

# ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N<sup>o</sup>. 438.

Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde.

Von Herrn Geheimen Rath und Ritter *Bessel*.

In den *Comptes rendus hebdom. des séances de l'Acad. des Sciences* vom 21<sup>sten</sup> Juni 1841 findet sich der Bericht einer, aus den Herren *Mathieu*, *Daussy* und *Largeteau* zusammengesetzten Commission, über einen Fehler der Berechnungsart, welche im Jahre 1808 angewandt worden ist, um die Entfernung der Parallelen von *Montjoux* und *Mola* (auf Formentera) aus den Beobachtungen abzuleiten, welche die Herren *Biot* und *Arago*, zur Bestimmung derselben gemacht und in ihrem 1821 erschienenen Werke „*Recueil d'Observations géodésiques etc.*“ mitgetheilt haben. Diese fehlerhafte Berechnungsart wurde von einer früheren, mit der Berechnung der Beobachtungen beauftragten Commission der Akademie befolgt; die Herren *Biot* und *Arago* selbst scheinen, das Resultat ihrer Arbeit nicht gesucht zu haben. Herr *Puissant* hat das Verdienst, die Unrichtigkeit des Resultats der früheren Commission zur Sprache gebracht zu haben.

Die Entfernung der Parallelen von *Montjoux* und *Mola*, welche früher = 153605<sup>77</sup> angegeben war, wird gegenwärtig

von Herrn <i>Mathieu</i> .....	= 153672 <sup>39</sup>
<i>Largeteau</i> .....	4,48
<i>Daussy</i> .....	5,66
<i>Puissant</i> .....	4,01

also von 66<sup>62</sup> bis 69<sup>89</sup> gröfser als früher gefunden. Wäre dieser Fehler nicht begangen, so würde die Länge des *Meters*, deren Bestimmung die nähere Veranlassung der großen, als Beitrag zur Bestimmung der Figur der Erde immer denkwürdig bleibenden Unternehmung war, mehr als 0<sup>4</sup>04 gröfser festgesetzt worden sein, als wirklich geschehen ist. Dieser Einfluß des Fehlers hat jedoch kaum noch ein Interesse, da das Meter die Anfangs beabsichtigte Bedeutung in keinem Falle haben, und wirklich nichts Anderes sein kann, als ein, zwar nach einer gewissen Absicht gewähltes, — aber dennoch innerhalb engerer oder weiterer Grenzen willkürlicher Theil der Toise de Pérou \*). Allein da die französische Gradmessung zu der Bestimmung der Abmessungen des Erdsphäroids den wichtigen Beitrag liefert, welcher ihrer Ausdehnung angemessen ist, so wird jetzt nöthig, das aus den vorhandenen, zuverlässiger erscheinenden Messungen von Meridianbögen gezogene Resultat

dieser Art, welches ich Nr. 333 der *Astr. Nachr.* bekannt gemacht habe, durch Berücksichtigung des Fehlers zu verbessern.

Da die angeführten vier neuen Rechnungsergebnisse innerhalb weniger Toisen übereinstimmen, und selbst der Unterschied der beiden äußersten unter ihnen keinen Einfluß auf die Bestimmung der Axen des Erdsphäroids erlangt, welcher nicht viel kleiner wäre als die von den Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche selbst, von den Beobachtungsfehlern und wahrscheinlich auch von kleinen Unvollkommenheiten der Berechnung einer oder der anderen Gradmessung erzeugte Unsicherheit, so könnte man wohl eins dieser vier Resultate, oder das arithmetische Mittel aller vier, zur Grundlage einer neuen Untersuchung der Figur und Gröfse der Erde machen. Ich habe aber geglaubt, bis zu den in dem Werke der Herren *Biot* und *Arago* enthaltenen Beobachtungen selbst zurückgehen, als den vier Resultaten noch ein *fünftes* hinzufügen zu müssen.

In dem eben angeführten Werke (p. 179 etc.) finden sich zwei Werthe der Winkel mehrerer Dreiecke angegeben; nämlich die Werthe, welche die frühere Commission angenommen hat und die, welche die Beobachter selbst für die wahrscheinlichsten halten. Die ersteren sind in den Rechnungen der Herren *Daussy* und *Largeteau*, die letzteren in der Rechnung des Herrn *Mathieu* angewandt worden. Diese doppelten Werthe der Winkel sind aus dem Vorhandensein von mehr Beobachtungen, als zur Bestimmung der Winkel erforderlich waren, hervorgegangen: sie müssen durch einen bestimmten Werth jedes Winkels, welchen die Verfolgung der Methode der kleinsten Quadrate immer ergibt, ersetzt werden, wenn man nicht sowohl eine Reihe, zwischen — vielleicht engen — Grenzen schwankender Resultate, als das unzweideutige Resultat einer geschlossenen geodätischen Operation verlangt. Die Beobachtungen der Herren *Biot* und *Arago* ergeben nicht allein alle Winkel der einzelnen Dreiecke unmittelbar, sondern oft auch die Summen von zwei oder mehreren, von einem Punkte des Dreiecksnetzes ausgehenden; ferner ergeben sie die vollständige Beobachtung der Winkel des Viereckes *Desierto d. l. P. — Espalan — Cullera — Montgo* und seiner Diagonalen. Im

\*) Herr Geheimerrath *Bessel* hat seine Ansichten über Naturmaafse ausführlicher in meinem Jahrbuch für 1840 p. 142 ausgesprochen. S.

Ganzen ergeben sie 29 Bedingungen zwischen den verschiedenen beobachteten Winkeln, welche Bedingungen nicht nur in aller Schärfe, sondern auch so erfüllt werden müssen, daß die Verbesserungen, welche an die unmittelbaren Beobachtungen anzubringen sind, damit sie erfüllt werden, der Forderung der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen. Die Theorie dieser Ausgleichung der beobachteten Winkel untereinander war zu der Zeit, in welche die frühere Berechnung der französischen Gradmessung fällt, noch nicht bekannt, so daß auch weder die eine noch die andere der beiden erwähnten Angaben der Winkel daraus hervorgegangen sein kann und also keine von ihnen zu dem wahren Resultate der Beobachtungen führt. Der Wunsch, dieses Resultat einer Unternehmung zu erlangen, deren Ausführung große Schwierigkeiten mit sich brachte und von den Herren *Biot* und *Arago* so große Aufopferungen forderte, daß die Mühe einer consequent durchgeführten Rechnung dagegen kaum in Betracht kommt, hat mich veranlaßt, diese zu unternehmen.

## 1.

Ich werde zuerst die auf den einzelnen Dreieckspunkten beobachteten, auf den Horizont reducirten Winkel, so wie das arithmetische Mittel der verschiedenen Beobachtungsreihen jedes Winkel, angeben, anführen. Indem das arithmetische Mittel aus verschiedenen, ungleich zahlreichen Reihen von Wiederholungen eines Winkels, so genommen wird, daß jeder dieser Reihen ein der Zahl der Wiederholungen proportionales Gewicht beigelegt wird, wird, wie ich Astr. Nachr. Nr. 256 S. 280 gezeigt habe, vorausgesetzt, daß die aus der Theilung und Ablesung des angewandten Instruments hervorgehenden Fehler, vergleichungsweise mit den Fehlern der Einstellung des Fernrohrs, verschwinden. Dieses ist ganz gewiß in keinem Falle richtig; allein das Verhältniß der mittleren, aus beiden Ursachen entstehenden Fehler, welches bekannt sein muß, wenn die a. a. O. gegebene Vorschrift zur Bestimmung des Gewichtes jeder einzelnen Beobachtungsreihe soll angewandt werden können, ist für die Wiederholungskreise der Herren *Biot* und *Arago* unbekannt, weshalb, falls nicht ein ganz willkürliches Element der Rechnung eingeführt werden soll, nichts übrig bleibt; als der einfachsten Annahme, nämlich der Annahme des der Anzahl der Wiederholungen proportionalen Gewichtes, welches auch die von den Beobachtern selbst gemachte ist, zu folgen.

Mittelp. d. Winkel.	Nr.	Winkel.		Zahl.	Pag.
Matas....	1	Morella — Montserrat	54° 23' 39" 685	52	3
Montserrat	2	Matas — Morella	60 13 20,696	64	7
	3	Morella — Montagut	70 11 17,184	64	8
Morella...	4	St. Jean — Montagut	37 28 37,916	64	14
	5	Montagut — Montserrat	59 8 0,980	56	13
	6	Montserrat — Matas	65 22 58.506	64	12

Mittelp. d. Winkel.	Nr.	Winkel.		Zahl.	Pag.
Montagut	7	Montserrat — Morella	50° 40' 49" 210	54	19
	8	Morella — St. Jean	84 29 22,895	84	21
	9	St. Jean — Lleberia	42 40 42,144	88	22
St. Jean..	10	Montsia — Lleberia	33 17 58,492	42	30
	11	Lleberia — Montagut	107 0 35,275	64	29
	12	Montagut — Morella	58 2 0,220	48	28
Lleberia..	13	Montagut — St. Jean	30 18 42,412	40	36
	14	St. Jean — Montsia	124 26 35,959	84	37
	15	Montsia — Bosch	33 0 2,208	60	43
Montsia..	16	Desierto — Arès	37 52 58,344	72	56
	17	Arès — Tosal	35 45 45,935	56	53
	18	Tosal — Bosch	44 26 42,392	46	49
	19	Bosch — Lleberia	53 33 17,135	14	48
	20	Lleberia — St. Jean	22 15 34,094	64	39
		18 + 19.....	98 0 2,557	60	51
Bosch....	21	Lleberia — Montsia	93 26 45,623	54	61
	22	Montsia — Tosal	74 44 14,267	74	63
le Tosal...	23	Bosch — Montsia	60 49 6,555	74	68
	24	Montsia — Arès	108 10 54,047	72	70
Arès.....	25	Tosal — Montsia	36 3 24,279	40	74
	26	Montsia — Desierto	88 17 45,017	44	76
	27	Desierto — Espadan	37 7 33,019	58	77
		25 + 26.....	124 21 10,135	20	78
Desierto delas Pal- mas....	28	Campvey — Montgo	42 5 36,623	38	108
	29	Montgo — Cullera	16 51 20,656	12	99
	30	Cullera — Espadan	47 2 10,351	60	98
	31	Espadan — Arès	101 17 34,304	218	97
	32	Arès — Montsia	53 49 21,126	40	88
		31 + 32.....	155 6 55,859	56	110
		29 + 30 + 31 + 32	219 0 28,326	20	111
		28 + 29 + 30.....	105 59 8,526	12	112
		29 + 30.....	63 53 29,466	146	104
Espadan..	33	Arès — Desierto	41 34 55,657	104	123
	34	Desierto — Montgo	99 50 11,039	72	125
	35	Montgo — Cullera	11 54 54,964	34	128
		34 + 35.....	111 45 6,649	66	127
		33 + 34 + 35.....	153 20 5,366	46	129
Cullera...	36	Espadan — Desierto	21 12 46,838	100	137
	37	Desierto — Montgo	128 3 19,955	60	139
		36 + 37.....	149 16 10,321	44	140
Montgo...	38	Cullera — Espadan	18 49 3,810	20	146
	39	Espadan — Desierto	16 16 31,427	100	149
	40	Desierto — Campvey	78 4 10,088	64	157
	41	Campvey — Mola	21 58 42,544	50	153
		38 + 39.....	35 5 33,569	30	145
		40 + 41.....	100 2 53,769	20	154
		38 + 39 + 40 + 41	135 8 27,120	32	156
Campvey..	42	Mola — Montgo	95 28 18,337	50	167
	43	Montgo — Desierto	59 50 53,916	74	165
		42 + 43.....	155 19 12,447	20	168
Mola.....	44	Montgo — Campvey	62 33 12,898	80	177

## 2.

Ich habe zuerst die auf den einzelnen Beobachtungspunkten beobachteten Winkel und ihre Summen untereinander ausgeglichen. Die dazu angewandten Formeln findet man in meinem Buche über die Gradmessung in Ostpreußen S. 71. Be-

zeichnet man die Verbesserungen, welche den so ausgeglichenen Winkeln, oder wenn keine Summen beobachtet wurden, den im vorigen § angegebenen, noch hinzuzusetzen sind durch (1), (2), (3), u. s. w., so erhält man folgende Ausdrücke der Winkel und der a. a. O. S. 149 unter der Bezeichnung [1], [2], [3] u. s. w. eingeführten Größen:

1	54° 23' 39" 685 + (1)	[1] = 52 (1)
2	60 13 20,696 + (2)	[2] = 64 (2)
3	70 11 17,184 + (3)	[3] = 64 (3)
4	37 28 37,916 + (4)	[4] = 64 (4)
5	59 8 0,980 + (5)	[5] = 56 (5)
6	65 22 58,506 + (6)	[6] = 64 (6)
7	50 40 49,210 + (7)	[7] = 54 (7)
8	84 29 22,895 + (8)	[8] = 84 (8)
9	42 40 42,144 + (9)	[9] = 88 (9)
10	33 17 58,492 + (10)	[10] = 42 (10)
11	107 0 35,275 + (11)	[11] = 64 (11)
12	58 2 0,220 + (12)	[12] = 48 (12)
13	30 18 42,412 + (13)	[13] = 40 (13)
14	124 26 35,959 + (14)	[14] = 84 (14)
15	33 0 2,208 + (15)	[15] = 60 (15)
16	37 52 58,344 + (16)	[16] = 72 (16)
17	35 45 45,935 + (17)	[17] = 56 (17)
18	44 26 42,992 + (18)	[18] = 106 (18) + 60 (19)
19	53 33 19,106 + (19)	[19] = 60 (18) + 74 (19)
20	22 15 34,094 + (20)	[20] = 64 (20)
21	93 26 45,623 + (21)	[21] = 54 (21)
22	74 44 14,267 + (22)	[22] = 74 (22)
23	60 49 6,555 + (23)	[23] = 74 (23)
24	108 10 54,047 + (24)	[24] = 72 (24)
25	36 3 24,494 + (25)	[25] = 60 (25) + 20 (26)
26	88 17 45,212 + (26)	[26] = 20 (25) + 64 (26)
27	37 7 33,019 + (27)	[27] = 58 (27)
28	42 5 37,090 + (28)	[28] = 50 (28) + 12 (29) + 12 (30)
29	16 51 19,782 + (29)	[29] = 12 (28) + 190 (29) + 178 (30) + 20 (31) + 20 (32)
30	47 2 10,176 + (30)	[30] = 12 (28) + 178 (29) + 238 (30) + 20 (31) + 20 (32)
31	101 17 34,421 + (31)	[31] = ——— + 20 (29) + 20 (30) + 294 (31) + 76 (32)
32	53 49 21,764 + (32)	[32] = ——— + 20 (29) + 20 (30) + 76 (31) + 116 (32)
33	41 34 56,386 + (33)	[33] = 150 (33) + 46 (34) + 46 (35)
34	99 50 11,465 + (34)	[34] = 46 (33) + 184 (34) + 112 (35)
35	11 54 55,867 + (35)	[35] = 46 (33) + 112 (34) + 146 (35)
36	21 12 47,552 + (36)	[36] = 144 (36) + 44 (37)
37	128 3 21,145 + (37)	[37] = 44 (36) + 104 (37)
38	18 49 2,880 + (38)	[38] = 82 (38) + 62 (39) + 32 (40) + 32 (41)
39	16 16 31,241 + (39)	[39] = 62 (38) + 162 (39) + 32 (40) + 32 (41)
40	78 4 10,277 + (40)	[40] = 32 (38) + 32 (39) + 116 (40) + 52 (41)
41	21 58 42,786 + (41)	[41] = 32 (38) + 32 (39) + 52 (40) + 102 (41)
42	95 28 18,383 + (42)	[42] = 70 (42) + 20 (43)
43	59 50 53,947 + (43)	[43] = 20 (42) + 94 (43)
44	62 33 12,898 + (44)	[44] = 80 (44)

## 3.

Nachdem hierdurch die 13 Bedingungen erfüllt sind, welche durch eben so viele Beobachtungen von Summen mehrerer einzelnen Winkel gegeben wurden, werde ich die noch zu erfüllenden aufsuchen. Da das Dreiecksnetz 16 Punkte enthält, von welchen zwei willkürlich angenommen werden können, so sind 14 Punkte, also die 28 Größen, wovon ihre Lage abhängt,

zu bestimmen: unter den 44 Winkeln des Netzes sind daher 44 — 28 = 16 durch die übrigen bedingt, oder es müssen noch 16 Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Man sieht sehr leicht aus der Figur des Dreiecksnetzes in dem Werke der Herren *Biot* und *Arago*, daß 15 von diesen Gleichungen durch die Forderung gegeben werden, daß die Summe der drei Winkel in 15 Dreiecken den Werth erhalte, welchen sie,

dem Flächeninhalte jedes Dreiecks nach, haben muß, die 16<sup>te</sup> geht aus der Forderung hervor, daß die Richtungslinien von 3 Punkten des Vierecks *Desierto — Espadan — Cullera — Montgo* nach dem 4<sup>ten</sup>, sich in Einem Punkte durchschneiden müssen \*).

Legt man ein ebenes Dreieck, dessen Seiten  $a, b, c$  die Winkel  $A', B', C'$  gegenüberstehen, auf eine Kugeloberfläche vom Halbmesser  $r$ , so daß seine Seiten größte Kreise werden, und bezeichnet man die ihnen dann gegenüberstehenden Winkel durch  $A, B, C$ , so wie auch seinen doppelten Flächeninhalt in seinem ersten Zustande, oder

$$ab \sin C' = bc \sin A' = ca \sin B'$$

durch  $n$ , so hat man bekanntlich

$$A - A' = \frac{n}{6rr} \left\{ 1 + \frac{aa + 7bb + 7cc}{120rr} \right\}$$

$$B - B' = \frac{n}{6rr} \left\{ 1 + \frac{7aa + bb + 7cc}{120rr} \right\}$$

$$C - C' = \frac{n}{6rr} \left\{ 1 + \frac{7aa + 7bb + cc}{120rr} \right\}$$

also den *sphärischen Excess* des Dreiecks:

$$\epsilon = A + B + C - 180^\circ = \frac{n}{2rr} \left\{ 1 + \frac{aa + bb + cc}{24rr} \right\}.$$

Nach diesen Formeln, oder anderen daraus abgeleiteten, durch welche die frühere *Legendresche* Formel bis zu der zweiten Ordnung von  $a$  incl. entwickelt wird \*\*), habe ich jetzt die Summe der Winkel jedes der 15 Dreiecke und später auch das ganze Netz berechnet. Die dazu erforderliche genäherte Kenntniss der Dreiecksseiten habe ich durch eine vorläufige, nur die Ausgleichung der Summe der drei Winkel jedes Dreiecks voraussetzende Berechnung des Netzes erlangt, indem ich die Seite *Montserrat — Matas*, so wie sie *Base d. S. Mètr.* II p. 837 angegeben ist = 20297<sup>7</sup>8690, und für  $r$  den Aequatorealhalbmesser der Erde, nach der Bestimmung *Astr. Nachr.* Nr. 333 = 3271953<sup>7</sup>854, angenommen habe. Der letzteren Annahme entspricht

$$\log \frac{206264^{\prime\prime}8}{2rr} = 1,9837808 - 10.$$

Ich werde die auf diese Art berechneten sphärischen Excesse der 15 Dreiecke und die aus den Zahlen des vorigen §'s hervorgehenden Ausdrücke der Summen ihrer drei Winkel mittheilen:

			$\epsilon$	Summe der 3 Winkel.
I	Matas	— Montserrat — Morella	3 <sup>7</sup> 081	179° 59' 58 <sup>8</sup> 887 + (1) + (2) + (6)
II	Montserrat	— Morella — Montagut	3,314	180 0 7,374 + (3) + (5) + (7)
III	Morella	— Montagut — St. Jean	3,352	1,031 + (4) + (8) + (12)
IV	Montagut	— St. Jean — Lleberia	3,102	179 59 59,831 + (9) + (11) + (13)
V	St. Jean	— Lleberia — Montsia	5,207	180 0 8,545 + (10) + (14) + (20)
VI	Lleberia	— Bosch — Montsia	4,017	6,937 + (15) + (19) + (21)
VII	Bosch	— Montsia — Tosal	2,108	3,814 + (18) + (22) + (23)
VIII	Montsia	— Tosal — Arès	3,138	4,476 + (17) + (24) + (25)
IX	Montsia	— Arès — Desierto	6,5905	5,320 + (16) + (26) + (32)
X	Arès	— Desierto — Espadan	4,473	3,826 + (27) + (31) + (33)
XI	Desierto	— Espadan — Cullera	7,792	5,060 + (30) + (34) + (35) + (36)
XII	Espadan	— Cullera — Montgo	5,550	7,444 + (35) + (36) + (37) + (38)
XIII	Desierto	— Cullera — Montgo	10,854	15,048 + (29) + (37) + (38) + (39)
XV	Desierto	— Montgo — Campvey	38,895	41,314 + (28) + (40) + (43)
XVI	Montgo	— Campvey — Mola	12,936	14,067 + (41) + (42) + (44)

Diese Dreiecke und ihre Numerirung sind dieselben, welche man in dem *Recueil d'Observations etc.* p. 179—182 zusammengestellt findet. Dort findet sich noch ein Dreieck XIV: *Desierto — Espadan — Montgo*, welches hier aber wegleiben muß, weil es aus XI, XII und XIII folgt, nämlich  $XI + XIII = XII + XIV$ . Daß die a. a. O. p. 181 angegebenen sphärischen Excesse der vier Dreiecke, dieser Bedingung nicht genau, sondern nur bis auf 0<sup>0</sup>006 entsprechen,

ist eine (unbedeutende) Unvollkommenheit ihrer Berechnung; daß ihr die von den Herren *Biot* und *Arago* angenommenen Werthe der beobachteten Winkel weit näher entsprechen, als die von der früheren Commission angenommenen, zeigt, daß die ersteren erfolgreicher ausgeglichen sind. Die durch die Summen der Winkel der 15 Dreiecke gegebenen Bedingungen sind, den angeführten Zahlen gemäß:

\*) Vergl. Gradmessung in Ostpreußen S. 139.

\*\*) Ich glaube, daß die Ehre dieser weiteren Entwicklung *Buzengeiger* gebührt. Seine Abhandlung darüber findet man in *Lindenau und Bohnenbergers Zeitschrift für Astronomie* Band VI. S. 264. Tübingen 1818.

I	$0 = -4''194 + (1) + (2) + (6)$
II	$0 = +4,060 + (3) + (5) + (7)$
III	$0 = -2,321 + (4) + (8) + (12)$
IV	$0 = -3,271 + (9) + (11) + (13)$
V	$0 = +3,338 + (10) + (14) + (20)$
VI	$0 = +2,920 + (15) + (19) + (21)$
VII	$0 = +1,706 + (18) + (22) + (23)$
VIII	$0 = +1,338 + (17) + (24) + (25)$
IX	$0 = -1,2705 + (16) + (26) + (32)$
X	$0 = -0,647 + (27) + (31) + (33)$
XI	$0 = -2,732 + (30) + (34) + (35) + (36)$
XII	$0 = +1,894 + (35) + (36) + (37) + (38)$
XIII	$0 = +4,194 + (29) + (37) + (38) + (39)$
XV	$0 = +2,419 + (28) + (42) + (43)$
XVI	$0 = +1,131 + (41) + (42) + (44)$

Die 16<sup>te</sup>, durch das Viereck Desierto — *Espadan* — *Cullera* — *Montgo* gegebene Bedingung ist

$$1 = \frac{\sin DEC \cdot \sin DCM \cdot \sin EMD}{\sin ECD \cdot \sin CMD \cdot \sin DEM}$$

und wenn man die darin vorkommenden Winkel aus § 2 nimmt, oder

$$\begin{aligned} DEC &= 111^{\circ}45' 7'332 + (34) + (35) \\ DCM &= 128 \quad 3 \quad 21,145 + (37) \\ EMD &= 16 \quad 16 \quad 31,241 + (39) \\ ECD &= 21 \quad 12 \quad 47,552 + (36) \\ CMD &= 35 \quad 5 \quad 34,121 + (38) + (39) \\ DEM &= 99 \quad 50 \quad 11,465 + (34) \end{aligned}$$

setzt und die unbekannten Größen (34), (35), u. s. w. durch die Differenzen der Logarithmen der Sinus der Winkel in Rechnung bringt \*),

$$0 = +56,4 + 4,751(34) + 8,401(35) + 54,248(36) + 16,482(37) + 29,968(38) - 42,158(39)$$

welcher Gleichung ich die oben fehlende Zahl XIV geben werde.

#### 4.

Aus den nun vollständig bekannten Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes folgen \*\*) die Ausdrücke der im 2<sup>ten</sup> § durch [1], [2], [3], u. s. w. bezeichneten Größen durch I, II, III u. s. w., oder wenn man statt der ersteren ihre Ausdrücke durch (1), (2), (3) u. s. w. (§ 2) schreibt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 52(1) &= \text{I} \\ 64(2) &= \text{I} \\ 64(3) &= \text{II} \\ 64(4) &= \text{III} \\ 56(5) &= \text{II} \\ 64(6) &= \text{I} \\ 54(7) &= \text{II} \\ 84(8) &= \text{III} \\ 88(9) &= \text{IV} \\ 42(10) &= \text{V} \\ 64(11) &= \text{IV} \\ 48(12) &= \text{III} \\ 40(13) &= \text{IV} \\ 84(14) &= \text{V} \\ 60(15) &= \text{VI} \\ 72(16) &= \text{IX} \\ 56(17) &= \text{VIII} \\ 106(18) + 60(19) &= \text{VII} \\ 60(18) + 74(19) &= \text{VI} \\ 64(20) &= \text{V} \\ 54(21) &= \text{VI} \\ 74(22) &= \text{VII} \\ 74(23) &= \text{VII} \\ 72(24) &= \text{VIII} \\ 60(25) + 20(26) &= \text{VIII} \\ 20(25) + 64(26) &= \text{IX} \\ 58(27) &= \text{X} \\ 50(28) + 12(29) + 12(30) &= \text{XV} \\ 12(28) + 190(29) + 178(30) + 20(31) + 20(32) &= \text{XIII} \\ 12(28) + 178(29) + 238(30) + 20(31) + 20(32) &= \text{XI} \\ 20(29) + 20(30) + 294(31) + 76(32) &= \text{X} \\ 20(29) + 20(30) + 76(31) + 116(32) &= \text{IX} \\ 150(33) + 46(34) + 46(35) &= \text{X} \\ 46(33) + 184(34) + 112(35) &= \text{XI} + 4,751 \text{ XIV} \\ 46(33) + 112(34) + 146(35) &= \text{XI} + \text{XII} + 8,401 \text{ XIV} \end{aligned}$$

\*) Gradmessung in Ostpreußen S. 140 etc.

\*\*) A. a. O. S. 149.

$$\begin{aligned}
144(36) + 44(37) &= \text{XI} + \text{XII} + 54,248 \text{ XIV} \\
44(36) + 104(37) &= \text{XII} + \text{XIII} + 16,482 \text{ XIV} \\
82(38) + 62(39) + 32(40) + 32(41) &= \text{XII} + \text{XIII} + 29,968 \text{ XIV} \\
62(38) + 162(39) + 32(40) + 32(41) &= \text{XIII} - 42,158 \text{ XIV} \\
32(38) + 32(39) + 116(40) + 52(41) &= \text{XV} \\
32(38) + 32(39) + 52(40) + 102(41) &= \text{XVI} \\
70(42) + 20(43) &= \text{XVI} \\
20(42) + 94(43) &= \text{XV} \\
80(44) &= \text{XVI}
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt die Ausdrücke von (1), (2), (3) u. s. w. durch I, II, III u. s. w.

$$\begin{aligned}
(1) &= 0,019231. \text{I} \\
(2) &= 0,015625. \text{I} \\
(3) &= 0,015625. \text{II} \\
(4) &= 0,015625. \text{III} \\
(5) &= 0,017857. \text{II} \\
(6) &= 0,015625. \text{I} \\
(7) &= 0,018519. \text{II} \\
(8) &= 0,011905. \text{III} \\
(9) &= 0,011364. \text{IV} \\
(10) &= 0,023810. \text{V} \\
(11) &= 0,015625. \text{IV} \\
(12) &= 0,020833. \text{III} \\
(13) &= 0,025000. \text{IV} \\
(14) &= 0,011905. \text{V} \\
(15) &= 0,016667. \text{VI} \\
(16) &= 0,013889. \text{IX} \\
(17) &= 0,017857. \text{VIII} \\
(18) &= -0,014137. \text{VI} + 0,017463. \text{VII} \\
(19) &= +0,024976. \text{VI} - 0,014137. \text{VII} \\
(20) &= 0,015625. \text{V} \\
(21) &= 0,018519. \text{VI} \\
(22) &= 0,013513. \text{VII} \\
(23) &= 0,013513. \text{VII} \\
(24) &= 0,013889. \text{VIII} \\
(25) &= 0,018605. \text{VIII} - 0,005814. \text{IX} \\
(26) &= -0,005814. \text{VIII} + 0,017442. \text{IX} \\
(27) &= 0,017241. \text{X} \\
(28) &= +0,000204. \text{IX} + 0,000037. \text{X} - 0,000220. \text{XI} - 0,001102. \text{XIII} + 0,020317. \text{XV} \\
(29) &= -0,000707. \text{IX} - 0,000130. \text{X} - 0,013124. \text{XI} + 0,017716. \text{XIII} - 0,001102. \text{XV} \\
(30) &= -0,000141. \text{IX} - 0,000026. \text{X} + 0,014043. \text{XI} - 0,013124. \text{XIII} - 0,000220. \text{XV} \\
(31) &= -0,002659. \text{IX} + 0,004099. \text{X} - 0,000026. \text{XI} - 0,000130. \text{XIII} + 0,000037. \text{XV} \\
(32) &= +0,010509. \text{IX} - 0,002659. \text{X} - 0,000141. \text{XI} - 0,000707. \text{XIII} + 0,000204. \text{XV} \\
(33) &= +0,007444. \text{X} - 6,002535. \text{XI} - 0,001722. \text{XII} - 0,018327. \text{XIV} \\
(34) &= -0,000813. \text{X} + 0,002651. \text{XI} - 0,007633. \text{XII} - 0,015265. \text{XIV} \\
(35) &= -0,001722. \text{X} + 0,005614. \text{XI} + 0,013247. \text{XII} + 0,075024. \text{XIV} \\
(36) &= +0,007975. \text{XI} + 0,004601. \text{XII} - 0,003374. \text{XIII} + 0,377026. \text{XIV} \\
(37) &= -0,003374. \text{XI} + 0,007669. \text{XII} + 0,011043. \text{XIII} - 0,001033. \text{XIV} \\
(38) &= +0,018875. \text{XII} + 0,012650. \text{XIII} + 0,828080. \text{XIV} - 0,002217. \text{XV} - 0,002838. \text{XVI} \\
(39) &= -0,006225. \text{XII} + 0,002530. \text{XIII} - 0,555644. \text{XIV} - 0,000443. \text{XV} - 0,000568. \text{XVI} \\
(40) &= -0,002217. \text{XII} + 0,002660. \text{XIII} - 0,047746. \text{XIV} + 0,011641. \text{XV} - 0,005100. \text{XVI} \\
(41) &= -0,002838. \text{XII} - 0,003406. \text{XIII} - 0,061120. \text{XIV} - 0,005100. \text{XV} + 0,013472. \text{XVI} \\
(42) &= -0,003236. \text{XV} + 0,015210. \text{XVI} \\
(43) &= +0,011327. \text{XV} - 0,003236. \text{XVI} \\
(44) &= +0,012500. \text{XVI}.
\end{aligned}$$

## 5.

Wenn man diese Ausdrücke von (1), (2), (3) u. s. w. in den 16 Bedingungsgleichungen § 3 substituirt, so erlangt man die, die Größen I, II, III u. s. w. bestimmenden Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned}
0 &= -4,194 + 0,050481 \text{ I} \\
0 &= +4,060 + 0,052001 \text{ II} \\
0 &= -2,821 + 0,048363 \text{ III} \\
0 &= -3,271 + 0,051989 \text{ IV} \\
0 &= +3,338 + 0,051340 \text{ V} \\
0 &= +2,920 + 0,060162 \text{ VI} - 0,014137 \text{ VII} \\
0 &= +1,706 - 0,014137 \text{ VI} + 0,044462 \text{ VII} \\
0 &= +1,338 + 0,050351 \text{ VIII} - 0,005814 \text{ IX} \\
0 &= -1,2705 - 0,005814 \text{ VIII} + 0,041840 \text{ IX} - 0,002659 \text{ X} - 0,000141 \text{ XI} - 0,000707 \text{ XIII} + 0,000704 \text{ XV} \\
0 &= -0,647 - 1,002659 \text{ IX} + 0,028784 \text{ X} - 0,002561 \text{ XI} - 0,001722 \text{ XII} - 0,000130 \text{ XIII} - 0,01833 \text{ XIV} + 0,000037 \text{ XV} \\
0 &= -2,732 - 0,000141 \text{ IX} - 0,002561 \text{ X} + 0,030283 \text{ XI} + 0,010215 \text{ XII} - 0,016498 \text{ XIII} + 0,43678 \text{ XIV} - 0,000220 \text{ XV} \\
0 &= +1,894 - 0,001722 \text{ X} + 0,010215 \text{ XI} + 0,044392 \text{ XII} + 0,020319 \text{ XIII} + 1,27909 \text{ XIV} - 0,002217 \text{ XV} - 0,002838 \text{ XVI} \\
0 &= +4,194 - 0,000707 \text{ IX} - 0,000130 \text{ X} - 0,016498 \text{ XI} + 0,020319 \text{ XII} + 0,043939 \text{ XIII} + 0,27141 \text{ XIV} - 0,003762 \text{ XV} - 0,003406 \text{ XVI} \\
0 &= +56,4 - 0,01833 \text{ X} + 0,43678 \text{ XI} + 1,27909 \text{ XII} + 0,27141 \text{ XIII} + 69,2342 \text{ XIV} - 0,04775 \text{ XV} - 0,06112 \text{ XVI} \\
0 &= +2,419 + 0,000204 \text{ IX} + 0,000037 \text{ X} - 0,000220 \text{ XI} - 0,02217 \text{ XII} - 0,003762 \text{ XIII} - 0,04775 \text{ XIV} + 0,043285 \text{ XV} - 0,008336 \text{ XVI} \\
0 &= +1,131 - 0,002838 \text{ XII} - 0,003406 \text{ XIII} - 0,06112 \text{ XIV} - 0,08336 \text{ XV} + 0,041182 \text{ XVI}.
\end{aligned}$$

Ihre Auflösung ergibt

log I	= 1,91950
— II	= 1,89252 <sub>n</sub>
— III	= 1,68116
— IV	= 1,79877
— V	= 1,81303 <sub>n</sub>
— VI	= 1,79378 <sub>n</sub>
— VII	= 1,76453 <sub>n</sub>
— VIII	= 1,36724 <sub>n</sub>
— IX	= 1,45341
— X	= 1,47982
— XI	= 1,83297
— XII	= 0,14864 <sub>n</sub>
— XIII	= 1,86025 <sub>n</sub>
— XIV	= 0,00863 <sub>n</sub>
— XV	= 1,86206 <sub>n</sub>
— XVI	= 1,69725 <sub>n</sub>

## 6.

Man erhält endlich die Größen (1), (2), (3) u. s. w. und damit die völlig ausgeglichenen Winkel des Dreiecksnetzes, wenn man die eben gefundenen Werthe von I, II, III u. s. w. in ihren Ausdrücken (§ 4) substituirt.

(1)	+ 1" 5977	Winkel 1	= 54° 23' 41" 2827
(2)	+ 1,2981	— 2	= 60 13 21,9941
(3)	— 1,2199	— 3	= 70 11 15,9641
(4)	+ 0,7499	— 4	= 37 28 38,6659
(5)	— 1,3942	— 5	= 59 7 59,5858
(6)	+ 1,2981	— 6	= 65 22 59,8041
(7)	— 1,4459	— 7	= 50 40 47,7641
(8)	+ 0,5713	— 8	= 84 29 23,4663
(9)	+ 0,7150	— 9	= 42 40 42,8590
(10)	— 1,5480	— 10	= 33 17 56,9440
(11)	+ 0,9831	— 11	= 107 0 36,2581
(12)	+ 0,9998	— 12	= 58 2 1,2198
(13)	+ 1,5729	— 13	= 30 18 43,9849
(14)	— 0,7740	— 14	= 124 26 35,1850
(15)	— 1,0367	— 15	= 33 0 1,1713
(16)	+ 0,3945	— 16	= 37 52 58,7385
(17)	— 0,4160	— 17	= 35 45 45,5190
(18)	— 0,1345	— 18	= 44 26 42,8575
(19)	— 0,7314	— 19	= 53 33 18,3746

(20)	— 1,0159	Winkel 20	= 22 15' 33" 0781
(21)	— 1,1518	— 21	= 93 26 44,4712
(22)	— 0,7858	— 22	= 74 44 13,4812
(23)	— 0,7858	— 23	= 60 49 5,7692
(24)	— 0,3235	— 24	= 108 10 53,7235
(25)	— 0,5985	— 25	= 36 3 23,8955
(26)	+ 0,6309	— 26	= 88 17 45,8429
(27)	+ 0,5205	— 27	= 37 7 33,5395
(28)	— 1,4071	— 28	= 42 5 35,6829
(29)	— 2,1213	— 29	= 16 51 17,6607
(30)	+ 1,9184	— 30	= 47 2 12,0944
(31)	+ 0,0531	— 31	= 101 17 34,4741
(32)	+ 0,2450	— 32	= 53 49 22,0090
(33)	+ 0,0733	— 33	= 41 34 56,4593
(34)	+ 0,1823	— 34	= 99 50 11,6473
(35)	+ 0,2350	— 35	= 11 54 56,1020
(36)	+ 0,3964	— 36	= 21 12 47,9484
(37)	— 1,0399	— 37	= 128 3 20,1051
(38)	— 1,4855	— 38	= 18 49 1,3945
(39)	+ 0,4527	— 39	= 16 16 31,6937
(40)	— 0,3486	— 40	= 78 4 9,9284
(41)	+ 0,0134	— 41	= 21 58 42,7994
(42)	— 0,5220	— 42	= 95 28 17,8610
(43)	— 0,6633	— 43	= 59 50 53,2837
(44)	— 0,6225	— 44	= 62 33 12,2755

## 7.

Nach Erlangung dieser, sämmtliche, die Winkelbeobachtungen der Herren *Biot* und *Arago* untereinander verbindenden Bedingungen erfüllenden Ausgleichung, hat die Berechnung des Dreiecksnetzes kein Hinderniß mehr. Ich werde hier die Logarithmen sämmtlicher Seiten dieses Netzes anführen, auch einer jeden die ihr gegenüberstehenden Winkel beischreiben. Die erste Seite *Matas — Montserrat* ist dem Dreiecksnetze des Herrn *Mechain* und dem der Herren *Biot* und *Arago* gemeinschaftlich, und ihr Werth ist aus *Base du Syst. Mètr.* II. p. 836 u. 837 entlehnt.

	Log. Entfer- nung.	Gegenüberst. Winkel.
Matas — Montserrat	4,3074504.5	6
— Morella	4,2873327.6	2
Montserrat — Morella	4,2589474.1	1 u. 7
— Montagut	4,3040919.0	5
Morella — Montagut	4,3439229.2	3 u. 12
— St. Jean	4,4133328.6	8
Montagut — St. Jean	4,1995653.1	4 u. 13
— Lleberia	4,4770992.7	11
St. Jean — Lleberia	4,3276791.5	9 u. 20
— Montsia	4,6655737.9	14
Lleberia — Montsia	4,4888565.4	10 u. 21
— Bosch	4,3951275.8	19
Montsia — Bosch	4,2257504.1	15 u. 23
— Tosal	4,2691028.6	22 u. 25
— Arès	4,4770543.3	24 u. 32
— Desierto	4,5698870.0	26
Bosch — Tosal	4,1299358.8	18
Tosal — Arès	4,2660254.4	17
Arès — Desierto	4,3582775.6	16 u. 33
— Espadan	4,5278217.5	31
Desierto — Espadan	4,3170352.4	27, 36 u. 39
— Cullera	4,7264535.6	34+35u.38+39
— Montgo	4,8630818.3	34, 37 u. 43
— Campvey	4,9167438.4	40
Espadan — Montgo	4,8227661.3	29+30u.36+37
— Cullera	4,6229127.7	30 u. 38
Montgo — Cullera	4,4291697.7	29 u. 35
— Campvey	4,7524980.5	28 u. 44
— Mola	4,8023808.35	42
Campvey — Mola	4,3775137.2	41

8.

Jetzt kann auch der letzte Zweck des geodätischen Theils der Fortsetzung der französischen Gradmessung von *Matas* bis *Mola* erreicht, nämlich die Entfernung dieser beiden Punkte und die Richtung der, beide miteinander verbindenden Linie auf der Oberfläche der Erde, bestimmt werden.

Ich werde zwei, von dem einen zum anderen dieser Punkte führende Reihen von Dreiecksseiten und die Winkel zwischen jedem aufeinanderfolgenden Paare derselben hiehersetzen, beide so wie sie aus den Angaben der beiden vorigen §§ hervorgehen.

	Log. Entfer- nung.	Entfernung.	Innere Winkel.
Matas — Morella	4,2873327.6	19379 <sup>1</sup> 062	198° 0' 21" 9442
Morella — St. Jean	4,4133328.6	25901,974	161 39 25,5781
St. Jean — Montsia	4,6655737.9	46299,232	166 5 41,4323
Montsia — Desierto	4,5698870.0	37143,857	98 53 58,0789
Desierto — Campvey	4,9167438.4	82555,087	204 40 48,5553
Campvey — Mola	4,3775137.2	23851,391	
Mola — Montgo	4,8023808.35	63442,579	116 19 24,4215
Montgo — Espadan	4,8227661.3	66491,500	141 25 8,1066
Espadan — Arès	4,5278217.5	33714,890	125 25 19,3824
Arès — Montsia	4,4770543.3	29995,377	226 14 13,2489
Montsia — Lleberia	4,4888565.4	30821,697	154 45 19,1699
Lleberia — Montagut	4,4770992.7	29998,481	177 50 54,0894
Montagut — Montserrat	4,3040919.0	20141,504	130 24 37,9582
Montserrat — Matas	4,3074504.5	20297,869	

Die Rechnung ist nach der Methode geführt, welche ich in den Astr. Nachr. Nr. 3 zuerst gegeben, auch in meinem Buche über die Gradmessung in Ostpreußen S. 253 angewandt habe. Die erste Reihe von Dreiecksseiten hat mir ergeben:

Entfern.: *Matas* — *Mola* = 165108<sup>5</sup>586 Log = 5,2177696.58

Winkel: *Morella* — *Matas* — *Mola* = 319° 59' 51" 21

— *Campvey* — *Mola* — *Matas* = 30 41 47,67

Die zweite Reihe hat Herr *Schlüter* berechnet und dadurch erhalten:

Entfern. *Mola* — *Matas* = 165108<sup>5</sup>586 Log. = 5,2177696.59

Winkel: *Montgo* — *Mola* — *Matas* = 93° 14' 59" 964

— *Mola* — *Matas* — *Montserrat* = 94 23 50,041

oder, wenn die Winkel, wie in der ersten Reihe, resp. von *Campvey* und *Morella* aufgezählt werden:

Winkel: *Campvey* — *Mola* — *Matas* = 30° 41' 47" 689

— *Morella* — *Mola* — *Matas* = 219 59 51,242.

Die Uebereinstimmung der aus beiden Rechnungen hervorgehenden Entfernung ist vollständig, während der unbedeutende Unterschied von resp. 0"03 und 0"02 in den Richtungen der Verbindungslinie an beiden Endpunkten, vermuthlich aus der Annahme der Dreiecke als sphärische, während sie wirklich sphäroidische sind, entsteht. Da beide Reihen so gewählt sind, daß sie keine Dreiecksseite miteinander gemein haben, so gewährt ein übereinstimmendes Endresultat beider eine Bestätigung der Richtigkeit der Berechnung der Dreiecksseiten (§7). Indessen ist die ganze Rechnung aufmerksam geführt, so wie auch in verschiedenen ihrer Theile, von Herrn *Schlüter* wiederholt, so daß ein außer den Grenzen der Annäherung der angewandten Logarithmen liegender Fehler nicht wahrscheinlich ist.

9.

Es ist nur noch erforderlich aus der gegenseitigen Lage der beiden Endpunkte der Messung die Entfernung ihrer Parallelen abzuleiten. An dem nördlichen Endpunkte *Matas* ist die Richtung des Meridians nicht bestimmt worden, wohl aber an dem wenig davon entfernten *Montjoy*, wo auch die Polhöhe beobachtet ist. An dem südlicheren Endpunkte *Mola* ist eine lange Reihe von Beobachtungen mit einem Mittagsfernrohre gemacht worden, deren Zweck die genaueste Bestimmung des Azimutis eines Meridianzeichens war, zwischen welchem und dem Dreieckspunkte *Campvey* der Winkel sorgfältig gemessen ist. Dieses geht aus einer Stelle des Werkes der Herren *Biot* und *Arago* (S. 244) hervor; allein obgleich die Beobachtungen am Mittagsfernrohre in ihrer ganzen Ausdehnung mitgetheilt worden sind, so findet man den Winkel zwischen dem Zeichen, auf welches sie sich beziehen und *Campvey*, nirgends angegeben, so daß, bis zu der Bekanntmachung dieser Angabe, auch kein Nutzen aus jenen Beobachtungen gezogen werden kann.



Man muß also die Richtung der Linie *Matas* — *Mola* gegen den Meridian, vorläufig durch das in *Montjoux* beobachtete Azimuth von *Matas* bestimmen. Dieses Azimuth ist von *Méchain* beobachtet worden und wird im II Bande der *Base du Syst. Mètr.* p. 138 =  $27^{\circ} 39' 52'' 1$  angegeben, von *Delambre* aber (p. 149) in  $27^{\circ} 39' 51'' 4$  verändert. Die Polhöhe von *Montjoux* ist =  $41^{\circ} 21' 44'' 96$  (II. p. 557 — 563 und III. P. 89). Die Entfernung von *Montjoux* — *Matas* ist = 936778206 (II. P. 839).

Wenn man die Figur der Erde so annimmt, wie sie *Astr. Nachr.* Nr. 333 bestimmt worden ist, nämlich:

Log. der halben kleinen Axe = 6.5133605.073

Log. der Excentricität = 8.9110835,

so erhält man durch die Formeln und Tafeln in Nr. 86 der *Astr. Nachr.*, die Polhöhe von *Matas* =  $41^{\circ} 30' 29'' 040$  und das daselbst stattfindende Azimuth von *Montjoux* =  $207^{\circ} 43' 53'' 346$ . Der Winkel *Montjoux* — *Matas* — *Montserrat* findet sich (II. p. 483 u. 484) sowohl mittelbar als durch zwei andere Winkel, deren Summe er ist, beobachtet; nach gehöriger Ausgleichung =  $78^{\circ} 5' 58'' 43$ . Setzt man ihn zu dem Azimuthe von *Montjoux* hinzu, so erhält man das Azimuth von *Montserrat* =  $285^{\circ} 49' 51'' 78$ . Zwischen diesem Punkte und *Mola* ist der Winkel im vorigen §,  $319^{\circ} 59' 51'' 21 - 54^{\circ} 23' 41'' 28 = 265^{\circ} 36' 9'' 93$  bestimmt worden, woraus, verbunden mit dem Azimuthe von *Montserrat*, das Azimuth von *Mola* =  $191^{\circ} 26' 1'' 71$  folgt.

Ich habe in dem Buche über die Gradmessung in Ostpreußen § 90 eine einfache Formel bekannt gemacht, welche die Entfernung der Parallelen zweier Punkte, durch die Entfernung der Punkte selbst und die Azimuthe der sie verbindenden geodätischen Linie an beiden, ausdrückt. Da hier das Azimuth in *Mola* fehlt, so muß man es, falls man diese Formel anwenden will, aus dem Azimuthe in *Matas*, verbunden mit den Polhöhen beider Punkte, nämlich  $41^{\circ} 30' 29'' 040$  und  $38^{\circ} 39' 56'' 11$ , unter der Annahme der schon angeführten Excentricität der Erdmeridiane, ableiten. Ich finde es =  $10^{\circ} 57' 42'' 94$ .

Wenn  $s$  die Entfernung der beiden Punkte,  $S$  die ihrer Parallelen,  $\alpha$  und  $\alpha' + 180^{\circ}$  die Azimuthe an beiden Punkten,  $\varphi$  und  $\varphi'$  die Polhöhen bedeuten und

$$\tan u = \tan \varphi \sqrt{1 - ee}, \quad \tan u' = \tan \varphi' \sqrt{1 - ee}$$

$$\rho' \rho = 1 + ee \cos(u' + u)$$

gesetzt werden, so ist die erwähnte Formel:

$$S = s \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{s \rho'}{\alpha} \right)^2 \frac{\sin \alpha' \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2} + \text{etc} \right\}.$$

Wendet man sie an, um die Entfernungen der Parallelen, sowohl von *Matas* und *Mola*, als auch von *Matas* und *Montjoux* zu suchen, so hat man, den Angaben des gegenwärtigen §s zufolge:

19r Bd.

	Mola.	Montjoux.
$s$ .....	1651087586	936778206
$\alpha$ .....	$191^{\circ} 26' 1'' 71$	$207^{\circ} 43' 53'' 35$
$\alpha'$ .....	190 57 42,94	207 39 51,40
1 <sup>tes</sup> Glied der Formel ...	1619667685	82947371
2 <sup>tes</sup> — .....	+ 1,297	+ 0,001
$S$ .....	161967,982	8294,372

Die Entfernung der Parallelen von *Montjoux* und *Mola* ist der Unterschied dieser beiden Entfernungen, also

$$= 1536737610.$$

Dieses Resultat kommt mit dem arithmetischen Mittel der vier, Anfangs angeführten, aus den neueren, in Paris gemachten Rechnungen hervorgegangenen Resultaten bis auf einen Bruch der Toise überein. Ich habe in der That nicht erwartet, daß die vollständige Ausgleichung der Winkelmessungen der Herren *Biot* und *Arago* einen sehr erheblichen Einfluss äußern würde; allein ob er nicht bis zu mehreren Toisen steigen würde, konnte man vor der Durchführung der Ausgleichung nicht wissen \*). Indessen bin ich der Meinung, daß die Erlangung des unzweideutigen Resultats einer geschlossenen, wichtigen Unternehmung, abgesehen von der Größe des Zweifels, welchen andere Resultate übriglassen, immer für die Mühe entschädigt, welche mit seiner Aufsuchung verbunden ist.

Die von mir gefundene Entfernung der Parallelen von *Montjoux* und *Mola* kann übrigens noch in der Folge Aenderungen erfahren. Von den Aenderungen, welche neue Beobachtungen veranlassen würden, ist hier offenbar nicht die Rede; aber wenn eine vollständige Ausgleichung der Winkel der nördlich von *Matas* liegenden Dreiecke der französischen Gradmessung, zu einem neuen, von dem angenommenen verschiedenen Werthe der Entfernung *Montserrat* — *Matas* führen, oder wenn das auf *Mola* beobachtete Azimuth bekannt werden sollte, so würden der jetzt herausgebrachten Entfernung der Parallelen von *Montjoux* und *Mola* Verbesserungen hinzuzusetzen sein, welche jedoch beide fast ohne Mühe gefunden werden können.

## 10.

Ich komme nun zu den Aenderungen, welche die in Nr. 333 bekanntgemachte Untersuchung der Figur und Größe der Erde, durch die Berichtigung eines Theils der französischen Gradmessung erfährt. Die S. 336 mitgetheilte Zusammenstellung der einzelnen Theile dieser Gradmessung wird jetzt in die folgende verändert:

\*) Berechnet man z. B. die Seite *Desierto* — *Montgo*, sowohl aus dem Dreiecke *Desierto* — *Espadan* — *Montgo*, als auch aus den beiden Dreiecken *Desierto* — *Espadan* — *Cullera* und *Desierto* — *Cullera* — *Montgo*, indem man die auf den einzelnen Dreieckspunkten ausgeglichenen Winkel (§ 2) nur noch zu der richtigen Summe der 3 Winkel jedes Dreiecks ausgleicht, so erhält man zwei, mehr als 4 Toisen voneinander verschiedene Werthe derselben.

## 4. Französische Gradmessung.

Formentera....	38° 39' 56" 11		
Montjouy.....	41 21 44,96	2° 41' 48" 85	153673 <sup>7</sup> 61
Barcelona.....	41 22 47,90	2 42 51,79	154616,74
Carcassonne...	43 12 54,30	4 32 58,19	259172,61
Evaux.....	46 10 42,54	7 30 46,43	428019,31
Panthéon.....	48 50 49,37	10 10 53,26	580312,41
Dünkirchen.....	51 2 8,85	12 22 12,74	705257,21

Die durch sie gegebenen Bedingungsgleichungen (S. 341 und 343)

werden:  $x_1^1 - x_4 = +3''991 + 0,9713p + 0,8601q$   
 $x_2^2 - x_4 = +0,646 + 0,9772p + 0,8642q$   
 $x_3^3 - x_4 = +0,026 + 1,6378p + 1,1889q$   
 $x_4^4 - x_4 = -5,035 + 2,7041p + 1,2671q$   
 $x_5^5 - x_4 = +7,191 + 3,6655p + 0,8659q$   
 $x_6^6 - x_4 = +5,171 + 4,4537p + 0,2051q$

Die ihnen entsprechenden Werthe von  $(m)$ ,  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(am)$ , u. s. w. (ebendaher) werden:

$(m) = +5,990$   $(am) = +18,3309$   $(bm) = -0,2661$   
 $(a) = 14,4096$   $(aa) = 45,1641$   $(bb) = 5,2976$   
 $(b) = 5,2513$   $(ab) = +11,1409$ .

Ihr Beitrag zu den beiden Gleichungen, welche  $p$  und  $q$  bestimmen, wird, statt des früheren (S. 343):

$\underbrace{4}_{(am)} + \underbrace{+6,0003}_{(aa)} + \underbrace{15,5021}_{(ab)} + \underbrace{+0,3313}_{(bm)} + \underbrace{-4,7597}_{(bb)} + \underbrace{+1,3583}_{(bb)}$

und diese beiden Gleichungen selbst verwandeln sich in:

$0 = +38,3095 + 47,6224p + 96,8905q$   
 $0 = +65,1841 + 96,8905p + 480,0274q$ .

Ihre Auflösung ergibt:

$p = -0,896192$ ; Gewicht = 28,067  
 $q = +0,045098$ ..... = 282,899.

Diese neuen Werthe von  $p$  und  $q$  ergeben eine veränderte Darstellung der Polhöhen, auf welchen die 10, der Untersuchung zum Grunde gelegten Gradmessungen beruhen; nämlich, statt der S. 348 mitgetheilten die folgende:

1. Peruanische Gradmessung.	Blenheim.....	+ 2"705
Tarqui.....	Arburyhill.....	+ 1,395
Cotchesqui.....	Clifton.....	- 3,679
2. 1 <sup>te</sup> Ostindische.	6. Hannovrische Gradmessung	
Trivandeporum.....	Göttingen.....	- 2,493
Paudree.....	Altona.....	+ 2,493
3. 2 <sup>te</sup> Ostindische.	7. Dänische.	
Punnae.....	Lauenburg.....	+ 0,451
Putchappolliam....	Lysabbel.....	- 0,451
Dodagoontah.....	8. Preussische.	
Namthabad.....	Trunz.....	- 0,907
Daumeragidda....	Königsberg.....	- 1,448
Takal K'hera.....	Memel.....	+ 2,355
Kullianpoor.....	9. Russische.	
4. Französische.	Belin.....	- 1,732
Formentera.....	Nemesch.....	- 2,384
Montjouy.....	Jacobstadt.....	+ 1,826
Barcelona.....	Bristen.....	+ 2,627
Carcassonne.....	Dorpat.....	- 1,044
Evaux.....	Hochland.....	+ 0,607
Panthéon.....	10. Schwedische.	
Dünkirchen.....	Malörn.....	+ 0,560
5. Englische.	Pahlawara.....	- 0,560
Dunnose.....		
Greenwich.....		

Die Summe der Quadrate dieser Aenderungen der Polhöhen ist = 181,221 und der mittlere Werth jeder derselben:

$$= \sqrt{\frac{181,221}{38-12}} = \pm 2''640$$

woraus, verbunden mit den Gewichten der Bestimmungen von  $p$  und  $q$ , die mittleren Fehler dieser Gröfsen

$$= +0,4982 \text{ und } = \pm 0,15697,$$

oder die mittleren Fehler von

$$i..... = \pm 0,00004982$$

$$k..... = \pm 0,015697$$

hervorgehen.

Die durch die Aenderung der französischen Gradmessung berichtigte Untersuchung ergibt also den Werth des mittleren Grades des Meridians =  $g$ , und die von der Abplattung der Erde abhängende Gröfse  $\alpha$  (S. 338):

$g = \frac{57008}{1 - 0,0000896192} = 57013''109$  M. Fehler.  
 $\pm 2''8403$

$\alpha = \frac{1 + 0,0045098}{400} = 0,0025112745 \pm 0,000039243.$

Aus dieser Bestimmung folgt, auf die in Nr. 333 angewandte Art:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0,0016741848$$

$a:b = 299,1528:298,1528$ ; m. F. =  $\pm 4,667$  Einh.

$a = 3272077''14$ ,  $\log a = 6,5148235.337$

$b = 3261139,33$ ,  $\log b = 6,5133693.539$

$\log e = 8,9122052$ ,  $\log \sqrt{1-ee} = 9,9985458.202$

und endlich die Länge des Erdquadranten

$= 5131179''81 = 10000855,76$ ; m. F. =  $\pm 498,23$ .

Man erhält hieraus folgende Ausdrücke:

1) die Länge eines Meridiangrades, dessen mittlere Polhöhe =  $\varphi$  ist:

$$57013''109 - 286''337 \cos 2\varphi + 0''611 \cos 4\varphi + 0''001 \cos 6\varphi;$$

2) die Länge eines Grades des Parallels

$$p = 57156''285 \cos \varphi - 47''825 \cos 3\varphi + 0''060 \cos 5\varphi;$$

oder, wenn  $\sin \psi = e \sin \varphi$  angenommen wird:

$$\log p = 4,7567009.0 + \log \cos \varphi - \log \cos \psi;$$

3) die Halbmesser der Krümmung im Meridian =  $r'$ , in der darauf senkrechten Richtung =  $r''$ , in dem Azimuthe  $\alpha = r$ :

$$\frac{\omega}{r'} = 0''06314417 + 0''00031714 \cos 2\varphi + 0''00000013 \cos 4\varphi$$

$$\frac{\omega}{r''} = 0,06293257 + 0,00010536 \cos 2\varphi - 0,00000004 \cos 4\varphi$$

oder  $\log \frac{\omega}{r'} = 8,8025099.6 + 3 \log \cos \psi$

$$\log \frac{\omega}{r''} = 8,7996016.0 + \log \cos \psi$$

und  $\frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha,$

wo  $\lambda = 0''06303837 + 0''00021125 \cos 2\varphi + 0''00000004 \cos 4\varphi$

$\lambda' = 0,00010580 + 0,00010589 \cos 2\varphi + 0,00000009 \cos 4\varphi$

4) Die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde =  $\rho$  und sogenannte verbesserte Breite =  $\varphi'$ :

$$\log \rho \cos \varphi' = \log \cos \varphi - \log \cos \psi$$

$$\log \rho \sin \varphi' = \log \sin \varphi - \log \cos \psi - 0,0029083.6.$$

\*) Nicht = 38 - 10, welche Zahl in Nr. 333 der Astr. Nachr. aus Versehen angewandt ist.

Bessel.