

Einige Minimums-Sätze über trigonometrische und rationale Polynome.

Von

OTTO BLUMENTHAL in Aachen, zur Zeit im Felde.

Das Hauptresultat dieser Note bezieht sich auf trigonometrische Polynome mit lauter reellen Nullstellen, die eine gewisse Minimums-Eigenschaft besitzen, und ist in Abschnitt A. enthalten. In Abschnitt B. wird daraus ein notwendiges Kriterium für rationale Polynome mit lauter reellen Nullstellen abgeleitet, das mir neu zu sein scheint.*) Von dem Satze über trigonometrische Polynome läßt sich eine Anwendung auf die Lehre von den ganzen Funktionen machen, die ich weiterhin bearbeiten zu können hoffe.

A.

Trigonometrische Polynome mit lauter reellen Nullstellen.

Wir bezeichnen mit $T_n(x)$ einen Ausdruck

$$(1) \quad T_n(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \dots + A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

mit reellen Koeffizienten, für den

$$(2) \quad A_0^2 + A_1^2 + B_1^2 + \dots + A_n^2 + B_n^2 = 1.$$

Die Veränderliche x wird stets im folgenden reell angenommen.

Es gelten die folgenden bekannten Hilfssätze, die ich zur Vollständigkeit mit einfachen Beweisen versee.

Hilfssatz 1. *Ein Polynom T_n hat im Periodenintervall $0 \leq x < 2\pi$ höchstens $2n$ Nullstellen.*

Drücken wir nämlich die \cos und \sin durch Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument aus, und setzen $e^{ix} = E$, so wird

$$(3) \quad T_n(x) = E^{-n} P_{2n}(E)$$

wo P_{2n} ein rationales Polynom höchstens $(2n)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. (Der

*) Ich habe allerdings keine Gelegenheit gehabt, Literatur einzusehen.

Grad ist niedriger, wenn $A_n = B_n = 0$ ist.) Es gibt daher höchstens $2n$ Werte E vom Betrage 1, für die P_{2n} verschwindet, und jedem dieser Werte entspricht genau eine Nullstelle von $T_n(x)$ im Periodenintervall.

Hilfssatz 2. *Es gibt ein und nur ein Polynom T_n mit vorgelegten $2n$ Nullstellen im Periodenintervall.*

Sind ξ_1, \dots, ξ_n die verlangten Nullstellen, so ist, wie leicht zu sehen,

$$(4) \quad T_n(x) = C \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - \xi_k}{2} = C' \prod_{k=1}^{2n} \left(e^{-\frac{i\xi_k}{2}} e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{i\xi_k}{2}} e^{-\frac{ix}{2}} \right)$$

ein Ausdruck der gewünschten Eigenschaften, wenn noch die Konstante so bestimmt wird, daß Bedingung (2) erfüllt ist. Auf das in C noch willkürliche Vorzeichen kommt es für das folgende nicht an.

Ein zweites Polynom T'_n der gleichen Eigenschaften aber kann nicht existieren; denn wird

$$(3') \quad T'_n = E^{-n} P'_{2n}(E)$$

gesetzt, so müssen nach (3) P'_{2n} und P_{2n} bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Dieser Faktor ist aber $= 1$, wegen (2).

Hilfssatz 3. *Die Polynome mit reellen Nullstellen bilden eine stetige, abgeschlossene Menge.*

Da nämlich das Periodenintervall als geschlossene Menge aufzufassen ist, bildet die Gesamtheit aller Systeme von $2n$ verschiedenen oder gleichen Punkten

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

des Intervalls eine abgeschlossene und stetige Menge. Jedem solchen System entspricht nach (4) ein einziges Polynom T_n , das das System zu Nullstellen hat. Das Entsprechen ist stetig. Daher bilden auch die Polynome, bzw. die Systeme ihrer Koeffizienten, als stetiges eindeutiges Bild einer abgeschlossenen, stetigen Menge, eine Menge, die stetig und abgeschlossen ist. *)

Aus den Hilfssätzen 1. und 3. folgt eine Tatsache, die den Gegenstand unserer weiteren Betrachtungen bilden wird:

Im Bereiche der Polynome T_n mit $2n$ reellen Nullstellen besitzt die Verbindung

$$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$$

ein von Null verschiedenes Minimum.

Denn die Menge der Werte C_n^2 ist in dem Bereich endlich, stetig und abgeschlossen, besitzt also ein Minimum. Der Wert $C_n^2 = 0$ gehört nicht

*) Die Hilfssätze gelten auch für Polynome mit komplexen Nullstellen. Die Beweise von 1. und 2. bestehen ungeändert, in 3. bedarf der Punkt ∞ einer leicht ergänzenden Betrachtung.

dem Bereiche an, denn $A_n = B_n = 0$ liefert ein Polynom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, das höchstens $2n-2$ Nullstellen im Periodenintervall hat. Daher ist das Minimum sicher von Null verschieden.

Die Frage, die wir behandeln wollen, ist die nach dem *genauen Werte dieses Minimums*. Sie wird entschieden durch den Satz:

Von allen Polynomen T_n hat

$$(5) \quad t_n(x) = C(1 + \cos x)^n$$

den kleinsten Wert C_n .

Der Beweis ist ganz elementar.

Die trigonometrische Entwicklung von $t_n(x)$ wird am einfachsten so ausgeführt:

$$\begin{aligned} (1 + \cos x)^n &= 2^n \cos^{2n} \frac{x}{2} = 2^n \left(\frac{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}}{2} \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} \cos x + \binom{2n}{n-2} \cos 2x + \dots + \cos nx \right\}. \end{aligned}$$

Wird

$$(6) \quad \Gamma_n^2 = \frac{1}{\frac{1}{4} \binom{2n}{n}^2 + \binom{2n}{n-1}^2 + \dots + \binom{2n}{1}^2 + 1}$$

gesetzt, so ergibt sich also:

$$(5') \quad t_n(x) = \Gamma_n \left\{ \frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} \cos x + \dots + \cos nx \right\}.$$

Bemerkung: $t_n(x)$ hat eine $2n$ -fache Nullstelle am Punkte $x = \pi$. Wie leicht zu übersehen, besitzt jede Funktion $(1 + \cos(x - \xi))^n$ bei beliebigem ξ den gleichen Wert C_n . Dieser ist also unabhängig von der Lage der $2n$ -fachen Nullstelle. Diese Bemerkung gilt auch für die im folgenden betrachteten Funktionen.

Zu unserem Beweise vergleichen wir die Entwicklung (5') mit der Entwicklung des allgemeinen T_n mit $2n$ reellen Nullstellen auf Grund des Ausdrucks (4), den wir nur zur formalen Vereinfachung so schreiben wollen:

$$T_n(x) = C \cos \frac{x - \xi_1}{2} \cos \frac{x - \xi_2}{2} \dots \cos \frac{x - \xi_{2n}}{2} = C \prod_{k=1}^{2n} \cos \frac{x - \xi_k}{2},$$

so daß also die Nullstellen bei $\xi_k + \pi$ liegen.

Es ist

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \prod_{k=1}^{2n} \cos \frac{x - \xi_k}{2} &= \prod_{k=1}^{2n} \frac{e^{-\frac{i\xi_k}{2}} e^{\frac{ix}{2}} + e^{\frac{i\xi_k}{2}} e^{-\frac{ix}{2}}}{2} \\
 &= \frac{1}{2^n} \left[\left(e^{-\frac{i\sigma}{2}} e^{inx} + e^{\frac{i\sigma}{2}} e^{-inx} \right) \right. \\
 &\quad + \sum_k \left(e^{-i\left(\frac{\sigma}{2} - \xi_k\right)} e^{i(n-1)x} + e^{i\left(\frac{\sigma}{2} - \xi_k\right)} e^{-i(n-1)x} \right) \\
 &\quad + \sum_k \sum_l \left(e^{-i\left(\frac{\sigma}{2} - \xi_k - \xi_l\right)} e^{i(n-2)x} + e^{i\left(\frac{\sigma}{2} - \xi_k - \xi_l\right)} e^{-i(n-2)x} \right) + \dots \left. \right] \\
 &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos \left(nx - \frac{\sigma}{2} \right) + \sum_k \cos \left((n-1)x + \xi_k - \frac{\sigma}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_k \sum_l \cos \left((n-2)x + \xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) + \dots \right],
 \end{aligned}$$

wo die mehrfachen Summen in üblicher Weise über alle Kombinationen verschiedener Indizes zu erstrecken sind, und $\sigma = \sum_{k=1}^{2n} \xi_k$ gesetzt ist. Eine Ausnahme macht nur das letzte Glied, welches den Faktor $\frac{1}{2}$ erhält:

$$\frac{1}{2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} \cos \left(\xi_{k_1} + \xi_{k_2} + \dots + \xi_{k_n} - \frac{\sigma}{2} \right).$$

Wir kommen auf die Entwicklung für $(1 + \cos x)^n$ zurück, wenn $\xi_k = 0$ gewählt wird.

Um den Koeffizienten C zu berechnen, bilden wir die Summe Q der Quadrate der Koeffizienten der \cos und \sin in der Entwicklung (7), wobei wir den Faktor $\frac{1}{2^{2(n-1)}}$ der Kürze halber weglassen. $\frac{1}{\sqrt{Q}} = C$ ist dann der gesuchte Koeffizient und gleichzeitig der Wert C_n . Es ist

$$\begin{aligned}
 Q &= 1 + \left[\left(\sum_k \cos \left(\xi_k - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 + \left(\sum_k \sin \left(\xi_k - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 \right] \\
 &\quad + \left[\left(\sum_k \sum_l \cos \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 + \left(\sum_k \sum_l \sin \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Wir haben das Maximum von Q zu berechnen. Wir schätzen dazu jede einzelne der eckigen Klammern ab.

Dies geschieht durch Anwendung folgender Ungleichung:

Sind p_1, p_2, \dots, p_m reelle Größen, so ist

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_m)^2 \leq m(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2);$$

das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle p einander gleich sind.

Beweis durch Schluß von $m - 1$ auf m . Es ist

$$\begin{aligned} & (p_1 + p_2 + \dots + p_m)^2 \\ &= (p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1})^2 + (2p_1p_m + 2p_2p_m + \dots + 2p_{m-1}p_m) + p_m^2. \end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1})^2 \leq (m-1)(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{m-1}^2),$$

ferner bekanntlich

$$2p_i p_m \leq p_i^2 + p_m^2.$$

Daher ergibt sich im ganzen die gewünschte Ungleichung.

Wenden wir sie auf eine der eckigen Klammern des Ausdrucks Q an, beispielsweise auf

$$\left(\sum_k \sum_l \cos \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2 + \left(\sum_k \sum_l \sin \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) \right)^2.$$

Die Summe hat $\binom{2n}{2}$ Glieder, ist daher

$$\leq \binom{2n}{2} \sum_k \sum_l \left(\cos^2 \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) + \sin^2 \left(\xi_k + \xi_l - \frac{\sigma}{2} \right) \right) \leq \binom{2n}{2}^2.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur dann ein, wenn sämtliche \cos und \sin einander gleich sind, d. h. wenn alle ξ_k einander gleich sind. Das ist aber gerade der Fall der Funktion $(1 + \cos(x - \xi))^n$.

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen. Es ist also für alle Polynome T_n mit $2n$ reellen Nullstellen

$$(8) \quad C_n \geq \Gamma_n,$$

wo Γ_n durch Formel (6) gegeben ist. Die Zahl $\frac{1}{\Gamma_n^2}$ wird im folgenden auch mit M_n bezeichnet werden:

$$(9) \quad M_n = \frac{1}{4} \binom{2n}{n}^2 + \binom{2n}{n-1}^2 + \dots + \binom{2n}{1}^2 + 1.$$

B.

Anwendung auf rationale Polynome.

Wendet man die eben gebrauchten Methoden direkt auf rationale Polynome

$$(10) \quad P(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n$$

an, so ergibt sich nur ein triviales Resultat:

Werden die reellen Koeffizienten so normiert, daß

$$(10') \quad d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_n^2 = 1$$

ist, so haben unter allen Polynomen, welche n Nullstellen in dem Intervall $(-r, +r)$ haben, die beiden an den Enden n -fach verschwindenden Polynome

$$d_0(z \pm r)^n$$

den kleinsten Koeffizienten d_0 .

Es läßt sich aber aus unserem Resultat über trigonometrische Polynome auch ein interessanteres Ergebnis über rationale Polynome mit lauter reellen Nullstellen ableiten, in dem die Beschränkung der Nullstellen auf ein endliches Intervall $(-r, +r)$ wegfällt.

Zu diesem Zwecke transformieren wir die reelle Achse in den Einheitskreis. Die allgemeinste Kreisverwandtschaft, die dies leistet, läßt sich schreiben

$$(11) \quad z = \frac{\alpha z_1 + \bar{\alpha}}{\gamma z_1 + \bar{\gamma}},$$

wo die überstrichenen Größen, wie überall in der Folge, konjugiert-komplexe bezeichnen. Wir wenden diese Transformation auf das Polynom (10) an und setzen dabei dessen Grad als gerade, gleich $2n$ voraus.*) Polynome ungeraden Grades gehen in diese Form ein, wenn man $d_0 = 0$ setzt. Führen wir (11) in (10) ein und bringen auf einen Nenner, so erhalten wir einen Zähler $\Pi_{2n}(z_1)$ vom Grade $2n$:

$$\begin{aligned} \Pi_{2n}(z_1) = & e_0 z_1^{2n} + e_1 z_1^{2n-1} + \dots + e_{n-1} z_1^{n+1} + e_n z_1^n \\ & + \bar{e}_{n-1} z_1^{n-1} + \dots + \bar{e}_1 z_1 + \bar{e}_0. \end{aligned}$$

Hat $P_{2n}(z)$ nur reelle Wurzeln, so liegen sämtliche Wurzeln von $\Pi_{2n}(z_1)$ auf dem Einheitskreis. Dividieren wir Π_{2n} durch z_1^n und setzen $z_1 = e^{ix}$, so entsteht ein trigonometrisches Polynom $T_n(x)$, das $2n$ reelle Nullstellen hat. Auf dieses läßt sich dann der in A. bewiesene Satz anwenden.

Zur Ausführung bemerken wir zunächst, daß die Koeffizienten A_k, B_k dieses T_n folgende sind:

$$A_0 = e_n; \quad A_k = e_{n-k} + \bar{e}_{n-k}, \quad B_k = i(e_{n-k} - \bar{e}_{n-k}) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Wir erhalten somit als Kriterium für lauter reelle Nullstellen

$$\frac{4|e_0|^2}{4|e_0|^2 + 4|e_1|^2 + \dots + 4|e_{n-1}|^2 + e_n^2} \geq \Gamma_n^2 = \frac{1}{M_n}$$

oder

$$(12) \quad 4(M_n - 1)|e_0|^2 - 4|e_1|^2 - \dots - 4|e_{n-1}|^2 - e_n^2 \geq 0.$$

Diese Bedingung (12) muß für alle Werte α, γ erfüllt sein. Wir wollen den Ausdruck linker Hand in (12) mit Q_{2n} bezeichnen und genauer untersuchen.

*) Die Bedingung (10') wird dem Polynom P_{2n} nicht auferlegt.

Die Größen e_k sind Formen $(2n)^{\text{ter}}$ Dimension in den vier homogenen Veränderlichen $\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, \bar{\gamma}$, deren Koeffizienten Vielfache der Koeffizienten d_k von P_{2n} sind. Diejenigen Glieder von e_k , die mit d_l multipliziert sind, sind von der Dimension l in $\gamma, \bar{\gamma}$. Ferner ist e_k homogen von der Dimension $2n - k$ in den Größen α, γ , homogen von der Dimension k in den überstrichenen Größen $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$.

Daraus folgt: Jede Norm $|e_k|^2$ ist homogen von der Dimension $4n$ in allen vier Größen $\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, \bar{\gamma}$, sie ist außerdem homogen von der Dimension $2n$ in dem nicht-überstrichenen und dem überstrichenen Größenpaar. Die Koeffizienten der einzelnen Potenzprodukte sind quadratische Formen der Koeffizienten d_k , und zwar hat der Koeffizient eines Potenzproduktes von Dimension L in $\gamma, \bar{\gamma}$ genau das Gewicht L .

Die wichtigsten Eigenschaften der Funktion Q_{2n} aber ergeben sich durch folgende Überlegung: In (12) gilt das Gleichheitszeichen, d. h. Q_{2n} verschwindet, dann und nur dann, wenn $\Pi_{2n}(z_1)$ eine $2n$ -fache Nullstelle hat. Denn dann hat $z_1^{-n} \Pi_{2n}(z_1)$ die Gestalt (5): $C(1 + \cos(x - \xi))^n$. Dies tritt in zwei Fällen ein:

1) Wenn α und γ in reellem Verhältnis stehen: $\alpha = A\gamma, \bar{\alpha} = A\bar{\gamma}$. Es ist der Fall, in dem die Substitution (11) entartet. In diesem Falle ist also $Q_{2n} = 0$, und daraus wird geschlossen, daß Q_{2n} durch die Verbindung $\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma$ teilbar ist. In der Tat, da Q_{2n} homogen vom gleichen Grade $2n$ in α, γ und $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ ist, läßt sich schreiben

$$Q_{2n} = \alpha^{2n} \bar{\alpha}^{2n} p\left(\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}\right) \quad (p = \text{Polynom}).$$

Ordnen wir p nach Potenzen von $\frac{\gamma}{\alpha}$ und dividieren durch

$$\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma = -\alpha\bar{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}\right)$$

durch, so bleibt als Rest ein Polynom in $\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}$, das für alle reellen Werte des Verhältnisses verschwindet, also identisch Null ist.

Weil aber Q_{2n} außerdem symmetrisch in den ungestrichenen und gestrichenen Größen ist, muß es sogar durch $(\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma)^2$ oder $|\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma|^2$ teilbar sein. Denn wenn $Q_{2n} = (\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma) q_{2n}$ gesetzt wird, muß q_{2n} sein Zeichen wechseln, wenn ungestrichene und gestrichene Größen miteinander vertauscht werden, also verschwinden, wenn α und γ reell sind. Da q_{2n} in ungestrichenen und gestrichenen Größen je homogen vom Grade $2n - 1$ ist, lassen sich die vorhergehenden Überlegungen nochmals anwenden und zeigen, daß auch q_{2n} durch $\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma$ teilbar ist.

Wir setzen also

$$(13') \quad Q_{2n} = |\alpha\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma|^2 R_{2n}$$

und erhalten unsere notwendige Bedingung für $2n$ reelle Nullstellen von $P_{2n}(z)$ in der endgültigen Gestalt:

$$(13) \quad R_{2n} \geq 0,$$

wo R_{2n} eine Form der Ordnung $4n - 4$, je homogen von der Dimension $2n - 2$ in ungestrichenen und gestrichenen Größen ist.

2) R_{2n} verschwindet identisch in $\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, \bar{\gamma}$, wenn $P_{2n} = (z + a)^{2n}$ ist. Daraus ergibt sich die Bedeutung der als Koeffizienten der Potenzprodukte in R_{2n} auftretenden quadratischen Formen der d_k . Diese müssen nämlich im Falle der genannten Funktionen $(z + a)^{2n}$ sämtlich verschwinden. Man erhält solche Formen, wenn man zwischen zwei Produkten $d_k d_i$,

$$d_k = \binom{2n}{k} \alpha^k,$$

den Parameter α eliminiert. Es bestätigt sich so, daß die quadratischen Formen isobar sind. Die Form vom kleinsten Gewicht ist

$$q_2 = \binom{2n}{1}^2 d_0 d_2 - \binom{2n}{2} d_1^2$$

und hat das Gewicht 2. Wir fragen nach der Anzahl N_L der Formen q_L vom Gewicht L . Es ist $N_L = N_{2n-L}$. Für gerade $L = 2L'$ ($L \leq n$) erhält man alle linear unabhängigen q_L , wenn man $d_0 d_L$ der Reihe nach mit

$$d_1 d_{L-1}, d_2 d_{L-2}, \dots, d_{L'}^2$$

kombiniert, es gibt also $N_L = L' = \frac{L}{2}$ Formen. Für ungerade $L = 2L' + 1$ hat man $d_0 d_L$

$$d_1 d_{L-1}, d_2 d_{L-2}, \dots, d_{L'} d_{L'+1}$$

zu kombinieren und erhält $N_L = L' = \frac{L-1}{2}$ linear unabhängige Formen.

Die Formen q_L sind in R_{2n} mit Potenzprodukten multipliziert, die von der Dimension $L - 2$ in $\gamma, \bar{\gamma}$ sind. Die Zahl der linear unabhängigen reellen (also in $\gamma, \bar{\gamma}$ symmetrischen) Summen solcher Potenzprodukte ist genau N_L . Ein vollständiges System linear-unabhängiger Summen ist nämlich für $L \leq 2n$

$$\alpha^{2n-2-\lambda} \bar{\alpha}^{2n-L+\lambda} \gamma^\lambda \bar{\gamma}^{L-2-\lambda} + \alpha^{2n-L+\lambda} \bar{\alpha}^{2n-2-\lambda} \gamma^{L-2-\lambda} \bar{\gamma}^\lambda$$

$$\left(0 \leq \lambda \leq \frac{L-2}{2}\right);$$

für $L > 2n$ erhält man das System durch Vertauschung von α und γ .

Die Gesamtzahl der in R_{2n} auftretenden reellen Potenzsummen ist $n(2n-1)$.

Durch diese Überlegungen ist die Form des Ausdrucks R_{2n} genau festgelegt. Es handelt sich zu seiner völligen Berechnung nur noch um die Bestimmung der Zahlenfaktoren, mittels deren die als Koeffizienten

der symmetrischen Potenzsummen auftretenden quadratischen Formen aus den q_L zusammengesetzt sind. Die Anzahl dieser Koeffizienten ist

$$4(1 + \dots + (n-1)^2) + n^2;$$

wegen des gleichen Baues der Glieder der Dimensionen L und $2n - 2 - L$ müssen aber einzeln bestimmt werden nur

$$2(1 + \dots + (n-1)^2) + n^2 = \frac{(2n-1)n(n-1)}{3} + n^2 = \frac{n(2n^2+1)}{3}.$$

Man bestimmt sie am einfachsten, indem man in den Ausdruck (13') für Q_{2n} das dem Bau nach bekannte R_{2n} mit unbestimmten Koeffizienten einträgt und geeignete Potenzprodukte des entstandenen Ausdrucks mit denjenigen von (12) vergleicht. Ihr formelmäßiger Ausdruck ist unübersichtlich. Ich gebe die Resultate für die drei niedersten Gradzahlen:

$$n = 1$$

$$R_2 = d_1^2 - 4d_0d_2.$$

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} R_4 = & -7(8d_0d_2 - 3d_1^2) \alpha^2 \bar{\alpha}^2 - 14(6d_0d_3 - d_1d_2) \alpha \bar{\alpha} (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \\ & - \{4(16d_0d_4 - d_1d_3) + (36d_0d_4 - d_2^2)\} (\alpha^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}^2 \gamma^2) \\ & + \{50(16d_0d_4 - d_1d_3) - 26(36d_0d_4 - d_2^2)\} \alpha \bar{\alpha} \gamma \bar{\gamma} \\ & - 14(6d_1d_4 - d_2d_3) (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \gamma \bar{\gamma} - 7(8d_2d_4 - 3d_3^2) \gamma^2 \bar{\gamma}^2. \end{aligned}$$

$$n = 3$$

$$\begin{aligned} R_6 = & -39q_2 \alpha^4 \bar{\alpha}^4 - 128q_3 \alpha^3 \bar{\alpha}^3 (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \\ & - \{82q_4' + 40q_4''\} \alpha \bar{\alpha}^2 (\alpha^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}^2 \gamma^2) + \{588q_4' - 528q_4''\} \alpha^3 \bar{\alpha}^3 \gamma \bar{\gamma} \\ & - \{28q_5' + 20q_5''\} \alpha \bar{\alpha} (\alpha^3 \bar{\gamma}^3 + \bar{\alpha}^3 \gamma^3) + \{1052q_5' - 364q_5''\} \alpha^2 \bar{\alpha}^2 \gamma \bar{\gamma} (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \\ & - \{4q_6' + 4q_6'' + q_6'''\} (\alpha^4 \bar{\gamma}^4 + \bar{\alpha}^4 \gamma^4) \\ & + \{1296q_6' - 120q_6'' - 47q_6'''\} \alpha \bar{\alpha} \gamma \bar{\gamma} (\alpha^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}^2 \gamma^2) \\ & + \{2196q_6' + 648q_6'' - 444q_6'''\} \alpha^2 \bar{\alpha}^2 \gamma^2 \bar{\gamma}^2 \\ & - \{28q_7' + 20q_7''\} (\alpha^3 \bar{\gamma}^3 + \bar{\alpha}^3 \gamma^3) \gamma \bar{\gamma} + \{1052q_5' - 364q_5''\} \alpha \bar{\alpha} \gamma^2 \bar{\gamma}^2 (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \\ & - \{82q_8' + 40q_8''\} (\alpha^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}^2 \gamma^2) \gamma^2 \bar{\gamma}^2 + \{588q_8' - 528q_8''\} \alpha \bar{\alpha} \gamma^3 \bar{\gamma}^3 \\ & - 128q_9 (\alpha \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \gamma) \gamma^3 \bar{\gamma}^3 - 39q_{10} \gamma^4 \bar{\gamma}^4; \end{aligned}$$

$$q_2 = 12d_0d_2 - 5d_1^2; \quad q_3 = 9d_0d_3 - 2d_1d_2; \quad q_4' = 8d_0d_4 - d_1d_3, \quad q_4'' = 15d_0d_4 - d_2^2;$$

$$q_5' = 15d_0d_5 - d_1d_4, \quad q_5'' = 50d_0d_5 - d_2d_3;$$

$$q_6' = 36d_0d_6 - d_1d_5, \quad q_6'' = 325d_0d_6 - d_2d_4, \quad q_6''' = 400d_0d_6 - d_3^2;$$

$$q_7' = 15d_1d_6 - d_2d_5, \quad q_7'' = 50d_1d_6 - d_3d_4;$$

$$q_8' = 8d_2d_6 - d_3d_5, \quad q_8'' = 15d_2d_6 - d_4^2; \quad q_9 = 9d_3d_6 - 2d_4d_5; \quad q_{10} = 12d_4d_6 - 5d_5^2.$$

Ein Sonderfall. Nimmt man $|\alpha|$ groß gegen $|\gamma|$, so wird in R_{2n} das erste Glied (mit $\alpha^{2n-2} \bar{\alpha}^{2n-2}$) das Vorzeichen bestimmen. Der Koeffizient dieses Gliedes ist

$$Cq_2 = C \left[\binom{2n}{1}^2 d_0 d_2 - \binom{2n}{2} d_1^2 \right].$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Zahlenfaktor C immer negativ ist. In der Tat muß $\binom{2n}{2} C$ gleich dem Koeffizienten der mit $d_1^2 \alpha^{2n} \bar{\alpha}^{2n-2} \bar{\gamma}^2$ multiplizierten Glieder in (12) sein.*) Nun liefert aber $|e_0|^2$ kein Glied dieser Form, die in $|e_1|^2, \dots, e_n^2$ auftretenden Koeffizienten sind sämtlich positiv, daher C negativ.

Daraus folgt: Wenn

$$\binom{2n}{1}^2 d_0 d_2 - \binom{2n}{2} d_1^2 > 0$$

ist, hat die Gleichung

$$P_{2n}(z) = 0$$

sicher komplexe Wurzeln.

Dieses Resultat läßt sich auch einfach aus der Descartesschen Regel ableiten, und unser Kriterium stellt sich also als eine Erweiterung dieser Regel dar. In der Tat, schafft man in $P_{2n}(z)$ durch die Verschiebung $z = z' + a$ das Glied in z'^{2n-1} weg, so erhält man

$$P(z) = P_1(z') = d_0 z'^{2n} + \frac{\binom{2n}{1}^2 d_0 d_2 - \binom{2n}{2} d_1^2}{\binom{2n}{1}^2 d_0} z'^{2n-2} + \dots$$

In unserem Falle findet also zwischen den beiden ersten Gliedern kein Vorzeichenwechsel statt, und dann zeigt die Descartessche Regel, daß höchstens $2n - 2$ reelle Nullstellen vorhanden sein können.

Die Bedeutung des Kriteriums für die praktische Auflösung von Gleichungen wird wohl kaum erheblich sein. Es gestattet, unter Umständen die Existenz komplexer Wurzeln nachzuweisen, dann nämlich, wenn sich komplexe Größen α, γ finden lassen, die R_{2n} negativ machen. So findet man, daß $x^4 + 1 = 0$ und $x^4 - 1 = 0$ komplexe Wurzeln haben, indem man im ersten Falle $\alpha = \gamma = 1$, im zweiten $\alpha = 1, \gamma = i$ setzt. Aber die Auswahl geeigneter α, γ ist in der Regel schwierig, und die langen

*) Denn

$$Q_{2n} = |\alpha \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \gamma|^2 R_{2n} = (2\alpha \bar{\alpha} \gamma \bar{\gamma} - \alpha^2 \bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 \gamma^2) R_{2n}$$

enthält das Glied

$$C \binom{2n}{2} d_1^2 \alpha^{2n} \bar{\alpha}^{2n-2} \bar{\gamma}^2$$

als einziges seiner Art.

Formeln sind im allgemeinen für numerische Ausrechnung unhandlich. Bei Anwendung des Kriteriums auf Polynome ungeraden Grades kann es vorteilhaft sein, diesen durch Multiplikation mit einem unbestimmten Faktor $z - a$ geraden Grad zu verleihen, wodurch noch ein dritter Parameter a in das Kriterium eingeht.*)

C.

Erweiterungen.

Hat ein trigonometrisches Polynom mindestens $2(n - m)$ reelle Nullstellen, so folgt aus den Hilfssätzen des Abschnitts A. (siehe Fußnote S. 391), daß der Ausdruck

$$\frac{A_n^2 + B_n^2 + \dots + A_{n-m}^2 + B_{n-m}^2}{A_n^2 + B_n^2 + \dots + A_1^2 + B_1^2 + A_0^2}$$

und also auch

$$(A_T) \quad \frac{A_n^2 + B_n^2 + \dots + A_{n-m}^2 + B_{n-m}^2}{A_{n-m+1}^2 + B_{n-m+1}^2 + \dots + A_1^2 + B_1^2 + A_0^2}$$

ein von Null verschiedenes Minimum besitzen muß. Ebenso muß für alle rationalen Polynome (10), die mindestens $n - m$ Nullstellen in dem Intervalle $(-r, +r)$ haben, der Ausdruck

$$(A_P) \quad \frac{d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_m^2}{d_{m+1}^2 + d_{m+2}^2 + \dots + d_n^2}$$

ein von Null verschiedenes Minimum annehmen. Die Bestimmung dieser Minima und der Funktionen, die das Minimum ergeben, ist aber erheblich schwieriger als in dem in A. behandelten Falle, und auch die Resultate sind verwickelter und verlieren dadurch an Interesse.**)

Nur in einem Falle kommt man noch mit ganz einfachen Überlegungen zum Ziel. Wir fragen nämlich nach dem *Minimum des Ausdruckes*

$$S = \frac{A_n^2 + B_n^2 + \dots + A_1^2 + B_1^2}{A_0^2}$$

für ein trigonometrisches Polynom, das überhaupt reelle Nullstellen haben soll.

*) Wegen der Parameter α, γ haben wir *unendlich viele* notwendige Kriterien für lauter reelle Nullstellen. Diese lassen sich durch eine einzige ersetzen, nämlich

$$\min_{\alpha, \gamma} R_{2n} \geq 0.$$

Die Funktion der linken Seite ist aber jetzt eine im allgemeinen irrationale algebraische Funktion der Koeffizienten d_k .

**) Eine einfache allgemeine Eigenschaft der Minumpolynome glaube ich allerdings festgestellt zu haben und hoffe, sie demnächst geben zu können.

Nach früher Gesagtem können wir annehmen, daß eine Nullstelle bei $x = 0$ liegt. Dies ergibt

$$A_n + A_{n-1} + \cdots + A_1 + A_0 = 0.$$

Weitere Bedingungen sind den Koeffizienten A_k, B_k nicht aufzuerlegen. Die Funktion, die S zum Minimum macht, muß offenbar lauter verschwindende Koeffizienten B_k haben. Es handelt sich also schließlich darum, A_1, \dots, A_n so zu bestimmen, daß

$$\frac{A_n^2 + \cdots + A_1^2}{(A_n + \cdots + A_1)^2}$$

möglichst klein wird. Dies ist aber nach einem oben (Abschnitt A.) bewiesenen Hilfssatz dann der Fall, wenn

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A, \quad A_0 = -nA$$

ist, wo schließlich noch $A = 1$ gesetzt werden kann.

Die Minimumfunktion des Ausdruckes S ist also

$$(14) \quad T(x) = -n + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

und diese Funktion hat $x = 0$ zur zweifachen Nullstelle. Sie hat keine anderen reellen Nullstellen. Das Minimum des Ausdruckes S ist

$$(14') \quad S = \frac{1}{n}.$$

Die Methode des Abschnittes B. gestattet, hieraus ein notwendiges Kriterium dafür abzuleiten, daß ein rationales Polynom n^{ten} Grades überhaupt reelle Nullstellen hat.

Auch eine Frage über rationale Polynome läßt sich vollständig beantworten, nämlich die Frage nach denjenigen Polynomen n^{ten} Grades, die zwischen $-r$ und $+r$ wenigstens eine Nullstelle haben, und den Ausdruck

$$s = \frac{d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{n-1}^2}{d_n^2}$$

zum Minimum machen. Ich verfare nach einer Methode, die allgemeinerer Anwendung fähig zu sein scheint.

Ist b eine Nullstelle des Minimumpolynoms $P(z)$, und $Q(z)$ ein Polynom höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, das die gleiche Nullstelle hat, dann darf kein Ausdruck der Form $P(z) + \alpha z Q(z)$ (α ein Parameter) den Ausdruck s kleiner machen als $P(z)$. Ist also

$$Q(z) = \delta_0 z^{n-1} + \delta_1 z^{n-2} + \cdots + \delta_{n-1},$$

so muß für das Minimumpolynom

$$d_0 \delta_0 + d_1 \delta_1 + \cdots + d_{n-1} \delta_{n-1} = 0$$

sein. Dies folgt durch Differentiation nach α . Wir wählen nun für Q alle Polynome der Form

$$Q(z) = z^k(z-b) \quad k=0, 1, \dots, n-2.$$

Es folgen dann der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$(15) \quad d_{n-2} - b d_{n-1} = 0, \quad d_{n-3} - b d_{n-2} = 0, \dots, \quad d_0 - b d_1 = 0.$$

Das Polynom $P(z)$ hat demnach, wenn $d_0 = 1$ gesetzt wird, die Form

$$(15') \quad P(z) = z^n + \frac{z^{n-1}}{b} + \frac{z^{n-2}}{b^2} + \dots + \frac{z}{b^{n-1}} - \left(b^n + b^{n-2} + \dots + \frac{1}{b^{n-2}} \right),$$

wobei der letzte Koeffizient d_n sich aus dem Verschwinden bei $z = b$ ergibt.

Es läßt sich unmittelbar schließen, daß das Minimumpolynom nur eine einzige Nullstelle zwischen $-r$ und $+r$ haben kann. Denn wäre c eine zweite solche Nullstelle, die von b verschieden ist, so müßten auch die (15) entsprechenden Beziehungen $d_{n-2} - c d_{n-1} = 0, \dots$ bestehen. Eine Doppelwurzel bei $z = b$ ist aber auch unmöglich, denn die Ableitung $P'(z)$ hat für $z = b$ lauter Glieder gleichen Vorzeichens.

Es bleibt noch die Wurzel b zu bestimmen. Es ist leicht zu sehen, daß sie eines der beiden Intervallenden $-r, +r$ sein muß. Denn es ist

$$s = \frac{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^4} + \dots + \frac{1}{b^{2(n-1)}}}{\left(b^n + b^{n-2} + \dots + \frac{1}{b^{n-2}} \right)^2} = \frac{1}{b^{2n} + b^{2(n-1)} + \dots + b^2}$$

und nimmt mit wachsendem $|b|$ ab.

Also muß $|b| = r$ sein. Die beiden Möglichkeiten $b = \pm r$ liefern aber den gleichen Wert des Ausdrucks s .

Also: *Ein Minimumpolynom, das zwischen $-r$ und $+r$ mindestens eine Nullstelle besitzt, ist*

$$(16) \quad m_1(z) = z^n + \frac{z^{n-1}}{r} + \frac{z^{n-2}}{r^2} + \dots + \frac{z}{r^{n-1}} - \left(r^n + r^{n-2} + \dots + \frac{1}{r^{n-2}} \right)$$

und hat nur die eine einfache Nullstelle r im Intervalle $(-r \leq z \leq +r)$.

Es existiert noch ein einziges anderes Minimumpolynom, das durch Vertauschung von r mit $-r$ erhalten wird. Das Minimum von s ist beidemal

$$(16') \quad s = \frac{1}{r^{2n} + r^{2(n-1)} + \dots + r^2}.$$

Ein Teil dieses Satzes, daß nämlich $m(z)$ keine Wurzeln im Innern des Intervalles $(-r, +r)$ besitzt, den wir hier durch Minimumsbetrach-

tungen erschlossen haben, läßt sich auch elementar beweisen. Dividiert man nämlich $m(z)$ durch $z - r$, so kommt

$$m_1(z) = z^{n-1} + \left(r + \frac{1}{r}\right)z^{n-2} + \left(r^2 + 1 + \frac{1}{r^2}\right)z^{n-3} + \dots + \left(r^{n-1} + r^{n-3} + \dots + \frac{1}{r^{n-3}} + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

und es ist zu zeigen, daß dieses Polynom keine Wurzeln z ($|z| \leq |r|$) besitzt. Wir können r positiv annehmen. Wir setzen zur Abkürzung

$$u_k = \left(r^k + \dots + \frac{1}{r^k}\right) z^{n-1-k},$$

dann ist

$$\frac{u_{k-1}}{u_k} = \frac{r^{k-1} + \dots + \frac{1}{r^{k-1}}}{r^k + \dots + \frac{1}{r^k}} z = \frac{r^{k-1} + \dots + \frac{1}{r^{k-1}}}{r^{k-1} + \dots + \frac{1}{r^{k-1}} + \frac{1}{r^{k+1}}} \frac{z}{r},$$

und daher

$$\left| \frac{u_{k-1}}{u_k} \right| < \frac{|z|}{r} \leq 1.$$

Sei nun zuerst n gerade. Dann läßt sich schreiben

$$m_1(z) = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{n-2} + u_{n-1}).$$

Die Klammern sind nach dem Bewiesenen für alle betrachteten Werte von z positiv, daher auch $m_1(z)$.

Sei zweitens n ungerade. Dann ist

$$m_1(z) = (u_0) + (u_1 + u_2) + \dots + (u_{n-2} + u_{n-1}),$$

worin abermals für alle betrachteten Werte von z die sämtlichen Klammern positiv sind.

Im Felde, Juli 1915.