6. *Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld;*

von A. D. Fokker.

§ 1. Gegenstand der Untersuchung.

Die von Eucken[1]) ausgeführten Messungen der rotatorisch spezifischen Wärme des Wasserstoffes bei tiefen Temperaturen haben einige theoretische Untersuchungen veranlaßt, die eine Erklärung suchten dafür, daß die in ein (T, C_r)-Diagramm aufgetragene Kurve in der Nähe des absoluten Nullpunktes horizontal verläuft, d. h. sich an die T-Achse anschmiegt. Einstein und Stern[2]) nahmen die Hypothese einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt zu Hilfe; später hat Ehrenfest[3]) ohne die Hypothese der Nullpunktsenergie, indem er die rotierenden Moleküle adiabatisch aus Resonatoren entstanden dachte, eine theoretische Kurve durch die experimentell bestimmten Punkte zu legen vermocht.

Der direkte Weg, der für die spezifische Wärme der schwingenden Gebilde zu Erfolg führte, ist für die rotierenden Gebilde noch nicht exakt beschritten worden. Man[4]) sagte: Ein fester Körper kann vermöge seiner Elastizität Eigenschwingungen bestimmter Frequenz ausführen. Der Wärmeinhalt werde betrachtet als Energie dieser Schwingung. Die Wärmekapazität wird sich nicht ändern, wenn wir das schwingende Gebilde mit elektrischer Ladung belegen. Dadurch wird es aber zu einem Oszillator, der qua talis bei jeder Temperatur in Energiegleichgewicht stehen muß mit der schwarzen Strahlung, und in diesem Gleichgewicht eine gleich große mittlere Energie bekommt wie ein Planckscher Resonator derselben Frequenz.

1) Eucken, Sitzungsber. d. preuß. Akad. p. 141. 1912.
2) Einstein u. Stern, Ann. d. Phys. **40**. p. 551. 1913.
3) Ehrenfest, Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**. p. 451. 1913.
4) Einstein, Ann. d. Phys. 22. p. 180. 1907.

Wenn man die Plancksche Strahlungsformel als richtigen Ausdruck annimmt für die experimentelle Kenntnis der schwarzen Strahlung, so kennt man also den Energiegehalt des schwingenden Gebildes zu jeder Temperatur, also auch die spezifische Wärme.

Es fragt sich, ob nicht mit gleichem Erfolg so zu verfahren wäre, daß man ein rotierendes Gebilde, z. B. ein Molekül, durch Belegung mit Ladung zu einem emittierenden und absorbierenden rotierenden Dipol mache? Wenn man mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik die mittlere Energie berechnete eines solchen Dipoles im stationären Gleichgewicht mit dem Plancksche Strahlungsfeld, könnte man nicht daraus die richtige spezifische Wärme finden?

Unsere Untersuchung führt zum Resultat, daß auf diese Weise kein Anschluß an die Messungen Euckens zu erreichen ist. Die theoretische Kurve der rotatorisch spezifischen Wärme würde für $T = 0$ eine vertikale, statt horizontale Tangente aufweisen.

§ 2. Die befolgte Methode.

Wir werden eine Menge von elektrischen Dipolen im Strahlungsfeld voraussetzen, drehbar um feste, in ihren Äquatorialebenen gelegenen Achsen, so daß sie *nur einen* Freiheitsgrad der Rotation besitzen. Wir werden das im Strahlungsfelde stationäre Verteilungsgesetz der Winkelgeschwindigkeiten aufsuchen, und daraus die mittlere Rotationsenergie als Funktion des Strahlungsfeldes, also auch der Temperatur, bestimmen.

Zur Aufsuchung dieses Verteilungsgesetzes kann man eine ganz allgemeine Differentialgleichung verwenden, die man überall da gebrauchen kann, wo es sich um Probleme handelt, die, wie unseres, eine Ähnlichkeit mit dem Problem der Brownschen Bewegungen aufweisen.

Es sei q ein Parameter, der den Zustand der betreffenden Gebilde kennzeichnet, z. B. in unserem Falle, der Drehimpuls eines betrachteten Dipoles, oder, bei den Brownschen Bewegungen, die Höhe eines Teilchens in der Flüssigkeit.

Es werde mit $f(q)$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der q abnehmen würde, wenn das Gebilde sich selbst überlassen wird, z. B. in unserem Falle, der Verlust an Drehimpuls pro Zeiteinheit (scheinbare Reibung) wegen des Energie-

verlustes durch Ausstrahlung des Dipoles, oder die Fallgeschwindigkeit eines Teilchens in der Flüssigkeit.

Es sei τ ein sehr kleines Zeitintervall, und es sei R die Änderung von q in diesem Intervall als Folge von unregelmäßigen äußeren Einwirkungen, z. B. ein unregelmäßiger Drehimpuls, der von der Strahlung auf den Dipol übertragen wird, oder die unregelmäßige Wanderung eines Teilchens durch die molekularen Stöße. Die mittlere Größe der R sei $\bar{R}$, der R^2 sei $\overline{R^2}$. Diese Mittelwerte können im allgemeinen von q abhängig sein.

Die Forderung der Stationärität, des Aufrechterhaltens des Verteilungsgesetzes $W(q)\,dq$, das heißt, die Forderung, daß am Anfang und am Ende des Intervalles τ im Bereich $(q, q + dq)$ gleichviel, und zwar $W(q)\,dq$ Dipole sich befinden, liefert, unter Vernachlässigung von kleinen Größen der Ordnung τ^2, die Differentialgleichung

$$W(q)\,f(q)\,\tau - W(q)\,\bar{R} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\{W(q)\,\overline{R^2}\} = 0\,.$$

Es ist dies die Verallgemeinerung einer speziellen von Einstein[1]) aufgestellten und nachher auch von anderen benutzten Formel, die für den Fall gilt, daß $\bar{R} = 0$, und $\overline{R^2}$ unabhängig von q ist. Diese Annahmen aber treffen nicht immer zu, und wenn sie auch erfüllt sind, so findet man bei Einführung jeder anderen Größe x, die als bestimmender Parameter durch eine Beziehung $q = q(x)$ gewählt wird, daß für die unregelmäßigen Anwächse X dieser Größe die Bedingungen $\bar{X} = 0$, und $\overline{X^2}$ unabhängig von x, *nicht* erfüllt sind. Man kann sich leicht überzeugen, daß die aufgeschriebene allgemeine Gleichung ihre Form bewahrt beim Übergang zum neuen Parameter, wenn man beachtet, daß

$$W(q) = \frac{1}{q'}\,W(x), \qquad f(q) = \frac{-dq}{dt} = q'\,\frac{-dx}{dt} = q'\,\varphi(x),$$
$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{q'}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\bar{R} = q'\,\bar{X} + \tfrac{1}{2}q''\,\overline{X^2}, \qquad \overline{R^2} = q'^2\,\overline{X^2}$$

ist. Man findet als neue Gleichung:

$$W(x)\,\varphi(x)\,\tau - W(x)\,\bar{X} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{W(x)\,\overline{X^2}\} = 0\,.$$

1) Einstein, Ann. d. Phys. 19. p. 371. 1906.

Die Gleichung besagt, daß es keinen Überschuß gibt von Dipolen, die in der einen oder der anderen Richtung den betreffenden Wert von q überschreiten.

Eine ausführliche Darstellung der Ableitung dieser Gleichung wird demnächst in den „Archives Neerlandaises" veröffentlicht werden.[1])

§ 3. Erläuterung am Beispiel der Resonatoren.

Die Rechnung gestaltet sich am bequemsten, wenn wir die Energie u als bestimmenden Parameter des Zustandes der Resonatoren wählen. Wenn φ das zeitlich veränderliche elektrische Moment des Resonators, und in dem zu betrachtenden Zeitintervall τ f die Amplitude darstellt, so ist

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2} K \varphi^2 + \tfrac{1}{2} L \dot{\varphi}^2 \\ &= \tfrac{1}{2} L \{ n_0^2 \varphi^2 + \dot{\varphi}^2 \} \\ u &= \tfrac{1}{2} L n_0^2 f^2 . \end{aligned}$$

Mit bekannten Formeln aus der Elektrodynamik berechnet man leicht, daß ein mit dieser Amplitude schwingender Resonator in den Raum pro Sekunde die Energie

$$\frac{n_0^4 f^2}{12 \pi c^3} = \frac{n_0^2 u}{6 \pi L c^3}$$

ausstrahlt. Also wird in die Differentialgleichung für die Funktion $f(q)$ zu schreiben sein:

$$f(u) = \frac{n_0^2 u}{6 \pi L c^3} .$$

Jetzt fragt sich, wie groß die mittlere Energie ist, die der Resonator in der Zeit τ aus dem Strahlungsfelde aufnimmt. Hr. Planck hat in der zweiten Ausgabe seiner Vorlesungen über die Strahlungstheorie den regelmäßigen Anstieg der Energie berechnet, wenn der Resonator nichts ausstrahlt.[2]) Es ist eben dies, was wir brauchen. Wir entlehnen ihm das Resultat:

$$\bar{U} = \frac{4 \pi^2}{3 c L} K_{n_0} \tau .$$

Hier bedeutet K_n die Strahlungsformel ausgedrückt in die Frequenzen n (in der Zeit 2π), so daß $2 K_n d n = 2 K_\nu d \nu$, wo $2 K_\nu$ die gewöhnliche Plancksche Strahlungsintensität vorstellt.

1) Sur les mouvements browniens dans le champ du rayonnement noir.

2) Planck, l. c. p. 155. Formel (249)

Für das mittlere Quadrat der vom Strahlungsfeld geleisteten Arbeitsstücke berechnete ich

$$\overline{U^2} = \frac{8\pi^2}{3cL} K_{n_0} u \tau .$$

Also hat man zur Bestimmung der Verteilungsfunktion $W(u)$ die Gleichung:

$$W \frac{n^2 u \tau}{6\pi L c^3} - W \frac{4\pi^2}{3cL} K_n \tau + \frac{1}{2}\left[\frac{8\pi^2 K_n \tau}{3cL} W + \frac{8\pi^2 K_n u \tau}{3cL} \frac{\partial W}{\partial u}\right] = 0 .$$

Setzt man

$$\frac{n^2}{8\pi^3 c^2 K_n} = h ,$$

so wird die Gleichung:

$$-h = \frac{\partial}{\partial u} \log W ,$$

also

$$W = C e^{-hu} .$$

Für die mittlere Energie der Resonatoren ergibt sich:

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty u e^{-hu} du}{\int_0^\infty e^{-hu} du} = \frac{1}{h} .$$

Unsere Methode liefert also die altbekannte Formel

$$\overline{E} = \frac{8\pi^3 c^2}{n^2} K_n .$$

§ 4. Die rotierenden Dipole.

a) *Die Berechnung der unregelmäßigen Änderungen des Drehimpulses.* Wir wollen das Trägheitsmoment eines Dipols L nennen, und sein elektrisches Moment mit m bezeichnen. Als den Zustand bestimmenden Parameter wählen wir den Drehimpuls $q = L\omega$, worin ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Zunächst wollen wir uns eine klare Vorstellung machen über den mittleren Drehimpuls, der während der Zeit τ von der Strahlung auf den Dipol übertragen wird, und über das mittlere Quadrat desselben.

Wir wollen die Z-Achse in die Rotationsachse legen, so daß der Dipol sich in der XY-Ebene drehen kann. Die X- und Y-Komponenten der elektrischen Feldstärke denken wir in eine Fouriersche Reihe von periodischen Komponenten zerlegt, so daß

$$E_x = \sum A_i \cos(n_i t + \psi_i), \quad E_y = \sum B_i \cos(n_i t + \psi_i).$$

Die Beziehung zwischen den Amplituden A, resp. B, und den Daten des Strahlungsfeldes wird dadurch gegeben, daß man ansetzt:

$$\sum_{dn} A_i^2 = \sum_{dn} B_i^2 = \tfrac{2}{3} u_n \, dn,$$

wobei $u_n \, dn$ die in dem Bereich $(n, n + dn)$ liegende Strahlungsdichte vorstellt.

Im Intervall von 0 bis τ setzen wir die mittlere Drehgeschwindigkeit gleich ω, so daß der erreichte Azimut dargestellt wird durch

$$\varphi = \omega t + \sigma,$$

worin σ eine abwechselnd positive oder negative immer sehr kleine Abweichung bedeutet von der Lage, die der Dipol erreicht haben würde, wenn er wirklich mit der Geschwindigkeit ω gleichförmig rotierte.

Es gilt jetzt die Bewegungsgleichung

$$L \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - E_x m \sin \varphi + E_y m \cos \varphi,$$

d. h. aber

$$L \frac{d^2 \sigma}{d t^2} = - m \Big[\sum A_i \cos(n_i t + \psi_i) \sin(\omega t + \sigma) - \sum B_j \cos(n_j t + \psi_j) \cos(\omega t + \sigma) \Big].$$

Es erspart uns viele unnütze Schreiberei, wenn wir die Einwirkung der Komponenten E_x und E_y des Strahlungsfeldes gesondert betrachten, und nachher addieren. Da kann man zuerst schreiben:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 \sigma}{d t^2} &= - m \sum A_i \cos(n_i t + \psi_i) \sin \omega t \\ &\qquad - m \sum A_i \cos(n_i t + \psi_i) \cos \omega t \cdot \sigma \\ &= \frac{m}{2} \Big[\sum A_i \sin\{(n_i - \omega) t + \psi_i\} - \sum A_i \sin\{(n_i + \omega) t + \psi_i\} \\ &\quad - \sum A_i \sigma \cos\{(n_i + \omega) t + \psi_i\} - \sum A_i \sigma \cos\{(n_i - \omega) t + \psi_i\} \Big]. \end{aligned}$$

Als erste Annäherung wollen wir die Glieder mit σ fortlassen, und σ durch zweimalige Integration ausrechnen, um diesen Wert nachher wieder einsetzen zu können bei der Berechnung des Impulses während τ. Es wird, unter Festsetzung daß zur Zeit $t = 0$ auch $\sigma = 0$ sei, d. h. daß bei $t = 0$ der Dipol in der X-Achse steht,

$$\sigma = -\tfrac{1}{2}\sum \frac{A_i\, m}{L}\, \frac{\sin\{(n_i - \omega)\, t + \psi_i\} - \sin\psi_i}{(n_i - \omega)^2}.$$

Daß wir hier ein Glied mit $(n_i + \omega)^2$ im Nenner vernachlässigen, findet seinen Grund darin, daß, wie wir später sehen werden, nur die Einwirkung der Strahlung in Betracht kommt, für die n_i sehr nahe an ω liegt. Also ist $(n_i + \omega) \gg (n_i - \omega)$.

Die Änderung des Drehimpuls während τ findet man jetzt

$$R = \frac{m}{2}\sum A_i\, \frac{-2\sin\frac{n_i - \omega}{2}\tau}{n_i - \omega}\, \sin\left\{\frac{n_i - \omega}{2}\tau + \psi_i\right\}$$

$$+ \frac{m^2}{2}\int_0^\tau \sum A_i\, A_j\, \frac{\cos\{(n_i + \omega)\, t + \psi_i\}[\sin\{(n_j - \omega)\, t + \psi_j\} - \sin\psi_j]}{2\, L\, (n_j - \omega)^2}$$

$$+ \frac{m^2}{2}\int_0^\tau \sum A_i\, A_j\, \frac{\cos\{(n_i - \omega)\, t + \psi_i\}[\sin\{(n_j - \omega)\, t + \psi_j\} - \sin\psi_j]}{2\, L\, (n_j - \omega)^2}.$$

Bilden wir den Mittelwert, so ergeben die erste Summe und das erste Integral Null. In der Summe unter dem letzten Integralzeichen liefern nur die Glieder einen von Null verschiedenen Mittelwert, für die $i = j$ ist. Also finden wir:

$$\bar{R} = +\frac{m^2}{4\, L}\int_0^\tau \sum A_i^2\, \frac{\cos\{(n_i - \omega)\, t + \psi_i\}[\sin\{(n_i - \omega)\, t + \psi_i\} - \sin\psi_i]}{(n_i - \omega)^2}$$

$$= \frac{m^2}{4\, L}\sum A_i^2\, \frac{\frac{1}{2}\sin^2\{(n_i - \omega)\,\tau + \psi_i\} - \sin\{(n_i - \omega)\,\tau + \psi_i\}\sin\psi_i + \frac{1}{2}\sin^2\psi_i}{(n_i - \omega)^3}.$$

Durch Umrechnung findet man für den Zähler:

$$\sin^2\frac{n_i - \omega}{2}\tau\cos^2\left\{\frac{n_i - \omega}{2}\tau + \psi_i\right\} + \tfrac{1}{4}\sin\{(n_i - \omega)\tau + 2\psi_i\}\sin(n_i - \omega)\tau$$

$$+ \sin^2\frac{n_i - \omega}{2}\tau\,\sin^2\psi_i - \tfrac{1}{4}\sin(n_i - \omega)\,\tau\,\sin 2\psi_i.$$

Durch das unregelmäßige Auftreten aller Werte der Phasenkonstanten ψ_i kann man schreiben:

$$\bar{R} = \frac{m^2}{4L} \sum A_i^2 \frac{\sin^2 \frac{n_i - \omega}{2} \tau}{(n_i - \omega)^3}$$

$$= \frac{m^2}{4L} \int_0^\infty \tfrac{2}{3} u_n \frac{\sin^2 \frac{n - \omega}{2} \tau}{(n - \omega)^3} \, dn .$$

Die Funktion unter dem Integralzeichen hat ein so scharfes Maximum bei $n = \omega$, daß wir nur Werte von n in Betracht zu ziehen brauchen, die nahe an ω liegen, was wir vorher schon erwähnten. Für nicht zu große Werte von $(n - \omega)$ können wir jetzt schreiben

$$u_n = u_\omega + \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} (n - \omega) + \ldots$$

und bemerken, daß das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{n - \omega}{2}}{(n - \omega)^3} \, dn$$

wohl gleich Null zu setzen ist. Wir behalten also

$$\bar{R} = \frac{m^2}{6L} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{n - \omega}{2} \tau}{(n - \omega)^2} \, dn$$

$$= \frac{m^2}{12L} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} \pi \tau .$$

Um den quadratischen Mittelwert zu ermitteln, brauchen wir nur die erste Summe von R zu berücksichtigen. Es wird

$$\overline{R^2} = m^2 \sum A_i^2 \frac{\sin^2 \frac{n_i - \omega}{2} \tau}{(n_i - \omega)^2} \sin^2 \left\{ \frac{n_i - \omega}{2} \tau + \psi_i \right\}$$

$$= \frac{m^2}{3} \int u_n \, dn \frac{\sin^2 \frac{n - \omega}{2} \tau}{(n - \omega)^2} .$$

Hier ist das Maximum für $n = \omega$ wieder so scharf, daß wir nur u_n zu berücksichtigen haben in der unmittelbaren Nachbarschaft von ω. Also

$$\overline{\bar{R}^2} = \frac{m^2}{3} u_\omega \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{n-\omega}{2} \tau}{(n-\omega)^2} d n$$

$$= \frac{m^2 \pi \tau}{6} u_\omega .$$

Bisher ist nur die Einwirkung der Komponente E_x berechnet. Die Komponente E_y wird ebensoviel beitragen, also wird für die unregelmäßigen Änderungen des Drehimpulses

$$\bar{R} = \frac{m^2 \pi \tau}{6 L} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega},$$

$$\overline{\bar{R}^2} = \frac{m^2 \pi \tau}{3} u_\omega .$$

b) *Die scheinbare Reibung.* Der mit der Geschwindigkeit ω rotierende Dipol veranlaßt bekannterweise eine Strahlung, die gegeben ist durch:

$$d_x = \frac{\omega^2 m}{4 \pi c^2 r} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^2} \cos \omega t - \frac{\omega^2 m}{4 \pi c^2 r} \cdot \frac{x y}{r^2} \sin \omega t,$$

$$d_y = A \cdot \frac{-x y}{r^2} \cos \omega t + A \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^2} \sin \omega t,$$

$$d_z = A \cdot \frac{-x z}{r^2} \cos \omega t + A \cdot \frac{y z}{r^2} \sin \omega t,$$

$$h_x = -A \cdot \frac{z}{r} \sin \omega t,$$

$$h_y = A \cdot \frac{z}{r} \cos \omega t,$$

$$h_z = -A \cdot \frac{y}{r} \cos \omega t + A \cdot \frac{x}{r} \sin \omega t.$$

Nimmt man den Mittelwert des Poyntingschen Energiestromes und integriert diesen über eine Kugelfläche, so sieht man, daß durch Ausstrahlung der Dipol pro Zeiteinheit einen Energieverlust hat von $\omega^4 m^2 / 6 \pi c^3$. D. h. die scheinbare Reibung beträgt:

$$f(q) = \frac{m^2 \omega^3}{6 \pi c^3} .$$

c) *Das stationäre Verteilungsgesetz.* Wir werden in die Differentialgleichung die gefundenen Werte einsetzen. Wenn wir dabei statt q die Winkelgeschwindigkeit ω als Variable nehmen, so entsteht:

$$W \frac{m^2 \omega^3}{6\pi c^3} \tau - W \frac{m^2 \pi \tau}{6 L} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega}$$
$$+ \frac{1}{2L} \left[W \frac{m^2 \pi \tau}{3} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{m^2 \pi \tau}{3} u_\omega \frac{\partial W}{\partial \omega} \right] = 0 .$$

Setzt man jetzt die Plancksche Formel ein:

$$u_\omega = \frac{h \omega^3}{2\pi^3 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{2\pi k T}} - 1} ,$$

so findet man

$$\frac{\partial \log W}{\partial \omega} = - \frac{2\pi L}{h} \left(e^{\frac{h\omega}{2\pi k T}} - 1 \right) ,$$

$$\log W = C - \frac{4\pi^2 L k T}{h^2} e^{\frac{h\omega}{2\pi k T}} + \frac{2\pi L}{h} \omega ,$$

$$W = B e^{- \frac{4\pi^2 L k T}{h^2} e^{\frac{h\omega}{2\pi k T}} + \frac{2\pi L}{h} \omega} .$$

d) *Die mittlere kinetische Energie.* Um die mittlere kinetische Energie zu berechnen, hat man W mit $\frac{1}{2} L \omega^2$ zu multiplizieren und nach ω zu integrieren, nachher zu dividieren durch das Integral von W nach ω. Die Formel wird sehr unübersichtlich. Es ist zweckmäßig, den Exponenten von e zu schreiben als Funktion von $x = \omega / T$,

$$- \frac{4\pi^2 L k T}{h^2} e^{\frac{h\omega}{2\pi k T}} + \frac{2\pi L}{h} \omega = - T \varphi \left(\frac{\omega}{T} \right)$$

und auch diese Größe $x = \omega / T$ als Integrationsveränderliche zu benutzen. Damit wird die mittlere kinetische Energie:

$$\overline{\mathsf{E}} = \tfrac{1}{2} L T^2 \frac{\int_0^\infty x^2 e^{-T\varphi(x)} \, dx}{\int_0^\infty e^{-T\varphi(x)} \, dx} .$$

Die rotatorisch spezifische Wärme ist

$$C_r = N \frac{d \overline{\mathsf{E}}}{d T}$$

zu setzen. Wenn wir die Neigung der im (C_r, T)-Diagramm aufgetragenen Kurve suchen, so sehen wir, daß $d C_r / d T$ ein Glied

$$L \frac{\int_0^\infty x^2 e^{-T\varphi(x)} dx}{\int e^{-T\varphi(x)} dx}$$

hat, das für $T = 0$ unendlich wird. Damit ist gezeigt, was in § 1 behauptet wurde, daß die Tangente vertikal verläuft beim Nullpunkt, statt horizontal.

e) *Die Ableitung der Rayleigh-Jeansschen Strahlungsformel.* Man wird sich kaum wundern, wenn für die Strahlung, welche im stationären Gleichgewicht steht mit Dipolen, die nach einem Maxwellschen Verteilungsgesetz rotieren, so wie es die klassische Mechanik ergeben würde, wieder die *Rayleigh-Jeanssche Strahlungsformel* herauskommen wird. In der Tat ist dies der Fall.

Hat W die Maxwellsche Form $W = C e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}}$, so ist

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = -\frac{L \omega}{k T} W,$$

und unsere Gleichung liefert unmittelbar:

$$u_\omega = \frac{k T \omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

Dies ist die genannte Formel.

§ 5. Das Ergebnis.

Als das bemerkenswerte an unserem Resultat ist hervorzuheben, daß dieselbe Art von Betrachtungen, die bei der Ableitung der spezifischen Wärme für die festen, schwingungsfähigen Körper zur Übereinstimmung mit der Erfahrung führten, jetzt versagen hier, wo es sich um die spezifische Wärme der rotationsfähigen Wasserstoffmoleküle handelt.

Man wird kaum einen Grund finden können, warum dieselbe Methode dort erfolgreich war, und hier nicht nützen kann.

Am Schluß möchte ich Hrn. Prof. Einstein meinen Dank für die unterstützende Anregung bei dieser Arbeit aussprechen.

Zürich, 11. Dezember 1913.

(Eingegangen 23. Dezember 1913.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.