lambda+1}, \quad 1 \leq \lambda \leq \nu - 1.$$

Die in ihr auftretenden Determinanten haben sämtlich den Grad ν , und in jeder der Determinanten $\Phi_{2\nu,\lambda}$, $\Psi_{2\nu,\lambda}$, $\Psi_{2\nu+1,\lambda+1}$ fehlt die Kolonne mit dem Kopfelement $c_{\nu-\lambda}$. Die Entwicklung der *linksstehenden Determinanten nach ihren letzten Kolonnen* ergibt einerseits

$$(22) \quad \Psi_{2\nu-1} = \sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n} G_n, \quad \Phi_{2\nu-1} = \sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n+1} G_n,$$

wenn $G_0, G_1, \dots, G_{\nu-1}$ die Unterdeterminanten der letzten Kolonne von $\Psi_{2\nu-1}$ darstellen,

$$(23) \quad \Psi_{2v-1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{v-1} & c_v \\ c_2 & c_3 & \dots & c_v & c_{v+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_v & c_{v+1} & \dots & c_{2v-2} & c_{2v-1} \end{vmatrix}, \quad G_0 = (-1)^{v-1} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_v \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_v & c_{v+1} & \dots & c_{2v-2} \end{vmatrix}, \dots$$

andererseits, mit Hilfe der Unterdeterminanten H_0, H_1, \dots, H_{v-1} der letzten Kolonne von

$$(23a) \quad (-1)^{\lambda+1} \Psi_{2v,\lambda} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{v-\lambda-1} & c_{v-\lambda+1} & \dots & c_{v-1} & c_v \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{v-\lambda} & c_{v-\lambda+2} & \dots & c_v & c_{v+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{v-1} & c_v & \dots & c_{2v-\lambda-2} & c_{2v-\lambda} & \dots & c_{2v-2} & c_{2v-1} \end{vmatrix},$$

die Formeln

$$(-1)^{\lambda+1} \Psi_{2v,\lambda} = \sum_{n=0}^{v-1} c_{v+n} H_n, \quad (-1)^{\lambda+1} \Phi_{2v,\lambda} = \sum_{n=0}^{v-1} c_{v+n+1} H_n.$$

Dadurch transformiert sich die linke Seite von (21) in

$$(24) \quad (-1)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{v-1} \sum_{m=0}^{v-1} c_{v+n} c_{v+m+1} (G_n H_m - G_m H_n).$$

Nun figurieren die G und H , höchstens vom Vorzeichen abgesehen, auch als Unterdeterminanten der rechts in (21) stehenden Determinante Ψ_{2v-2}

$$\Psi_{2v-2} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{v-\lambda-1} & c_{v-\lambda} & c_{v-\lambda+1} & \dots & c_{v-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{v-\lambda} & c_{v-\lambda+1} & c_{v-\lambda+2} & \dots & c_v \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{v-1} & c_v & \dots & c_{2v-\lambda-2} & c_{2v-\lambda-1} & c_{2v-\lambda} & \dots & c_{2v-2} \end{vmatrix},$$

und zwar ist, unter $\Omega_{n,h}$ die zum Schnittelement der $(n+1)$ -ten Zeile und $(h+1)$ -ten Kolonne³⁾ gehörige Unterdeterminante von Ψ_{2v-2} verstanden,

$$(25) \quad G_n = (-1)^{v+1} \Omega_{n0}, \quad H_n = (-1)^{\lambda+1} \Omega_{n,v-\lambda}.$$

Man gelangt daher für den Ausdruck (24), d. h. die linke Seite der zu beweisenden Gleichung (21) zu dem Werte

$$(-1)^{v+1} \sum_{n=0}^{v-1} \sum_{m=0}^{v-1} c_{v+n} c_{v+m+1} (\Omega_{n0} \Omega_{m,v-\lambda} - \Omega_{m0} \Omega_{n,v-\lambda}).$$

Nach dem *Minorentheorem*⁴⁾, angewandt auf Ψ_{2v-2} , ist aber hierin $\Omega_{n0} \Omega_{m,v-\lambda} - \Omega_{m0} \Omega_{n,v-\lambda}$ gleich dem Produkte von Ψ_{2v-2} mal jener Determinante $(v-2)$ -ten Grades, die aus Ψ_{2v-2} entsteht, wenn man sowohl

³⁾ Nunmehr aber die Kolonnen, gleichwie im folgenden, von links gezählt.

⁴⁾ Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie I (Leipzig 1885), S. 53, 93.

die $(n+1)$ -te und $(m+1)$ -te Zeile, als auch die erste und $(\nu-\lambda+1)$ -te Kolonne unterdrückt, mit dem Vorzeichen $(-1)^{n+m+\nu-\lambda}$ bei $n < m$, mit dem entgegengesetzten bei $n > m$ versehen.

Man braucht jetzt nur rechts in (21) die Determinante

$$\Psi_{2\nu+1, \lambda+1} = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{\nu-\lambda-1} & c_{\nu-\lambda+1} & \dots & c_{\nu-1} & c_\nu & c_{\nu+1} \\ c_2 & \dots & c_{\nu-\lambda} & c_{\nu-\lambda+2} & \dots & c_\nu & c_{\nu+1} & c_{\nu+2} \\ \vdots & & & & & & & \\ c_\nu & \dots & c_{2\nu-\lambda-2} & c_{2\nu-\lambda} & \dots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu-1} & c_{2\nu} \end{vmatrix}$$

nach den Elementenpaaren ihrer vorletzten und letzten Kolonne zu entwickeln, wobei als Faktor des Paares $c_{\nu+n} c_{\nu+1+m}$ genau dieselbe soeben angeführte Determinante $(\nu-2)$ -ten Grades mal $(-1)^{\lambda+n+m+1}$ für $n < m$ und $(-1)^{\lambda+n+m}$ für $n > m$ auftritt, um die Gleichheit der beiden Seiten von (21) einzusehen.

II. Im zweiten Falle, $\kappa = 2\nu + 1$, hat man für (19) zu schreiben:

$$(27) \quad \Psi_{2\nu} \Phi_{2\nu+1, \lambda} - \Phi_{2\nu} \Psi_{2\nu+1, \lambda} = \Psi_{2\nu-1} \Psi_{2\nu+2, \lambda+1}.$$

Von den hier in Relation gebrachten Determinanten besitzen $\Psi_{2\nu}$, $\Phi_{2\nu}$, $\Psi_{2\nu+2, \lambda+1}$ den Grad $\nu+1$, die übrigen den Grad ν .

Zum Beweise von (27) entwickelt man $\Psi_{2\nu}$ und $\Phi_{2\nu}$ nach ihrer $(\nu-\lambda+1)$ -ten Kolonne mit dem Kopfelement $c_{\nu-\lambda}$:

$$(28) \quad \Psi_{2\nu} = \sum_{n=0}^{\nu} c_{\nu-\lambda+n} L_n, \quad \Phi_{2\nu} = \sum_{n=0}^{\nu} c_{\nu-\lambda+n} M_n.$$

Alsdann wird die linke Seite in (27):

$$(28a) \quad \sum_{n=0}^{\nu} c_{\nu-\lambda+n} (L_n \Phi_{2\nu+1, \lambda} - M_n \Psi_{2\nu+1, \lambda}),$$

jedoch verschwindet für $n=0$ das Summationselement, weil $\Psi_{2\nu+1, \lambda}$ mit $(-1)^{\nu+1} L_0$, $\Phi_{2\nu+1, \lambda}$ mit $(-1)^{\nu+1} M_0$ zusammenfällt, die Summierung bleibt also nur von $n=1$ bis ν zu erstrecken.

Nun figurieren die Unterdeterminanten L , M von $\Psi_{2\nu}$, $\Phi_{2\nu}$ auch als solche von

$$(28b) \quad (-1)^\lambda \Psi_{2\nu+2, \lambda+1} = \begin{vmatrix} c_0, & \dots, & c_{\nu-\lambda-1}, & c_{\nu-\lambda+1}, & \dots, & c_\nu, & c_{\nu+1}, \\ c_1, & \dots, & c_{\nu-\lambda}, & c_{\nu-\lambda+2}, & \dots, & c_{\nu+1}, & c_{\nu+2}, \\ \vdots & & & & & & \\ c_\nu, & \dots, & c_{2\nu-\lambda-1}, & c_{2\nu-\lambda+1}, & \dots, & c_{2\nu}, & c_{2\nu+1} \end{vmatrix}$$

Denn bezeichnet man rechts die zum Schnittelement der $(n+1)$ -ten Zeile und $(h+1)$ -ten Kolonne gehörige Unterdeterminante mit U_{nh} , so ist

$$(29) \quad L_n = (-1)^\lambda U_{n\nu}, \quad M_n = (-1)^{\lambda-1} U_{n, \nu-1},$$

daher findet man für den Ausdruck (28a), d. h. die linke Seite der zu beweisenden Gleichung (27), die Form

$$(30) \quad (-1)^v \sum_{n=1}^v c_{v-\lambda+n} (U_{nv} U_{0, v-1} - U_{0v} U_{n, v-1}).$$

Entwickelt man jetzt rechts in (27) die Determinante Ψ_{2v-1} nach der Kolonne mit dem Kopfelement $c_{v-\lambda+1}$:

$$(31) \quad \Psi_{2v-1} = \sum_{n=0}^{v-1} c_{v-\lambda+1+n} K_n = \sum_{n=1}^v c_{v-\lambda+n} K_{n-1},$$

so sieht man, daß zum Beweise von (27) die Verifikation der Gleichung

$$(32) \quad (-1)^v (U_{nv} U_{0, v-1} - U_{0v} U_{n, v-1}) = K_{n-1} \Psi_{2v+2, \lambda+1}$$

genügt. Nach dem vorerwähnten Minorensatz, angewendet auf die Determinante (28b) ist aber $U_{nv} U_{0, v-1} - U_{0v} U_{n, v-1}$ gleich dem *Produkte* dieser Determinante $(-1)^{\lambda} \Psi_{2v+2, \lambda+1}$ mal derjenigen Determinante $(v-1)$ -ten Grades, welche aus ihr durch Unterdrückung sowohl der ersten und $(n+1)$ -ten Zeile als der v -ten und $(v+1)$ -ten Kolonne hervorgeht, mit dem Zeichen $(-1)^{n+1}$ versehen. Andererseits ist K_{n-1} rechts in (32) gleich ebendieser Determinante $(v-1)$ -ten Grades mal $(-1)^{v-\lambda+n-1}$, womit (32) bewiesen erscheint.

Bezüglich der Determinanten von der Form Ψ , Φ oder allgemeiner von der Form

$$(33) \quad F = \begin{vmatrix} c_{\lambda_0}, & c_{\lambda_1}, & \dots, & c_{\lambda_v} \\ c_{\lambda_0+1}, & c_{\lambda_1+1}, & \dots, & c_{\lambda_v+1} \\ c_{\lambda_0+2}, & c_{\lambda_1+2}, & \dots, & c_{\lambda_v+2} \\ \vdots & & & \\ c_{\lambda_0+v}, & c_{\lambda_1+v}, & \dots, & c_{\lambda_v+v} \end{vmatrix}$$

mit irgendwelchen ganzen positiven Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ größer oder gleich Null, gelangt außerdem noch, in § 2, der folgende Satz zur Anwendung:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nennt man } F_{\mu} \text{ diejenige Determinante, welche aus } F \text{ durch Er-} \\ \text{höhung der Indizes der Elemente der } (\mu+1)\text{-ten Kolonne um 1} \\ \text{entsteht, hingegen } \bar{F} \text{ die durch Erhöhung der Indizes in der} \\ \text{letzten Zeile entstehende, so folgt} \\ \bar{F} = F_0 + F_1 + \dots + F_v. \end{array} \right.$$

Diesen Satz beweist man durch Schluß von v auf $v+1$. Es seien F und \bar{F} nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt:

$$(35) \quad F = \sum_{\kappa=0}^v c_{\lambda_{\kappa}+v} E_{\kappa}, \quad \bar{F} = \sum_{\kappa=0}^v c_{\lambda_{\kappa}+v+1} E_{\kappa},$$

dann lassen sich, wenn $E_{\kappa\mu}$ jene Determinante bezeichnet, welche aus E_{κ} entsteht, wenn die Indizes der Elemente der $\mu + 1$ -ten Kolonne von E_{κ} um 1 erhöht werden, offenbar F_0, F_1, \dots , nach der letzten Zeile entwickelt, durch die Formel

$$(36) \quad F_{\mu} = \sum_{\kappa=0}^{\mu-1} c_{\lambda_{\kappa}+\nu} E_{\kappa, \mu-1} + c_{\lambda_{\mu}+\nu+1} E_{\mu} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} c_{\lambda_{\kappa}+\nu} E_{\kappa\mu}$$

darstellen. Bei $\mu = 0$ fällt der erste Term rechts weg, bei $\mu = \nu$ der letzte.

Bildet man daher entsprechend (34) die Summe der F_{μ} von $\mu = 0$ bis ν , so ist der mittlere Term $\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu+1} E_{\mu}$ gemäß (35) gleich \bar{F} , während in den übrigen Termen, die unter Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \sum_{\mu=\kappa+1}^{\nu} c_{\lambda_{\kappa}+\nu} E_{\kappa, \mu-1} + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\kappa-1} c_{\lambda_{\kappa}+\nu} E_{\kappa\mu}$$

geschrieben werden können, $c_{\lambda_{\kappa}+\nu}$ den Faktor

$$(37) \quad \sum_{\mu=\kappa+1}^{\nu} E_{\kappa, \mu-1} + \sum_{\mu=0}^{\kappa-1} E_{\kappa\mu} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} E_{\kappa\mu}$$

aufweist, welcher Ausdruck, wenn der Satz (34) bereits als gültig für $\nu - 1$ statt ν angenommen wird, mit der aus E_{κ} durch Erhöhung der Indizes in der letzten Zeile von E_{κ} entstehenden Determinante \bar{E}_{κ} zusammenfallen muß, daher ist

$$(38) \quad \sum_{\mu=0}^{\nu} F_{\mu} = \bar{F} + \sum_{\kappa=0}^{\nu} c_{\lambda_{\kappa}+\nu} \bar{E}_{\kappa},$$

und die rechtsstehende Summe identisch Null, weil sie mit der zwei gleiche Zeilen enthaltenden Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{\lambda_0}, & c_{\lambda_1}, & \dots, & c_{\lambda_{\nu}} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{\lambda_0+\nu-2}, & c_{\lambda_1+\nu-2}, & \dots, & c_{\lambda_{\nu}+\nu-2} \\ c_{\lambda_0+\nu}, & c_{\lambda_1+\nu}, & \dots, & c_{\lambda_{\nu}+\nu} \\ c_{\lambda_0+\nu}, & c_{\lambda_1+\nu}, & \dots, & c_{\lambda_{\nu}+\nu} \end{vmatrix}$$

übereinstimmt, wenn man diese nach ihrer letzten Zeile entwickelt.

§ 2.

Bezüglich der Koeffizienten der vorgelegten Potenzreihe werde jetzt angenommen, daß sie die Eigenschaft (7) besitzen, wie bei der Taylorschen Reihe oder bei der Lagrangeschen Potenzreihe (11) für die Wurzel η von $f(\eta) = 0$

$$(39) \quad \eta - y = -\frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa}(y) f(y)^{\kappa}$$

mit Koeffizienten $c_{\kappa}(y)$, deren Rekursion gemäß jener für die h , vgl. (10),

$$(39a) \quad c_{\kappa}(y) = -\frac{1}{\kappa+1} \frac{d}{dy} \frac{c_{\kappa-1}(y)}{f'(y)}, \quad c_0(y) = 1$$

lautet, so daß hier die Funktionen $\sigma_{\kappa}(y)$, $\tau_{\kappa}(y)$ die Werte aufweisen:

$$(39b) \quad \sigma_{\kappa}(y) = -(\kappa+2)f'(y), \quad \tau_{\kappa}(y) = \frac{f''(y)}{f'(y)},$$

oder bei der Potenzreihe von η nach Potenzen von $\frac{f(y)}{f'(y)^2}$, wenn

$$c_{\kappa}(y) = \frac{\omega_{\kappa}(y)}{f'(y)^{2\kappa}}$$

gesetzt wird:

$$(40) \quad \begin{cases} \eta - y = -\frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \omega_{\kappa}(y) \frac{f(y)^{\kappa}}{f'(y)^{2\kappa}}, \\ \omega'_{\kappa}(y) = \sigma_{\kappa}(y) \omega_{\kappa+1}(y) + \tau_{\kappa}(y) \omega_{\kappa}(y), \\ \sigma_{\kappa}(y) = -\frac{\kappa+2}{f'(y)}, \quad \tau_{\kappa}(y) = (2\kappa+1) \frac{f''(y)}{f'(y)}. \end{cases}$$

Eine elementare Ableitung der Reihe (10) findet man übrigens, wenn man vorerst eine Funktion u zweier unabhängig-veränderlichen x , y durch die Gleichung $f(y) - f(y+u) = x$ definiert, aus den durch partielle Differentiation nach x und y gewonnenen Gleichungen

$$-f'(y+u) \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad f'(y) - f'(y+u) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$f'(y+u)$ eliminiert und so die Eigenschaft von u :

$$f'(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 1 = 0,$$

nachweist, woraus, solange u in Gestalt einer Potenzreihe $\sum_{\kappa=1}^{\infty} h_{\kappa}(y) x^{\kappa}$ vorausgesetzt werden darf, welche gliedweise Differentiation nach y gestattet, die Bedingungen (10) für die h resultieren.

Um den Satz (12), der unter den Voraussetzungen (7) gilt, durch vollständige Induktion beweisen zu können, bedarf es jedoch einer verallgemeinerten Formulierung desselben:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Besitzen die Größen } c_{\kappa} = c_{\kappa}(y) \text{ die in (7) angegebene Eigenschaft,} \\ \text{so ist der Differentialquotient der mit Hilfe dieser Größen } c \text{ ge-} \\ \text{bildeten Determinante (33) gegeben durch} \\ \frac{dF}{dy} = \sum_{\mu=0}^r \sigma_{\lambda_{\mu}+\nu} F_{\mu} + \varrho F, \quad \varrho = \sum_{\mu=0}^r \tau_{\lambda_{\mu}+\mu}. \end{array} \right.$$

Zum Beweise entwickelt man F , wie in (35), nach den Elementen der letzten Zeile $F = \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} E_{\mu}$ und differenziert nach y , so folgt gemäß (7):

$$(42) \quad \frac{dF}{dy} = \sum_{\mu=0}^{\nu} (\sigma_{\lambda_{\mu}+\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu+1} + \tau_{\lambda_{\mu}+\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu}) E_{\mu} + \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} \frac{dE_{\mu}}{dy},$$

man darf aber, weil der Satz (41) bereits für $\nu - 1$ statt ν als bewiesen angenommen wird,

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{dE_{\mu}}{dy} &= \sum_{\kappa=0}^{\mu-1} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} E_{\mu, \kappa} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} E_{\mu, \kappa-1} \\ &+ \left[\sum_{\kappa=0}^{\mu-1} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} \right] E_{\mu} \end{aligned}$$

setzen, wo $E_{\mu, \kappa}$ genau wie in § 1 aus E_{μ} gebildet wird, indem man die Indizes der $(\kappa + 1)$ -ten Kolonne von E_{μ} um 1 erhöht.

Der auf die τ bezügliche Teil von $\frac{dF}{dy}$ in (42) ist daher

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} E_{\mu} \left[\tau_{\lambda_{\mu}+\nu} + \sum_{\kappa=0}^{\mu-1} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} \right]$$

oder wegen der aus (7a) folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} &= \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu} - \tau, \quad \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} = \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu} - (\nu - \mu) \tau, \\ \tau_{\lambda_{\mu}+\nu} &= \tau_{\lambda_{\mu}+\mu} + (\nu - \mu) \tau, \end{aligned}$$

weiter gleich $\left[\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} E_{\mu} \right] \left[\sum_{\kappa=0}^{\nu} \tau_{\lambda_{\kappa}+\nu} \right] = F \varrho$, das heißt identisch mit dem rechts in (41) auf die τ bezüglichen Teile.

Es bleibt also noch nachzuweisen, daß die übrigen, von σ abhängigen Terme in (42), nach Substituierung von (43) für $\frac{dE_{\mu}}{dy}$:

$$(45) \quad \sum_{\mu=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\mu}+\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu+1} E_{\mu} + \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} \left[\sum_{\kappa=0}^{\mu-1} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu+1} E_{\mu, \kappa} + \sum_{\kappa=\mu+1}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu-1} E_{\mu, \kappa-1} \right]$$

den Wert $\sum_{\mu=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\mu}+\nu} F_{\mu}$ aus (41) repräsentieren. Mit diesem letzteren Ausdruck aber kann man nach (36) die Umformung

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu} F_{\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_{\kappa}+\nu} \left[\sum_{\mu=0}^{\kappa-1} c_{\lambda_{\mu}+\nu} E_{\mu, \kappa-1} + c_{\lambda_{\kappa}+\nu+1} E_{\kappa} + \sum_{\mu=\kappa+1}^{\nu} c_{\lambda_{\mu}+\nu} E_{\mu, \kappa} \right],$$

und eine weitere durch Vertauschung der Summationsfolge in den Doppelsummen

$$(45a) \quad \sum_{\mu=0}^{v-1} c_{\lambda_{\mu}+v} \sum_{\kappa=\mu+1}^v \sigma_{\lambda_{\kappa}+v} E_{\mu, \kappa-1} + \sum_{\kappa=0}^v \sigma_{\lambda_{\kappa}+v} c_{\lambda_{\kappa}+v+1} E_{\mu \kappa} \\ + \sum_{\mu=1}^v c_{\lambda_{\mu}+v} \sum_{\kappa=0}^{v-1} \sigma_{\lambda_{\kappa}+v} E_{\mu \kappa}$$

vornehmen. Der erste Term in (45) und der mittlere in (45a) sind identisch, so daß in der Differenz des Ausdrucks (45) minus dem Ausdruck (45a), geordnet nach den Größen $c_{\lambda_{\mu}+v}$, als Faktor von $c_{\lambda_{\mu}+v}$, wenn man berücksichtigt, daß $\sigma_{\lambda_{\kappa}+v} - \sigma_{\lambda_{\kappa}+v-1} = -\sigma$ nach (7a) *unabhängig* von κ ist,

$$-\sigma \left[\sum_{\kappa=0}^{\mu-1} E_{\mu \kappa} + \sum_{\kappa=\mu+1}^v E_{\mu, \kappa-1} \right] = -\sigma \sum_{\kappa=0}^{v-1} E_{\mu \kappa}$$

resultiert. Wieder ist, wie in § 1, die Summe $\sum_{\kappa=0}^{v-1} E_{\mu \kappa} = \bar{E}_{\mu}$ und die Summe $\sum_{\mu=0}^v c_{\lambda_{\mu}+v} \bar{E}_{\mu} = 0$, wonach endlich die Gleichheit der Ausdrücke (45) und (45a), daher der Satz (41) bewiesen erscheint.

Durch die *Spezialisierungen* $\lambda_{\mu} = \mu$ und $\lambda_{\mu} = \mu + 1$ erhält man aus der Determinante F die ursprünglich eingeführten Determinanten Ψ_{2v} , Ψ_{2v+1} , vgl. (2), für welche aber die Indizeserhöhung nur bei der *letzten Kolonne* ein von Null verschiedenes Resultat, nämlich Φ_{2v} resp. Φ_{2v+1} gemäß (4), liefert, weil sonst, durch Indizeserhöhung in einer früheren Kolonne, die Entstehung zweier gleichen Kolonnen bewirkt wird. Dann nimmt der Satz (41) die einfache Gestalt an

$$\frac{d\Psi_{\kappa}}{dy} = \sigma_{\kappa} \Phi_{\kappa} + \varrho_{\kappa} \Psi_{\kappa},$$

und hierin besitzt, je nachdem $\kappa = 2v$ oder $2v+1$, also $\lambda_{\mu} = \mu$ oder $\mu+1$ ist, die Größe $\varrho_{\kappa} = \sum_{\mu=0}^v \tau_{\lambda_{\mu}+\mu}$ den Wert

$$\sum_{\mu=0}^v \tau_{2\mu} = (v+1) \tau_v \quad \text{oder} \quad \sum_{\mu=0}^v \tau_{2\mu+1} = (v+1) \tau_{v+1},$$

im Einklang mit Satz (12).

In dem Beispiel der Potenzreihe (40) für die Wurzel η einer Gleichung $f(\eta) = 0$ wird

$$\varrho_{2v} = (v+1)(2v+1) \frac{f''(y)}{f'(y)}, \quad \varrho_{2v+1} = (v+1)(2v+3) \frac{f''(y)}{f'(y)}.$$

daher für jedes x

$$(46) \quad \frac{e_x}{\sigma_x} = -\frac{x+1}{2} f''(y),$$

und die Gleichungen (13), (14) erhalten die Form

$$(47) \quad \begin{cases} \Psi_{x+1} \Psi_{x-2} = f'(y) \left[\frac{1}{x+1} \Psi_x \Psi'_{x-1} - \frac{1}{x+2} \Psi'_x \Psi_{x-1} \right] + \frac{1}{2} f''(y) \Psi_x \Psi_{x-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{x+1} = -\frac{f'(y)}{x+2} \frac{\Psi'_x}{\Psi_x} + \frac{x+1}{2} f''(y). \end{cases}$$

§ 3.

Hervorzuheben bezüglich des Beispiels der Lagrangeschen Reihe (10) ist noch, daß genau so, wie aus ihr das *Newton'sche Näherungsverfahren* zur Berechnung einer Wurzel η von $f(\eta) = 0$ entspringt, indem man die ersten $n+1$ Terme dieser Reihe

$$(48) \quad \mathfrak{F}_n(y) = \sum_{x=0}^n \frac{(-1)^x h_x(y) f(y)^x}{x!} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{x=0}^{n-1} c_x(y) f(y)^x$$

als *Iterationsfunktion* benutzt, um η als Grenzwert der Folge y, y_1, y_2, \dots

$$y_1 = \mathfrak{F}_n(y), \quad y_2 = \mathfrak{F}_n(y_1), \quad y_3 = \mathfrak{F}_n(y_2), \quad \dots$$

darzustellen, auch der n -te Näherungsbruch des korrespondierenden Kettenbruchs (wenn man die Form (39) zugrunde legt)

$$(49) \quad \mathfrak{G}_n(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \left[\frac{\alpha_0}{1} - \frac{\alpha_1 f(y)}{1} - \frac{\alpha_2 f(y)}{1} - \dots - \alpha_{n-1} f(y) \right]$$

als *Iterationsfunktion* gewählt werden kann. Das Verhalten der beiden Funktionen $\mathfrak{F}_n(y)$, $\mathfrak{G}_n(y)$ ist infolge des n -fachen Verschwindens von $\mathfrak{F}'_n(y) = (-1)^n h'_n(y) f(y)^n / n!$, daher auch⁵⁾ von $\mathfrak{G}'_n(y)$ für $y = \eta$ gleichartig, insoweit es den *Konvergenzgrad* betrifft.

Außer der linearen Newtonschen Iteration $\mathfrak{F}_1(y) = \mathfrak{G}_1(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$ kommt also, für $n=2$, die linear gebrochene

$$\mathfrak{G}_2(y) = y - \frac{f(y) f'(y)}{f'(y)^2 - \frac{1}{2} f(y) f''(y)}$$

in Betracht, welche allerdings mit der linearen, angewandt auf die Gleichung $f(\eta) f'(\eta)^{-\frac{1}{2}} = 0$ koinzidiert usf.

Einige Ausführungen hierüber sollen in anderem Zusammenhange vorgebracht werden. Nur bezüglich der namentlich für reelle Iterationen

⁵⁾ Weil die Differenz $f_n(y) - \mathfrak{G}_n(y)$ ja $(n+1)$ fach für $y = \eta$ verschwinden muß.

wichtigen Berechnung des Differentialquotienten $\mathfrak{G}_n'(y)$ sei erwähnt, daß man für diesen ebenfalls eine explizite Formel finden kann, vgl. (59).

Setzt man $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ für den Näherungsbruch rechts in (49), also

$$(50) \quad \mathfrak{G}_n = y - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} \quad (R_{n-1} = f P_{n-1}, \quad S_{n-1} = f' Q_{n-1}),$$

so folgt durch Differentiation nach y

$$(51) \quad \frac{d \mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{S_{n-1}^2 - S_{n-1} R'_{n-1} + R_{n-1} S'_{n-1}}{S_{n-1}^2},$$

und der Zähler des Ausdrucks rechts besitzt, weil P_{n-1}, Q_{n-1} von den Graden $E\left(\frac{n-1}{2}\right), E\left(\frac{n}{2}\right)$ in f , somit R_{n-1}, S_{n-1} von den Graden $1 + E\left(\frac{n-1}{2}\right), E\left(\frac{n}{2}\right)$ sind, wie leicht nachzurechnen, den Grad n in f .

Er soll aber durch f^n teilbar sein, woraus man sofort, wenn die Näherungszähler und -nenner

$$(52) \quad \begin{cases} P_{2\nu} = p_\nu f^\nu + p_{\nu-1} f^{\nu-1} + \dots, & P_{2\nu-1} = \bar{p}_\nu f^{\nu-1} + \bar{p}_{\nu-1} f^{\nu-2} + \dots \\ Q_{2\nu} = q_\nu f^\nu + q_{\nu-1} f^{\nu-1} + \dots, & Q_{2\nu-1} = \bar{q}_\nu f^\nu + \bar{q}_{\nu-1} f^{\nu-1} + \dots \end{cases}$$

entwickelt gedacht werden, für $S_{n-1}^2 \frac{d \mathfrak{G}_n}{dy} / f^n$, je nach $n = 2\nu + 1$ und $n = 2\nu$ den Wert

$$- (f' q_\nu) \frac{dp_\nu}{dy} + p_\nu \frac{d(f' q_\nu)}{dy}$$

respektive

$$(f' \bar{q}_\nu)^2 - (f' \bar{q}_\nu) \frac{d\bar{p}_\nu}{dy} + \bar{p}_\nu \frac{d(f' \bar{q}_\nu)}{dy}$$

erhält. Statt dessen kann geschrieben werden

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{Q_{n-1}^2}{f^n} \frac{d \mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{p_\nu^2}{f'^2} \frac{d}{dy} \frac{f' q_\nu}{p_\nu} & \text{für } n = 2\nu + 1 \\ = \bar{q}_\nu^2 \left[1 - \frac{d}{dy} \frac{\bar{p}_\nu}{f' \bar{q}_\nu} \right] & \text{für } n = 2\nu, \end{cases}$$

in welcher Darstellung auf der rechten Seite nur die Koeffizienten der höchsten Potenzen von f in den P, Q auftreten, nämlich⁶⁾

⁶⁾ Vgl. z. B. Perron, a. a. O. S. 301, nach leichter Modifikation der Bezeichnungen: für a_1, a_{n+1}, A_n, B_n dort ist hier $\alpha_0, -\alpha_n, x P_{n-1} + Q_{n-1}, Q_{n-1}$ gesetzt.

$$(54) \quad \begin{cases} p_r = (-1)^r \alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2r} \\ q_r = (-1)^r \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2r} \left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} + \dots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{2r-1}}{\alpha_2 \dots \alpha_{2r}} \right] \\ \bar{p}_r = (-1)^{r+1} \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2r-1} \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} + \dots + \frac{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2r-2}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2r-1}} \right] \\ \bar{q}_r = (-1)^r \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2r-1} . \end{cases}$$

Für $n = 2, 3$ verifiziert man ohne weiteres vermöge der Eigenschaften (39 a, b), welche den Koeffizienten c der Potenzreihe (39) zukommen, daß die rechte Seite der für $\mathfrak{G}'_n(y)$ erhaltenen Gleichung (53) mit $(n+1) \alpha_0 \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n$ übereinstimmt.

Allgemein beweist man den Satz

$$(55) \quad \frac{d \mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{(n+1) \alpha_0 \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n f^n}{Q_{n-1}^2}$$

folgendermaßen: Die Substitution des Wertes $\Psi_n \Psi_{n-3} / \Psi_{n-1} \Psi_{n-2}$ für α_n , entsprechend (3), führt für die Größen (54) zu

$$(56) \quad \begin{cases} p_r = (-1)^r \frac{\Psi_{2r}}{\Psi_{2r-1}}, & \frac{q_r}{p_r} = \sum_{\lambda=0}^r \frac{\Psi_{2\lambda-1}^2}{\Psi_{2\lambda-2} \Psi_{2\lambda}} \\ \bar{q}_r = (-1)^{r-1} \frac{\Psi_{2r-1}}{\Psi_{2r-2}}, & \frac{\bar{p}_r}{\bar{q}_r} = - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{\Psi_{2\lambda}^2}{\Psi_{2\lambda-1} \Psi_{2\lambda+1}}, \end{cases}$$

dadurch bekommt die rechte Seite von (53) die Form

$$\left(\frac{\Psi_{2r}}{\Psi_{2r-1}} \right)^2 \frac{1}{f'^2} \frac{d}{dy} \left(f' \sum_{\lambda=0}^r \frac{\Psi_{2\lambda-1}^2}{\Psi_{2\lambda-2} \Psi_{2\lambda}} \right) \quad \text{für } n = 2r + 1$$

$$\left(\frac{\Psi_{2r-1}}{\Psi_{2r-2}} \right)^2 \left[1 + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{f'} \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{\Psi_{2\lambda}^2}{\Psi_{2\lambda-1} \Psi_{2\lambda+1}} \right) \right] \quad \text{für } n = 2r.$$

Soll dies gleich $(n+1) \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n = (n+1) \Psi_n / \Psi_{n-2}$ sein, so erfordert die Anwendbarkeit des Schlusses von r auf $r+1$ das Bestehen von

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{1}{f'^2} \frac{d}{dy} \frac{f' \Psi_{2r+1}^2}{\Psi_{2r} \Psi_{2r+2}} = (2r+4) \frac{\Psi_{2r+3} \Psi_{2r+1}}{\Psi_{2r+2}^2} - (2r+2) \frac{\Psi_{2r+1} \Psi_{2r-1}}{\Psi_{2r}^2}, \\ \frac{d}{dy} \frac{\Psi_{2r}^2}{f' \Psi_{2r-1} \Psi_{2r+1}} = (2r+3) \frac{\Psi_{2r+2} \Psi_{2r}}{\Psi_{2r+1}^2} - (2r+1) \frac{\Psi_{2r} \Psi_{2r-2}}{\Psi_{2r-1}^2}, \end{cases}$$

welche Gleichungen man in der Tat mit Hilfe der Gleichungen (13), angewendet auf das hier in Rede stehende Beispiel (39),

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{\kappa+1} \Psi_{\kappa-2} = -\frac{\Psi'_{\kappa} \Psi_{\kappa-1}}{(\kappa+2)f'} + \frac{\Psi_{\kappa} \Psi'_{\kappa-1}}{(\kappa+1)f'} + r_{\kappa} \Psi_{\kappa} \Psi_{\kappa-1} \\ r_{2\nu-1} = -r_{2\nu} = \frac{1}{2\nu+1} \frac{f''}{2f'^2} \end{array} \right.$$

verifiziert. (Man bildet die Gleichung (58) für $\kappa = 2\nu + 2$ und $\kappa = 2\nu + 1$, multipliziert mit $(2\nu + 4)/\Psi_{2\nu+2}$ resp. $(2\nu + 2)/\Psi_{2\nu}$ und subtrahiert, so gelangt man zur ersten Gleichung (57). Und zur andern, wenn man (58) für $\kappa = 2\nu + 1$ und $\kappa = 2\nu$ bildet, mit $(2\nu + 3)/\Psi_{2\nu+1}$ resp. $(2\nu + 1)/\Psi_{2\nu-1}$ multipliziert und subtrahiert.) Somit ist bewiesen:

Nennt man P_{n-1}/Q_{n-1} den n -ten Näherungsbruch des mit der Potenzreihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} c_{\kappa}(y) f(y)^{\kappa}$ in (39) korrespondierenden Kettenbruchs und

setzt $\mathfrak{G}_n = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, so ist

$$(59) \quad \frac{d\mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{(n+1)f^n}{Q_{n-1}^2} \frac{\Psi_n}{\Psi_{n-2}},$$

wo die Ψ nach (2) sich durch die Koeffizienten c ausdrücken.

(Eingegangen am 14. Juli 1921.)