

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 44.

1. *Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien; von A. Sommerfeld.*

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

Die vorliegende Untersuchung, über deren Resultate ich schon auf der Dresdener Naturforscherversammlung¹⁾ berichtet habe, ist ein gekürzter Abdruck einer Abhandlung, die in der Festschrift zum 70. Geburtstag von Heinrich Weber veröffentlicht ist.²⁾ Den Anlaß zu ihrer Neubearbeitung bildete die nachfolgende Untersuchung von Hrn. L. Brillouin, der die hier benutzten Methoden (komplexe Integrationswege) erfolgreich weiter ausgebildet hat.

Wenn in der Überschrift von der Fortpflanzung des „Lichtes“ die Rede ist, so muß vorab betont werden, daß wir nicht von *natürlichem* (polarisiertem oder unpolarisiertem) Licht handeln werden, wie es durch *wirkliche* Lichtquellen unter Zuhilfenahme von *wirklichen* Polarisations- oder Dispersionsvorrichtungen erzeugt werden kann. Solches Licht besteht immer aus vielen, nur ihrer mittleren Intensität nach kontrollierbaren Wellenzügen. Demgegenüber werden wir einen genau definierten speziellen Schwingungsvorgang als auffallendes Licht zugrunde legen, bestehend aus einer regelmäßigen Folge unter sich gleicher Sinusschwingungen. Wäre derselbe beiderseits unbegrenzt, so würde eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich überhaupt nicht definieren lassen. Da das einzige Merkmal bei einer unbegrenzten Schwingungsfolge die jeweilige Phase ist, so könnten wir nur die Phase im auffallenden Licht der entsprechenden Phase in einer gewissen Tiefe des durchlaufenen Mittels zuordnen. Wir kommen dadurch zum Begriff der

1) Unter dem Titel: Ein Einwand gegen die Relativtheorie der Elektrodynamik und seine Beseitigung (Phys. Zeitschr. 8. p. 841. (1907) und Beiblätter 33. p. 413).

2) Leipzig 1912, bei B. G. Teubner.

Phasengeschwindigkeit, die für alle Interferenzfragen, also für die Mehrzahl der optischen Erscheinungen, in der Tat maßgebend ist. Was man gewöhnlich unter „Lichtgeschwindigkeit“ in einem optisch nicht-leeren Mittel versteht, Vakuumgeschwindigkeit c geteilt durch Brechungsindex μ , ist nichts anderes als diese Phasengeschwindigkeit. Nur im optisch leeren Mittel (Vakuum, Luft) ist die Phasengeschwindigkeit zugleich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. In einem anderen Mittel sagt sie nur aus, wie die Phase des Lichtes durch die Mitwirkung dieses Mittels (nach der heutigen Dispersionstheorie durch das Mitschwingen der darin enthaltenen Ionen oder Elektronen) verzögert wird, lehrt aber nichts über den Prozeß der Fortpflanzung; ist doch bei einem unbegrenzten Wellenzuge die Lichterregung in allen Teilen des Mittels seit unendlich langer Zeit stationär vorhanden.

Um über die Fortpflanzung etwas aussagen zu können, müssen wir vielmehr einen begrenzten Wellenzug haben: Ruhe bis zu einem gewissen Zeitpunkte, dann eine z. B. gleichmäßige Folge von Sinusschwingungen, die ihrerseits nach einer gewissen Zeit abbricht oder die unbegrenzt fort dauert. Einen solchen Wellenzug werden wir ein *Signal* nennen. Hier kann man von einer Fortpflanzung des Kopfes sprechen (*Kopfgeschwindigkeit*, *Frontgeschwindigkeit*) oder bei einem abbrechenden Wellenzug in gewissem Sinne auch von einer Geschwindigkeit, mit der sich der *Schluß* des Signals in das Mittel hinein überträgt. Der Schluß des Signals markiert sich natürlich nicht so wie der Kopf, daß er ein Gebiet völliger Ruhe von einem Gebiet der Bewegung trennt. Vielmehr folgt auf den Signalschluß noch ein langer (eigentlich unendlich langer) Restvorgang von abklingenden Ionenschwingungen. Immerhin markiert sich der Signalschluß, wenn auch im Bilde des Bewegungsverlaufes nicht deutlich erkennbar, in den Formeln dadurch, daß hier die anregende erzwungene Signalschwingung wegfällt und nur noch die abklingenden freien Schwingungen der Ionen übrig bleiben. Da wir ein abgebrochenes Signal immer auffassen können als Überlagerung eines ersten unbegrenzt fort dauernden mit einem zweiten beim Signalschluß einsetzenden, ebenfalls unbegrenzt fort dauernden Wellenzuge von entgegengesetzter Phase, welcher den ersten Wellenzug für die

Folge gerade aufhebt, so ist die *Schlußgeschwindigkeit* des abgebrochenen Signals identisch mit der *Kopfgeschwindigkeit* eines einsetzenden Signals. Von der *Kopfgeschwindigkeit* ist zu unterscheiden die *Signalgeschwindigkeit*, d. h. diejenige Geschwindigkeit, mit der sich der *Hauptteil der Lichtbewegung in das dispergierende Mittel fortpflanzt*. Es zeigt sich nämlich, daß das Signal beim Fortschreiten keineswegs seine ursprüngliche Gestalt beibehält, daß in einer gegebenen Tiefe des Mittels vielmehr zunächst eine sehr schwache Lichtbewegung eintrifft, die „Vorläufer“, die sich allmählich bis zu einer der auffallenden Intensität entsprechenden Größe steigern. Es ist das wesentliche Resultat der Arbeit von Hrn. Brillouin, daß diese *Signalgeschwindigkeit* praktisch übereinstimmt mit der *Gruppengeschwindigkeit*, nämlich immer dann, wenn die auffallende Wellenlänge verschieden ist von der *Eigenwellenlänge* des dispergierenden Mittels, wenn also die Lichtbewegung ohne starke Absorption fortschreitet.

Von der *Frontgeschwindigkeit* werden wir hier zeigen, daß sie unter allen Umständen identisch ist mit der *Vakuumgeschwindigkeit* c , gleichviel ob das Mittel normal oder anomal dispergiert, ob es durchsichtig ist oder absorbiert, ob es einfach oder doppelbrechend ist. Der Beweis gründet sich auf die Dispersionstheorie des Lichtes, nach der die verschiedenen optischen Eigenschaften der Körper durch das Mitschwingen von Teilchen, Elektronen oder Ionen, zustande kommen. Im folgenden werden wir diese Teilchen als *Ionen* bezeichnen, darunter aber auch den Fall der reinen Elektronenschwingungen mit einbegreifen. Vom Standpunkt der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie, nach der die Dielektrizitätskonstante ϵ und daher auch der Brechungsindex $\sqrt{\epsilon}$ eine dem Mittel eigentümliche Materialkonstante sein soll, wäre die Phasengeschwindigkeit $V = c/\sqrt{\epsilon}$ eine wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der in dem betreffenden Mittel sich ausbreitenden Störungen, gerade so wie es die Geschwindigkeit c im Vakuum ist. Nach unseren derzeitigen Erfahrungen und ihrer Zusammenfassung in der Elektronentheorie gibt es aber nur ein einheitliches Mittel elektrodynamischer Wirkungen, das Vakuum, und sind die Abweichungen vom Optisch-Leeren auf mitschwingende Ladungen zurückzuführen. Wenn die Front

unseres Signals das optische Mittel durchsetzt, findet sie die schwingungsfähigen Teilchen zunächst in Ruhe vor¹⁾ (abgesehen von der Wärmebewegung, die als unregelmäßige Bewegung unwirksam ist). Zunächst ist daher das Mittel scheinbar optisch leer; erst von dem Momente an, wo die Teilchen in Bewegung versetzt werden, können sie Einfluß nehmen auf die Phase und Form der Lichtschwingungen. Die Fortpflanzung des Wellenkopfes aber erfolgt ungestört und unabhängig von der Beschaffenheit der dispergierenden Ionen mit Vakuumgeschwindigkeit.

Von hier aus werden die nachstehenden Folgerungen aus unserer Untersuchung unmittelbar verständlich. Leider sind diese Folgerungen rein theoretischer Natur und kaum mit dem Experiment zu vergleichen wegen der Kleinheit der dabei in Betracht kommenden Energiemengen und der Kürze der erforderlichen Beobachtungszeiten. Auch machen wir von den Formeln der Dispersionstheorie eine etwas weitergehende Anwendung als sich physikalisch rechtfertigen läßt. Wir dehnen sie nämlich aus bis zu beliebig kleinen Wellenlängen, während sie ihrer Ableitung nach Gültigkeit beanspruchen nur für Wellenlängen, die groß gegen die Abstände der dispergierenden Teilchen sind. Unsere Folgerungen lauten:

Wenn wir weißes Licht senkrecht auf eine dispergierende Platte fallen lassen, so eilen in dieser die weniger brechbaren (und daher „schnelleren“) Bestandteile des weißen Lichtes nicht etwa den stärker brechbaren („langsameren“) Bestandteilen voraus und es ist nicht etwa im ersten Moment des Austritts das Licht rot gefärbt. Vielmehr läuft die Wellenfront aller Bestandteile mit der gleichen Geschwindigkeit c durch die Platte und es tragen zu der im ersten Moment austretenden Lichtenergie alle Bestandteile in gleicher Weise bei. Diese zuerst austretenden Vorläufer zeigen übrigens nicht die Farben der Bestandteile, aus denen sie hervorgegangen sind, sondern haben eine durch das Dispersionsvermögen und die Dicke der Platte bestimmte ultraviolette Wellenlänge und eine äußerst geringe Stärke. Die Form der Lichtbewegung wird beim Durchgang

1) Diese Auffassung verdanke ich den Diskussionsbemerkungen von W. Voigt zu meinem Dresdener Vortrag, Phys. Zeitschr. I. c.

durch die Platte anfangs, während die Ionen in Schwingung versetzt werden, so gründlich verzerrt, daß überhaupt keine Ähnlichkeit besteht zwischen der Form des auffallenden und des anfangs austretenden Lichtes. Auch wird so viel Energie zur anfänglichen Beschleunigung der Ionen zurückgehalten, daß die anfangs austretende Energie sehr gering ist im Verhältnis zur auffallenden.

In nahe liegender Erweiterung dieser Resultate können wir fortfahren: Wenn das Lichtsignal schief auf unsere Platte fällt, so wird es zuerst überhaupt nicht gebrochen oder reflektiert. Der Brechungsindex richtet sich erst mit der Ausbildung der Ionenschwingungen allmählich ein, während die Front des Signals und die soeben genannten sehr kurzwelligen Vorläufer unsere Platte unabgelenkt durchlaufen, wie wenn sie Luft wäre. Weiter aber: Läßt man auf eine Platte aus Kalkspat oder Quarz ein unpolarisiertes Lichtsignal fallen, so würde man zu Beginn des Austritts nicht linear oder zirkular polarisiertes Licht sehen, wie man erwarten könnte, wenn sich der „schnellere“ Strahl wirklich schneller fortpflanzte wie der „langsamere“. Vielmehr ist auch hier die Kristallstruktur in optischer Hinsicht anfangs gar nicht vorhanden und tritt erst allmählich in Wirksamkeit; ebensowenig ist zu Anfang Doppelbrechung vorhanden.

Das ursprüngliche Interesse unseres Problems hing mit der Relativitätstheorie zusammen. Diese lehrt bekanntlich, daß *Überlichtgeschwindigkeit* durchaus unmöglich ist, sowohl als Konvektivgeschwindigkeit eines bewegten Elektrons oder Körpers, wie auch als Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines elektrodynamischen oder mechanischen Signals.¹⁾ W. Wien bemerkte nun, daß es im Spektrum eines anomal-dispergierenden Mittels in der Nähe der Absorptionslinie ein Gebiet geben kann, wo der Brechungsindex < 1 , also die „Lichtgeschwindigkeit“ (gleichviel ob man darunter die Phasengeschwindigkeit oder die Gruppengeschwindigkeit versteht) größer als c wird. Dieser scheinbare Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip mußte geklärt werden.

Bedeutet n die Frequenz des Lichtes (Anzahl der Schwin-

1) A. Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität 4. p. 412. 1912. § 5; vgl. auch M. Laue, Phys. Zeitschr. 12. p. 48. 1911.

gungen in 2π Zeiteinheiten), k die „Wellenzahl“ (Anzahl der Wellenlängen auf 2π Längeneinheiten), V die Phasengeschwindigkeit, U die Gruppengeschwindigkeit bei der Frequenz n und sieht man von der Absorption ab, setzt also k als reell voraus, so ist bekanntlich

$$V = \frac{n}{k}, \quad U = \frac{d n}{d k}$$

wofür man auch schreiben kann

$$U = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k \frac{dV}{dk} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}.$$

Bei anomaler Dispersion $dV/d\lambda < 0$ wird hiernach $U > V$. Ist also V bereits größer als c so würde ein Fortschreiten des Signals mit der Gruppengeschwindigkeit U erst recht zu einer Überlichtgeschwindigkeitswirkung führen, die relativtheoretisch unmöglich ist.

Nach den oben bereits mitgeteilten Resultaten besteht nun in der Tat gar keine Schwierigkeit: Die Front des Signals pflanzt sich unter allen Umständen mit der Vakuumgeschwindigkeit c fort; der Hauptteil der Energie folgt mit der notwendig kleineren Signalgeschwindigkeit. Diese ist nach Hrn. Brillouin im allgemeinen merklich gleich der Gruppengeschwindigkeit, indessen mit Ausschluß der Nähe der Absorptionsbande, des Gebietes der anomalen Dispersion. Hier büßt die Gruppengeschwindigkeit ihre Bedeutung als Signalgeschwindigkeit ein; die soeben konstruierten relativtheoretischen Schwierigkeiten beruhen also nur auf einer Überschätzung des Begriffes der Gruppengeschwindigkeit bezüglich der gewöhnlich als „Lichtgeschwindigkeit“ bezeichneten Phasengeschwindigkeit.

Wir fügen zunächst einige allgemeine Bemerkungen über den Begriff der Gruppengeschwindigkeit ein. Man zeigt bekanntlich an einzelnen Beispielen¹⁾, daß bei einem aus Wellen

1) Vgl. z. B. A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik, § 183. Daß solchen Beispielen keine allgemeine Beweiskraft zukommt, ist von W. Wien, Encykl. d. Math. Wiss. V 22, Nr. 28 und von P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 33. p. 1571. 1910, dargelegt worden. Wegen der l. c. von A. Schuster hervorgehobenen Möglichkeit einer *negativen* Gruppengeschwindigkeit in der Nähe einer Absorptionsbande vgl. die im Text genannten Gesichtspunkte von M. Laue.

benachbarter Schwingungszahlen bestehenden Aggregat, einer „Wellengruppe“, ein maximaler oder sonstwie ausgezeichneter Wert der Amplitude sich nicht mit der Geschwindigkeit V sondern mit U fortpflanzt. Darüber hinaus hat M. Laue¹⁾ gezeigt, daß bei natürlichem, d. h. ungeordnetem, nur seiner mittleren Intensität nach bekanntem Licht die Gruppengeschwindigkeit maßgebend ist für die Fortpflanzung der Energie ins Innere des dispergierenden Mediums. Dabei wird eingehend begründet, daß bei anomaler Dispersion, wo wegen der starken Absorption der Begriff der natürlichen Strahlung nach kurzen Wegstrecken seine Gültigkeit verliert, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Intensität nicht mehr scharf zu definieren ist. In Fällen also, wo die Gruppengeschwindigkeit $> c$ (oder event. vgl. Anm. negativ) wird, erleidet der Satz von der Gleichheit der Gruppengeschwindigkeit und Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Ausnahme, weil es für *statistisch definiertes Licht* überhaupt keine präzise Fortpflanzungsgeschwindigkeit gibt. Daß die Fortpflanzung des Wellenkopfes in allen Fällen mit einer Geschwindigkeit $\leq c$ erfolgen müsse, wird aus den allgemeinen Anschauungen der Elektronentheorie geschlossen. Dieses Ergebnis steht also mit unserem bestimmter gefaßten Resultat in Einklang. Ob die Gruppengeschwindigkeit auch bei *individuellen Lichtsignalen*, wie wir sie betrachten, eine Rolle spielt, kann die Lauesche Untersuchung ihrer ganzen Anlage nach nicht entscheiden. Durch die Arbeit von Hrn. Brillouin wird diese Frage aber bejaht, unter der schon von Laue als notwendig erkannten Einschränkung, des Ausschlusses der Absorptionsstreifen.

Die vorliegende Arbeit gibt in den §§ 2 u. 3 die allgemeine Lösung des Problems durch komplexe Integrale. Auf der Veränderlichkeit ihrer Integrationswege beruht die Diskussion der Lösung in § 4. Kann der Weg ins Unendliche der positiven Halbebene der Integrationsvariablen gezogen werden, so herrscht Ruhe; dies trifft zu für $t < x/c$ (x = durchlaufende Tiefe des dispergierenden Mediums). Dagegen muß für $t > x/c$ der Weg nach der negativen Halbebene deformiert werden, wobei er an einem Pole einerseits, an zwei Verzweigungsschnitten anderer-

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 18. p. 523. 1905, vgl. insbes. § 6.

seits hängen bleibt. Daß die Grenze zwischen beiden Fällen gerade bei $t = x/c$ liegt, bedeutet, daß sich die Front des Signals genau mit der Vakuumgeschwindigkeit c fortpflanzt. Das Residuum in dem Pole gibt eine zeitlich ungedämpfte Erregung von der Wellenlänge der auffallenden Schwingung und von derjenigen Amplitude und Phase, wie sie einer regulären, unverzerrten Fortpflanzung dieser Schwingung mit der Phasengeschwindigkeit V entsprechen würden. Dies ist der erzwungene Teil der Bewegung. Der Umgang um die Verzweigungsschnitte andererseits gibt eine zeitlich abklingende Schwingung, für welche die Eigenfrequenz und Dämpfung der Ionen maßgebend ist. Dieser Teil entspricht also den durch das Signal angeregten freien Ionenschwingungen. Indessen ist eine solche Trennung in freie und erzwungene Schwingungen nur für große Werte von $t - x/c$ praktisch. Die Verhältnisse für kleine $t - x/c$, also für Zeitpunkte unmittelbar nach Eintreffen des Signals, werden in § 6 diskutiert; die hier einsetzenden „Vorläufer“, die noch nichts von jener Sonderung der beiden Bestandteile erkennen lassen, sind sehr schwache und kurzwellige Schwingungen, deren Stärke und Wellenlänge allmählich anwachsen. In § 5 wird die Eindeutigkeit des Problems aus dem Energiesatz bewiesen, mit besonderer Rücksicht darauf, daß an der Wellenfront zwar das Feld stetig, aber der Gradient desselben unstetig ist.

§ 2. Das einfallende Signal.

Das dispergierende Medium fülle den Raum $x > 0$ aus und stoße mit der Ebene $x = 0$ an das Vakuum. Die Welle falle senkrecht ein, so daß der optische Zustand nur von x und t abhängt; er sei für $x = 0$ als Funktion von t gegeben. Da uns der Reflexionsvorgang an der Oberfläche nicht interessiert, sei $f(t)$ bereits der Zustand gleich hinter der Oberfläche im dispergierenden Medium. Die Störung setze für $t = 0$ ein und sei gegeben durch die Fig. 1 a oder die Formel

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \dots t < 0, \\ \sin \frac{2\pi t}{\tau} & \dots t > 0. \end{cases}$$

Um die Dispersionsformel anwenden zu können, muß man $f(t)$ aus rein harmonischen Komponenten von der Form $e^{in\tau}$ (n = Frequenz) zusammensetzen. Versucht man dies nach der

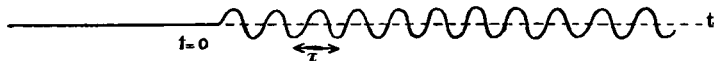


Fig. 1 a.

Regel des Fourierschen Integrals auf *reellem* Wege zu tun, so stößt man auf eine Konvergenzschwierigkeit: da $f(t)$ für $t = \infty$ nicht verschwindet, hat das Fouriersche Integral keinen Sinn. Will man daher an der gewöhnlichen reellen Form der Fourierschen Integraldarstellung festhalten, so wird man einen beiderseits abgebrochenen Wellenzug betrachten müssen ($f(t) = 0$ für $t < 0$ und für $t > T$, vgl. Fig. 1 b). Ein

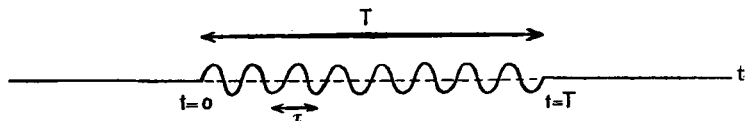


Fig. 1 b.

solcher setzt sich aus zwei Wellenzügen der vorher betrachteten Art zusammen, einem bei $t = 0$ anhebenden und einem zweiten bei $t = T$ beginnenden von entgegengesetzter Phase, der den ersten für alle Zeiten $t > T$ aufhebt.

Für den beiderseits abgebrochenen Wellenzug hat man nach Fourier:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d n \int_0^T \sin 2 \pi \frac{\alpha}{\tau} \cos n(t - \alpha) d \alpha, \\ &= \frac{1}{2 \pi} \int_0^{\infty} d n \left[\frac{\cos \left(2 \pi \frac{\alpha}{\tau} + n(t - \alpha) \right)}{n - 2 \pi / \tau} - \frac{\cos \left(2 \pi \frac{\alpha}{\tau} - n(t - \alpha) \right)}{n + 2 \pi / \tau} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=T}. \end{aligned}$$

Wir setzten in Fig. 1 b voraus

$$(2) \quad T = N \tau,$$

d. h. gleich einem Vielfachen von τ . Dann vereinfacht sich unsere Darstellung zu

$$f(t) = \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} \frac{dn}{n^2 - (2\pi/\tau)^2} (\cos n(t - T) - \cos nt).$$

Für die Diskussion im Reellen empfiehlt sich die folgende Umformung:

$$(3) \quad f(t) = \frac{4}{\tau} \int_0^{\infty} dn \sin n \left(t - \frac{T}{2} \right) \frac{\sin n T/2}{n^2 - (2\pi/\tau)^2},$$

für die Betrachtung im Komplexen dagegen

$$(4) \quad f(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn}{n^2 - (2\pi/\tau)^2} (e^{-in(t-T)} - e^{-int})$$

oder auch¹⁾

$$(5) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn}{n - 2\pi/\tau} (e^{-in(t-T)} - e^{-int}),$$

wo \Re den Übergang zum reellen Teile bedeutet. Gleichung (3) liefert die spektrale Zerlegung unseres abgebrochenen Wellenzuges in ein System von unendlich andauernden Wellen. Der Faktor von $\sin n(t - T/2)$ bedeutet dabei die Amplitude der einzelnen Partialwelle, sein Quadrat ihre spezifische Intensität

$$(6) \quad J = \left(\frac{4}{\tau} \frac{\sin n T/2}{n^2 - (2\pi/\tau)^2} \right)^2.$$

Man bestätigt hieran, daß jeder Partialwelle, auch der bevorzugten von der Frequenz $n = 2\pi/\tau$ eine endliche Intensität zukommt. Das Verschwinden des Nenners wird nämlich für $n = 2\pi/\tau$ durch das gleichzeitige Verschwinden des Zählers $\sin n T/2 = \sin N\pi$ (Gleichung (2)) aufgehoben. Als Quotient beider ergibt sich

$$(7) \quad J_{\max} = \left(\frac{N\tau}{2\pi} \right)^2.$$

Für die Darstellung (5) folgt hieraus, daß an der Stelle $n = 2\pi/\tau$ ein Unendlichwerden des Integranden ebenfalls nicht statt hat, so lange die beiden Exponentialfunktionen nicht getrennt werden. Infolgedessen darf die reelle Integration über jene Stelle durch einen kleinen Halbkreis etwa in der oberen

1) Daß (4) und (5) identisch sind, zeigt man leicht in derselben Weise, wie in § 4 die Identität von (9a, b) mit (9).

komplexen Halbebene ersetzt werden. Ist dies geschehen, so kann der Integrationsweg weiter (vgl. Fig. 2) deformiert und die beiden Exponentialfunktionen in (5) können einzeln integriert werden:

$$(8) f(t) = \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{dn}{n - 2\pi/\tau} e^{-int} - \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{dn}{n - 2\pi/\tau} e^{-in(t-T)}.$$

Als Integrationsweg ist hierbei der Weg u (von $+\infty$ bis $-\infty$, vgl. Fig. 2) gedacht, welcher den umgekehrten Sinn wie derjenige des Fourier-Integrales hat und daher die umgekehrten

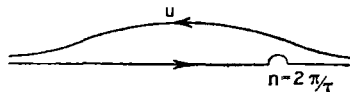


Fig. 2.

Vorzeichen der letzten Gleichung bedingt. Offenbar entspricht die Schreibweise (8) der Zerlegung des beiderseits abgebrochenen Wellenzuges in zwei nur einseitig (bei $t = 0$ und $t = T$) begrenzte Signale, die bei reellem Integrationswege unmöglich war.

Bevor wir das einzelne dieser einseitig begrenzten Signale weiter verfolgen, möge im Anschluß an Gleichung (6) das „Spektrum“ des beiderseits abgebrochenen Wellenzuges verzeichnet werden. Die Intensität verschwindet nach (6) für

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi}{T}, \quad \frac{6\pi}{T}, \dots$$

und erreicht ungefähr in der Mitte von zwei solchen Stellen ein Maximum. Eine Ausnahme macht die Stelle

$$n = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\tau} \quad (\text{vgl. Gleichung (2)}),$$

welche keine Verschwindungsstelle, sondern das Hauptmaximum des Spektrums von der in (7) angegebenen Größe ist. Hiernach besteht unsere Intensitätskurve (Fig. 3, schematisch gezeichnet) aus unendlich vielen Bögen von der Breite $2\pi/T$ und zunächst zunehmender, dann wieder abnehmender Höhe. Nur die der ausgezeichneten Stelle $2\pi/\tau$ anliegenden Bögen verschmelzen zu einem Bogen von doppelter Breite und überwiegender Höhe, die (vgl. Gleichung (7)) mit wachsendem N , d. h. zunehmender Länge des Signals, zunimmt.

Glätten wir die Intensitätskurve ab, indem wir statt der Einzelbögen ihre Umhüllende zeichnen und tragen wir J/J_{\max} statt J als Ordinate auf, so erhalten wir die ebenfalls schematische Fig. 4, in der die Kurven 1, 2, 3, ... der Reihe nach zu-

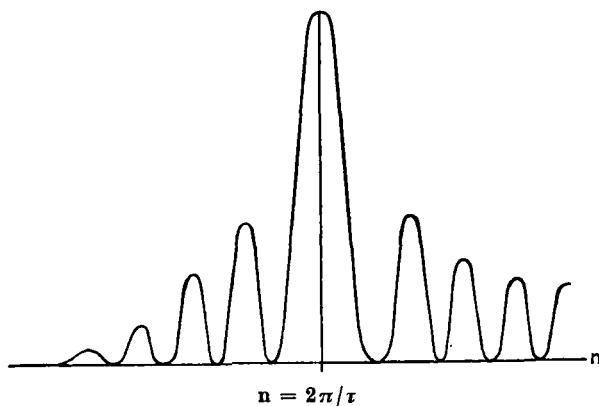


Fig. 3.

nehmenden Werten von T bzw. N , vgl. Gleichung (2), entsprechen. Dabei nähert sich das ursprünglich breite Spektrum immer mehr demjenigen einer scharf ausgeprägten Spektrallinie von der Frequenz $2\pi/\tau$, wie vorausszusehen war.

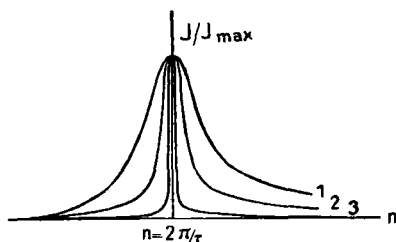


Fig. 4.

Natürlich kann die abgeglättete Intensitätskurve nicht mehr den genauen zeitlichen Verlauf des von uns vorausgesetzten begrenzten Signals darstellen. Dieselbe wird vielmehr einer beiderseits zeitlich unbegrenzten Lichterregung entsprechen und nur deren mehr oder minder monochromatischen Charakter (bei zu- oder abnehmender Länge des Wellenzuges) zum Ausdruck bringen. Dagegen ist unser ursprüngliches Spektrum

in Fig. 3 ein genauer Ersatz unseres begrenzten Signals. Das heißt: Mischt man lauter rein harmonische und periodische Wellenzüge zusammen, erteilt jedem Wellenzuge der Frequenz n die in unserer Spektralfigur angegebene Intensität J sowie die in Gleichung (3) enthaltene Phase und überlagert alle diese Wellenzüge für die Zeit von $-\infty$ bis $+\infty$, so entsteht nicht etwa ein zeitlich unbegrenzter, sondern ein beiderseits abgebrochener Wellenzug von der einheitlichen Frequenz $2\pi/\tau$. Offenbar werden gerade die schnellen Schwankungen in Fig. 3, die „Kanellierung“ des Spektrums, für die Möglichkeit der genauen Anpassung an den zeitlichen Verlauf des Signals wesentlich.

§ 3. Allgemeine Lösung des Problems.

Das erste Integral in Gleichung (8) stellt das bei $t = 0$ anhebende und bis $t = \infty$ andauernde Signal dar, das in Fig. 1a gezeichnet wurde, wobei die Integration auf dem Wege u der Fig. 5 zu nehmen war:

$$(9) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-int} \frac{dn}{n - 2\pi/\tau}.$$

Obwohl dies bereits im vorigen Paragraphen auf Grund des Fourierschen Integrals bewiesen war, wollen wir es hier nochmals durch ein Verfahren verifizieren, das wir ohnehin für die folgende Diskussion nötig haben werden. Wir ersetzen zu dem Ende den ursprünglichen Integrationsweg u in doppelter Weise durch äquivalente Wege.

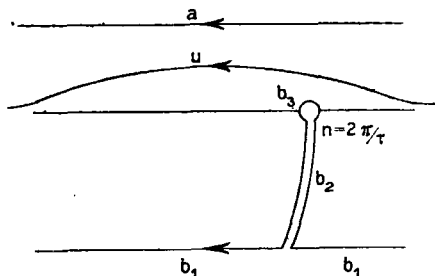


Fig. 5.

a) $t < 0$. In diesem Falle hat $-int$ in der

oberen Halbebene einen negativen reellen Teil, der mit wachsender Entfernung von der reellen Achse unbegrenzt zunimmt. Man kann also den ursprünglichen Weg u in den Weg a (Fig. 5) überführen; auf diesem verschwindet das Integral, wenn a ins Unendliche der oberen Halbebene hinübergezogen wird; also

$$(10) \quad f(t) = 0 \dots (t < 0).$$

b) $t > 0$. Jetzt hat $-int$ in der unteren Halbebene einen negativen reellen Teil, so daß die Exponentialfunktion im Unendlichen dieser Halbebene verschwindet. Führt man aber den Weg u dahin über, so bleibt er an der singulären Stelle des Integranden $n = 2\pi/\tau$ hängen (Fig. 5). Der Integrationsweg b besteht daher aus dreierlei Stücken: den im Unendlichen gelegenen Teilen b_1 , auf welchen das Integral wegen des Faktors e^{-int} verschwindet; den Zuführungswegen b_2 , deren gegenüberliegende Teile sich gegenseitig kompensieren und daher ebenfalls keinen Beitrag liefern; dem Umgang b_3 um den singulären Punkt. Dieser läßt sich nach dem Cauchy'schen Satze sofort auswerten:

$$(11) \quad b_3 = \frac{1}{2\pi} \Re \left\{ 2\pi i e^{-\frac{2\pi i t}{\tau}} \right\} = \sin \frac{2\pi t}{\tau} \dots (t > 0).$$

Mithin ist gezeigt, daß der Ausdruck (9) in der Tat unsere durch die Bedingungen (1) definierte, bei $t = 0$ anhebende Lichtwelle in Strenge darstellt.

Die allgemeine Lösung unseres Problems läßt sich nun sofort hinschreiben in der Form:

$$(12) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-int + ikx} \frac{dn}{n - 2\pi/\tau},$$

das Integral auf dem Wege u der Fig. 5 oder 6 erstreckt.

Die Dispersionstheorie lehrt nämlich, daß aus einer zeitlich unbegrenzten an der Stelle $x = 0$ bestehenden Störung e^{-int} nach Durchlaufen der Strecke x im dispergierenden Medium die ebene Welle $e^{-int + ikx}$ geworden ist, wenn k definiert wird durch

$$(13) \quad k^2 = \frac{n^2}{c^2} \left(1 + \frac{a^2}{n_0^2 - 2in\varrho - n^2} \right)$$

mit der Abkürzung $a^2 = \Re e^2/m$.

Hier bedeutet \Re, e, n_0, ϱ, m Anzahl pro Kubikzentimeter, Ladung, Eigenfrequenz, Dämpfungskonstante und Masse der mitschwingenden Teilchen. Man hat die Größen \Re, e, n_0, \dots je mit einem Index zu versehen und über diesen in gewisser Weise zu summieren, wenn mehrere Arten mitschwingender Teilchen berücksichtigt werden sollen. Da hierdurch im folgenden prinzipiell nichts geändert werden würde, dürfen wir uns auf die einfache Dispersionsformel (13) beschränken.

Daß es keine andere Lösung wie (12) geben kann, wird in § 5 bewiesen.

§ 4. Diskussion der erhaltenen Lösung.

Wir gehen dabei nach dem Vorbilde der vorangehenden Diskussion von $f(t)$ vor. Es sei

$$t = t - \frac{x}{c};$$

wir betrachten die beiden Fälle a) $t < 0$ und b) $t > 0$ und behaupten, daß $t = 0$ die Ankunft unseres Lichtsignals in der Tiefe x bedeutet.

a) $t < 0$. Wir deformieren den Weg u der Fig. 5 oder 6 in den Weg a . Dies ist solange erlaubt, als der reelle Teil von $-int + ikx$ im Unendlichen der oberen Halbebene negativ ausfällt. Für $n = \infty$ wird aber nach (6) $k = n/c$ und daher

$$-int + ikx = -in\left(t - \frac{x}{c}\right) = -int.$$

Der Übergang zum Wege a ist also erlaubt, wenn $t < 0$. Dann verschwindet aber unser Integral. Also wird:

$$(14) \quad f(t, x) = 0 \dots t < 0.$$

b) $t > 0$. Wir ziehen den Weg u nach der unteren Halbebene über, da jetzt im Unendlichen derselben $-int + ikx = -int$ einen negativen reellen Teil hat. Der Integrationsweg bleibt dabei nicht nur an der singulären Stelle $n = 2\pi/\tau$ des Nenners, sondern auch an den Verzweigungspunkten des Ausdrucks k hängen. Letztere ergeben sich aus (13), wenn man $k = \infty$ und $k = 0$ setzt. Man hat

$$(13a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \infty, \text{ wenn } n^2 + 2in\rho = n_0^2, \\ \text{d. h.} \quad n = -i\rho \pm \sqrt{n_0^2 - \rho^2}, \end{array} \right.$$

$$(13b) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, \text{ wenn } n^2 + 2in\rho = n_0^2 + a^2, \\ \text{d. h.} \quad n = -i\rho \pm \sqrt{n_0^2 + a^2 - \rho^2}. \end{array} \right.$$

Die Verzweigungspunkte liegen also paarweise symmetrisch zur imaginären Achse in der unteren Halbebene; die beiden ersten ($k = \infty$) sind in Fig. 6 mit U_1, U_2 , die beiden letzten ($k = 0$) mit N_1, N_2 bezeichnet. Die imaginären Teile der zugehörigen n -Werte sind gleich $-\rho$, die reellen Teile im wesentlichen (bei kleinem ρ und a) gleich $\pm n_0$, also gleich der Eigen-

frequenz der Elektronen. Die in Fig. 6 angenommene Lage der Verzweigungspunkte ($n_0 > 2\pi/\tau$) entspricht einem Absorptionsstreifen im Ultravioletten, wenn die Frequenz $2\pi/\tau$ der einfallenden Welle dem sichtbaren Gebiet angehört. Wir verbinden $U_1 N_1$, sowie $U_2 N_2$ je durch einen „Verzweigungsschnitt“.

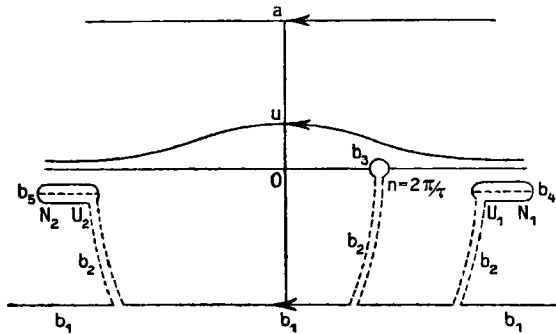


Fig. 6.

Der Integrationsweg b zerlegt sich jetzt in die Bestandteile b_1, b_3, b_4, b_5 , da wir von den punktiert gezeichneten, sich gegenseitig zerstörenden Zuführungswegen b_2 von vornherein absehen dürfen. Der Beitrag von b_1 verschwindet wegen des großen negativ reellen Teils von $-in t$. Der Wert von b_3 läßt sich wieder nach der Residuenregel ausführen:

$$(15) \quad b_3 = \frac{1}{2\pi} \Re \left\{ 2\pi i e^{-2\pi i \frac{t}{\tau} + i k_\tau x} \right\}.$$

Hier meint k_τ denjenigen Wert von k , der sich aus (13) ergibt, wenn wir $n = 2\pi/\tau$ einsetzen. Wir machen

$$(16) \quad k_\tau = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i\kappa), \quad e^{i k_\tau x} = e^{-2\pi \kappa \frac{x}{\lambda}} \cdot e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}},$$

setzen also λ gleich derjenigen Entfernung x , in der sich die Phase der Welle reproduziert, und κ gleich dem logarithmischen Dekrement der Amplitude für das Fortschreiten der Welle um eine Wellenlänge.

Daraufhin wird aus (15)

$$(17) \quad b_3 = e^{-2\pi \kappa \frac{x}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Die Integrale b_4 und b_6 lassen sich nicht weiter vereinfachen. Wir schreiben:

$$(18) \quad B = b_4 + b_6 = \frac{1}{2\pi} \left(\int \right) e^{-int+ikx} \frac{dn}{n-2\pi/\tau},$$

indem wir durch die Parenthese den Umgang um beide Verzweigungsschnitte andeuten. Im ganzen haben wir also

$$(19) \quad f(t, x) = e^{-2\pi n \frac{x}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \dots t > 0.$$

c) $t = 0$. In diesem Grenzfalle läßt sich der ursprüngliche Weg sowohl nach der oberen wie nach der unteren Halbebene hinüberziehen, weil im Unendlichen beider der Integrand verschwindet, allerdings nicht mehr exponentiell wegen des Faktors $e^{-int+ikx}$, welcher jetzt gleich $e^{-int} = 1$ wird, sondern nur wie $1/n^2$.

Man erkennt dies z. B. so: Führt man in (9) die Bildung des reellen Teiles aus, so wird:

$$(9a) \quad f(t) = \frac{1}{4\pi} \left(\int e^{-int} \frac{dn}{n-2\pi/\tau} + \int e^{+int} \frac{dn}{n-2\pi/\tau} \right);$$

ersetzt man hier im zweiten Integral $+n$ durch $-n$, so folgt

$$(9b) \quad f(t) = \frac{1}{\tau} \int e^{-int} \frac{dn}{n^2 - (2\pi/\tau)^2}.$$

Wendet man jetzt die Regel der Dispersionstheorie an, so entsteht aus (9b), gerade so wie vorher (12) aus (9) entstand,

$$(12a) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \int e^{-int+ikx} \frac{dn}{n^2 - (2\pi/\tau)^2}.$$

Hier verhält sich der Integrand für hinreichend große n wie e^{-int}/n^2 , d. h. er verschwindet für $t = 0$ in der Tat wie $1/n^2$.

Indem wir also $f(t, x)$ einmal auf dem Wege a), das andere Mal auf dem Wege b) berechnen, sehen wir, daß

$$(20) \quad 0 = e^{-2\pi n \frac{x}{\lambda}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \dots t = 0$$

ist. Die Stetigkeit des Überganges zwischen der Epoche $t < 0$ und $t > 0$ ist also gewahrt.

Im ganzen ergibt sich für den Ablauf des Signals in der Tiefe x folgendes Bild (Fig. 7):

a) Bis zum Zeitpunkt $t = x/c$ herrscht Ruhe. Auch wenn die Phasengeschwindigkeit $V > c$ ist, kann keine optische Wirkung früher eintreffen, als einer Fortpflanzung mit Vakuumgeschwindigkeit c entspricht. Tragen wir in Fig. 7 als senkrechte Koordinate x/c auf, so gehört zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c eine unter 45° geneigte Gerade; sie schneidet

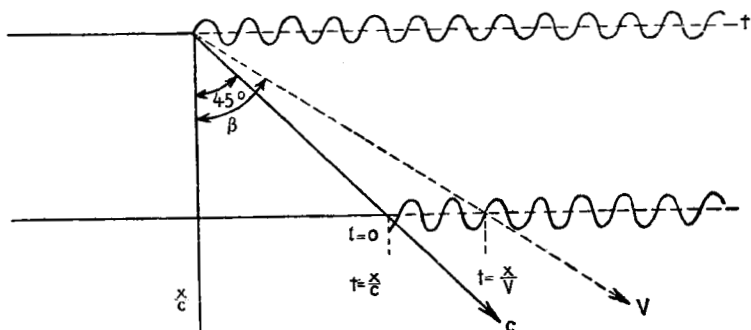


Fig. 7.

für jede Tiefe x den Zeitpunkt $t = 0$ der beginnenden Lichterregung aus. Setzen wir weiterhin normale Dispersion und daher auch $V < c$ voraus und zeichnen die unter dem Winkel β mit $\text{ctg } \beta = V/c$ verlaufende Gerade punktiert ein, so liefert diese in gleicher Weise solche Zeitpunkte, die einer Fortpflanzung mit der Geschwindigkeit V entsprechen würden. In Wirklichkeit hat aber die Geschwindigkeit V nichts mit der Fortpflanzung zu tun, sondern bestimmt nur die Anordnung der Phasen, und auch dieses streng genommen nur bei einem unbegrenzten Wellenzuge.

b) Die Lichtbewegung für $t > 0$ besteht aus zwei Bestandteilen, die wir als freie und erzwungene Schwingung unterscheiden können, erstere gegeben durch B (Gleichung (18)), letztere (vgl. Gleichung (19)) durch

$$e^{-2\pi\kappa\frac{x}{\lambda}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) = e^{-2\pi\kappa\frac{x}{\lambda}} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{V}\right).$$

Die *erzwungene Schwingung* (vgl. Fig. 7) ist zeitlich ungedämpft und hat denselben regelmäßigen Sinuscharakter wie

die einfallende Welle; nur die Amplitude ist wegen der örtlichen Dämpfung, von der aber in der Figur abgesehen ist, vermindert. Wir konstruieren die Phase der erzwungenen Schwingung, indem wir die einfallende Welle mit ihrer Front nach dem Zeitpunkte $t = x/V$ (Schnittpunkt der punktierten Geraden) übertragen und sie mit der entsprechenden Phase im Zeitpunkte $t = x/c$ beginnen lassen. In der Tat gilt unsere Gleichung (19) bereits von diesem letzteren Zeitpunkte ($t = 0$) ab; es setzt daher unsere erzwungene Schwingung nicht erst im Zeitpunkte $t = x/V$ ein. Unsere Konstruktion bringt zum Ausdruck, daß die Geschwindigkeit V die Phase, die Geschwindigkeit c die Fortpflanzung bestimmt.

Bei anomaler Dispersion, $V > c$, würde unsere punktierte Gerade vor dem Zeitpunkte $t = x/c$ schneiden. Die erzwungene Schwingung würde ihrer Phase nach wieder von diesem Schnittpunkt aus zu konstruieren sein, aber erst von dem Zeitpunkte $t = x/c$ an in Wirksamkeit treten.

Die *freie Schwingung* (in Fig. 7 nicht gezeichnet) ist zeitlich gedämpft, da t in ihrem Ausdruck B mit dem komplexen Faktor n multipliziert erscheint, dessen imaginärer Teil nach Gleichung (13a, b) gleich der Dämpfung ρ der mitschwingenden Ionen ist, falls man nämlich, was erlaubt und in Fig. 6 angedeutet ist, den Integrationsweg in B direkt auf die Verzweigungsschnitte $U_1 N_1, U_2 N_2$ zusammenzieht. Sie setzt ebenfalls im Zeitpunkte $t = x/c$ ein und rührt davon her, daß die Ionen zunächst in Bewegung gesetzt werden müssen und vermöge ihrer Trägheit und elastischen Bindung sich erst allmählich dem definitiven Schwingungszustande anpassen. Mit wachsendem t verschwindet die freie und bleibt nur die (durch die mitschwingenden Ionen modifizierte) erzwungene Schwingung bestehen.

c) Für $t = 0$ hebt die freie Schwingung die erzwungene Schwingung gerade auf (Gleichung (20)), so daß die gesamte Lichtbewegung stetig mit der Ordinate 0 einsetzt. Wie schon in der Einleitung bemerkt, ist allerdings für die Front des Lichtsignals die Trennung in erzwungene und freie Schwingung ganz unzumutbar. Der wirkliche Charakter der bei $t = 0$ zunächst einsetzenden Bewegung, die wir alsbald als Vorläufer näher beschreiben werden, läßt weder etwas von der Periode

des erzwungenen Lichtsignals noch von der freien Schwingungsperiode der Ionen erkennen.

Die in der Einleitung aufgestellten Behauptungen sind damit der Hauptsache nach bewiesen.

§ 5. Eindeutigkeit des Problems und Stetigkeitsbedingungen.

Da unsere Resultate zum Teil etwas überraschend sind, ist der Nachweis vielleicht nicht überflüssig, daß unsere Lösung die einzig mögliche ist, daß also jeder andere Weg zur Lösung auf dieselben Resultate führen muß. Wir knüpfen dabei an die interessante Methode an, die H. Weber¹⁾ für die Probleme der reinen Maxwellschen Theorie benutzt und erweitern dieselbe auf die Dispersionstheorie. Die Eindeutigkeit wird hierbei direkt aus dem Energiesatz geschlossen.

Es sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$ das elektromagnetische Feld und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_y$ die Verschiebung der Ionen aus ihrer Ruhelage, beide nur von x und t abhängig und für $x > 0$, $t > 0$ in Betracht zu ziehen; dann lauten die Grundgleichungen²⁾:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}, & \frac{1}{c} (\mathfrak{E} + \mathfrak{N} e \dot{\mathfrak{s}}) = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \\ m \ddot{\mathfrak{s}} + 2h \dot{\mathfrak{s}} + f \mathfrak{s} = e \mathfrak{E}, \end{cases}$$

wenn man wie üblich von der magnetischen Einwirkung des Feldes auf die Ionen in erster Näherung absieht, die auf der rechten Seite der letzten Gleichung noch ein Glied $e \dot{\mathfrak{s}} \mathfrak{H}/c$ hinzufügen würde. Multiplikation der drei Gleichungen mit $c \mathfrak{H}$, $c \mathfrak{E}$, $\mathfrak{N} \dot{\mathfrak{s}}$ und Addition liefert:

$$\mathfrak{H} \dot{\mathfrak{H}} + \mathfrak{E} \dot{\mathfrak{E}} + \mathfrak{N} (m \dot{\mathfrak{s}} \ddot{\mathfrak{s}} + 2h \dot{\mathfrak{s}}^2 + f \mathfrak{s} \dot{\mathfrak{s}}) = -c \left(\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} + \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \right) \\ = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x},$$

wo \mathfrak{S} den Energiefluß bedeutet. Integrieren wir nach x von 0 bis ∞ und nach t von 0 bis t , so folgt:

1) Partielle Differentialgleichungen II, § 167; die Methode geht wohl auf E. Cohn zurück, Elektromagnetisches Feld, Kap. VI, § 5. Sie läßt sich ohne weiteres verallgemeinern auf den Fall beliebiger Unstetigkeitsflächen und eines von allen drei Raumkoordinaten abhängigen Feldes. Für unsere Zwecke genügt es, nur eine Koordinate x und eine Unstetigkeitsebene $x = ct$ zu betrachten.

2) In den Bezeichnungen des § 3 Gleichung (13) ist $h/m = q$ und $f/m = n_0^2$.

$$(22) \quad \frac{1}{2} \int \left[\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{N} (m \dot{\mathfrak{s}}^2 + f \mathfrak{s}^2) \right]_{t=0}^{t=t} dx + 2 h \mathfrak{N} \int_0^t dt \int_0^\infty \dot{\mathfrak{s}}^2 dx \\ = - \left[\int_0^t \mathfrak{E} dt \right]_{x=0}^{x=\infty}.$$

Es seien $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{s}_2$ zwei verschiedene Lösungen der Grundgleichungen, welche den Bedingungen genügen:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } x = 0 \text{ und jedes } t > 0: \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \\ \text{,, } x = \infty \text{ ,, ,, } t > 0: \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \\ \text{,, } t = 0 \text{ ,, ,, } x > 0: \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2, \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2. \end{array} \right.$$

Dann gelten für die Differenzen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2$ ebenfalls nicht nur die Grundgleichungen (21), sondern auch Gleichung (22), in der wegen der Bedingungen (23) die auf $t = 0$, $x = 0$ und $x = \infty$ bezüglichen Terme verschwinden. Es bleibt daher:

$$(24) \quad \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dx + \frac{\mathfrak{N}}{2} \int (m \dot{\mathfrak{s}}^2 + f \mathfrak{s}^2) dx \\ + 2 h \mathfrak{N} \int_0^t dt \int_0^\infty \dot{\mathfrak{s}}^2 dx = 0,$$

wo sich nunmehr die beiden ersten Integrale auf die Zeit t beziehen. Hieraus schließt man:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = \mathfrak{s} = 0,$$

weil die einzelnen Glieder der linken Seite nicht negativ sein können; sie bedeuten der Reihe nach: die magnetische und elektrische Energie des Feldes, die kinetische und potentielle Energie der Ionen und den Energieverlust durch die Dämpfung der Ionen.

Haben wir statt einer mehrere Ionenarten, so tritt natürlich die Summe ihrer Energien und Energieverluste in (24) auf, wodurch der Schluß nicht geändert wird. Wichtiger ist für uns die Bemerkung, daß unser Resultat auch bestehen bleibt, wenn sich das Integrationsgebiet $0 < x < \infty$ in einzelne Teile $0 < x < x_1$, $x_1 < x < x_2, \dots$ zerlegt, so daß nur innerhalb jedes dieser Gebiete die Grundgleichungen erfüllt sind, voraus-

gesetzt, daß an den Trennungsflächen, die sich auch mit t verschieben können, \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , sowie \mathfrak{s} und $\dot{\mathfrak{s}}$ stetig sind — ihre Differentialquotienten dürfen dagegen Sprünge erleiden. Man hat dann in (22), indem man die Integration nach x abteilungsweise zwischen 0 und x_1 , x_1 und x_2 ausführt, $[\mathfrak{E}]_0^\infty$ zunächst zu ersetzen durch $[\mathfrak{E}]_0^{x_1} + [\mathfrak{E}]_{x_1}^{x_2} + \dots$, was aber wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} wieder auf $[\mathfrak{E}]_0^\infty$ führt. Ähnlich hat man auf der linken Seite von (22) die Integration von 0 bis t abteilungsweise auszuführen von 0 bis t_1 , t_1 bis t_2 , ..., wo $t_1, t_2 \dots$ die Zeitpunkte sind, in denen die event. Trennungsflächen die gerade betrachtete Stelle x passieren. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{s} , $\dot{\mathfrak{s}}$ liefern aber diese Zeitpunkte ebenfalls keinen Beitrag zu (22). Die Eindeutigkeit ist auch in diesem Falle gesichert.

Die Anwendung auf das Problem der vorigen Paragraphen gestaltet sich so: Für $t = 0$ herrscht im ganzen dispergierenden Medium Ruhe:

$$(25) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} = \mathfrak{s} = 0 \text{ für } t = 0 \text{ und } x > 0.$$

Von der ursprünglichen Wärmebewegung der Ionen ist dabei abgesehen; ihr verhältnismäßiger Betrag kann durch Steigerung der Intensität des Signals oder durch Verminderung der Temperatur beliebig herabgedrückt werden. Für $x = \infty$, wohin das Signal erst nach unendlich langer Zeit gelangt, herrscht ebenfalls dauernd Ruhe; also gilt insbesondere:

$$(25a) \quad \mathfrak{E} = 0 \text{ für } x = \infty \text{ und } t > 0.$$

Für $x = 0$ ist \mathfrak{E} vorgeschrieben:

$$(25b) \quad \mathfrak{E} = f(t) \text{ für } x = 0 \text{ und } t > 0.$$

Diese Bedingungen (25) entsprechen genau den obigen Forderungen (23).

Als Trennungsfläche haben wir die Ebene $x = ct$ zu betrachten. An dieser verhält sich \mathfrak{E} stetig; es war nämlich (vgl. den vorigen Paragraphen unter c)) $\mathfrak{E} = 0$ gleichviel ob man sich der Trennungsfläche von $x < ct$ oder $x > ct$ nähert. In derselben Weise folgt aber auch die Stetigkeit von \mathfrak{H} , \mathfrak{s} und $\dot{\mathfrak{s}}$. Ist nämlich \mathfrak{E} wie in Gleichung (12a) dargestellt durch

$$\mathfrak{E} = \int e^{-int+ikx} \varphi(n) dn, \quad \varphi(n) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{n^2 - (2\pi/\tau)^2},$$

so bestimmt sich das zugehörige \mathfrak{H} und \mathfrak{s} nach der ersten bzw. dritten Grundgleichung zu

$$\mathfrak{H} = \int \frac{k}{n} e^{-int+ikx} \varphi(n) dn, \quad \mathfrak{s} = e \int e^{-int+ikx} \frac{\varphi(n) dn}{-mn^2 - 2h i n + f}.$$

Auf diese Integrale läßt sich die Überlegung unter c) des vorigen Paragraphen direkt übertragen; mit \mathfrak{E} verschwindet daher auch \mathfrak{H} , \mathfrak{s} und $\dot{\mathfrak{s}}$ bei der beiderseitigen Annäherung an die Trennungsebene $x = ct$. Hierdurch sowie durch die Bedingungen (25) ist die Eindeutigkeit unseres Problems gesichert und gezeigt, daß unsere Lösung die einzig mögliche ist.

Bezüglich der Gültigkeitsgrenzen der Dispersionstheorie wollen wir eine Einschränkung, welche allen Dispersionsrechnungen stillschweigend zugrunde liegt, ausdrücklich hervorheben: Es müssen sehr viele Teilchen auf die Erstreckung einer Wellenlänge kommen. Nur unter dieser Bedingung können wir nämlich mit einer stetigen Verteilung des Schwingungsvektors \mathfrak{s} rechnen und von der molekularen Unstetigkeit seiner Verteilung absehen. Diese Bedingung ist bekanntlich bis ins ultraviolette Spektrum hinein erfüllt, ist es aber nicht mehr für sehr hohe Frequenzen (Röntgenstrahlen). Insofern wir also bei unserer analytischen Methode auch solche Frequenzen in Betracht zu ziehen haben, liegt eine Extrapolation der Dispersionsformeln über ihren eigentlichen physikalischen Gültigkeitsbereich vor.

Ich möchte hier noch eine interessante Bemerkung einfügen, die ich einem Briefe von Hrn. T. Levi-Civita verdanke. Er machte mich darauf aufmerksam, daß sich die Fortpflanzung der Wellenfront mit der Vakuumgeschwindigkeit c direkt aus den Grundgleichungen (21) beweisen läßt, auf Grund der sogenannten „Kompatibilitätsbedingungen“.¹⁾

Es seien

$$(26) \quad e = \left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \right], \quad h = \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \right],$$

1) Näheres hierüber z. B. in Encykl. d. Math. Wiss. 4. Art. 19 von G. Zemplén.

die Sprünge in $\partial \mathfrak{E} / \partial x$, $\partial \mathfrak{H} / \partial x$ beim Überschreiten der Unstetigkeitsfläche (Wellenfront); da \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \dot{s} als kontinuierlich nachgewiesen wurden, ist:

$$(26a) \quad [\mathfrak{E}] = [\mathfrak{H}] = [\dot{s}] = 0.$$

Bezeichnet v die Geschwindigkeit, mit der sich die Unstetigkeitsfläche in Richtung ihrer Normalen verschiebt, so wird nach den „identischen Kompatibilitätsbedingungen“

$$(26b) \quad [\dot{\mathfrak{E}}] = -v e, \quad [\dot{\mathfrak{H}}] = -v h.$$

Dies ergibt sich sofort, wenn man die Gleichung

$$\mathfrak{E}(t + \Delta t, x + \Delta x) - \mathfrak{E}(t, x) = \dot{\mathfrak{E}} \Delta t + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \Delta x$$

für die vordere und hintere Seite der Unstetigkeitsfläche bildet, beide voneinander subtrahiert und $\Delta x = v \Delta t$ wählt. Verfährt man in entsprechender Weise mit den Grundgleichungen (21) und benutzt (26), (26a) und (26b), so ergibt sich:

$$-\frac{v}{c} h = -e, \quad -\frac{v}{c} e = -h,$$

also durch Multiplikation

$$(27) \quad \frac{v^2}{c^2} = 1,$$

d. h. unser Ergebnis: Frontgeschwindigkeit gleich Vakuumgeschwindigkeit.

§ 6. Die Vorläufer.

Die Verhältnisse gleich nach der Ankunft des Signals, d. h. für kleine Werte von $t = t - x/c$ lassen sich folgendermaßen behandeln:

Wir knüpfen an Gleichung (12a) in § 4 an und haben auf dem ursprünglichen Wege u geführt:

$$(28) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \int e^{-i n t + i K x} \frac{d n}{n^2 - (2\pi/\tau)^2}$$

mit der Abkürzung

$$(28a) \quad K = k - \frac{n}{c} = \frac{n}{c} \left\{ \sqrt{1 + \frac{a^2}{n_0^2 - n^2}} - 1 \right\}.$$

Hier und im folgenden ist von der Dämpfung der Ionenschwingungen abgesehen, also $\varrho = 0$ gesetzt; mit $\varrho = 0$ wird auch der Absorptionsindex $\kappa = 0$.

Zu dem Integrationswege u fügen wir einen Weg u' in der unteren Halbebene hinzu (Fig. 8); dies ist erlaubt,

weil wegen $t > 0$ der Weg u' ins Unendliche der negativen Halbebene herübergezogen werden darf, ebenso wie früher der Weg b_1 in Fig. 5 oder 6. Die Wege u und u' lassen sich zu einem Umgang U in großem Abstände vom Nullpunkt der n -Ebene zusammenfassen, der weiterhin der Integration in Gleichung (28) zugrunde gelegt werden soll.

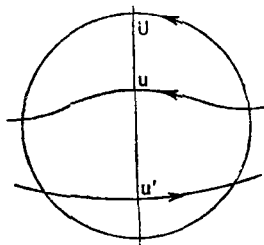


Fig. 8.

Da n auf dem ganzen Wege U sehr groß ist, entwickeln wir die Wurzel in K und behalten nur die niedrigste Potenz von $1/n$ bei. Es ergibt sich

$$Kx = \frac{a^2 x}{2c} \frac{n}{n_0^2 - n^2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{n_0^2 - n^2} + \dots \right) = -\frac{\xi}{n}$$

mit der Abkürzung

$$(29) \quad \xi = \frac{a^2 x}{2c}.$$

Unser Integral (28) lautet jetzt, wenn wir entsprechend im Nenner $n^2 - (2\pi/\tau)^2$ durch n^2 ersetzen:

$$(30) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \int e^{-int - i\frac{\xi}{n}} \frac{dn}{n^2}.$$

Der Exponent von e läßt sich so schreiben:

$$-i\left(nt + \frac{\xi}{n}\right) = -i\sqrt{t\xi} \left(n\sqrt{\frac{t}{\xi}} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\xi}{t}} \right) = -2i\sqrt{t\xi} \cos u,$$

wenn wir die neue Integrationsvariable u definieren durch

$$(31) \quad e^{iu} = n\sqrt{\frac{t}{\xi}}, \text{ wobei } \frac{dn}{n^2} = i du \sqrt{\frac{t}{\xi}} e^{-iu}.$$

Aus (30) wird daher

$$(32) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{t}{\xi}} \int e^{-2i\sqrt{t\xi} \cos u} e^{-iu} i du.$$

Hier können wir die Variable u einfach von 0 bis 2π wachsen lassen. Nach (31) entspricht dies nämlich einem Umgange um den Nullpunkt der n -Ebene auf einem Kreise vom Radius $|n| = \sqrt{\xi/t}$, d. h. bei hinreichend kleinem t einem Umgange U , wie wir ihn in Fig. 8 vorausgesetzt haben. Das in Gleichung (32) auftretende Integral ist also nichts anderes als eine bekannte Integraldarstellung¹⁾ der Besselschen Funktion

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln p. 169.

erster Ordnung vom Argumente $2\sqrt{t\xi}$ und wir haben

$$(33) \quad f(t, x) = \frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\frac{t}{\xi}} J_1(2\sqrt{t\xi}).$$

Aus dem bekannten Verlauf der Funktion J_1 ergibt sich nun für die Größenverhältnisse unseres Signals gleich nach seinem Eintreffen, d. h. für kleine Werte von t , folgendes: Die anfängliche Amplitude ist äußerst klein gegen 1, d. i. gegen die Amplitude der auffallenden Welle, die anfängliche Schwingungsdauer äußerst klein gegen τ , d. i. gegen die auffallende Schwingungsdauer. Schwingungsdauer und Amplitude wachsen wegen des Vorkommens von \sqrt{t} unter bzw. vor dem Funktionszeichen

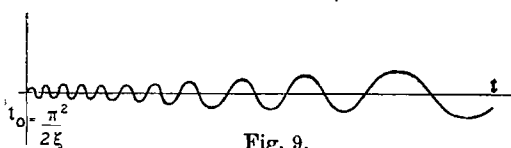


Fig. 9.

J_1 allmählich an, wie in der schematischen Fig. 9 angedeutet, wobei indessen im Auge zu behalten ist, daß

unsere Näherungsgleichung (32) ihrer Ableitung nach nur für kleine Werte von t/ξ Gültigkeit beansprucht. Wie sich die Verhältnisse für größere Werte von t gestalten, und wie schließlich die Vorläufer in die Hauptwellen von der Schwingungsdauer τ des einfallenden Lichtes übergehen, wird Hr. Brillouin in der folgenden Arbeit auseinandersetzen.

Ein Punkt von besonderem Interesse möge noch hervorgehoben werden.

Nach Gleichung (32) ist die Schwingungsdauer der ersten Vorläufer gegeben durch die erste Wurzel der Funktion $J_1(z)$, die ungefähr $z = \pi$ beträgt. Hieraus berechnet sich die anfängliche Schwingungsdauer t_0 mit Rücksicht auf Gleichung (29) zu

$$t_0 = \frac{\pi^2}{2\xi} = \frac{\pi^2 c}{a^2 x}.$$

Es ist dies eine Zeit, die unabhängig ist von der Schwingungsdauer τ des auffallenden Lichtes sowie von der Eigenfrequenz der mitschwingenden Ionen, allein bestimmt durch die durchlaufene Tiefe x und das Dispersionsvermögen des Mittels, d. h. seine Ionenzahl \mathfrak{N} . Von der Unabhängigkeit dieser Schwingungsdauer von der Farbe des auffallenden Lichtes wurde bereits in gewissen Folgerungen der Einleitung Gebrauch gemacht.

(Eingegangen 23. Februar 1914.)